

جزوه درس استاتیک  
مخصوص مهندسان صنایع

مهندسی صنایع در محیط دانشگاه


[www.ieuni.ir](http://www.ieuni.ir)

## «فصل اول»

اصول ایستایی

الف - مکانیک : علمی را گویند که اجسام را که در وضعیت‌های سکون و یا حرکت تحت تأثیر نیروهای وارده بررسی و تحلیل نماید:

علم مکانیک به سه قسمت زیر تقسیم می شود:

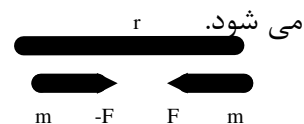
- ۱- مکانیک اجسام صلب (جامد)  ایستائی (استاتیک): اجسام ساکن مورد بررسی قرار می گیرد.
- ۲- مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر
- ۳- مکانیک شماره ها ( سیالات )

ب - مفاهیم پایه:

مفاهیم بنیادی که در مکانیک به کار برده می شوند عبارتند از :

- ۱- فضا: مکان هندسی نقاطی است که در آن میدان سه بعدی برای نقاط به کار برده می شود.
- ۲- زمان: علاوه بر مکان یک جسم، زمان وقوع یک جسم نیز مورد نظر است که واحد آن ثانیه است.
- ۳- شبکه مرجع: موقعیت نقاط در فضا نسبت به یک دستگاه هندسی مرجع و با فواصل و زوایا مشخص می شود.

۴- نیرو: تأثیر یک جسم روی جسم دیگر را نیرو گویند. نیرو با نقطه اثر بزرگی و جهت اش مشخص



۵- ماده: ماده عبارت است از جسمی که فضاگیر می باشد . یک جسم ماده ای توسط یک سطح بسته محصور شده است.

۶- مانده (لختی): خاصیتی از ماده است که تمایل دارد در برابر تغییر در حرکت ایجاد مقاومت نماید.

۷- جرم: معیاری کمی از ماند ( لختی ) است. جرم همچنین خاصیتی از هر جسم است که همواره با جاذبه متقابل آن جسم نسبت به اجسام دیگر همواره است.

۸- جسم صلب: جسمی است که بین ذراتش هیچ جابجائی نسبی موجود نباشد.

### ج) کمیت های عددی و برداری :

#### کمیت‌هایی که در استاتیک بکار می آید بر دو نوعند.

۱- کمیت های عددی                      ۲- کمیت های برداری

۱- کمیت های عددی آنهایی هستند که فقط مقدار دارند مانند: زمان، جرم و..

۲- کمیت های برداری علاوه بر مقدار دارای امتداد نیز می باشند نیرو

#### قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها:

همانطوری که گفته شده در صورتی که به یک ذره دو نیرو تأثیر کند با توجه به اینکه نیروها بردار می باشند می بایستی از قانون جمع متوازی الاضلاع برداری یک نیرو به نام برآیند قرارداد که از رسم قطعه متوازی الاضلاع بدست می آید که در بخشهای بعد به تفصیل ذکر خواهد شد.

#### اصل قابلیت انتقال:

اگر نیروی وارد بر نقطه معلومی از یک جسم صلب را بوسیله نیروی دیگری که یا اولی از لحاظ مقدار و جهت برابر ولی نقطه اثر آن متناوب است جایگزین کنیم وضعیت تعادل یا حرکت جسم تغییر نمی کند.

#### نحوه نمایش یک کمیت برداری:

یک کمیت برداری  $v$  توسط یک پاره خط که دارای راستای بردار بوده و بوسیله یک علامت پیکان جهت آن مشخص می شود نشان داده می شود.



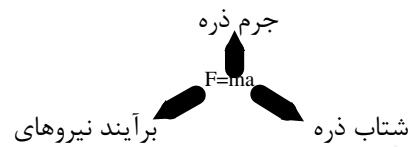
## د- قوانین نیوتن :

## ۱- قانون اول:

هرگاه برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر شود اگر در حال سکون باشد ساکن می ماند. و اگر در حال حرکت باشد به حرکت خود ادامه می دهد.

## قانون دوم:

شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهائی است که به آن وارد می گردند.



## قانون سوم:

نیروهای عمل و عکس العمل میان دو جسم از نظر مقدار برابرند و در خلاف جهت یکدیگر عمل می نمایند و در روی یک راستا واقع می باشند .  
طبق قانون گرانش نیوتن که می گویند دو ذره به جرمهای  $m$  و  $M$  یکدیگر را با نیروهای مساوی و مختلف جهت  $(F, -F)$  جذب می کنند بزرگی این نیروه  $(F)$  از فرمول زیر بدست می آید که آن  $r$  فاصله بین دو ذره و  $G$  ثابت عمومی؟؟؟؟ ثابت گرانش است.

$$F = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$$

نتیجتاً مقدار  $(W)$  وزن یک ذره به جرم  $m$  را می شود به صورت زیر بیان کرد.

$$w = m \cdot g \quad g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

## سیستمهای یکاها:

سیستمهای بین المللی یکاها (یکاهای SI)

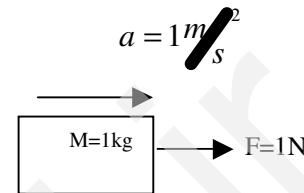
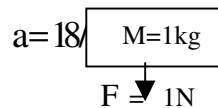
در طی سالها اخیر تقریباً کلیه کشورهای جهان سیستم بین المللی آحاد یا به زبان فرانسه (Systeme International) که مخفف آن SI می باشد را برای تمامی کارهای مهندسی و علوم انتخاب

کردند. در این سیستم یکالهای اصلی، یکالهای طول، جرم و زمان هستند که آنها را به ترتیب متر (M) و کیلوگرم (Kg) و ثانیه (s) می نامند.

یکای نیرو در این سیستم یک یکای فرعی است که به آن نیوتن (N) می گویند و بنا به

تعریف یک نیوتن نیرویی است که به یک جرم یک کیلوگرمی شتابی برابر با  $1 \frac{m}{s^2}$  بدهد.

$$1N = (1kg)(1 \frac{m}{s^2}) = 1kg \cdot \frac{m}{s^2}$$



### پیشوند واحد

مضرب (مقدار)	پیشوند	نماد
$1000000000 = 10^9$	گیگا	G
$1000000 = 10^6$	مگا	M
$1000 = 10^3$	کیلو	K
$0.001 = 10^{-3}$	میلی	m
$0.000001 = 10^{-6}$	میکرو	$\mu$
$0.000000001 = 10^{-9}$	نانو	n

$$1km = 1000m$$

$$1g = 0.001kg$$

$$1mm = 0.001m$$

$$1kN = 1000N$$

$$1Mg = 1000kg$$

$$3.82Km = 3820m \quad , 47.2mm = 0.0472m$$

$$3.82kN = 3082 \times 10^3 mm$$

$$47.2mm = 47.2 \times 10^{-3} mm$$

حالا جمع بیش از سه بردار را در نظر می گیریم.

$$P+Q+S=(P+Q)+S=P+(Q+S) \quad \text{شرکت پذیری}$$

با توجه به جمع بردارهای صفحه قبل نتیجه می گیریم:

۱- جمع بردارها دارای خاصیت جابه جایی است.

۲- جمع بردارها دارای خاصیت شرکت پذیری است.

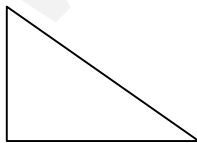
ضرب اسکالر در یک بردار

$$P + P = 2P \Rightarrow P_1 + P_2 + \dots + P_n = np$$

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n$$

برآیند چند نیروی همرس .

تجزیه یک نیرو به مولفه های آن.



$$\cos\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{AC}$$

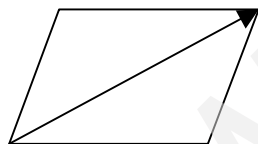
$$P_x = P \cos \theta, P_y = P \sin \theta$$

در امتداد محور xها و yها مثبت دو بردار واحد اختیار می کنیم به این بردارها بردار یکه می گویند و آنها را به ترتیب به روی محورهای x و y با i و j نشان می دهند. با توجه به ضرب یک اسکالر در بردار خواهیم داشت مؤلفه های قائم  $p_x$  و  $p_y$  یک نیروی p را می شود از طریق ضرب بردارهای نوزدر اسکالرها مناسب بدست آورد.

$$P_x = p_{xi}, P_y = p_{yj}, P = p_{xi} + p_{yj}$$

$$p_x = p \cos \theta, p_y = p \sin \theta$$

### قانون متوازی الاضلاع :



$$\begin{aligned} \vec{P} &= p_{xi} + p_{yi} \\ \vec{Q} &= q_{xi} + q_{jk} \end{aligned} \Rightarrow \vec{P} + \vec{Q} = (p_{xi} + p_{yi}) + (q_{xi} + q_{jk})$$

$$\vec{R} = (P_x + Q_x)i + (p_y + Q_y)j$$

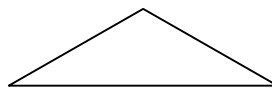
نتیجه می گیریم که مؤلفه های اسکالر در  $R_x$  و  $R_y$  برآیند (R) چند نیروی وارد بر یک

ذره از جمع جبری مؤلفه های اسکالر متناظر آن نیروها بدست می آید.

