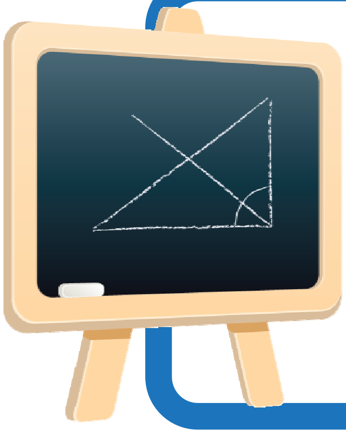
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



هندسه ۱

فصل ۴

شکل‌های فضایی:

چندوجهی:

بخشی از فضا که از همه طرف به صفحه محدود است، شکلی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی می‌گویند. بخش‌هایی از صفحه‌ها که چندوجهی را پدید می‌آورند، سطح‌هایی با محیط چندضلعی ایجاد می‌کنند. هر کدام از این چندضلعی‌ها یک وجه، ضلع‌های این وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌های این وجه‌ها، رأس‌های چندوجهی نامیده می‌شود.

چندوجهی‌های منتظم:

بخشی از فضا که از همه طرف به چند ضلعی‌های منتظم متساوی که هر یک از آن‌ها در هر ضلع با یکی از اضلاع چند ضلعی دیگری از همین نوع مشترک است، چندوجهی منتظم نامیده می‌شود.

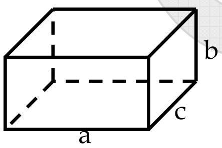
مکعب مستطیل:

مکعب مستطیل، یک شش‌وجهی است که همه وجه‌های آن مستطیل هستند. وجه‌های روبه‌رو در مکعب مستطیل موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یال‌های آن بر وجه‌ها عمود هستند. مکعب‌مستطیل ۸ رأس و ۱۲ یال دارد. در مکعب‌مستطیل به دو رأس که در یک وجه قرار ندارند رأس‌های متقابل گفته می‌شود. در هر مکعب مستطیل، پاره‌خطی که دو رأس متقابل را به‌هم وصل می‌کند، قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود و پاره‌خطی که دو رأس غیرمجاور در یک وجه را به‌هم وصل می‌کند، قطر وجه نامیده می‌شود.

نکات:

۱) اگر طول اضلاع یک مکعب مستطیل **a**، **b** و **c** باشند، طول قطر مکعب از رابطه‌ی $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$ به‌دست می‌آید.

۲) مکعب مستطیل دارای ٤ قطر متساوی است که در یک نقطه همرسند و این نقطه از همه‌ی رئوس به یک فاصله است (اقطار منصف همدیگرند) و لذا مکعب مستطیل قابل محاط شدن در یک کره است.



۳) حجم مکعب مستطیلی به ارتفاع a، طول b و عرض c، برابر abc و مساحت جانبی آن $۲a(b+c)$ و مساحت کل آن $۲(ab+ac+bc)$ است.

٤) با وصل کردن همه‌ی رأس‌های مکعب مستطیل به یکدیگر $۲۸=\binom{۸}{۲}$ پاره‌خط حاصل می‌شود، که شامل ۱۲ یال، ۱۲ قطر وجه جانبی و ٤ قطر است.

٥) هر یال مکعب مستطیل با ٤ یال موازی، و بر ۸ یال دیگر عمود است. (٤ یال متقاطع و ٤ یال متنافر)

مکعب:

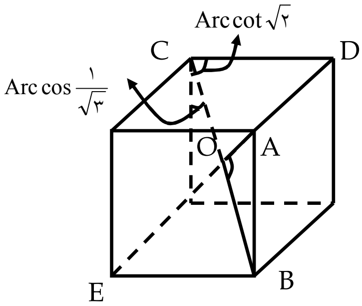
مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن با هم برابر باشند، مکعب نامیده می‌شود یا شش‌وجهی منتظمی که همه‌ی وجوه آن مربع‌های متساوی باشند، مکعب نامیده می‌شود.

نکات:

۱) حجم مکعبی که طول یال آن **a** باشد برابر $a^{۳}$ و مساحت جانبی آن $٤a^{۲}$ و مساحت کل آن $٦a^{۲}$ است.

۲) مکعب دارای ٤ قطر متساوی به اندازه‌ی $a\sqrt{3}$ است که در یک نقطه همرسند. فاصله‌ی این نقطه از همه‌ی رئوس (شعاع کره‌ی محیطی مکعب) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و فاصله‌ی آن از همه‌ی وجوه $\frac{a}{2}$ (شعاع کره‌ی محاطی مکعب) است.

۳) زاویه‌ی بین دو قطر مکعب $\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{3}$ (یا $\tan^{-1}2\sqrt{2}$) است.



زیرا:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$\Rightarrow a^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 - 2(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

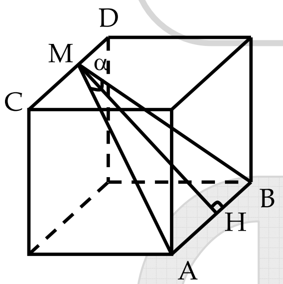
$$\Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{3}$$

٤) هر قطر وجه جانبی در مکعب $a\sqrt{2}$ است و لذا مساحت صفحه‌ی قطری مکعب (صفحه‌ی شامل دو قطر مکعب) $a^2\sqrt{2}$ است.

۵) هر مکعب ۹ صفحه‌ی تقارن و ۱۳ محور تقارن دارد.

