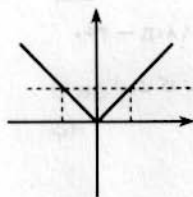


ب) معادله f^{-1} معادله خط گذرا از دو نقطه $(0, -2)$ و $(1, 0)$ است که به صورت زیر است:

$$y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

معادله تابع f از دو نقطه $(-2, 0)$ و $(0, 1)$ می‌گذرد که به صورت $y = \frac{x+2}{3}$ خواهد بود.

۵	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰



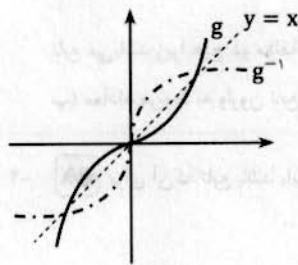
خط افقی

۱۰- تابع f وقتی معکوس پذیر است، که یک به یک باشد. قسمت یک به یک بودن تابع از روی نمودار توسط خط افقی به موازات محور x ها انجام می‌شود هر خط افقی به موازات محور x ها باید منحنی را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

نمودار نظیر f یک به یک نمی‌باشد.

نمودار نظیر g یک به یک است. پس g وارون پذیر است.



پاسخ کتاب کار و تمرین

مجموعه تمرینات

۱- الف) تابع است زیرا مؤلفه‌های اول یکسان ندارد. یک به یک است زیرا مؤلفه‌های دوم یکسان ندارد.

ب) به نظر می‌رسد تابع خطی باشد. معادله خط گذرا از دو نقطه $(0, -1)$ و $(1, 4)$ را می‌نویسیم.

$$y = 5(x - 0) + 1 \text{ یا } y = 5x - 1 \text{ (بدیهی است که مختصات سایر نقاط در معادله به دست آمده صدق می‌کند)}$$

(پ)

$$\{(-1, 0), (4, 1), (9, 2), (14, 3)\}$$

(ت) معادله خط گذرنده از نقاط $(-1, 0)$ و $(4, 1)$ به صورت $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ می‌باشد.

-۲ (الف)

زمان (ثابت) x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
فاصله تا شهر (کیلومتر) y	۲۵۰	۲۰۰	۱۵۰	۱۰۰	۵۰	۰

(ب) چون مؤلفه‌های اول یکسان ندارد، پس تابع می‌باشد.

$$y = 250 - 50x$$

(ت) چون دارای مؤلفه‌های دوم یکسان نمی‌باشد یک به یک می‌باشد. پس وارون پذیر است.

-۳ (الف)

(الف) معادله خط گذرا از دو نقطه $(3, 180)$ و $(4, 360)$ را می‌نویسیم.

$$y = 180n - 360 \quad y - 180 = 180(n - 3) \rightarrow \text{معادله خط} = \frac{360 - 180}{4 - 3} = 180$$

(بدیهی است که مختصات سایر نقاط در این معادله صدق می‌کند)

(ب)

مجموع زوایا: y	۱۸۰	۳۶۰	۵۴۰	۷۲۰
تعداد اضلاع: n	۳	۴	۵	۶

تابع می‌باشد زیرا هیچ دو مؤلفه اول یکسانی ندارد.

(پ) معادله مربوط به وارون تابع یک تابع خطی با معادله $n = \frac{y + 360}{180}$ می‌باشد.

-۴ (الف)

برای آن که تابع باشد باید اگر مؤلفه‌های اول یکسان بود مؤلفه‌های دوم مثال نیز یکسان باشد.

$$m^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$m = 2 \Rightarrow f = \{(1, 3), (3, 4), (1, 3), (2, 4)\} \Rightarrow \text{یک به یک نمی‌باشد.}$$

$$m = -2 \Rightarrow f = \{(1, 3), (3, 4), (1, 3), (2, -4)\} \Rightarrow \text{یک به یک است.}$$

-۵ (الف)

$$R \Rightarrow b = 2 \Rightarrow R = \{(1, 2), (1, 2), (4, 3), (a, 3)\}$$

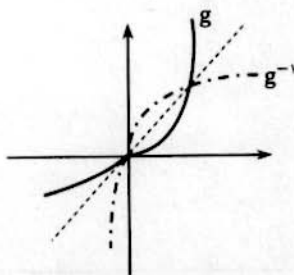
R یک به یک است پس $a = 4$

(ب)

$$R = \{(1, 2), (4, 3)\} \Rightarrow R^{-1} = \{(2, 1), (3, 4)\}$$

وارون R یک تابع است زیرا مؤلفه‌های اول برابر ندارد.