یا با استفاده از حل مثلثاتی خواهیم داشت:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQCOS\theta$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQCOS\theta$$



طبق قانون سینوسها

$$\frac{R}{\sin r} = \frac{p}{\sin a} = \frac{Q}{\sin \beta}$$

مثال ۱:

مطلوبست برآیند دو نیروی 30N و 40N وارد بر شکل زیر را با استفاده از

الف) قانون متوازی الاضلع      ب) جمع برداری

$$R^2 = 30^2 + 40^2 + 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 110^\circ \Rightarrow$$

$$R \cong 41N$$

$$\theta + \gamma = 180 - 70^\circ = 110^\circ \Rightarrow \beta + a + 40 = 70$$

$$\theta + \gamma + 40 = 70^\circ \Rightarrow \beta + 40 + a = 70$$

$$\frac{R}{S} : n70^\circ = \frac{30}{\sin \beta} \begin{cases} \beta + 40 + a = 70 \\ \beta + a + 40 + 70 = 180 \end{cases}$$

$$\vec{P} = -30 \cos 40^\circ i + 30 \sin 40^\circ j = -22.98i + 19.28j$$

$$\vec{Q} = -40 \cos 70^\circ i - 40 \sin 70^\circ j = -13.68i - 37.59j$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (-22.98 - 13.68)i + (19.28 - 37.59)j$$

$$\vec{R} = -36.66i - 18.31j, R = \sqrt{36.66^2 + 18.31^2} \cong 41N$$

مثال ۲:

دکل AB توسط دو نیروی منظور شده در نقطه A تحت فشار می باشد تعیین برآیند و جهت آن

ناشی از این دو نیرو و در نقطه A را:

$$R_x = \sum F_x = 45 \cos 30^\circ i - 20 \cos 12^\circ i = 38.97i - 19.56i = 19.41i$$

$$p_y = \sum F_y = -45 \sin 30^\circ i - 20 \sin 12^\circ i = -22.5j - 4.16j = -26.66j$$

$$R = \sqrt{19.4^2 + 26.66^2} = 32.97$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{19.4}{28.66}\right) = 36.04^\circ$$



روش دوم:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PCOS\theta = 20^2 + 45^2 + 2 \times 20 \times 45 \times COS138 = 32.97$$

تعدادل یک ذره:

طبق قانون اول نیوتن در حالتی که تأثیر نیروها صفر است می گویند ذره در حال تعادل

است پس می توان گفت: وقتی برآیند کلیه نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد ذره در حال تعادل است.

$$R = \sum F = 0 \Rightarrow R = \sum (F_x i + F_y j) = 0 \text{ یا } (\sum F_x) i + (\sum F_y) j = 0$$

$$1) \sum F_x = 0 \Rightarrow -300 + 400 \cos 60^\circ + 200 \sin 30^\circ = -300 + 200 + 100 = 0$$

مثال :

در شکل روبرو کنش در کابل‌های AB و AC را بدست آورید.

$$a = \tan^{-1}\left(\frac{690}{280}\right) = 73.74^\circ$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (TAB \sin 73.74) - 960 + 640 \sin 37^\circ = 0 \Rightarrow 0.96TAB - 960 + 385.16 = 0 \Rightarrow$$

$$TAB = \frac{574.84}{0.96} = 598.79N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow TAC + 598.79 \cos 73.74 - 640 \cos 37 = 0 \Rightarrow TAC = 343.47N$$

نیروها در فضا :

$$F_y = F \cos \theta_y \text{ مولفه عمودی}$$

$$F_h = F \sin \theta_y \text{ مولفه افقی}$$

$$\theta_y = \text{زاویه نیروی } F \text{ با محور } Y$$

$$\phi = \text{زاویه صفحه قائم } ABC \text{ با صفحه } xy$$

$$F_x = F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi$$

$$F_z = F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi$$

طبق قانون فیثاغورث :

$$F^2 = (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F^2_y + F^2_h$$

$$F^2_h = (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F^2_x + F^2_z$$

$$F = \sqrt{F^2_x + F^2_y + F^2_z}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \quad (1)$$

$$F = \sqrt{F^2_x + F^2_y + F^2_z}$$

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

نیروی  $F$  را می توان با تعریف بردار یکه های  $i$  و  $j$  و  $k$  و

که به ترتیب در امتداد محورهای  $x$  و  $y$  قرار دارند

به صورت زیر بیان کرد.

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (3)$$

$$(1,2) \Rightarrow F = F(\cos\theta_x i + \cos\theta_y j + \cos\theta_z k) \quad (4)$$

نتیجتاً می توان نیروی F را به صورت ضرب اسکالر F و بردار

$$\lambda = \cos\theta_x i + \cos\theta_y j + \cos\theta_z k \quad (5)$$

بیان کرد که  $\lambda$  مولفه یک بردار F گویند

$$\lambda_x = \cos\theta_x, \quad \lambda_y = \cos\theta_y, \quad \lambda_z = \cos\theta_z \quad (6)$$

$$\lambda^2 x + \lambda^2 y + \lambda^2 z = \lambda \quad (7)$$

مجموع مربعات مولفه های یک بردار برابر با مربع بزرگی آن است.

$$(6), (7) \Rightarrow \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

$$\overset{P}{F} = F \cdot \lambda$$

$$(2) \Rightarrow F = \frac{F_x}{\cos\theta_x} = \frac{F_y}{\cos\theta_y} = \frac{F_z}{\cos\theta_z}$$

پیدا کردن بردار واحد امتداد که از دو نقطه می گذرد:



$$\overset{P}{r}_{B/B} = \overset{P}{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\overset{P}{AB} = (x_B - x_A)\overset{P}{i} + (y_B - y_A)\overset{P}{j} + (z_B - z_A)\overset{P}{k}$$

$$\lambda_F = \frac{\overset{P}{F}}{|F|}$$

مثال ۴:

دکل مخابراتی نشان داده در شکل زیر به جرم

120kg بوسیله سه کابل به زمین متصل شده است مطلوبست

محاسبه نیروهای کششی در کابل های مذکور را.



دیاگرام آزاد جسم

$$W = m \cdot g = 120 \times 10 = 1200N$$

$$AD = (XD - XA)i^p + (YD - YA)j^p + (ZD - ZA)k^p$$

$$AD = 3i^p + 6j^p + 2k^p$$

$$|AD| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$$

$$\lambda_{AD}^p = \frac{AD}{|AD|} = \frac{3}{7}i^p + \frac{6}{7}j^p + \frac{2}{7}k^p$$

$$BD = 4j^p - 2k^p, |BD| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{40}, \lambda_{BD}^p = \frac{BD}{|BD|} = \frac{6}{\sqrt{40}}j^p - \frac{2}{40}k^p$$

$$CD = -3i^p + 6j^p + 2k^p, |CD| = 7, \lambda_{CD}^p = -\frac{3}{7}i^p + \frac{6}{7}j^p + \frac{2}{7}k^p$$

$$FAD = F_{AD} \cdot \lambda_{AD}^p = F_{AD} \left( \frac{3}{7}i^p + \frac{6}{7}j^p + \frac{2}{7}k^p \right)$$

$$FCD = F_{CD} \cdot \lambda_{CD}^p = F_{CD} \left( -\frac{3}{7}i^p + \frac{6}{7}j^p + \frac{2}{7}k^p \right)$$

$$FBD = F_{BD} \cdot \lambda_{BD}^p = F_{BD} \left( \frac{6}{\sqrt{40}}i^p - \frac{2}{\sqrt{40}}k^p \right)$$

$$\sum F = 0 \rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

$$(1) \frac{3}{7}FAD - \frac{3}{7}FCD = 0 \quad (1) \Rightarrow FAD = FCD$$

$$(2) \frac{6}{7}FAD + 7FCD - 1200 = 0$$

فصل سوم:

اجسام صلب:

نیروهایی که به اجسام صلب وارد می شوند به دو دسته اند:

الف - نیروهای خارجی: نماینده تأثیر سایر اجسام بر روی جسم صلب هستند و این نیروها رفتار خارجی جسم صلب را توجیه می کنند.