مثال: در مکعب شکل مقابل، M وسط یال CD است. زاویه‌ی $A\hat{M}B$ کدام است؟

حل:



$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

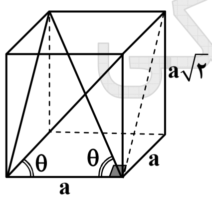
$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{2}{16}} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arc}\tan\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

مثال: قاعده یک مکعب مستطیل، به شکل مربع است و ارتفاع آن برابر قطر این مربع است. زاویه قطر مکعب مستطیل با یال کوچک‌تر آن چند درجه است؟

حل:

$$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2 + a^2} = 2a \Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

مثال: در مکعب شکل مقابل، زاویه صفحه قطری سایه زده با صفحه وجه ABCD ، چند درجه است؟



حل: چون یال مکعب بر وجه ABCD عمود است و اگر یک خط از صفحه‌ای بر صفحه‌ای عمود باشد، آن صفحه بر صفحه‌ی مذکور عمود است.

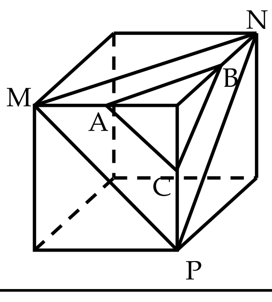
مثال: اگر بر وسط‌های سه یال گذرا از یک رأس مکعب، یک صفحه بگذرانیم، مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

۱) مثلث قائم‌الزاویه

۲) مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۳) مثلث متساوی‌الساقین

٤) مثلث متساوی‌الاضلاع

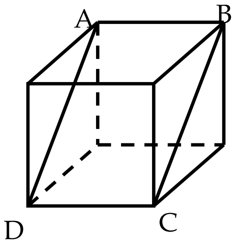


✍حل: گزینه ٤ صحیح است.

اگر ضلع مکعب را **a** بگیریم داریم $MN = MP = PN = a\sqrt{2}$ و بر اساس قضیه‌ی خط واصل بین اوساط اضلاع مثلث داریم:

$$AB = \frac{MN}{2} = BC = AC$$

☜مثال: در مکعب شکل مقابل، مساحت چهارضلعی ABCD برابر $3\sqrt{2}$ است. سطح کل مکعب چند سانتی‌متر مربع است؟



✍حل:

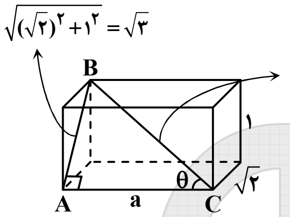
$$a^2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow S = 6a^2 = 18$$

☜مثال: کره‌ای به شعاع ۳ در مکعبی محاط شده است. قطر مکعب کدام است؟

✍حل: چون کره در مکعب محاط شده است، لذا $R = \frac{a}{2}$ و از آن‌جا $a = 2R$، لذا: $a = 2R = 2\times 3 = 6 \Rightarrow d = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

☜مثال: می‌خواهیم مکعب مستطیلی به ابعاد a، $\sqrt{2}$ و ۱ را چنان بسازیم که زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال به طول a واحد، برابر ۳۰ درجه باشد. a برابر کدام عدد انتخاب شود؟

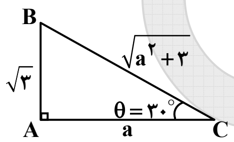
✍حل:



قطر مکعب مستطیل $L = \sqrt{a^2 + \sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{a^2 + 2 + 1} = \sqrt{a^2 + 3}$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، می‌دانیم زاویه‌ی بین قطر مکعب مستطیل و یال a، برابر 30° است.

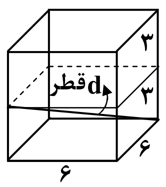
پس داریم:



$$\tan\theta = \tan 30^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 3$$

☜مثال: دو مکعب مستطیل یکسان به‌طور کامل در یک مکعب به طول یال ٦ واحد جای گرفته‌اند. طول قطر هر یک از این دو مکعب مستطیل کدام است؟

✍حل: مکعبی به طول یال ٦ واحد را در نظر می‌گیریم. برای این که در داخل این مکعب، دو مکعب مستطیل یکسان به‌طور کامل جا بگیرد، می‌توانیم صفحه‌ای را دقیقاً از وسط ارتفاع این مکعب عبور دهیم. با انجام این کار، مکعب به دو مکعب مستطیل یکسان تقسیم می‌شود که قاعده‌ی این دو مکعب مستطیل با قاعده‌ی مکعب یکسان بوده و تنها ارتفاع آن دو، نصف ارتفاع مکعب است. بنابراین ابعاد این دو مکعب مستطیل یکسان برابر ۳ و ٦ و ٦ واحد می‌باشد.



از طرفی می‌دانیم اگر اندازه‌ی یال‌های مکعب مستطیل a، b و c باشند، قطر این مکعب مستطیل برابر با $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ خواهد بود. بنابراین:

$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{6^2+6^2+3^2} = \sqrt{81} = 9$$

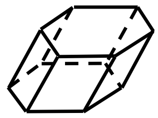
منشور:

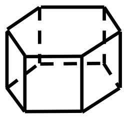
منشور یک چندوجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع هستند.

دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، قاعده‌های منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی‌الاضلاع هستند، وجه‌های جانبی و یال‌هایی از منشور که محل تلاقی وجه‌های جانبی منشور هستند یال‌های جانبی نامیده می‌شوند که همگی با هم موازیند.

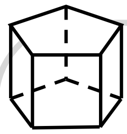
ارتفاع منشور پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به‌هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.

