

موضوع:

- ۱- یک رأس از متوازی‌الاضلاع نقطه $A(7, 9)$ و معادلات دو ضلع آن به صورت $3y = x + 3$ و $2y = x + 4$ است، مختصات محل تلاقی دو قطر آن کدام است؟

(۱) (۲, ۴) (۲) (۳, ۴) (۳) (۳, ۵) (۴) (۴, ۵)

چون دو خط $3y = x + 3$ و $2y = x + 4$ موازی نیستند پس این دو خط دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع می‌باشند از از طرفی چون نقطه $A(7, 9)$ در این دو خط **صدق نمی‌کند** پس محل تقاطع این دو خط رأس مقابله نقطه A است.

$$\begin{aligned} y &= 3x + 3 \\ 2y &= x + 4 \end{aligned} \Rightarrow 2(3x + 3) = x + 4 \Rightarrow 6x + 6 = x + 4 \Rightarrow 5x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow C(-\frac{2}{5}, 1)$$

حال مختصات دو سر قطر AC را داریم و می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع وسط هر قطر محل برخورد اقطار است، پس:

$$\left. \begin{array}{l} A(7, 9) \\ C(-\frac{2}{5}, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{7 + (-\frac{2}{5})}{2} = \frac{33}{10} = 3.3 \\ y_0 = \frac{9 + 1}{2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow O(3.3, 5)$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

- ۲- خارج قسمت تقسیم عبارت $x^3 + 2x^2 + x - 1$ بر دو جمله‌ای $x^2 + 2x + 2$ کدام است؟

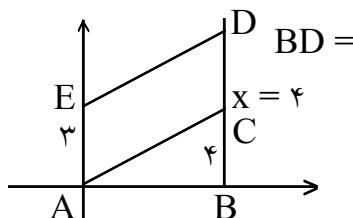
(۱) $x^2 + 2x - 2$ (۲) $x^2 + x + 1$ (۳) $x^2 - 2x + 2$ (۴) $x^2 + 2x + 2$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تقسیم مورد نظر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 \\ \underline{-} x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 \\ \underline{-} 2x^2 - 2x \\ \hline 2x \\ \underline{-} 2x - 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

- ۳- مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معطوطی به معادلات $y = x + 3$ و $y = x + 4$ و محور y ها و نیمساز ناحیه اول برابر کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵



$$\begin{aligned} S_{ACDE} &= S_{ABDE} - S_{ABC} \\ S_{ABDE} &= 4 \times \left(\frac{7+3}{2}\right) = 20 \\ S_{ABC} &= 4 \times \frac{4}{2} = 8 \end{aligned} \Rightarrow S_{ACDE} = 12$$

ابتدا شکل مورد نظر را رسم می‌کنیم:
حال طبق شکل برای مساحت‌ها داریم:

پس گزینه ۲ صحیح است.

موضع:

$$4 - \text{فاصله دو خط موازی به معادلات } y + 2\sqrt{2}x = 16 \text{ و } \sqrt{2}y - 4x = \sqrt{2} \text{ کدام است؟}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر معادله دو خط بصورت $ax + by = c_1$ ، $ax + by = c_2$ باشد، فاصلہ آنها

می باشد. در این سوال داریم:

پس گزینه ۳ صحیح است.

۵- باقیمانده تقسیم عبارت $10 - 2x^2 + 3x^4 - x^6$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ کدام است؟

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^2 + 2x - 1 \cdot \\ \hline x^4 + 2x^2 \\ \hline - 4x^2 + 2x - 1 \cdot \\ \hline - 4x^2 - 1 \cdot \\ \hline R = 2x \end{array}$$

تقسیم مورد نظر را انجام می‌دهیم:

پس گزینه ۲ صحیح است.