ب - نیروهای داخلی: نیروهایی هستند که ذرات تشکیل دهنده جسم صلب را در کنار هم نگه می دارند.

### ضرب بردارها:

الف - ضرب برداری دو بردار و ضرب خارجی

خواص حاصلضرب برداری دو بردار  $P$  و  $Q$  که یک بردار  $U$  است به قرار زیر است:

۱- بردار حاصلضرب  $U$  بر صفحه  $P$  و  $Q$  عمود می باشد که جهت آن با استفاده از قانون دست راست

بدست می آید بدین صورت که چهار انگشت در امتداد بردار اول (بردار  $P$ ) و جهت بسته شدن

انگشتان در جهت بردار دیگر بردار ( $Q$ ) می باشد جهت انگشت شصت جهت بردار  $U$  می باشد.

۲- مقدار حاصلضرب برابر است با حاصلضرب مقادیر عددی  $P$  و  $Q$  در سینوس زاویه بین آن دو

$$U = PQ \sin \theta \quad \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow U = 0$$

$$U = 0 \leftarrow P = Q \quad \rightarrow \theta = 180 \rightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow U = 0$$

$P$  و  $Q$  موازی در راستای هم

۱- قانون جابجایی در مورد ضرب خارجی صادق نیست

زاویه بین  $P$  و  $Q$  در جهت مثلثاتی باید باشد.  $P \times Q = - (Q \times P)$

$P \times Q = PQ \times P$  بر روی  $Q$  بیاید.  $Q \times P = Q \times P$  بر روی  $P$  بیاید.

۲- خاصیت توزیع پذیری در مورد ضرب خارجی صادق است.

$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$$

حاصلضرب برداری بر حسب مؤلفه های قائم

$$\begin{array}{llll} \overset{\rho}{A} \times \overset{\rho}{A} = 0 & i \times i = 0 & i \times j = k & i \times k = j \\ j \times i = -k & j \times j = 0 & j \times k = i & \\ k \times i = j & k \times j = -i & k \times k = 0 & \end{array}$$

$$\overset{\rho}{P} = (P_{xi} + P_{yi} + P_{zk}), \overset{\rho}{Q} = (Q_{xi} + Q_{yj} + Q_{zk})$$

$$\overset{\rho}{P} * \overset{\rho}{Q} = (P_{xi} + P_{yj} + P_{zk}) * (Q_{xi} + Q_{yj} + Q_{zk})$$

$$= P_x(Q_x i.i + Q_y i.j + Q_z i.k) = P_x Q_y k - P_x Q_z j$$

$$= P_y(Q_x j.i + Q_y j.j + Q_z j.k) = P_y Q_x k + Q_y Q_z i$$

$$= P_z(Q_x k.i + Q_y k.j + Q_z k.k) = P_z Q_x j - P_z Q_y i$$

$$\overset{\rho}{P} * \overset{\rho}{Q} = (P_y Q_z - P_z Q_y) i - (P_x Q_z - P_z Q_x) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k$$

اگر به رابطه قبل نگاه کنیم که جمله های طرف راست آن نماینده بسط یک

دترمینان هست پس حاصلضرب (u) را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم که راحت تر

به خاطر سپرده شود.

$$u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = (P_y Q_z - P_z Q_y) i - (P_x Q_z - P_z Q_x) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k$$

$i(-j)^{1+2} = -j^3, (-k)^{1+3} = k$

ضرب دو عددی دو بردار و ضرب داخلی:

مقصود از ضرب عددی دو برابر  $\vec{p}$  در بردار  $\vec{a}$  که با هم زاویه  $\theta$  ساخته اند تعیین عددی است که مقدار آن برابر  $w = \vec{p} \times \vec{Q}$  باشد.

وقتی گفته می شود بردار  $Q$  را روی  $P$  تصویر کنید یعنی ضرب داخلی

$$U = \vec{A} \cdot \vec{A} = A \times AC \cos \theta = A^2$$

از تعریف ضرب داخلی دو برابر نتیجه می شود که بردارهای  $p$  و  $Q$  در صورتیکه

$$P \cdot Q = 0 \Rightarrow P \perp Q \text{ باشند. یعنی متعامد می باشند.}$$

بعنوان مثال کار دو بردار هستند که بر هم عمودند (d,f)

$i \cdot i = 1$	$j \cdot j = 0$	$i \cdot k = 0$
$j \cdot i = 0$	$j \cdot j = 1$	$j \cdot k = 0$
$k \cdot i = 0$	$k \cdot j = 0$	$k \cdot k = 1$

حاصلضرب بردارهای یکه یا صفر است یا یک

$$\vec{P} = P_{xi} + P_{yj} + P_{zk} \quad \text{و} \quad \vec{Q} = Q_{xi} + Q_{yj} + Q_{zk}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (P_{xi} + P_{yj} + P_{zk})(Q_{xi} + Q_{yj} + Q_{zk})$$

$$= (P_x Q_x \cdot i \cdot i + P_x Q_y \cdot i \cdot j + P_x Q_z \cdot i \cdot k$$

$$+ (P_y Q_x \cdot j \cdot i + P_y Q_y \cdot j \cdot j + P_y Q_z \cdot j \cdot k$$

$$+ (P_z Q_x \cdot k \cdot i + P_z Q_y \cdot k \cdot j + P_z Q_z \cdot k \cdot k) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

تعیین زاویه بین دو بردار :

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$$

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} = \frac{P_x}{PQ} \cdot \frac{Q_x}{PQ} + \frac{P_y}{PQ} \cdot \frac{Q_y}{PQ} + \dots$$

$$\frac{P_x}{PQ} = l_1 \quad \frac{Q_x}{PQ} = l_1$$

$$\Rightarrow \cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

که در آن L و m و n کسینوس هاویهای (شیب) بردارها هستند. همچنین مشاهده می گردد که هر دو بار در صورتیکه کسینوس هادی آنها در رابطه زیر صدق کنند متصاعد

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad \text{می باشند.}$$

خواص ضرب داخلی بردارها :

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P} \quad \text{۱- قانون جابجائی صادق است}$$

$$\vec{P} \cdot (\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \vec{R} \quad \text{۲- قانون توزیع پذیری صادق است}$$

### مثال

دو بردار  $\vec{A} = 10i + 20j + 3k$  و  $\vec{B} = -10j + 12k$  مفروضند.

الف - حاصلضرب داخلی دو بردار  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  را محاسبه نمائید .

ب - زاویه بین دو بردار

ج ( تصویر بردار  $\vec{A}$  روی امتداد بردار  $\vec{B}$

د - بردار  $\vec{A}$  روی امتداد بردار  $\vec{B}$

$$\text{الف) } U = \vec{A} \cdot \vec{B} = (10i + 20j + 3k) \cdot (-10j + 12k) = (10 \times 0) + (20)(-10) + (3)(12) = -164$$

$$\text{ب) } |A| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 3^2} = 22.56 \quad |B| = \sqrt{(-10)^2 + (12)^2} = 15.67$$

$$U = A \cdot B \cos \theta \Rightarrow -164 = 22.56 \times 15.62 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{-164}{22.5 \times 15.62}$$

$$\theta = 117.071^\circ \rightarrow 117.0710$$

$$\text{ج) } \vec{C} = A \cos \alpha = 22.5 \cos 117.71 = -10.46$$

$$\text{د) } \lambda = \frac{\vec{B}}{|B|} = -\frac{10j + 12k}{15.62} \quad \vec{C} = c n - 10.46 \left( \frac{-10j + 12k}{15.62} \right) = 6.7j - 8k$$



گشتاور یک نیرو حول نقطه :

فرض کنیم نیروی  $F$  بر یک جسم صلب اثر کند این نیرو با بردار نشان داده می شود.

مکان  $A$  را می شود با بردار  $r$  که نقطه ثابت مرجع  $(O)$  را به  $A$  متصل می کند مشخص کرد که به آن بردار مکان  $A$  گویند.

حال می خواهیم گشتاور نیروی  $F$  را حول  $O$  به صورت برداری  $r$  و  $f$  تعریف کنیم.

$$MO = r \times f = rF \sin \theta = Fr \sin \theta = Fd$$

که  $d$  فاصله عمودی  $O$  تا خط اثر  $F$  می باشد. نیروی  $F$  علاوه بر آنکه در جسم تمایل به حرکت در امتداد خط اثر نیرو ایجاد می کند. همچنین تمایل به چرخش حول هر محوری که خط اثر نیرو را قطع نمی کند و با آن نیز موازی نمی باشد در جسم ایجاد می کند. این گرایش را گشتاور  $M$  نیرو حول محور داده شده نامند.