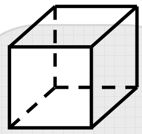
اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک منشور قائم و اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌ها عمود نباشند، آن را منشور مایل می‌نامند.

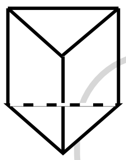
منشور مایل 

منشور قائم 

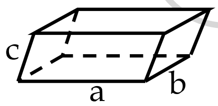
منشور را بر اساس شکل چندضلعی‌های قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند، مثلاً اگر قاعده‌های یک منشور مثلث باشند، آن را منشور مثلثی می‌نامند. به این ترتیب مکعب مستطیل یک منشور چهارضلعی قائم است.

منشور پنج‌ضلعی 

منشور چهارضلعی 

منشور مثلثی 

اگر قاعده‌های یک منشور دو متوازی‌الاضلاع همنهشت باشند، به آن متوازی‌السطوح گفته می‌شود.



مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را مساحت جانبی (مساحت رویه‌ای که اطراف منشور را تشکیل می‌دهد) و مجموع مساحت‌های جانبی و مساحت دو قاعده‌ی منشور را مساحت کل آن می‌نامند.

قضیه: مساحت جانبی منشور قائم برابر است با محیط قاعده ضرب در طول یال جانبی منشور.

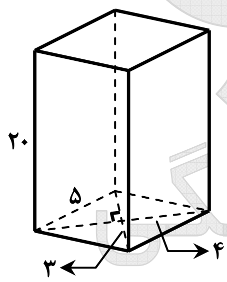
نکته: حجم منشوری با ارتفاع h و مساحت قاعده‌ی s برابر است با: $V = sh$

☜مثال: سطح کل منشور قائم که قاعده‌اش لوزی به اقطار ٦ و ٨ و ارتفاعش مساوی محیط قاعده آن باشد، چقدر است؟

✍حل: چون قاعده لوزی است و اقطار لوزی بر هم عمودند، لذا ضلع قاعده برابر است

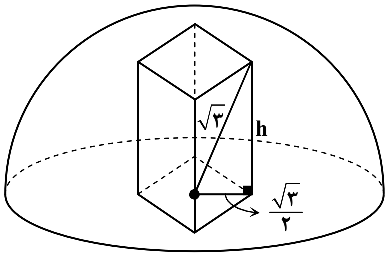
با: $\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2} = 5$ و لذا محیط قاعده برابر است با: $4\times 5 = 20$

لذا سطح کل این منشور برابر است با: $S = 2\left(\frac{6\times 8}{2}\right)+4(5\times 20) = 448$



☜مثال: در داخل نیمکره به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگترین منشور قایم با قاعده مربع طوری ساخته شده است که قطر مربع برابر $\sqrt{3}$ است، حجم منشور کدام است؟

✍حل:

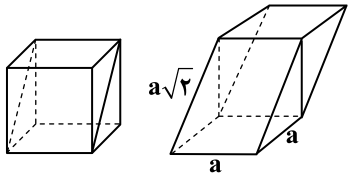


$$h = \sqrt{3-\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$V = Sh = \frac{(\sqrt{3})^2}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

☜مثال: در یک مکعب به طول یال a، صفحه‌ی قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر a^2 است؟

✍حل:

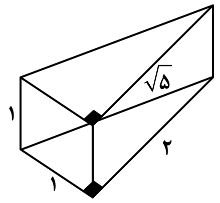


سطح دو قاعده‌ی بالا و پایین و دو قاعده‌ی کناری تغییر نکرده است. فقط دو مربع جلـو و عقب به مستطیل تبدیل شده‌اند.

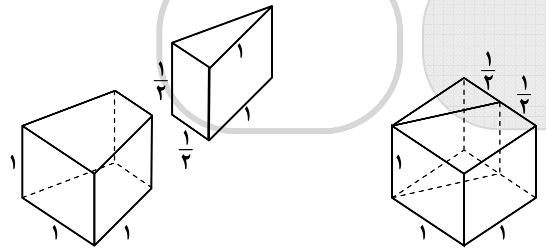
$$S_{\text{کل}} = 4a^2 + 2(a) + (a\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}+4)a^2$$

☜مثال: قاعده‌ی یک منشور، مثلثی به اضلاع $\sqrt{5}$، ۲ و ۱ واحد و ارتفاع منشور ۱ واحد است. این منشور را به دو جزء چنان تقسیم می‌کنیم که از کنار هم قرار دادن این دو جزء یک مکعب حاصل شود. قطر مکعب کدام است؟

✍حل:



برای آن‌که مکعب بسازیم اگر از وسط یال دو صفحه‌ای موازی وجه مربع شـکل بگـذاریم، دو جـزء حاصـل تشـکیل مکعـب می‌دهند.



$a\sqrt{3} = \sqrt{3}$ قطر مکعب

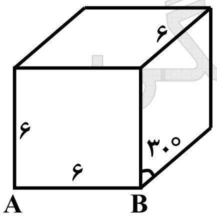
راه حل دوم: چون از این تغییر، حجم تغییر نمی‌کند، پس:

$$a^3 = \left(\frac{1\times 2}{2}\right)\times 1 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{قطر} = a\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

منشور منتظم:

منشور قائمی که قاعده‌های آن دو چندضلعی منتظم باشند، منشور منتظم نامیده می‌شود.