۶- تابع f معکوس پذیر نمی باشد زیرا یک به یک نمی باشد تابع g یک به یک است پس معکوس پذیر است.



۷- الف) یک به یک نمی باشد دارای مؤلفه های دوم یکسان است.

ب) یک به یک است. به یک عضو از مجموعه دوم پیش از یک عضو وارد نشده است.

پ) یک به یک نمی باشد. دارای مؤلفه های دوم یکسان است.

ت) یک به یک است. دارای مؤلفه های دوم یکسان نمی باشد.

ث) یک به یک است. هر خط افقی (موازی محور x ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

۸- الف) نمودار تابع از نقطه $(0, 2)$ می گذرد، همچنین از نقطه $(5, 5)$ روی نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$)

می گذرد. معادله خط گذرا از این دو نقطه را می نویسیم $y - 2 = \frac{3}{5}(x - 0)$ و یا $y = \frac{3}{5}x + 2$ معادله تابع خواهد بود.

ب) وارون تابع نیز خطی است و معادله آن خط گذرا از نقاط $(2, 0)$ و $(5, 5)$ خواهد بود که به صورت $y = \frac{5x-10}{3}$

۹- الف)

$$f = \{(-1, -2), (-\frac{1}{4}, -1), (0, 0), (\frac{1}{4}, 1), (1, 2)\}$$

ب) f تابع است زیرا مؤلفه های اول یکسان ندارد.

پ)

$$D_f = \{-1, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 1\}, \quad R_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

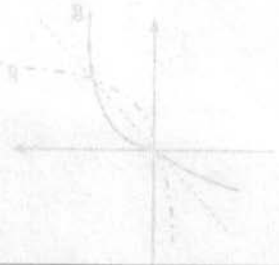
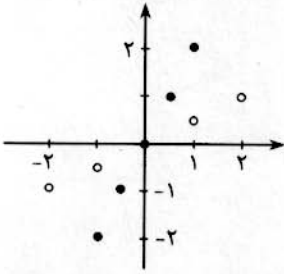
ت)

$$f^{-1} = \{(-2, -1), (-1, -\frac{1}{4}), (0, 0), (1, \frac{1}{4}), (2, 1)\}$$

چون معادله f به صورت خطی $y = 2x$ می باشد پس معادله f^{-1} به صورت $y = \frac{1}{2}x$ خواهد بود.

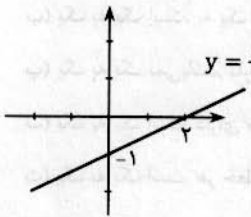
ث)

$$D_{f^{-1}} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad R_{f^{-1}} = \{-1, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 1\}$$



۱۰- الف) چون نمودار متناظر تابع، یک خط راست است و این تابع یک به یک است، پس معکوس پذیر است.

(ب)



$$y = \frac{x}{3} - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ y = 0 \Rightarrow x = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A(0, -1) \\ B(3, 0) \end{array}$$

محل تلاقی با محورهای مختصات

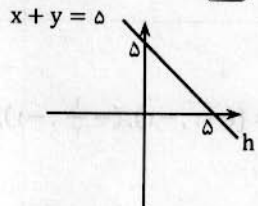
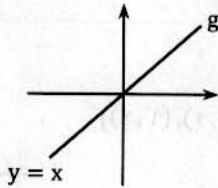
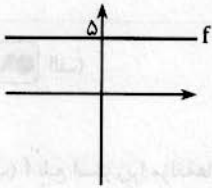
متناظر نقطه $A(0, -1)$ در نقطه $A'(-1, 0)$ تابع معکوس است.

متناظر نقطه $B(3, 0)$ در نقطه $B'(0, 3)$ تابع معکوس است.

پ) معادله خط گذرا از دو نقطه $(-1, 0)$ و $B'(0, 3)$ را به دست می آوریم که به صورت $y = 3x + 3$ می باشد.

ویژه دانش آموزان علاقه مند

۱- الف) الف)



ب) تابع f یک به یک نیست پس معکوس پذیر نمی باشد توابع g و h یک به یک و معکوس پذیرند معکوس آن ها را رسم می کنیم. (قرینه نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع g^{-1} بر نمودار تابع g منطبق می شود و نمودار تابع $x + y$ نیز بر خودش منطبق خواهد شد.

پ) معادله معکوس تابع g برابر $y = x$ و معادله معکوس تابع h نیز خود تابع $x + y = 5$ خواهد بود.