در سیستم های یکالهای (SI) نیرو بر حسب نیوتن و فاصله بر حسب متر (m) بیان می شود، گشتاور نیرو بر حسب نیوتن - متر (N.M) بیان می شود.

### قضیه وارینون و یا اصل گشتاور:

برای نیروهائی که در یک صفحه واقعند بدین صورت بیان می شود که گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مؤلفه های نیرو حول همان نقطه می

$$m_1 + m_2 = r \times F_1 + r \times F_2 \quad \text{باشد.}$$

$$m = r \times (F_1 + F_2)$$

مثال:

نیروی  $P=100\text{N}$  در امتداد قطر  $AB$  مربعی به اضلاع 200

میلیمتر اعمال شده است. مطلوب محاسبه مولفه  $P'$

از نیروی  $P$  در امتداد  $OC$  با جهت مثبت از  $O$  به طرف  $C$

کسینوس هادیهای بردار  $\vec{OC}$ :

$$\vec{OC} = (0.2.0)i + (0.1-0)j$$

$$L = \frac{0.2}{\sqrt{0.04+0.01}} = \frac{0.2}{\sqrt{0.05}} = 0.894 \quad \text{و} \quad m = \frac{0.1}{\sqrt{0.05}} = 0.447$$

$$n_{OC} = 0.894i + 0.447j$$

کسینوس هادیهای بردار  $\vec{AB}$ :

$$\vec{AB} = (0-0.2)i + (0.2-0)j$$

$$a = \frac{-0.2}{\sqrt{0.04+0.04}} = \frac{-0.2}{\sqrt{0.08}} = -0.707, \quad B = \frac{0.2}{\sqrt{0.08}} = 0.707$$

$$n_{AB} = (-0.707i + 0.707j)$$

$$F_{AB} = F n_{AB} = 100(-0.707i + 0.707j) = -70.7i + 70.7j$$

$$F_{OC} = F n_{OC} = (-70.7i + 70.7j) \times (0.894i + 0.447j)$$

$$= (-7.07 \quad 0.894 + 7.07 \times 0.447) = -3.16N$$

مؤلفه های قائم گشتاور یک نیرو:

$$m_o = r \times F$$

$$= m_x i + m_y j + m_z k$$

$$= F_{xi} + F_{yj} + F_{zk}$$

اگر نقطه B بر مبدأ منطبق باشد

با جایگذاری در رابطه  $m_o$  داریم:

$$m_o = m_x i + m_y j + m_z k$$

$$m_x = yF_z - zF_y$$

$$m_y = zF_x - xF_z$$

$$m_z = xF_y - yF_x$$

$$m_B = r_{AB} \times F = (r_A - r_B) \times F$$

$$MF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad m_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$x_{A/B} = X_A - X_B, \quad y_{A/B} = Y_A - Y_B, \quad z_{A/B} = Z_A - Z_B$$

در مسایل دو بعدی  $Z, F_z = 0$

$$M_O = (XF_y - YF_x)k$$

مثبت بودن  $m_o$  حاکی از این است که بردار  $m_o$  به طرف

خارج از صفحه کتاب است (تمایل به چرخاندن جسم

حول  $o$  در جهت پادساعتگرد دارد) منفی بودن  $m_o$  به

طرف داخل صفحه کتاب است و تمایل به چرخاندن

جسم حول ۵ در جهت ساعتگرد را دارد)

$$MB = r_{A/B} \times F$$

$$MB = (XA - XB)Fy - (YA - YB)Fx$$

مثال :

مطلوبست گشت آور نیروی 260N حول نقطه A را

الف) بوسیله تجزیه نیروی محور X و Y وارد بر نقطه B

ب) بوسیله تجزیه نیروی محورهای X و Y در نقطه C

جواب

(الف)

$$Fx = -\frac{12}{13}(260N) = 240n$$

$$Fy = \frac{5}{13}(260N) = 100N$$

(b) ابتدا نیروی 260N را در امتداد خط اثرش امتداد داده تا نقطه C وارد شود.

$$F_y = \frac{5}{13}260 = 240N$$

$$F_x = \frac{12}{13}260 = 100N$$

$$MA = F_y \times 3.3 + F_x \times 0 = 100 \times 3.3 = 330N.M$$

و یا

$$\begin{matrix} 0 \\ | \\ 0 \end{matrix} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} 4.8 \\ | \\ 20 \end{matrix} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} 3.3 \\ | \\ 0 \end{matrix}$$

$$FBC = FBC - \lambda BC = 260 \times \frac{48i + 20j}{\sqrt{48^2 + 20^2} = 52} = 240i + 100j$$

$$r_{B/A} = (4.8 - 3.3)i + 2j = 1.5i + 2j$$

$$M_A = r \times F = (240i + 100j) \times (1.5i + 2j) = -240 \times 20k + 100 \times 1.5k = -330nm$$

ضرب سه گانه مختلط سه بردار:حاصلضرب داخلی سه بردار:

ضرب سه گانه مختلط عبارت است از حاصلضرب داخلی دو بردار که یکی از آن دو توسط حاصلضرب خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد. این حاصلضرب که کمیتی عددی می باشد، توسط هر یک از روابط معادل زیر قابل بیان است:

$$(P \times Q) \cdot R = R \cdot (P \times Q) = -R \cdot (Q \times P)$$

در حقیقت رعایت پرانتزها در عبارت فوق الذکر لازم نمی باشد، چون نوشتن حاصلضرب صورت  $P \times (Q \cdot R)$  بدون مفهوم است همچنین می توان ثابت کرد که :

$$P \cdot (Q \cdot R) = P \cdot Q \times R$$

که قانون جابجائی نقطه و ضربدر را در حاصلضرب سه بردار بدون اینکه تغییری در نتیجه عددی حاصلضرب حاصل شود مشخص می کند. بعلاوه می توان با استفاده از بسط دادن نشان داد که:

$$P \times e \cdot R = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

حاصلضرب خارجی سه بردار:

عبارتست از حاصلضرب خارجی دو بردار که یکی از آن دو خود توسط حاصلضرب خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد حاصل یک بردار بوده و توسط یکی از عبارت معادل زیر بیان می شود.

$$(P \times Q) \times R = -R \times (P \times Q) = R \times (Q \times P)$$

در اینجا وجود پرانتز ضرورت دارد، زیرا در رابطه ای مانند  $P \times Q \times R$  بعلت نامشخص بودن اینکه کدام دو بردار در هم ضرب شده اند، مبهم است. می توان ثابت کرد که حاصلضرب سه گانه خارجی معادل عبارت زیر است:

$$(P \times Q) \times R = R.PQ - R.QP$$

$$= P.QRP - R.QRP$$

### گشتاور یک نیرو حول یک محور:

گشتاور نیروی  $F$  حول نقطه  $O$  برابر  $MO$  می باشد حال اگر محور  $OL$  را در نظر بگیریم گشتاور  $mol$  نیروی  $F$  حول محور  $OL$  را به صورت تصویر گشتاور  $mo$  بر روی  $ol$  تعریف می کنیم.

اگر بردار یکه در امتداد  $ol$  را با  $\lambda$  نشان دهیم خواهیم داشت .

$$mol = \lambda - mo = \lambda.(r \times F)$$

گشتاور یک نیرو تصویر یک بردار بر روی یک محور

که گشتاور نیروی  $F$  حول  $OL$  اسکالر است و از ضرب سه گانه مختلط  $F, r, \lambda$  بدست می آید و با

$$MOL = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ X & Y & Z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  = کسینوس هادیهای بردار  $ol$

$Z, Y, X$  = مختصات نقطه اثر نیروی  $F$

$F_z, F_y, F_x$  = مؤلفه های نیروی  $F$

$$MBL = \lambda.MB = \lambda - (rA / B \times F)$$

$$rA / B = rA - rB$$

نماینده برداری است که از B به A رسم می شود.

$$MB = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مثال :

کابلی که انتهای فوقانی یک دیرک صلب در نقطه A را به

نقطه B متصل می کند تحت کشش  $T=10\text{KN}$  می باشد. مطلوبست

گشتاور  $M_z$  نیروی T حول محور Z ها که مار بر پایه دیرک می باشد.

$$\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 \\ 0 \\ 9 \end{vmatrix} \\ A & B \end{array} \quad \text{حل:}$$

بردار  $MO$  عمود بر صفحه ای است که T و نقطه O را در بر می گیرد.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= 15j(m) \\ n &= \frac{\vec{r}_{AB}}{AB} = \frac{(12-0)i + (0-15)j + (9-0)k}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 9^2}} = 0.566i - 0.707j + 0.424k \\ \vec{T} &= 10n = 5.66i - 7.07j + 4.24k \\ MO &= \vec{r} \times \vec{T} = (15j) \times (5.66i - 7.07j + 4.24k) \\ &= (-15 \times 5.66k + 15 \times 4.24i) \\ m_z &= m_o.k = (\text{English}).kz = -84.9\text{kN.m} \end{aligned}$$

علامت منفی معرف آن است که  $M_z$  در خلاف جهت محور Z ها عمل می کند.