☜مثال: قاعده‌ی یک منشور مربعی به ضلع ٦ و یک وجه جانبی آن نیز مربع است. اگر یکی از وجوه جانبی دیگر لـوزی بـه زاویـه 30° باشد، حجم این منشور کدام است؟



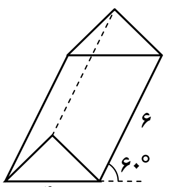
✍حل:

یال AB بر وجه لوزی شکل عمود است، می‌توان AB را ارتفاع و لوزی را قاعده‌ی منشور اختیار کرد.

$$V = \text{مساحت لوزی} \times \text{طول } AB = (6\times 6\sin 30^\circ)\times 6 = 108$$

☜مثال: قاعده‌ی یک منشور مایل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ٤ واحد است. طول یال‌های جانبی منشور ٦ واحد و زاویه‌ی یال‌هـا با صفحه‌ی قاعده ٦٠ درجه است. حجم این منشور کدام است؟

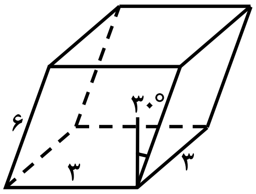
✍حل:



$$V = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\times 6\,\mathrm{Sin}\,60 = 4\sqrt{3}\times 3\sqrt{3} = 36$$

☜مثال: حجم منشور مربع‌القاعده‌ی مایلی که طول ضلع قاعده‌ی آن ۳ و طول یال مایل آن ۶ باشد و همچنین زاویه‌ای که وجه مایل با خط عمودی می‌سازد °۳۰ باشد، چقدر است؟

✍حل:

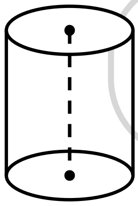


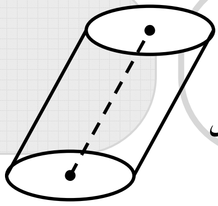
$$V = (۳)^۲ \times ۶ \cos ۳۰° = ۲۷\sqrt{۳}$$

استوانه:

استوانه شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چندضلعی، دو دایره‌ی همنهشت هستند. از نظر مفهومی وقتی تعداد اضلاع قاعده‌ی یک منشور منتظم به سمت بی‌نهایت میل کند، منشور به استوانه تبدیل می‌شود.

اگر محور استوانه یعنی پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به‌هم وصل می‌کند، بر قاعده عمود باشد، استوانه را قائم و در غیر این‌صورت آن را مایل می‌نامند.


استوانه قائم


استوانه مایل

از دوران یک مستطیل حول یکی از اضلاعش، یک استوانه‌ی قائم پدید می‌آید.

تذکر: در استوانه‌ی قائم، محور استوانه همان ارتفاع استوانه است.

همانند منشور، مساحت رویه‌ای (سطحی) که اطراف استوانه را تشکیل می‌دهد، مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده، مساحت کل نامیده می‌شود.

نکته: مساحت جانبی استوانه‌ی قائمی به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h برابر است با: $۲\pi Rh$ و مساحت کل آن برابر است با:

$۲\pi R^۲ + ۲\pi Rh$

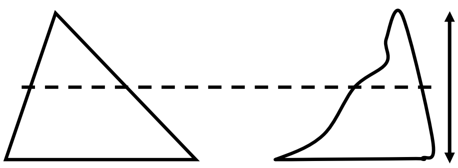
☜مثال: حجم استوانه‌ی دواری به ارتفاع ۳ برابر با: ۱۲π است. مساحت سطح جانبی آن کدام است؟

✍حل:

$$V = \pi r^۲ h = \pi r^۲ \times ۳ = ۱۲\pi \Rightarrow r^۲ = ۴ \Rightarrow r = ۲ \Rightarrow \text{سطح جانبی} = ۲\pi rh = ۲\pi \times ۲ \times ۳ = ۱۲\pi$$

اصل کاوالیری درباره‌ی مساحت‌ها:

فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند، اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آن‌ها قطعه‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کند، مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

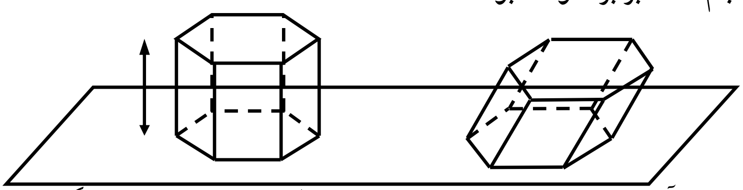


تذکر: از اصل کاوالیری برابر بودن قاعده‌ها و ارتفاع‌ها نیز نتیجه می‌شود.

اصل کاوالیری درباره حجم‌ها:

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل دارای مساحت‌های برابر باشند، آن‌گاه حجم این دو شکل برابر است.

مثلاً اگر قاعده‌های دو منشور در یک صفحه قرار گرفته و مساحت سطح مقطع‌هایی که از برخورد هر صفحه‌ای موازی با این صفحه حاصل می‌شود، برابر باشند، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم، حجم این دو منشور برابر است. لذا طبق اصل کاوالیری، اگر مساحت قاعده‌های دو منشور هم ارتفاع برابر باشند، حجم آن‌ها برابر خواهد بود.



$V = V'$

☜مثال: حجم استوانه‌ای که قطر قاعده‌ی آن ٤ سانتی‌متر است، با منشور مربع‌القاعده‌ای برابر است. اگر ارتفاع هر دو ٦ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع چقدر است؟ $(\pi = ۳/۱٤)$

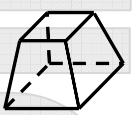
✍حل: طبق اصل کاوالیری، چون حجم و ارتفاع هر دو با هم برابر است لذا باید مساحت قاعده‌هایشان نیز با هم برابر باشد.