روش دوم بر حسب توانهای X مرتب کرده که بجای X عدد ۲- را قرار می‌دهیم:

$$(x^4)'' - 4x^2 + 4x - 1 \Rightarrow p(x^2 = -4) = 4 + 6 + 4x - 1 = 4x$$

- اگر معادله $x^2 + 2mx + m^2 + n = 0$ دارای دو ریشه مساوی باشد بین m و n کدام رابطه برقرار است؟

$$n = \dots \quad (4) \quad m = \dots \quad (3) \quad m + n = \dots \quad (2) \quad m - n = \dots \quad (1)$$

برای اینکه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه مساوی باشد باید Δ معادله صفر باشد یعنی

پس در معادله $b^2 - 4ac = 0$ باید داشته باشیم :

$$(rm)^r - r(m^r + n) = \cdot \Rightarrow rm^r - rm^r - rn = \cdot \Rightarrow n = \cdot$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

موضوع:

۷- فاصله محل تلاقی خطوط $y = 2x + 3$ و $y = x + 3$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نقطه تلاقی دو خط را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 3 \\ y &= x + 3 \end{aligned} \Rightarrow 2x + 3 = x + 3 \Rightarrow x = 0 \xrightarrow[\text{در معادله اول}]{\text{قرار میدهیم}} y = 3$$

فاصله نقطه $(0, 3)$ از مرکز $(0, 0)$ از رابطه $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ بدست می‌آید

$$d = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

۸- به ازای چه مقدار a ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - a - 1 = 0$ مساوی‌اند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) -۳ ۵) -۵

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای این که یک معادله درجه ۲ دارای ریشه‌های مساوی باشد، باید Δ در آن مساوی با صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4(1)(-a - 1) = 0 \Rightarrow 16 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow 4a = -20 \Rightarrow a = -5$$

۹- اگر باقیمانده تقسیم $2x^2 - 5x + a$ بر $2 - x$ برابر ۳ باشد a چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) -۴ ۵) ۰

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای محاسبه باقیمانده، جواب $x = 2 - x$ یعنی $x = 1$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$R = 2(2)^2 - 5(2) + a = 3 \Rightarrow 8 - 10 + a = 3 \Rightarrow -2 + a = 3 \Rightarrow a = 5$$

همچنین می‌توان از روش تقسیم مستقیم نیز عمل کرد، به این ترتیب عبارت باقیمانده را محاسبه نموده و برابر ۳ قرار می‌دهیم که پاسخ $a = 5$ حاصل می‌شود.

۱۰- حاصل $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

عبارت زیر رادیکال دوم تبدیل به مربع کامل می‌شود و با عدد فرجه ساده می‌شود پس داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}} &= \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{(2 + \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{2(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \sqrt{2(4 - 2)} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

موضوع:

۱۱- اگر $R(x)$ باقیمانده تقسیم عبارت $x^3 - x + x^7 + x^{21} + x^{41} + x^{81}$ باشد، (1) چقدر است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۵

۴) ۲

$$x^3 - x + x^7 + x^{21} + x^{41} + x^{81} = (x^3 - x)Q(x) + R(x) \xrightarrow{x=1} \\ 5 = 0 \cdot Q(1) + R(1) \Rightarrow R(1) = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۲- معادلات دو ضلع مقابل مربعی بصورت $x - 2y + 2 = 0$, $3x - 6y - 2 = 0$ است. مساحت مربع چقدر است؟

۱) $\frac{64}{45}$ ۲) $\frac{68}{45}$ ۳) $\frac{62}{45}$ ۴) $\frac{58}{45}$

می‌دانیم فاصله دو خط داده شده (معادله دو ضلع مربع) برابر با طول ضلع مربع می‌باشد و طول ضلع مربع را از رابطه‌ی فاصله‌ی دو خط موازی به دست می‌آوریم.

$$D_1 : x - 2y + 2 = 0, D_2 : 3x - 6y - 2 = 0 \xrightarrow{\text{ضلع مربع}} d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|2 + \frac{2}{3}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{5}} \Rightarrow S = (\text{ضلع})^2 = \frac{64}{45}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱) ۴

۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{5}$

۴) ۱

$$2^{2x-1} = (2^3)^{2x-1} \Rightarrow 2x - 1 + 2 = 9 \Rightarrow x = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱) ۴

۲) -9 ۳) -9

۴) ۱

$$2^{3x-1} = 16^{x+2} \Rightarrow 2^{3x-1} = (2^4)^{x+2} \Rightarrow 2^{3x-1} = 2^{4x+8} \Rightarrow 3x-1 = 4x+8 \Rightarrow x = -9$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

موضوع:

۱۵- به ازای کدام مقدار m عدد $x = 6$ یک جواب معادله $\frac{3^{2x+1} - 5 \times 3^{2x} + m \times 3^{2x+2}}{6 \times 3^x + 4 \times 3^x + 1 - 5 \times 3^x + 2} = 81$ باشد؟

$\frac{1}{12}(4)$ $-\frac{1}{9}(3)$ $\frac{1}{3}(2)$ $\frac{1}{6}(1)$

$$\begin{aligned} 81 &= \frac{3^{2x+1} - 5 \times 3^{2x} + m \times 3^{2x+2}}{6 \times 3^x + 4 \times 3^x + 1 - 5 \times 3^x + 2} = \frac{(9m - 2) \times 3^{2x}}{-27 \times 3^x} \\ \Rightarrow \frac{9m - 2}{-27} \times 3^x &= 81 \Rightarrow 9m - 2 = \frac{-27 \times 81}{3^6} = \frac{-27 \times 81}{729} \Rightarrow 9m - 2 = -3 \Rightarrow m = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۶- ساده شده عبارت $\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{6^7}{8^5}$ کدام است؟

$6(4)$ $3(3)$ $2(2)$ $\frac{3}{2}(1)$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2^3 \times 2^5}{2^3 \times 3^4} \times \frac{(2 \times 3)^7}{(2^3)^5} = \frac{2^8}{2^6} \times \frac{2^7 \times 3^7}{2^{15}} = \frac{2^8 \times 2^7 \times 3^7}{2^6 \times 2^{15}} = \frac{2^{15} \times 3^7}{2^6 \times 2^{15}} = \frac{3^7}{2^6} = 3$$

۱۷- معادله توانی زیر را حل کنید.

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 360$$

$$\begin{aligned} 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} &= 3^x + (3 \times 3^x) + (3^3 \times 3^x) = \\ &= 3^x + 3 \times 3^x + 9 \times 3^x + 27 \times 3^x = (1 + 3 + 9 + 27) \times 3^x = 40 \times 3^x = 360 \\ \rightarrow 3^x &= \frac{360}{40} \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

۱۸- مقدار x در تساوی $2^{x-3} \times 4^5 = 8^{\frac{x}{3}}$ کدام است؟

$7(4)$ $6(3)$ $5(2)$ $4(1)$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2^{x-3} \times 2^{10} = 2^{2x} \Rightarrow 2^{x+7} = 2^{2x} \Rightarrow x + 7 = 2x \Rightarrow x = 7$$

موضوع:

۱۲/۵۰ (۴)

۷/۵ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

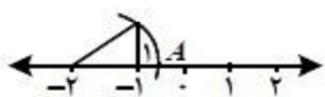
$$\frac{(\cdot/125)^3(16)^4}{(\cdot/4)^5(10)^3} = \frac{\frac{1}{9} \times 2^{16}}{\frac{2^5}{5} \times 10^3} = \frac{2^7 \times 5^5}{2^5 \times 10^3} = \frac{2^2 \times 5^5}{5^3 \times 2^3} = \frac{5}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$$

۲۰- از رابطه‌ی $2^{x+1} = 4 \times 2^{x-2}$ ، مقدار x کدام است؟ $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

$$2^{3(x+1)} = 2^2 \times 2^{x-2} \Rightarrow 3x + 3 = x \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