کوپل یا زوج نیرو

گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی، موازی و مختلف الجهد که در امتداد یک خط

واقع نیستند کوپل خوانده می شود.

$$\begin{aligned}
 m &= r_A (F) + r_B (+F) = (r_A + r_B) \times F \\
 r &= (r_A + r_B) \\
 m &= r \times F \\
 &= \theta = Fd \text{sim}
 \end{aligned}$$

که  $d$  فاصله عمودی میان خط اثرهای  $F$  و  $F$  است. جهت  $M$  از روی قاعده دست راست تعیین می شود.

### کوپلهای معادل:

با تغییر یافتن مقادیر  $F$  و  $d$  یک کوپل مفروض مشروط بر آن که حاصلضرب آنها ثابت بماند، تغییری در آن کوپل بوجود نخواهد آمد. بهمین ترتیب مقدار یک کوپل ثابت می ماند بدون توجه به اینکه زوج نیرو در کدامیک از صفحات موازی یکدیگر عمل می نماید. شکلهای زیر چهار حالات مختلف یک کوپل ثابت  $M$  را نشان می دهد.

### جمع بستن کوپلهای:

کوپل هائی را که در صفحات غیر موازی با یکدیگر عمل می کنند می توان با قانون عادی ترکیب بردارها جمع کرد. مثلاً در شکل (a) کوپل  $M_1$  در اثر نیروهای  $F_1$  و کوپل  $M_2$  در اثر نیروهای  $F_2$  در دو صفحه بصورت نشان داده شده عمل می کنند این



دو کوپل را می توان با حاصل جمع بردارشان ( $M$ ) بصورتی که در شکل (b) نشان داده شده است تعویض کرد. این تعویض را می توان از طریق ایجاد کوپل  $M$  از نیروی  $F$  که ترکیب برداری  $F_1, F_2$  می باشد تأیید کرد.

### انتقال بردار نیرو:

یک کوپل مشخص و یک نیرو را که در صفحه کوپل واقع است را می توان به یک نیرو واحد تبدیل کرد.

### برآیند مجموعه های نیرو:

در شکل نشان داده شده در زیر هر نیروی  $F$  را می توان بموازات خود به نقطه دلخواه  $O$  انتقال داد. مشروط بر اینکه اندازه نیرو ثابت مانده و یک کوپل  $Fd$  که در آن  $d$  بازوی گشتاور از  $O$  تا موقت ابتدائی  $F$  می باشد به آن اضافه گردد.

$$R = \sum F = F_1 + F_2 + \dots$$

$$M = \sum m = m_1 + m_2 + \dots = \sum (r \times F)$$

### مجموعه نیروهای متوازی:

واضح است که برآیند نیروهای متوازی دارای مقداری برابر با حاصل جمع عددی مجموعه نیروها می باشد. موقعیت خط اثر برآیند با استفاده از قضیه وارینیون بدست می آید. چون گشتاور برآیند حول هر محوری می باید برابر حاصل جمع گشتاوری مؤلفه های آن حول همان محور باشد.

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$

$$XR = F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3$$

$$YR = F_1 Y_1 + F_2 Y_2 + F_3 Y_3$$

$$R = \sum F$$

$$X = \frac{\sum (Fx)}{R}$$

$$Y = \frac{\sum (Fy)}{R}$$

برآیند پیچ گوشتی دار:

در صورتی که بردار برآیند کوپل ها  $M$  بموازات برآیند نیروها باشد. برآیند حاصل برآیند پیچ گوشتی دار که در امتداد خط اثر منحصر به فردی عمل می کند، تبدیل کرد.

مثال: بر تیر مشبکی بوزن  $40\text{KN}$  دو کابل که نیروی کششی هر کدام برابر با  $18\text{KN}$  می باشد مطابق شکل اثر می کند. مطلوبست برآیند نیروی وارد بر تیر مشبک و نقطه تقاطع امتداد اثر برآیند با خط  $AB$ .

$$F_1 = F_2 = 15.59i - 9j$$

$$r = \sum F = 40j + 15.59i - 9j + 15.59i - 9j = 31.2i - 58.0j$$

$$R = \sqrt{(31.2)^2 + (58.0)^2} = 65.86\text{KN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{58}{31.2}\right) = 61.7^\circ$$

$$M_A^R = \sum r \times F = (8i) \times (-40j) + (39j) \times (15.59i - 9j) + (7i + 24j) \times (15.59i - 9j)$$

$$M_A^R = (-320 - 561 - 63 - 374)\text{K} = (-1.318\text{KN})\text{K}$$

$$r \times R = M_A^R \Rightarrow (X)i \times (31.2i - 58.0j) = -1.318k$$

$$-58Xk = -1.318k \rightarrow x = 22 - 7M$$

مثال:

سیستم کوپل - نیرو در نقطه  $A$  شامل نیروی  $F$  بمقدار  $25$  نیوتن و کوپل  $MA$  به گشت آور  $250\text{NM}$  می باشند این سیستم کوپل - نیرو را به سیستم کوپل - نیروی معادل در نقطه  $D$  جایگزین کند.

$$AB = 9i + 20j - 12k, \quad AB = 25m$$

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} 9 \\ 20 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C \begin{vmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$D \begin{vmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F = 9i + 20j - 12k, \quad F = 25N$$

$$AC = 9i - 12K, \quad AC = 15M$$

$$M_A = 150i - 200k, \quad MA = 250N.M$$

$$M_D = M_A + S \times F$$

$$S = DA^{\rho} = 12i - 6j + 12k$$

$$MD = MA + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12 & -6 & 12 \\ 9 & 20 & -12 \end{vmatrix} = MA + (+72 - 240)i + (108 - 144)j + (-240 + 54)k$$

کوپل های نیروی سیستم در نقطه D

$$MD = (1500i - 200k) - 168i - 36j - 186k$$

$$\begin{cases} MD = -18i - 36j - 386k \\ F = 9i + 20j - 12k \end{cases}$$

## فصل چهارم

### تعادل اجسام صلب :

مفهوم مفهومی تعادل و یا سکون آنست که ذره و یا جسم مادی حرکتی نداشته

باشد لذا وقتی که نیروهای خارجی یک سیستم معادل با صفر تشکیل می دهند می

گویند که چشم صلب در حال تعادل است. بنا براین شرط لازم و کافی برای تعادل یک جسم صلب به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \sum F &= 0, & M_0(r \times F) &= 0 \\ \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum m_y &= 0 & \sum m_z &= 0 \end{aligned}$$

### نمودار جسم آزاد:

نمودارهای جسم آزاد را در فصول قبل به کرات به کار بردیم. به خاطر اهمیت این نمودارها به طور خلاصه دروش ترسیم را در زیر می آوریم .

۱- جسم آزاد منتخب را به طور مشخص تعیین می کنیم و پس این جسم را از بین تمام اجسام دیگر جدا می کنیم و بعد طرح کلی جدا شده را ترسیم می کنیم .

۲- همه نیروهای خارجی را روی نمودار جسم آزاد نشان می دهیم به صورتی که بزرگی و راستای نیروهای خارجی مشخص باشد.

۳- نیروهای خارجی مجهول که معمولاً عکس العملهائی هستند که اجسام دیگر با مخالفت با حرکت جسم آزاد از خود نشان می دهند را بر روی جسم آزاد نشان می دهیم.