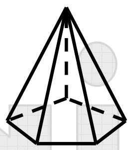
مساحت مربع = مساحت دایره $= \pi(۲)^۲ = ۴\pi = ۱۲/۵۶$

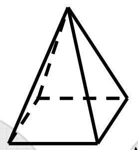
هرم:

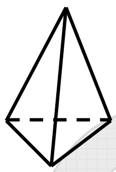
هرم یک چندوجهی است که همه‌ی وجوه آن به‌جز یکی در یک رأس مشترکند.

وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد، قاعده‌ی هرم و وجه‌های دیگر، وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند. وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند. ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.


هرم ناقص


هرم پنج‌ضلعی

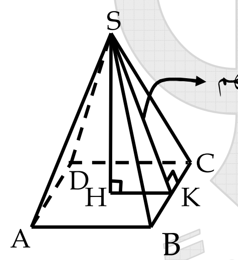

هرم مربعی


هرم مثلثی

نکته: حجم هرمی با مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{۱}{۳} S \times h$

هرم منتظم:

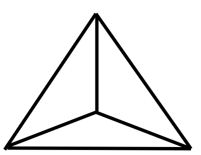
اگر قاعده‌ی یک هرم چندضلعی منتظم باشد و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را منتظم می‌نامند. وجوه جانبی هرم منتظم، مثلث‌های متساوی‌الساقین متساوی هستند. ارتفاع یکی از این مثلث‌ها را سهم هرم منتظم می‌نامند. (برای هرم غیرمنتظم سهم تعریف نمی‌شود.)



سهم $= \sqrt{SH^۲ + HK^۲} = \sqrt{SB^۲ - BK^۲}$

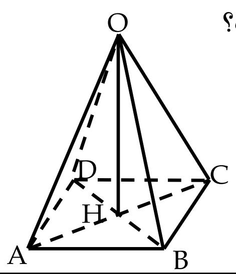
نکاتی در مورد چهاروجهی منتظم (هرم مثلث‌القاعده‌ی منتظم):

همه‌ی وجه‌های چهاروجهی منتظم، مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. اگر اندازه‌ی هر یال چهاروجهی منتظم a باشد، احکام زیر در مورد آن صحیح است.



۱) چهاروجهی دارای چهار ارتفاع مساوی به اندازه‌ی $\frac{a\sqrt{٦}}{۳}$ است، که از یک نقطه می‌گذرند.

۲) حجم این چهاروجهی $\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲}$، مساحت جانبی آن $\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{٤}$ و مساحت کل آن $a^۲\sqrt{۳}$ است.



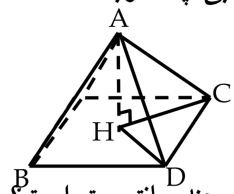
☜مثال: حجم هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای که ضلع قاعده‌ی آن $۳\sqrt{۲}$ و طول هر یال جانبی آن ۵ است، کدام است؟

✍حل:

$$BD = ۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} \quad , \quad HB = \frac{۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲} = ۳$$

$$OH^۲ = OB^۲ - HB^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow OH = ۴ \Rightarrow V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳}\left(۳\sqrt{۲}\right)^۲ \times ۴ = ۲۴$$

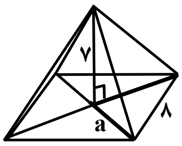
مثال: در یک هرم منتظم مربع‌القاعده، طول ارتفاع برابر نصف قطر قاعده‌ی آن است. زاویه‌ی رأس مثلث‌های جانبی چند درجه است؟



حل:

$$AH = HC = HD \Rightarrow AC = CD = AD \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

مثال: ارتفاع هرم مربع‌القاعده‌ی منتظمی ۷ سانتی‌متر و یک ضلع قاعده‌اش ۸ سانتی‌متر است. یال هرم چند سانتی‌متر است؟



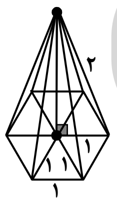
حل:

$$a\sqrt{۲} = ۸ \Rightarrow a = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow \text{یال} = \sqrt{۷^۲ + \left(۴\sqrt{۲}\right)^۲} = \sqrt{۴۹ + ۳۲} = \sqrt{۸۱} = ۹\,cm$$

مثال: قاعده‌ی یک هرم منتظم، شش‌ضلعی منتظمی است به ضلع ۱ واحد و طول یال جانبی آن برابر ۲ واحد است. حجم این هرم چند واحد مکعب است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

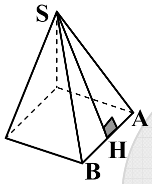
حل:



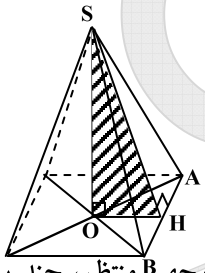
$$h = \sqrt{۲^۲ - ۱^۲} = \sqrt{۳}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\left(۶\frac{(۱)^۲\sqrt{۳}}{۴}\right) \times \sqrt{۳} = \frac{۳}{۲}$$

مثال: در هرم مربعی منتظم زیر، $SA = \sqrt{۳۴}$ و $SH = ۵$. حجم این هرم کدام است؟



حل:



$$SA = \sqrt{۳۴}\,,\ SH = ۵$$

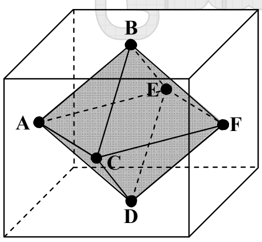
$$\overset{\Delta}{SAH}: AH^۲ = SA^۲ - SH^۲ = ۳۴ - ۲۵ = ۹ \Rightarrow AH = ۳$$

$$\Rightarrow OH = ۳, AB = ۶$$

$$\overset{\Delta}{SOH}: SO^۲ = SH^۲ - OH^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow SO = ۴$$