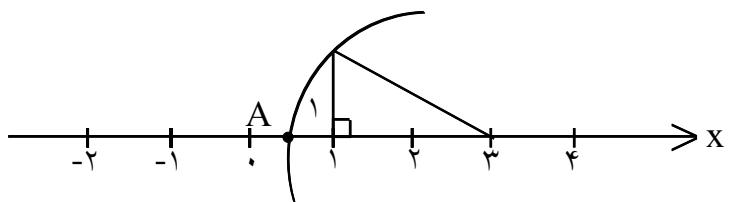
۲۱- روی محور زیر نقطه‌ی A نظیر کدام عدد است؟

 $-\frac{1}{2}$ (۲) $-1\frac{1}{2}$ (۱) $-1 - \sqrt{2}$ (۴) $-2 + \sqrt{2}$ (۳)

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \rightarrow A = -2 + \sqrt{2}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۲۲- نقطه‌ی A متناظر با کدام عدد روی محور X است؟

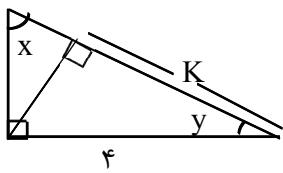
 $3 - \sqrt{5}$ (۲) $3 + \sqrt{2}$ (۱) $-\sqrt{5}$ (۴) $2 - \sqrt{5}$ (۳)

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. وتر مثلث قائم‌الزاویه را a فرض می‌کنیم. در نتیجه:

$$a^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

بنابراین، نقطه‌ی A متناظر با عدد $\sqrt{5} - 3$ است.

موضوع:

۲۳- در شکل زیر مقدار k کدام است؟

$\text{۴} \sin y \quad (۲)$

$\text{۴} \sin x \quad (۱)$

$\frac{1}{4} \sin x \quad (۴)$

$\frac{1}{4} \sin y \quad (۳)$

در مثلث قائم الزاویه کوچک با اضلاع k و 4 داریم :

$$\frac{k}{4} = \cos y \Rightarrow k = 4 \cos y$$

با توجه به اینکه y و x دو زاویه متمم هستند پس :

$$x = \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow \sin x = \cos y \Rightarrow k = 4 \sin x$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۲۴- عبارت $\text{tg}^2(x) - \sin^2(x)$ برابر است با :

$$\cot^2(x) \cos^2(x) \quad (۴) \quad \cot^2(x) \sin^2(x) \quad (۳) \quad \text{tg}^2(x) \cos^2(x) \quad (۲) \quad \text{tg}^2(x) \sin^2(x) \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \text{tg}^2 x - \sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) \\ &= \sin^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = \sin^2 x \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = \sin^2 x \cdot \text{tg}^2 x \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

$$\begin{aligned} \text{۲۵- حاصل } (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \text{tg} \theta \cos^2 \theta &= \text{برابر کدام است؟} \\ \cdot \quad (۴) & \quad 1 + \cot \theta \quad (۳) \quad \text{tg} \theta \quad (۲) \quad 1 \quad (۱) \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \text{tg} \theta \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \text{tg} \theta \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

$$\begin{aligned} \text{۲۶- حاصل عبارت } \cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x &= \text{برابر است با:} \\ \cdot \quad (۴) & \quad 2 \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱) \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x = \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin^2 x$$

$$= 1 \times (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin^2 x = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1$$

۲۷- عبارت $\left(\frac{1}{\cos \alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right)$ برابر است با:

$$\tan \alpha \quad (۴)$$

$$1 + \tan^2 \alpha \quad (۳)$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \quad (۲)$$

$$\operatorname{Cotg}^2 \alpha \quad (۱)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right) = \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

$$\operatorname{Cotg} \alpha \quad (۴)$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \operatorname{Cotg} \alpha \cdot \sin^2 \alpha \quad (۲)$$

(۱) صفر

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \operatorname{Cotg} \alpha \cdot \sin^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \end{aligned}$$

$$\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

۲۹- درستی تساوی مقابل را نشان دهید.

$$\begin{aligned} & \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = (\cancel{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = \text{طرف راست تساوی} \Rightarrow \text{طرف فوق همواره درست است.} \end{aligned}$$

۳۰- عبارت مثلثاتی $A = \frac{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$ را تا حد امکان ساده کنید.

$$A = \frac{\tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

موضوع:

۳۱- نردنی به طول ۱۰ متر به دیواری تکیه داده است. زاویه نردنی با سطح زمین 60° است. فاصله نوک نردنی تا زمین بر حسب متر کدام است؟

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$5\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

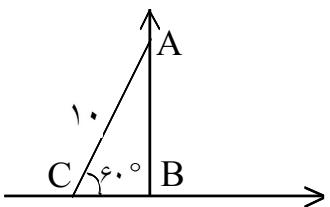
$$5\sqrt{3} \quad (2)$$

$$4\sqrt{3} \quad (1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{10}$$

$$AB = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$



$$\frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} \quad \text{کدام است؟}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

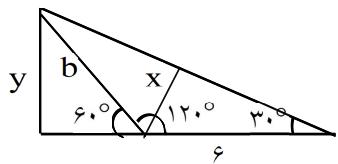
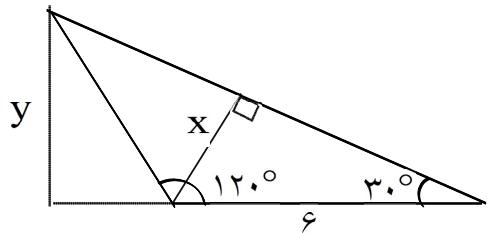
$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم الزاویه $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$, از $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ باشد، حاصل $\frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C}$ یک دیگرند. بنابراین: \hat{C} متمم یک دیگرند.

۳۲- اندازه ارتفاع وارد بر اضلاع مثلث را در شکل زیر به دست آورید.



پاسخ: چون مثلث، متساوی الساقین است $\boxed{b = 6} \iff$

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$$

$$x = \sin 30^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

موضوع:

۳۴- حاصل عبارت $\cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$ کدام است؟

(۱) ۲
 (۲) صفر
 (۳) ۱
 (۴) ۲

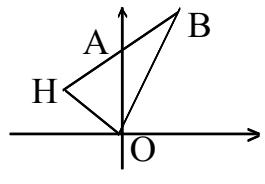
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta + \tan^2 \theta) + \underbrace{(\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}_{\text{مزدوج}} =$$

$$\cos^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + \cos^2 \theta - 1 = 1 + \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{1} - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

۳۵- نقاط $A(0, 3)$ و $B(\sqrt{3}, 6)$ و مبدأ مختصات رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع این مثلث گذرنده از مبدأ مختصات، برابر کدام است؟

(۱) ۱/۵
 (۲) ۲
 (۳) ۲/۵
 (۴) ۳



طبق شکل داریم:
 کافیست فاصله مبدأ را از خط AB محاسبه کنیم.

$$AB : y - 3 = \frac{-3}{-\sqrt{3}}(x) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 3 \Rightarrow OH = \frac{|0 - 0 - 3|}{\sqrt{3+1}} = \frac{3}{2} = 1/5$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

۳۶- اگر $A(3, 5)$, $B(-1, -1)$, $M(x, y)$ از محور X ها چقدر است؟

(۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۲/۵

می‌دانیم نقطه وسط دو نقطه $B(x_2, y_2)$ و $A(x_1, y_1)$ بوسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_s = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_s = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_s = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

فاصله هر نقطه از محور X ها برابر با عرض آن نقطه است، پس فاصله نقطه وسط از محور X ها برابر با ۲ است. لذا گزینه ۱ صحیح است.

موضوع:

- ۳۷- دسته خطوط $(m - 2)x + 2my - m + 4 = 0$ از کدام نقطه ثابت می‌گذرند؟
- (۱) $(2, -\frac{1}{2})$ (۲) $(2, 0)$ (۳) $(2, 4)$ (۴) $(2, 2)$

خط را بر حسب پارامتر m مرتب می‌کنیم:

$$(m - 2)x + 2my - m + 4 = 0 \Rightarrow mx - 2x + 2my - m + 4 = 0 \Rightarrow$$

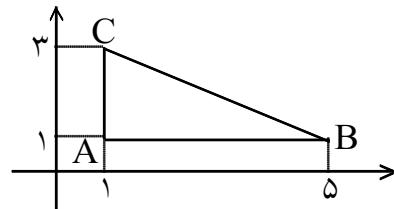
$$(mx + 2my - m) - 2x + 4 = 0 \Rightarrow m(x + 2y - 1) + (-2x + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -2x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ درست است.