**www.ieuni.ir**

www.ieuni.ir

نیروهای اتصالی و تکیه گاهی

تعداد مجهولات	اثر بر روی جزء منفصل شده	نوع تکیه گاه
۱	تکیه گاههای غلتکی، چرخی، ساچمه ای و سایر انواع که در شکل نشان داده شده است نیروئی فشاری و عمود بر سطح تماس را انتقال می دهند. *	۱- تکیه گاه غلتکی
۲	یک اتصال مفصلی که آزادی گردش داشته باشد می تواند نیروئی در هر امتداد و جهت در صفحه عمود بر محور خار را انتقال دهد لولائی که آزادی گردش نداشته باشد می تواند تحت تأثیر یک کوپل نیز باشد. *	۲- اتصال مفصلی با خار مغزی
۳	یک اتصال گیر می تواند نیروئی محوری $F$ و نیروئی (برشی) $VC$ و کوپل $M$ که در مقابل چرخش مقاومت می کند را تحمل کند. *	۳- اتصال گیردار
۱	نیروئی که توسط یک کابل انعطاف پذیر اعمال می شود. همیشه بصورت یک نیروی کششی در جهت گریز از جسم و در امتداد مماس بر کابل می باشد. *	۴- کابل، قفسه، زنجیر و یا ریسمان قابل انعطاف پذیر

تعداد	اثر بر روی جزء منفصل شده	نوع تکیه گاه
۱	نیروی تماس همواره فشاری است و عمود بر سطح تماس  *	سطوح صیقلی
۲	سطوح زبر قابلیت تحمل یک مولفه مماس نیرو یعنی $F$ (نیروی اصطحکاک) از برآیند نیروی تماس $R$ را نیز علاوه بر مولفه عمودی $N$ دارا می باشد.  *	سطوح زبر
۳	یک اتصال ساچمه ای نیروئی را در هر جهت تحمل می نماید. یک اتصال جوش شده ساچمه ای بعلاوه یک کوپل را نیز تحمل می کند.  *	اتصال ساچمه ای
۱	نیروی وارد بر فنر در صورتیکه کشیده شود کششی و در صورتیکه فشرده شود فشاری است. برای یک فنر ارتجاعی با الاستیسیته خطی، سختی $k$ عبارت است از نیروی لازم طول آن به اندازه واحد  *	عمل فنر



## نمونه هائی از ترسیم آزاد:

مجموعه سازه	نمودار جسم آزاد
۱-خرپای سطح	
۲- دکل فضائی	
۳-تیر	
۴-یک مجموعه سازه صلب متشکل از چند عضو	

عکس العمل های نا معین از لحاظ استاتیکی - تیرهای ناقص

$=3$  معادلات  $=R$  مجهولات

$$R > 3 \Rightarrow \text{نامعین} \quad R = 4 > 3 \rightarrow n = 4 - 3 = 1$$

$$R < 3 \Rightarrow \text{ناپایدار (مقید ناقص)}$$

$$R = 3 \Rightarrow \text{معین} \quad R = 2 > 3$$

$$R = 3 \Rightarrow n = 3 - 3 = 0$$

در حالت سه بعدی تعداد معادلات ۶ عدد است که اگر کمتر از ۶ مجهول داشته باشیم استحکام ناقص است و اگر مجهولات بیشتر از ۶ عدد باشد استحکام نامعین است اگر تعداد مجهولات ۶ عدد یعنی مساوی معادلات باشد معین است.

$$R = 6 \rightarrow \text{معین}$$

$$R > 6 \rightarrow \text{نامعین}$$

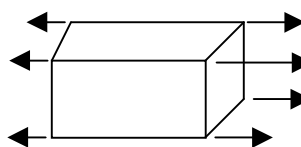
$$R < 6 \rightarrow \text{ناپایدار}$$

در صورتی که مجهولات شش عدد باشد ولی همه موازی باشند یعنی در صفحه قرار دارد و این کابل قابل قبول نیست .

برای یک جسم صلب دو بعدی :

عکس عملهای تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه یک یا دو و یا سه

مجهولی باشند.



لذا برای حل معادلات زیر را می نویسیم . اما چند جور دستگاه معادله وجود دارد

۱- سه معادله تعادل

$$\sum F_x = 0, \sum MA = 0, \sum MB = 0, \sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum MO = 0$$

**مثال:**

تیر یکنواخت ۹ متری دارای جرمی برابر ۲۰۰ کیلو گرم می باشد.

و در صفحه قائم توسط نیروهای موازی بصورت نشان داده شده

در شکل باز گذاری شده است. عکس العمل های تکیه گاههای مفصلی

متحرک در A و B را محاسبه کنید.

$$W = m.g = 200 \times 10 = 2000N = 2KN$$

$$+ \sum MA = 0 \rightarrow$$

$$-By \quad 3+2 \quad 3.5-2 \quad 6+1 \quad 8-3 \times 5 = 0 \rightarrow By = 6KN$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$\rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow -AY + 6 - 2 - 3 + 2 - 1 = 0$$

$$Cont = \sum mb = 0 \rightarrow -2 \times 3 + 2 \times 0 - 5 + 3 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 5 = 0$$

0.k

**مثال :**

تیر تلفنی به وزن 300Lb برای نگهداری در انتهای سیم بکار برده شده . کشش در سیم

چپ 80 پوند و امتداد آن با افق زاویه 10° می سازد ( a ) هر گاه کشش سیم T<sub>2</sub> صفر

باشند، معین کنید عکس العمل در نقطه A را ( b ) بیشترین و کمترین مقدار  $T_2$  را هرگاه مقدار کوپل وارد بر نقطه A بیش از 400Lb-ft نباشد.

$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow Ax - 80 \cos 10^\circ = 0 \rightarrow Ax = 78.8Lb \rightarrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow Ay - 300 - 80 \sin 10^\circ = 0 \rightarrow Ay = 314Lb \uparrow$$

$$\sum MA = 0 \Rightarrow MA + 80 \cos 10^\circ \times (16ft) = 0$$

$$b) T_2 \neq 0, MA = 2600Lb.ft$$

$$MA = -1260Lb.ft$$

$$+ MA = 0 \Rightarrow (80 \cos 10^\circ)(16ft) - (T_2 \cos 20^\circ)(16ft) + Ma = 0$$

$$1260 - T_2 \cos 20^\circ \times 16 \pm 600Lb.ft = 0$$

$$T_2 = 43.9Lb, T_2 = 1273.7Lb$$

گشت آور حول نقطه A کوچکتر از 600Lb.ft است وقتی که

$$43.9Lb \leq T_2$$

معادلات تعادل برای یک جسم صلب دوبعدی :

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow Ay + \frac{P}{2} - P = 0 \Rightarrow Ay = \frac{P}{2} \uparrow$$

$$\sum MA = 0 \Rightarrow B_y \times L - P \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \frac{B_y}{2} = \frac{P}{2} \uparrow$$

عکس عملهای تکیه گاهی می توانند بسته به نوع تکیه گاه - یک یا دو و یا سه مجهولی باشند لذا برای حل معادلات را بصورت زیر می نویسیم.

۱- سه معادله تعادل:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum MA = 0$$

$$Ax = 0, \quad ay + p/2 - p = 0 + BY \times L - P \times L/2 = 0 \rightarrow$$

$$AY = P/2 \uparrow \quad BY = P/2 \uparrow$$

اما بغیر از این حالت چند جور معادله تعادل دیگر نیز می توان نوشت .

$$\sum FX = 0, \sum MA = 0, \sum MB = 0$$

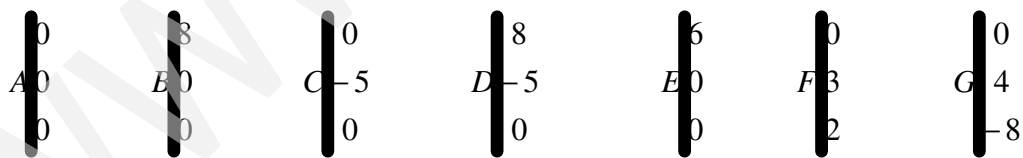
مثال:

صفحه ای همگن به ابعاد  $8 \times 5$  بوزن 270N در

نقطه A بر روی کاسه ساچمه ای متکی بوده و

بوسیله دو کابل نگهداری می شود، تعیین کنید

کشش در هر کابل و عکس العمل در نقطه A را.



$$T_{EF} = T_{EF} \left( -\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k \right)$$

$$T_{BC} = T_{BG} \left( -\frac{8}{12}i + \frac{4}{12}j - \frac{8}{12}k \right) = T_{BG} \left( -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k \right)$$

$$\uparrow + \sum MA = 0 \rightarrow (4i) (-270j) + (6i) \times \left( -\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k \right) T_{EF}$$

$$+ (8i) \times \left( -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k \right) T_{BG} = 0$$

$$\Rightarrow -1080K + \frac{18}{7}T_{EF}K - \frac{12}{7}T_{EF}J + \frac{8}{3}T_{BG}K + \frac{16}{3}T_{BG}J = 0$$

$$-\frac{12}{7}T_{EF} + \frac{16}{3}T_{BG} = 0$$

$$T_{EF} = 315N$$

$$T_{EF} = 101.3N$$

$$\frac{18}{7}T_{EF} + \frac{8}{3}T_{BG} - 1080 = 0$$

$$\sum F = 0, \quad A_x + T_{EF} + T_{BG} - 270j = 0$$

$$A_x i + A_y j + A_z k + 315\left(-\frac{6}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k\right)$$

$$+ (101.3)\left(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k\right) - 270j = 0$$

$$A_x - \frac{6}{7}(315 - \frac{2}{3}(101.3))i + [A_y + \frac{3}{7}(315) - 315 + \frac{1}{3}(101.3) - 270]j$$

$$+ [A_z + \frac{2}{7}(315) - \frac{2}{3}(101.3)]k = 0$$

$$A_x - 270 - 67.5 = 0, \quad A_x = 338LbN$$

$$A_y + 135 + 33.8 - 270 = 0, \quad A_y = 101.2N$$

$$A_z + 90 - 67.5 = 0, \quad A_z = -22.5N$$

مثال :