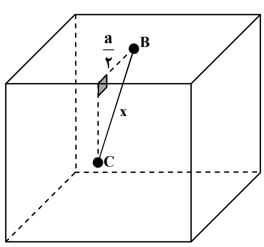
$$\text{حجم هرم}\ V = \frac{۱}{۳}(\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}) = \frac{۱}{۳}(۶)^۲ \times ۴ = ۴۸$$

مثال: در یک مکعب، مرکز تقارن هر وجه جانبی، رأس‌های یک هشت‌وجهی منتظم‌اند. حجم این هشت‌وجهی منتظم، چند برابر حجم مکعب است؟ (هشت‌وجهی منتظم: دو هرم چهاروجهی منتظم در قاعده مشترک)



حل: همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید، دو هرم ABCDE و FBCDE از قاعده به هم چسبیده‌اند و یک ۸ وجهی منتظم را به‌وجود آورده‌اند که اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده‌ی BCDE در هر کدام از این هرم‌ها نصف طول ضلع مکعب یعنی $\frac{a}{۲}$ است. اما برای پیدا کردن حجم هرم باید مساحت قاعده را نیز پیدا کنیم که با توجه به شکل زیر، هر یک از اضلاع مربع قاعده با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به‌دست می‌آید:

$$x^۲ = \frac{a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۲}$$

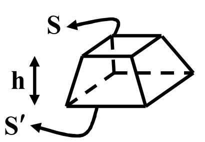


و چون هشت‌وجهی ایجاد شده منتظم است. پس همه‌ی یال‌های آن با هم برابرند، در نتیجه:

$$V_{\text{هشت‌وجهی}} = ۲V_{ABCDE} = ۲\left(\frac{۱}{۳}Sh\right) = \frac{۲}{۳}(x^۲)\left(\frac{a}{۲}\right) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{a^۲}{۲}\right)\left(\frac{a}{۲}\right) = \frac{a^۳}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{هشت‌وجهی}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{۱}{۶}$$

هرم ناقص منتظم:



چند وجهی‌ای که دو قاعده‌اش دو چندضلعی منتظم و پاره‌خط واصل بین مراکز دو قاعده، ارتفـاع آن باشد، هرم ناقص منتظم نامیده می‌شود. وجوه جانبی هرم ناقص منتظم، ذوزنقه‌هـای متسـاوی‌السـاقین متساوی هستند و ارتفاع یکی از این ذوزنقه‌ها، سهم هرم ناقص منتظم نامیده می‌شود.

اگر V حجم و S',S مساحت دو قاعده و h ارتفاع یک هرم ناقص باشد، همواره برای هر نوع هرم ناقص داریم:

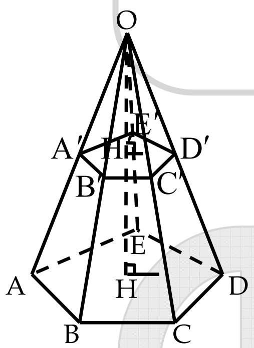
$$V=\frac{۱}{۳}h\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)$$

چند نکته در مورد هرم:

۱) قضیه: مقطع هرم با هر صفحه‌ی موازی با قاعده، یک چندضلعی است که با قاعده متشابه است.

$$A'B'C'D'E'\sim ABCDE$$

۲) قضیه: نسبت مساحت مقطع موازی با قاعده‌ی هرم به مساحت قاعده‌ی هرم برابر است با مربع نسـبت فواصـل رأس هـرم از آن مقطع و قاعده.



اگر هرم با حجم V و سطح قاعده‌ی S را با صفحه‌ای به موازات قاعده قطع کنـیم و سـطح مقطـع به‌دست آمده S' و حجم متناظر با آن V' باشد داریم:

$$\frac{S'}{S}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^۲$$

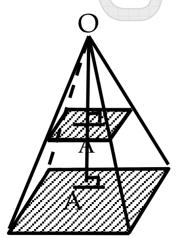
$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}\right)^۳=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^۳$$

☜مثال: هرمی با حجم V را با صفحه‌ای موازی قاعده که از وسط ارتفاع نظیر قاعده‌ی هرم می‌گذرد، قطع مـی‌دهـیم. حجـم هـرم ناقص چقدر است؟

✍حل:

$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳\Rightarrow V'=\frac{۱}{۸}V\Rightarrow \text{حجم هرم ناقص}=V-V'=\frac{۷}{۸}V$$

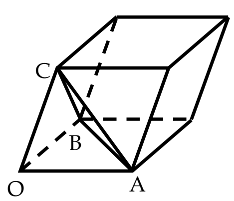
☜مثال: اگر دو سطح قاعده‌ی یک هرم ناقص به‌ترتیب ۲۷ و ۱۸ سانتی‌متر مربع و ارتفاع هرم اصلی، ۱۲ سانتی‌متـر باشـد، فاصـله‌ی قاعده‌ی کوچکتر از رأس هرم چند سانتی‌متر است؟



✍حل:

$$\frac{OA'}{۱۲}=\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲۷}}\Rightarrow OA'=۴\sqrt{۶}$$

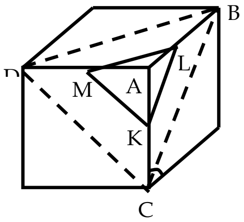
۳) حجم هرمی که طول سه یال همرس آن **a**، **b** و **c** باشد، $\frac{۱}{۶}$ حجم متوازی‌السطوحی است که سه یال همـرس آن **a**، **b** و **c** باشد.