- ۳۸- نقطه تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC که در آن $A(1, 1)$, $B(5, 1)$ و $C(1, 3)$ است کدام نقطه است؟

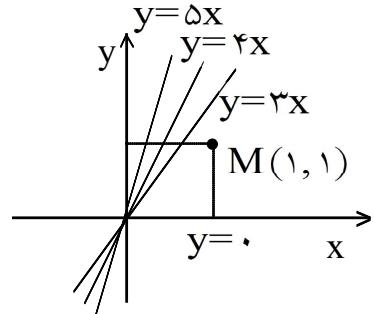
- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(1, 1)$ (۳) $(3, 2)$ (۴) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$



با توجه به شکل، مشخص است که مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است ($\hat{A} = 90^\circ$). پس محل برخورد ارتفاعها، همان نقطه $(1, 1)$ است. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

- ۳۹- نقطه $M(1, 1)$ به کدام یک از خطوط زیر نزدیک‌تر است؟

- (۱) $y = 0$ (۲) $y = 3x$ (۳) $y = 5x$ (۴) $y = 4x$



ساده‌ترین روش حل این مسئله، رسم شکل است.

با توجه به شکل، نقطه $M(1, 1)$ نزدیک‌تر از سایر خطوط است،

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

موضوع:

۴۰- فاصله دو خط موازی $y = mx + 4$ و $y = mx + 2$ برابر است با :

$$\sqrt{m+2} \quad (2)$$

$$\sqrt{m+1} \quad (1)$$

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

یادآوری: فاصله دو خط موازی $ax + by + c' = 0$ و $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

چون دو خط $y = mx + 4$ و $y = mx + 2$ طبق فرض موازی‌اند پس: $m = 1$

$y = mx + 4 \Rightarrow y = x + 4 \Rightarrow y - x - 4 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ y = x + 2 \Rightarrow y - x - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|(-4) - (-2)|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ بنابراین:

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۴۱- مساحت مربعی که دو ضلع مقابل آن بر روی دو خط به معادله‌های $y = x + 3$ و $y = x + 5$ قرار دارد، کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$4/5 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$5/5 \quad (1)$$

چون معادلات داده شده، معادلات دو ضلع مقابل مربع می‌باشد، پس فاصله این دو خط موازی برابر ضلع مربع است.

فاصله دو خط موازی $a'x + b'y + c' = 0$ و $ax + by + c = 0$ پس: $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 3 \Rightarrow y - x - 3 = 0 \\ y = x \Rightarrow y - x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|-3 - 0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = d^2 = \frac{9}{2} = 4/5$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

۴۲- محیط یک مستطیل ۸۲ واحد است، اگر از طول آن ۷ واحد کم کنیم باقیمانده یک مربع می‌شود. ضلع کوچک این مستطیل کدام است؟

$$19 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

$$17 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. x را طول و y را عرض مستطیل می‌گیریم داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(x+y) = 82 \\ x - y = y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 41 \\ x - y = y \end{array} \right. \Rightarrow 2y = 41 - y = 34 \Rightarrow y = 17$$

۴۳- عددی از نصف آن عدد ۳ واحد بیشتر است آن عدد کدام است؟

$$5/9 \quad (5)$$

$$63 \quad (4)$$

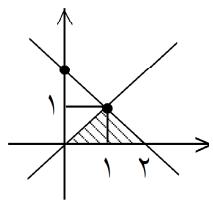
$$54 \quad (3)$$

$$45 \quad (2)$$

$$36 \quad (1)$$

$\frac{5}{9}x = \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow 10x = 9x + 54 \Rightarrow x = 54$ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

موضوع:



-۴۴- مساحت ناحیه محدود به نمودار $y^2 - 2x - 2y = 0$ و محور X ها کدام است؟

۱ (۲)

۲ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۳)

$$(x - y)(x + y - 2) = 0 \Rightarrow S = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

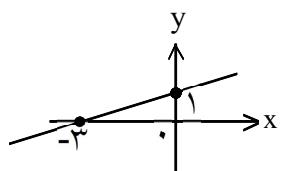
-۴۵- نقطه‌ای بر محور عرض‌ها که از $B(-4, 1)$, $A(2, 3)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

 $P(0, -1)$ (۴) $P(0, 1)$ (۳) $P(0, -2)$ (۲) $P\left(0, \frac{5}{3}\right)$ (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است عمودمنصف AB را با محور عرض‌ها قطع دهیم.

$$M\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (-1, 2) \quad m_{AB} = \frac{3-1}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow m' = -3$$

$$AB: y - 2 = -3(x + 1) \Rightarrow \begin{cases} y = -3x - 1 \\ x = \cdot \end{cases} \Rightarrow p(0, 1)$$



-۴۶- نمودار مقابل مربوط به کدام یک از خطوط است؟

$$x - 3y = 2 \quad (۲)$$

$$3y - x = 2 \quad (۱)$$

$$3y - x = 3 \quad (۴)$$

$$x - 3y = 3 \quad (۳)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار خط مورد نظر ملاحظه می‌شود که دو نقطه این خط عبارتند از:

$$A(0, 1) \text{ و } B(-3, 0)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{-3 - 0} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{3}$$

: شیب خط

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}x \Rightarrow 3y - 3 = x \Rightarrow 3y - x = 3$$

موضوع:

۴۷- فاصله‌ی نقطه‌ی A واقع بر نیمساز ناحیه‌ی اول از خط به معادله‌ی $2y = -x + 1$ برابر $\sqrt{5}$ است. طول نقطه‌ی A کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{4}{3} (2)$ $\frac{3}{4} (1)$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
 $y = x \Rightarrow 2y + x - 1 = 0$ معادله نیمساز ناحیه اول و سوم

$$ax + by + c = 0 \text{ از خط به معادله } (x, y) \text{ فاصله نقطه } d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$

$$d = \frac{|1 \times x + 2 \times x - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|3x - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |3x - 1| = 5 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 2) \\ 3x - 1 = -5 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \end{cases} \text{ غیر قابل}$$

۴۸- نقاط A $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و B $\left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ و خط $x + y = 2$ مفروض‌اند، فاصله نقطه وسط AB از نقطه‌ای بطول یک، واقع بر خط فوق

کدام است؟

 $\sqrt{2} (4)$ $\sqrt{13} (3)$ $\sqrt{6} (2)$ $2\sqrt{2} (1)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
 $M\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{-3}{4}}{2}, \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2}\right) \rightarrow M(-1, \frac{3}{4})$ و $x + y = 2 \xrightarrow{x=1} y = 1$

$$\Rightarrow N(1, 1) \Rightarrow MN = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (\frac{3}{4} - 1)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{65}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}$$

۴۹- ضریب x^2 در معادله $3x^2 + 2x - 8 = 0$ چیست؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن ضریب x^2 کافی است که ضریب x^2 در دو طرف معادله را حساب نماییم، پس:

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow 3(x^2 + \dots) + 2(x - 4) = 0 \Rightarrow 3x^2 + \dots = 8x - 2x \Rightarrow 3x^2 = 6x \Rightarrow x^2 = 2x$$

بنابراین ضریب x^2 برابر ۲ است.