معین کنید مولفه های نیروی تکیه گاهی وارد بر قاب مشبک زیر

$$+ \sum MA = 0$$

$$-600(3) - 300(9) + GY(9) = 0$$

$$GY = 500N \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$GY + AY = 0 \rightarrow AY = -500 \rightarrow AY = 500N \downarrow$$

cont:

$$+\sum MC = 0$$

$$300 \cdot 9 + 600 \cdot 3.500 \cdot 9 = 0.K$$

نیروهای گسترده : مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

کرانیگاه جسم دو بعدی

گرانیگاه یک صفحه:

یک ورق تخت افقی را در نظر می گیریم این ورق را می توانیم به ۸ جزء

کوچک تقسیم کنیم مختصات جزء اول را با  $X$  و  $Y$  و مختصات جزء دوم را با  $X_2$  و  $Y_2$

نشان می دهیم و به همین ترتیب نیروهای ناشی از اثر زمین بر اجزای ورق را به ترتیب

با

$\Delta W_n, \Delta W_2, \Delta W_1$  نشان می دهیم.

$$\rightarrow W = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \dots + \Delta w_n$$

$$\sum MY : \overline{\Delta W} = \sum X \Delta W, \quad \sum Mx : \overline{Y W} = \sum Y W$$

$$\sum MY : \overline{\Delta W} = X_1 \Delta W_1 + X_2 \Delta W_2 + \dots + X_n \Delta W_n$$

$$\sum Mx : \overline{Y W} = Y_1 \Delta W_1 + Y_2 \Delta W_2 + \dots + Y_n \Delta W_n$$

اگر تعداد اجزاء افزایش یابد و اندازه هر جزء را کاهش بدهیم عبارتهای زیر به دست می آید.

$$W = \int dw, \quad \bar{X}W = \int xdw, \quad \bar{Y}W = \int ydw$$

### گرانیگاه یک سیم:

$$\sum my = \bar{x}w = \sum x\Delta w$$

$$\sum mx, \bar{y}w = \sum y\Delta w$$

مرکزهای هندسی سطوح و خطوط

$$\sum my : \bar{x}A = X_1\Delta A_1 + X_2\Delta A_2 + \dots + X_n\Delta_n$$

$$\sum mx : \bar{y}A = Y_1\Delta A_1 + Y_2\Delta A_2 + \dots + Y_n\Delta_n$$

$$\bar{x}A = \int XdA \quad \bar{y}A = \int ydA$$

$$\bar{X}L = \int XdL \quad \bar{Y}L = \int YdL$$

گشتاورهای اول سطوح و خطوط

$$Q_y = \int XdA \quad Q_x = \int YdA$$

$$Q_y = \bar{X}A \quad Q_x = \bar{Y}A$$

وقتی سطحی مانند A یا خطی مانند L دارای یک محور تقارن باشد، گشتاور

اول آن نسبت به آن محور برابر صفر می باشد و مرکز هندسی اش بر روی آن محور

قرار دارد



اگر سطحی یا خطی دارای دو محور تقارن باشد مرکز هندسی اش ( C ) باید در محل تلاقی دو محور تقارن قرار داشته باشد.

سطح A را نسبت به مرکز O متقارن می گویند اگر متناظر با هر جزء سطح da به مختصات x و y یک جزء سطح dA' به مختصات ( X ) و ( Y ) وجود داشته باشد در

اینصورت QX=QY=0

مساحت	Y	X	شکل	نام شکل
$\frac{6h}{2}$ *	$\frac{h}{3}$ *	$\frac{a+b}{3}$ *	*	مثلث
$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	*	ربع دایره
$\frac{\pi r^2}{\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	0		نیم دایره
b.h *	$\frac{h}{2}$ *	$\frac{b}{2}$ *	*	مستطیل
$\frac{2a^h}{3}$	$\frac{2h}{5}$	$\frac{3a}{8}$	*	نیم سهمی
$\frac{4a^h}{3}$	$\frac{3h}{5}$	0		سهمی
$\frac{a^h}{3}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{3a}{4}$	*	اسپاندرال سهمی

مثال :

مختصات مرکز سطحی صفحه زیر را تعیین کنید:

سطح	A	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{XA}$	$\bar{YA}$
I	8	0.5	4	4	32
II	4	3	0.5	12	2
$\Sigma$	12	-	-	16	34

$$\bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{XA} \rightarrow \bar{X}(12) = 16 \rightarrow \bar{X} = 1.33m$$

$$\bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{YA} \rightarrow \bar{Y}(12) = 34 \rightarrow \bar{Y} = 2.83m$$

مثال:

مختصات مرکز سطحی صفحه زیر را تعیین کنید.

بعلت تقارن  $\bar{X} = 0$

سطح	A	$\bar{Y}$	$\bar{YA}$
I	56.06	2.54	144
II	48	-2	-96
$\Sigma$	104.6		48

$$\bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{YA}$$

$$\bar{Y}(104.6) \rightarrow 48$$

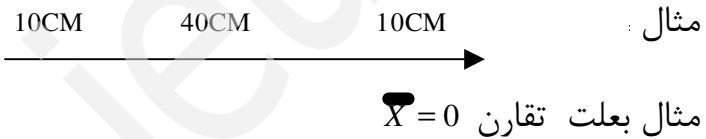
$$\bar{Y} = 0.459m$$

مثال :

بعلت تقارن  $\bar{x} = 0$

سطح	A	$\bar{Y}$	$\bar{y}_A$
I	$60 \cdot 15 = 900$	7.5	6750
II	$45 \cdot 45 = 202 \cdot 5$	$(\frac{54}{2} + 15) = 37.5$	75937.5
III	$-25 \cdot 35 = -875$	$(\frac{35}{2} + 15) = 32.5$	-28437.5
$\Sigma$			24250

$$\bar{Y} \Sigma A = \Sigma Y A \rightarrow \bar{Y} \cdot 2050 = 5450 \rightarrow Y = 26.46 \text{ CM}$$



سطح	A	$\bar{Y}$	$\bar{y}_A$
I	$60 \cdot 30 = 1800$	15	27000
II	$-2 \cdot 10 \cdot \frac{12}{2} = -100$	$\frac{10}{3} = 3.33$	-333.3
III	$15 \cdot 30 = 450$	$15 + 30 = 45$	20250
IV	$80 \cdot 10 = 800$	$5 + 60 = 65$	52000
$\Sigma$	2950		98916.7

$$\bar{Y} \sum A = \sum YA \Rightarrow \bar{Y} * 2950 = 98916.7 \quad \bar{Y} = 33.53 \text{ Cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum YA}{\sum A}$$

تعیین مرکزهای هندسی به روش انتگرال گیری:

مرکز سطح مثلثی شکل:

موفقیت مرکز مساحت مثلثی بقاعده  $b$  را به ارتفاع  $h$  را مشخص کنید.