$V_{OABC}=\frac{۱}{۶}$ حجم متوازی‌السطوح

☜مثال: در مکعب شکل مقابل M, L, K وسط‌های سه یال هستند. حجم هرم $AMLK$ چه کسری از حجم کل است؟

✍حل:



$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABD}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}S_{\text{مربع}}\times h=\frac{1}{6}\ \text{حجم کل}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{V_{AMLK}}{V_{ABCD}}=\left(\dfrac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}\right)^3\\ ML=\dfrac{1}{2}BD\Rightarrow S_{\Delta MLK}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{V_{AMLK}}{V_{ABCD}}=\frac{1}{8}$$

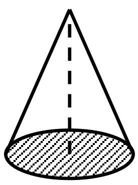
$$\Rightarrow V_{AMLK}=\frac{1}{8}V_{ABCD}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}\ \text{حجم کل}\right)=\frac{1}{48}\ \text{حجم کل}$$

مخروط:

مخروط شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به‌جای چندضلعی، دایره است. از نظر مفهومی اگر تعداد اضلاع قاعده‌ی یک هرم منتظم به سمت بی‌نهایت میل کند، هرم به مخروط تبدیل می‌شود.

پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره‌ی قاعده وصل می‌کند، محور قاعده نام دارد. اگر محور بر قاعده عمود باشد، مخروط قائم و در غیر این صورت مایل نامیده می‌شود.

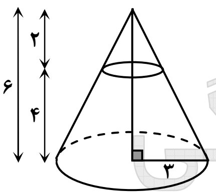
از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع قائمش یک مخروط قائم پدید می‌آید. وتر مثلث اصطلاحاً مولد این مخروط قائم نامیده می‌شود.



نکته: حجم مخروطی با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

و مساحت جانبی مخروط قائم با مولدی به طول L برابر است با: $S=\frac{1}{2}$ محیط قاعده × مولد $=\pi rL$

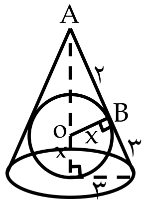
☜ مثال: مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ٦ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله ٤ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟



✍ حل:

$$\frac{V}{V_{\text{کل}}}=\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{1}{27}\Rightarrow V=\frac{1}{27}V_{\text{کل}}=\frac{1}{27}\times\frac{1}{3}\pi(3)^2\times 6=\frac{2\pi}{3}$$

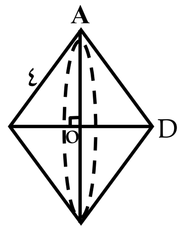
☜ مثال: در مخروط دواری که شعاع قاعده‌اش ۳ و ارتفاعش ٤ است، کره‌ای محاط کرده‌ایم. شعاع این کره کدام است؟



✍ حل:

در مثلث قائم الزاویه ΔOAB : $OA^2=OB^2+AB^2\Rightarrow(4-x)^2=x^2+4\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

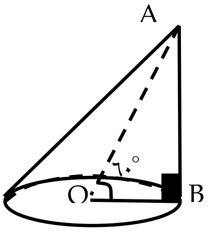
☜ مثال: مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ٤ را حول یکی از ضلع‌هایش دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟



✍ حل: می‌توان فرض کرد دو مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌هایشان (ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع) دوران کرده و دو مخروط به‌وجود آورده‌اند.

$$a=4\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}=AO,\ DO=\frac{a}{2}=2\Rightarrow V=2\times\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2\times 2=16\pi$$

☜مثال: در شکل مقابل $\hat{AOB} = 60^\circ$ است. اگر $OA = 4\sqrt{3}$ باشد، حجم مخروط کدام است؟



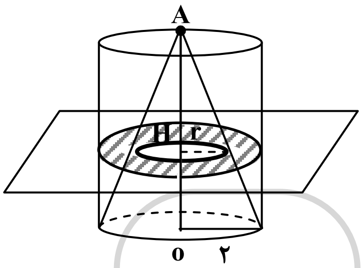
✍حل:

$$OA = 4\sqrt{3} \Rightarrow h = AB = OA\sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \quad , \quad r = OB = OA\cos 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 6 = 24\pi$$

☜مثال: از داخل یک استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده‌ی ۲ واحد، بزرگ‌ترین مخروط ممکن را خارج کرده‌اند. شکلی که از استوانه باقی‌مانده را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۱ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

✍حل:



$$\frac{AH}{AO} = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{8}{5}$$

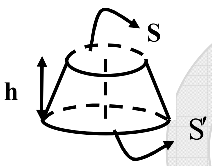
$$S_{\text{مقطع}} = \pi(2)^2 - \pi\left(\frac{8}{5}\right)^2 = 4\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{36\pi}{25} = 1/44\pi$$

مخروط ناقص قائم:

از دوران ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه حول ساق قائمش، مخروط ناقص قائم پدید می‌آید، ساق مایل ذوزنقه، مولد، ساق قائم، ارتفاع و قاعده‌های ذوزنقه شعاع‌های قاعده‌های مخروط ناقص قائم می‌باشند.