۲- الف) باید به ازای $y = -7$ مقدار x را بیابیم.

$$y = -7 \Rightarrow -7 = 3x + 5 \Rightarrow x = -4$$

(ب)

$$y = a \Rightarrow a = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{a-5}{3}$$

پ) عکس این دستگاه a را می گیرد و $\frac{a-5}{3}$ تحویل می دهد پس $y = \frac{x-5}{3}$

۳- چون $A(6, 2)$ به f تعلق دارد، پس $(2, 6)$ به f^{-1} تعلق دارد.

چون $A'(1, 4)$ به f^{-1} تعلق دارد، پس نقطه $(4, 1)$ به f تعلق دارد.

حال با داشتن دو نقطه از هر کدام از توابع خطی می توان ضابطه آن ها را به دست آورد.

$$(6, 2) \in f \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{2-1}{6-4} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{معادله خط: } y - 2 = \frac{1}{2}(x - 6)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{معادله تابع } f$$

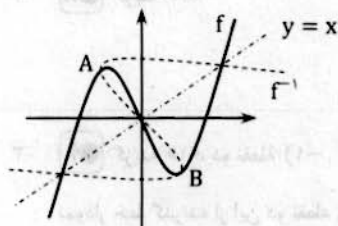
$$(2, 6) \in f^{-1} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{6-4}{2-1} = 2 \rightarrow \text{معادله خط } y - 6 = 2(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = 2x + 2 \quad \text{معادله تابع } f^{-1}$$

۴- به نمودار روابط f و f^{-1} در شکل زیر توجه شود

نمودار f و f^{-1} علاوه بر دو نقطه که روی خط $y = x$

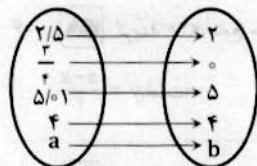
متقاطع اند در دو نقطه A و B نیز متقاطع اند.



همکاران گرامی استحضار دارند که در مورد یک رابطه f و وارون آن ممکن است محل تلاقی دو نمودار خارج از خط $y = x$ باشد ولی اگر f تابع باشد شرط وارون پذیری f یک به یک بودن آن است و این مطلب ایجاب می کند که نمودار توابع f و f^{-1} فقط روی خط $y = x$ متقاطع باشند.

شما هم تجربه خود را در سایت مرات www.meraat.ir بخش صندوق تجربیات به اشتراک بگذارید

۵- الف



ب) اگر $b = 3$ باشد a عددی حقیقی است که در محدوده $a < 4 \leq 3$ صدق می کند.

دوره سریع مطالب

۱- درست

۲- نادرست

۳- نادرست

۴- نادرست

-5 درست

-6 درست


-7 یک به یک

$$m = \pm 2 \quad -8$$

$$y = \frac{1}{3}x \quad -9$$


A و B -10

■ آزمون چهارگزینه‌ای


-1 گزینه «1»، سایر گزینه‌ها یک به یک نیستند. 

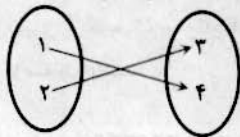
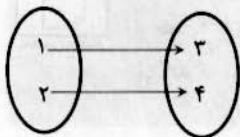
-2 گزینه «3» 


$$\begin{cases} b - 3 = 2a + 5 \\ b + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow 4 - 3 = 2a + 5 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow a + b = 2$$


-3 گزینه «1»، دو نقطه $(1, -1)$ و $(0, 0)$ روی تابع و در نتیجه نقاط $(-1, 1)$ و $(0, 0)$ به وارون آن متعلق است؛ 

نمودار خط گذرنده از این دو نقطه را می‌نویسیم که برابر $y = -x$


-4 گزینه «3»، تمام حالت عبارتند از: 




-5 گزینه «4»، سایر گزینه‌ها یک به یک نیستند پس وارون‌پذیر هم نیستند. 


-6 گزینه «2»، تابع خطی است معادله خط گذرنده از دو نقطه $(8, -1)$ و $(5, 0)$ را می‌نویسیم که به صورت 

$$y = \frac{5-x}{3} \text{ است.}$$

-7 گزینه «1»، برد تابع f^{-1} همان دامنه تابع f است. 

-8 گزینه «1»، هر نقطه (a, b) در تابع f باشد (b, a) در تابع f^{-1} است چون $(1, 0)$ در تابع f است پس $(0, 1)$ در 

f^{-1} است.

-9 گزینه «3»، تابع به معادله $y = x$ هر عنصر از دامنه را به همان عضو در هم دامنه نظیر می‌کند بنابراین مجموعه 

دامنه و برد آن برابر است.