موضوع:

- ۵۰- درجه چند جمله‌ای حاصل از بسط $(x^5 + x^4y + y^4 + 1)^{27} - (x^2 - xy^3 + y^2)^{35}$ از اعداد زیر است؟

۲۱۳ (۴)

۱۰۸ (۳)

۱۰۵ (۲)

۶۲ (۱)

درجه چند جمله‌ای عبارت $x^5 + x^4y + y^4 + 1$ بر حسب y برابر بزرگترین درجه y در عبارت یعنی ۴ می‌باشد، بنابراین درجه چند جمله‌ای $u = (x^5 + x^4y + y^4 + 1)^{27}$ برابر $4 \times 27 = 108$ است. درجه عبارت $x^2 - xy^3 + y^2$ بر حسب y برابر 3 است. درجه عبارت $v = (xy^3)^{35}$ برابر $3 \times 35 = 105$ است. در نتیجه $u - v$ بر حسب y برابر $\max(105, 108)$ یعنی 108 است و درنتیجه گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

- ۵۱- طول و عرض مستطیلی به ترتیب ۵ و ۳ است. اگر به طول مستطیل $2x$ و به عرض آن x را اضافه کنیم، مساحت مستطیل کدام خواهد شد؟

۳x + ۱۵ (۴)

۶x + ۱۶ (۳)

۲x^۲ + ۱۵ (۲)۲x^۲ + ۱۱x + ۱۵ (۱)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & \text{عرض مستطیل جدید} = 3 + x \\ & \text{عرض} \times \text{طول} = (2x + 5)(x + 3) \\ & = 2x^2 + 6x + 5x + 15 = 2x^2 + 11x + 15 \end{aligned}$$

- ۵۲- اعداد (از کوچک به بزرگ) x_1, x_2 و x_3 متولّی بوده، حاصل $x_3x_2 - x_2x_1$ برابر است با:

x₁ + x₂ (۴)2x₂ (۳)x₁x₃ (۲)2x₁ (۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. یعنی ۲ برابر وسطی پس $2x_2$ صحیح است. البته با بررسی گزینه‌ها می‌توان به جواب رسید.

مثلث سه عدد ۱ و ۲ و ۳ را فرض کنید حتماً به جواب گزینه ۳ می‌رسید.

$$x_3x_2 - x_2x_1 = (a+1)a - a(a-1) = a^2 + a - a^2 + a = 2a$$

موضوع:

۵۳- مقدار خارج قسمت $x^3 - 5x^2 + 4$ بر $2x - 2$ به ازای $x = -2$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) ۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 4 \\ \hline 2x^3 + 4x^2 \\ \hline 4x^3 - 5x^2 + 4 \\ \hline -4x^2 + 8x \\ \hline 3x + 4 \\ \hline -3x + 6 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$2(4) + 4(-2) + 3 = 3$$

۵۴- لاستیک‌های جلوی اتومبیل بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های عقب بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند. بعد از چند کیلومتر جای لاستیک‌های جلو و عقب را عوض کنیم تا با هم در یک زمان ساییده شوند؟

(۱) ۸۵۰۰ (۲) ۹۵۰۰ (۳) ۹۳۷۵ (۴) ۸۷۵۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر کیلومتر $\frac{1}{25000}$ از لاستیک‌های جلو و $\frac{1}{15000}$ از لاستیک‌های عقب ساییده می‌شوند

پس بعد از x کیلومتر $\frac{x}{25000}$ از لاستیک‌های جلو $\frac{x}{15000}$ از لاستیک‌های عقب ساییده می‌شوند. بنابراین:

$$\frac{15000 - x}{15000} \times \frac{25000}{x} = \frac{25000 - x}{25000} \times \frac{15000}{x} \Rightarrow x = 9375$$

۵۵- اگر $a^3 + b^3 = 2$ باشد، حاصل عبارت $\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1}$ برابر است با:

$$\frac{1-b}{a-1} \quad (۱) \quad \frac{a-1}{b-1} \quad (۲) \quad \frac{b-1}{a-1} \quad (۳) \quad \frac{1-a}{b-1} \quad (۴)$$

$$\frac{(a-1)(a^2 + a + 1)}{a-1} = \frac{(b-1)(b^2 - 1)}{(a-1)(b^2 - 1)} = \frac{(b-1)(1-b^2)}{(a-1)(b^2 - 1)} = \frac{1-b}{a-1}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a^3 = 2 - b^3$$