نکته: حجم هر نوع مخروط ناقص قائم با سطح قاعده‌های S', S و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'})$

☜مثال: در مخروط ناقص قائمی، هرم ناقص شش‌پهلویی محاط می‌کنیم. نسبت حجم‌های آن‌ها کدام است؟



✍حل:

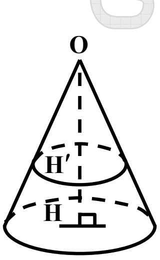
اگر شعاع‌های قاعده‌های مخروط ناقص را R', R و ارتفاع آن را h بگیریم:

مساحت شش‌ضلعی محاط در دایره‌ای به شعاع R $= 6R \times \frac{R\cos 30^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

$V' =$ حجم هرم ناقص و $V =$ حجم مخروط ناقص

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'})}{\frac{1}{3}h(S_1 + S_1' + \sqrt{S_1 S_1'})} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}R'^2 + \frac{3\sqrt{3}RR'}{2}}{\pi R^2 + \pi R'^2 + \pi RR'} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

نکته: نسبت مساحت هر مقطع موازی با قاعده‌ی مخروط به مساحت قاعده‌ی آن برابر است با مربع نسبت فاصله‌های رأس مخروط از آن مقطع و قاعده‌ی مخروط.

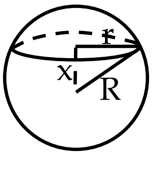


اگر مخروط با حجم V و سطح قاعده‌ی S را با صفحه‌ای به موازات قاعده قطع کنیم، به طوری‌که سطح مقطع به‌دست آمده S' باشد، داریم:

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{OH'}{OH}\right)^2 \qquad \frac{V'}{V} = \left(\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}\right)^3 = \left(\frac{OH'}{OH}\right)^3$$

کره:

کره مکان هندسی نقاطی از فضا است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت را شعاع کره می‌نامند.



هر پاره‌خطی که دو سر آن روی کره باشد را وتر کره می نامند و وتری که از مرکز کره بگذرد را قطر کره می‌نامند. کره یک سطح دوار است که از دوران یک نیم دایره حول قطرش پدید می‌آید. مقطع هر صفحه با کره یک دایره است. اگر فاصله‌ی مرکز کره از صفحه x، و شعاع کره R باشد، شعاع دایره مقطع برابر است با:

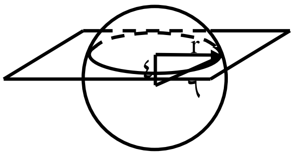
$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

نکته ۱: مکان هندسی نقاطی از فضا که از هر یک از آن‌ها پاره‌خط ثابت AB به زاویه قائمه دیده شود، کره‌ای به قطر AB است.

نکته ۲: حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

و مساحت آن برابر است با: $S=4\pi R^2$

مثال: کره‌ای به شعاع ۶ واحد بر صفحه‌ای مماس است. مساحت مقطع آن با صفحه‌ای به فاصله ۲ واحد از صفحه مماس چقدر است؟



حل:

$$S=\pi r^2=\pi(6^2-4^2)=20\pi$$

مثال: حجم بزرگ‌ترین مکعب درون یک کره چه نسبتی از حجم آن کره است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{4\pi}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

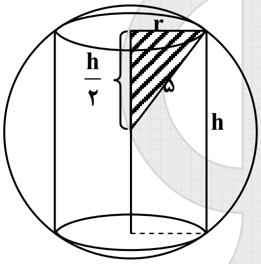
حل:

$$a\sqrt{3}=2R$$

$$\frac{V_{\text{مکعب}}}{V_{\text{کره}}}=\frac{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{\frac{8}{\cancel{3}\sqrt{3}}}{\frac{4\pi}{\cancel{3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}\pi}$$

مثال: در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه‌ای قائم با سطح جانبی 48π محاط شده است. بیشینه حجم این استوانه چه‌قدر است؟

حل:



شعاع کره $R=5$

سطح جانبی استوانه $S=2\pi r\times h=48\pi\Rightarrow rh=24\Rightarrow h=\frac{24}{r}$

در مثلث هاشور خورده: $25=\frac{h^2}{4}+r^2$

$$\xrightarrow[25=\frac{h^2}{4}+r^2]{h=\frac{24}{r}}25=\frac{\left(\frac{24}{r}\right)^2}{4}+r^2\Rightarrow 25=\frac{(24)^2}{4r^2}+r^2$$

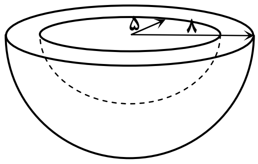
$$\Rightarrow 25=\frac{144}{r^2}+r^2\Rightarrow 25r^2=144+r^4\Rightarrow (r^2)^2-25r^2+144=0\Rightarrow r^2=t$$

$$t^2-25t+144=0\left\langle\begin{matrix}t=9\\ t=16\end{matrix}\right.\Rightarrow\begin{cases}r^2=9,h=8\Rightarrow V=\pi r^2h=\pi\times 9\times 8=72\pi\\ r^2=16,h=6\Rightarrow V=\pi r^2h=\pi\times 16\times 6=96\pi\end{cases}$$

مثال: ظرفی است به شکل نیم‌کره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد که قطر خارجی دهانه‌ی آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

۱) ۲۰۸ ۲) ۲۱۲ ۳) ۲۱۵ ۴) ۲۱۷

حل:



$$S_{\text{کل}}=\frac{1}{2}\left(4\pi(8)^2+4\pi(5)^2\right)+\pi(8^2-5^2)=128\pi+50\pi+39\pi=217\pi$$