۱۰- گزینه «۳» تابعی که یک به یک باشد باید تعداد اعضای مجموعه برد از تعداد اعضای مجموعه دامنه کم تر نباشد و چون معکوس تابع خود باید تابع باشد بین عناصر A و B تناظر یک به یک برقرار باشد. بنابراین تعداد اعضای مجموعه B با تعداد اعضای مجموعه A برابر است.

پاسخ ایستگاه فکر ۱

این یک سؤال جدی است، فضای کلاس با حل این سؤال خیلی باطراوت می شود، در کلاس ۱۰ دقیقه آخر را برای آن پیش بینی کنید. ابتدا از دانش آموزان بخواهید که راه حل خودشان را روی کاغذ بنویسند، اگر کسی هست که قبلاً راه حل این سؤال را دیده از او بخواهید که دنبال راه حل بهتر یا جدیدتر بگردد.

دو دقیقه به دانش آموزان وقت بدهید.

حال اجازه دهید تا راه حل ها را بخوانند. هیچ راه حلی نباید مورد نقد قرار گیرد. پس از شنیدن ۵ راه حل به طوری مختصر و مفید، جواب ها را نقد کنید.

گرفتن کارت شناسایی برای بازگرداندن چرخ دستی این ایراد را دارد که همه مشتریان کارت شناسایی همراه ندارند.


گماشتن یک کارگر برای جمع آوری چرخ دستی ها هزینه اضافی به فروشگاه تحمیل می کند.

ساختن ریل های متحرک برای بازگرداندن چرخ دستی ها فضای محوطه فروشگاه مثلاً پارکینگ را اشغال می کند.

راه حل ژاپنی ها برای حل مشکل این بود که برای برداشتن چرخ دستی یک ضامن مکانیکی گذاشتند که با سکه مثلاً ۱۰ ینی آزاد می شد و سکه آنجا باقی می ماند. با برگرداندن چرخ دستی و هل دادن آن در محل مورد نظر، سکه آزاد می شد. کسی که چرخ دستی را برنگرداند، ۱۰ ینی را از دست می دهد! این سکه ها منبع درآمد متکدیان است!

پاسخ ایستگاه فکر ۲

اگر از بالا نگاه کنید، شیروانی ها U, V, W, X هستند. در نتیجه علامت سؤال X است.

پس سقف برج مورد سؤال  است.

پاسخ ایستگاه فکر ۳

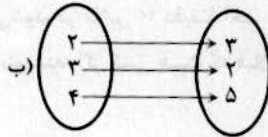
خیر. ۲۷ قالب را مطابق شکل رنگ می کنیم. ۱۴ تا سیاه و ۱۳ تا سفید است. چون قالب وسط سفید است و ۲۷ تا قالب داریم. قالب اول هم باید سفید باشد، اما این نشدنی است. چون اگر ۱۳ تا W (سفید) بنویسیم و یک در میان (بین آن ها) B (سیاه) بنویسیم، مقدار سیاه ها ۱۲ تا می شود که تناقض است. دقت کنید که موش پس از هر قالب سفید یک قالب سیاه می خورد و بالعکس.



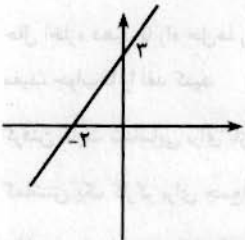
۱- وارون هریک از توابع زیر را به دست آورید و تعیین کنید کدام یک تابع وارون دارند.

(الف)

x	۲	۵	۸	۱۱
y	۳	۵	۳	۹

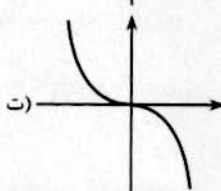
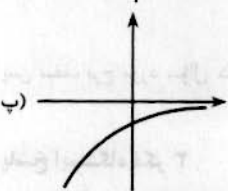
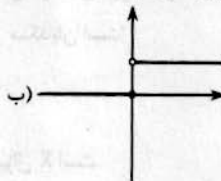
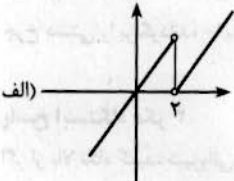


۲- نمودار تابع خطی f به صورت مقابل است. معادله تابع f^{-1} را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.



۳- اگر در تابع خطی $y = -2x + 1$ اگر دامنه، مجموعه $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$ باشد معادله تابع وارون و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

۴- کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



۵- هر کدام از توابع زیر که معکوس پذیر هستند را مشخص کرده و نمودار معکوس تابع را هم رسم کنید.