محورها  $X$ ها منطبق بر قاعده مثلث فرض می شود و نوار متشکله

مساحت بصورت  $x dy$  فرض می شود. با استفاده از روابط مثلثهای

$$\frac{x}{(h-y)} = \frac{b}{h} \Rightarrow \text{مشابه داریم:}$$

$$A\bar{Y} = \int Y dA \Rightarrow b \frac{h}{2} \bar{Y} = \int_0^h Y \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{bh^2}{6}$$

$$\Rightarrow \bar{Y} = \frac{h}{3}$$

یک عنصر قائم به مساحت  $Da=Ydx$  مطابق شکل سمت چپ نشان داده شده در بالا

انتخاب می شود. مختصات  $X$  مرکز به صورت زیر بدست می آید.

$$A\bar{X} = \int X dA \Rightarrow \bar{X} \int_0^a y dx = \int_0^a xy dx$$

با جانشین کردن  $Y = (\frac{x}{k})^{1/3}$  و  $k = (\frac{a}{b})^3$  و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$3 \frac{ad}{4} \times \frac{a^2 b}{7}, \quad \bar{X} = \frac{A}{4}$$

$$A\bar{Y} = \int Y dA \Rightarrow 3 \frac{ab}{4} \bar{Y} = \int_0^a (\frac{y}{2}) y dx$$

با جایگزینی  $y = b(\frac{x}{a})^{1/3}$  و انتگرال گیری :

از عنصر افقی نشان داده شده در قسمت سمت راست شکل می توان بجای عنصر قائم استفاده نمود. در محاسبه  $\int x dA$  مختصات  $X$  مرکز عنصر باید برای  $X$  بکار گرفته شود

این فاصله برابر است با  $X + \frac{(a-x)}{2} = \frac{(a+x)}{2}$  در نتیجه :

$$AX = \int x dA \Rightarrow X \int_0^b (a-x) dy = \int_0^b \left(\frac{a+x}{2}\right)(a-x) dy$$

مقدار  $X$  از معادله زیر بدست می آید.

$$AX = \int Y dA \Rightarrow Y \int_0^b (a-x) dy = \int_0^b y(a-x) dy$$

**بارها گسترده روی تیرها:**

بار گسترده وارد بر تیر حسب  $\frac{N}{M}$  بیان می گردد لذا بزرگی وارد بر یک جزء تیر به

طول  $dx$  برابر است با

$$W = \int_0^L W dx \quad (1) \quad w dx = dA \quad (2), (1) \Rightarrow W = \int dA = A$$

حال باید ببینیم که این بار متمرکز  $W$  به کجای تیر و برآیند بارهای گسترده  $C$  وارد

می گردد برای بدست آوردن نقطه اثر  $P$  بار معادل متمرکز  $W$  گشتاور  $W$  حول نقطه

$O$  را برابر با مجموع گشتاورهای بارهای جزئی  $dw$  حول نقطه  $O$  قرار می دهیم:

$$(OP)W = \int x dW \quad (1)$$

$$dw = w dx = dA, \quad W = A \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (op)A = \int_0^L X dA \Rightarrow \bar{X}A = \int_0^L X dA$$

بنابراین به جای بار گسترده وارد بر تیر می شود یک بار متمرکز قرار دارد، بزرگی این بار متمرکز برابر با سطح زیر منحنی بار است و خط اثرش از مرکز هندسی آن سطح عبور می کند.

مثال :

مطلوبست محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی تیرهای زیر را ؟

$$+\sum MA = 0 \rightarrow BY \cdot L - WL \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow BY = W \frac{L}{2} \uparrow$$

$$\rightarrow \sum Fx = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow AY + W \frac{1}{2} - W = 0 \rightarrow AY = W \frac{1}{2} \uparrow$$

$$+\downarrow \sum MB = 0 \Rightarrow W \frac{L}{2} \cdot L - WL \times \frac{L}{2} = 0$$

$$+\sum MA = 0$$

$$+16 \cdot 2 - MA = 0 \rightarrow MA = 32 N.m$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow AY - 16 = 0 \rightarrow AY = 16 N \uparrow$$

$$+\sum Fx = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$+\downarrow \sum MA = 0 \Rightarrow -2 \cdot 3 - 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - 1.5 \cdot 6 + BY \cdot 5 = 0$$

$$BY = 3.27 KN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \rightarrow AY + 3.27 - 1 - 2 - 1.5 = 0 \Rightarrow AY = 1.23KN$$

Cont:0

$$+\sum MB = 0$$

$$-1.23 * Y + 1 * 4.3 + 2 * 2 - 1.5 * 1 = 0 \Rightarrow Y = 10.1K$$

### فصل ششم

### تحلیل سازه ها:

در فصول گذشته با تعادل یک جسم صلب تنها سرو کار داشتیم که نقطه نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب را در بر می گرفتند . حالا می خواهیم مسئله های را در نظر بگیریم که با تعادل سازه های متشکل از چند قسمت متصل به هم سروکار دارند. در این مسئله ها نه تنها باید نیروهای خارجی وارد بر سازه را تعیین کرد بلکه باید نیروهایی را هم که قسمت های مختلف سازه را به هم متصل نگه می دارند بدست آورد. اگر کل سازه را در نظر بگیریم ، این نیروهای داخلی می نامند.

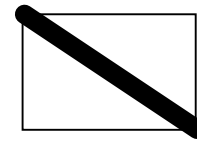
انواع سازه های مهندسی مورد بررسی

- |           |          |            |
|-----------|----------|------------|
| ۱- خرپاها | ۲- قابها | ۳- ماشینها |
|-----------|----------|------------|

### انواع خرپاها:

- ۱- خرپاهای ساده : سازه هائی که از زیر مجموعه بنیادی مثلثی تشکیل شده اند  
مجموعه های مفصلی و یا خرپاهای ساده خوانده می شوند.
- ۲- خرپاهای مرکب: از تشکیل یکسری خرپای ساده که بوسیله یکسری اعضاء به یکدیگر متصل گردیده اند.

۳- خرپاهای مبهم (پیچیده): خرپاهائی که نه ساده می باشند و نه مرکب.



$$\begin{aligned} M &= 3 \\ j &= 3 \\ R &= 3 \\ M + 3 &< 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 4 \\ R &= 3 \\ j &= 4 \\ M + 3 &< 2j \\ 4 + 3 &< 8 \end{aligned}$$

معادل ت مجهولاً

$$\begin{aligned} 1) M + R < 2J &\rightarrow D = (M + R) - 2j \\ 2) M + R < 2J &\rightarrow N = 0 \\ 3) M + R > 2J &\rightarrow N < 0 \end{aligned}$$

نا معین از نظر داخلی

ناپایدار

### روشهای آنالیز خرپاها:

#### ۱- روش مفصل و تعادل مفاصل

در میله های خرپا در یک عضو یا نیروی کششی وجود دارد و یا نیروی فشاری، بعبارت دیگر فقط یک نیروی در امتداد میله وجود دارد و میله لنگر را تحمل نمی کند.

$$M = 9, J = 6, R = 3 \Rightarrow M + 3 = 2j \Rightarrow 9 + 3 = 12 = 2 \times 6 = 12$$

معین داخلی را از لحاظ خارجی نیز معین است.

$$\left\{ \begin{aligned} &\rightarrow \sum F_x = 0^+ \Rightarrow Ax = 0 \\ &+ (MA = 0 \Rightarrow -10 \cdot 5 + (Y \times 10 = 0 \Rightarrow CY = 5N \uparrow \\ &+ \uparrow FY = 0 \Rightarrow AY + 5 - 10 = 0 \Rightarrow [AY = 5N \uparrow \\ &cont := (\sum MB = 0 \Rightarrow 5 \cdot 10 - 10 \times 5 = 0, 0.K \end{aligned} \right.$$

تعادل برقرار است

گروه A فشاری  $+ \uparrow \sum FY = 0 \rightarrow -AF \sin 60^\circ + 5 = 0 \Rightarrow AF = 5.77N$

گروه F کششی  $+ \sum FX = 0 \rightarrow -FA \sin 60^\circ + ab = 0 \Rightarrow AB = 2.88N$

کششی  $+ \uparrow \sum FY = 0 \rightarrow 5.77 \sin 60^\circ - FB \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow FB = 5.77N$   
 $\xrightarrow{+} \sum FY = 0 \rightarrow FA \sin 60^\circ - FB \sin 60^\circ - FB = 0 \Rightarrow$

فشاری  $2 \cdot 5.77 \times \sin 60^\circ - EF = 0 \Rightarrow EF = 10N$

گروه E فشاری  $+ \uparrow \sum FY = 0 \rightarrow FB - 10 = 0 \Rightarrow EB = 10N$



$$\rightarrow \sum FX = 0 \rightarrow -ED + FE = 0 \Rightarrow -ED + 10 = 0 \Rightarrow ED = 10N \quad \text{فشاری}$$

$$\begin{aligned} &+ \rightarrow \sum FY = 0 \rightarrow BF \sin 60^\circ + BD \sin 60^\circ - BE = 0 \Rightarrow \\ \text{گروه B} & \quad 5 - 77 * 0.87 + BD * 0.87 - 10 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$BD = 5.77N \quad \text{کششی}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow BF \cos 60^\circ + BC \cos 60^\circ + BC - BA = 0 \\ &-5.77 \cos 60^\circ + 5.77 \cos 60^\circ + BC - 2.82 = 0 \Rightarrow \\ &BC = 2.88N \end{aligned}$$

مثال:

عکس العمل ها:

$$+ \uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -Ax - 150 = 0 \rightarrow Ax = 150N \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum FY = 0 \rightarrow 5(5-3) * \frac{3}{5} - 156 = 0 \Rightarrow F(5-3) = 250N \quad \text{کششی}$$