

دوشنبه، ۱۱ جولای ۲۰۱۶

سوال ۱. مثلث BCF دارای یک زاویه قائمه در رأس B است. فرض کنید که A نقطه‌ای روی خط CF است به طوری که $FA = FB$ و F بین A و C قرار دارد. نقطه D طوری انتخاب شده است که $DA = DC$ و AC نیمساز زاویه $\angle DAB$ است. همچنین نقطه E طوری انتخاب شده است که $EA = ED$ و AD نیمساز زاویه $\angle EAC$ است. فرض کنید M وسط CF باشد و X نقطه‌ای باشد که چهارضلعی $AMXE$ یک متوازی‌الاضلاع باشد (یعنی $AE \parallel MX$ و $AM \parallel EX$). ثابت کنید که خطوط BD ، FX و ME هم‌سراند.

سوال ۲. همه اعداد صحیح مثبت n را بیابید که بتوان در هر خانه یک جدول $n \times n$ یکی از حروف I ، M و O را قرار داد به طوری که:

- در هر سطر و هر ستون، یک سوم از خانه‌ها I ، یک سوم M و یک سوم O باشد.

- در هر قطر، اگر تعداد خانه‌های قطر مضربی از سه بود، در این صورت یک سوم از خانه‌ها I ، یک سوم M ، و یک سوم O باشد.

نکته: سطرها و ستون‌های یک جدول $n \times n$ را به صورت طبیعی با اعداد 1 تا n شماره‌گذاری کرده‌ایم. بنابراین هر خانه متناظر با یک زوج (i, j) از اعداد صحیح مثبت است که $1 \leq i, j \leq n$. به ازای 1 به ازای $n > 1$ چنین جدولی $4n - 2$ تا قطر از دو نوع دارد. یک قطر از نوع اول شامل همه خانه‌های (i, j) است که $i + j$ مقدار ثابتی باشد، و یک قطر از نوع دوم شامل همه خانه‌های (i, j) است که $i - j$ مقدار ثابتی باشد.

سوال ۳. فرض کنید که $P = A_1 A_2 \dots A_k$ یک چندضلعی محدب در صفحه است. رئوس A_1, A_2, \dots, A_k همگی دارای مختصات صحیح هستند و روی یک دایره قرار دارند. فرض کنید که S مساحت P باشد. عدد طبیعی و فرد n دارای این خاصیت است که مربع طول هر ضلع P یک عدد صحیح مضرب n است. ثابت کنید که $2S$ نیز یک عدد صحیح مضرب n است.

سه‌شنبه، ۱۲ جولای ۲۰۱۶

سوال ۴. یک مجموعه از اعداد صحیح مثبت را خوشبو می‌نامیم، اگر شامل حداقل دو عضو باشد و هر عضو آن عامل مشترکی با حداقل یکی از اعضای دیگرش داشته باشد. فرض کنید $P(n) = n^2 + n + 1$. حداقل مقدار ممکن برای عدد صحیح مثبت b را بیابید به طوری که عدد صحیح نامنفی a موجود باشد که مجموعه

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

خوشبو باشد.

سوال ۵. معادله

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

که ۲۰۱۶ عامل خطی در هر طرف آن قرار دارد، روی تخته نوشته شده است. حداقل مقدار ممکن k را بیابید به طوری که بتوان دقیقاً k تا از این ۴۰۳۲ عامل خطی را حذف نمود به نحوی که حداقل یک عامل در هر طرف باقی بماند و معادله به دست آمده جواب حقیقی نداشته باشد.

سوال ۶. فرض کنید $n \geq 2$ پاره‌خط در صفحه قرار دارند، به طوری که هر دو پاره‌خط یک‌دیگر را قطع می‌کنند و هیچ سه پاره‌خطی هم‌رس نیستند. جعفر باید از هر پاره‌خط یکی از دو انتهای آن را انتخاب کند و وزغی روی آن قرار دهد به طوری که جهت حرکت وزغ به سمت انتهای دیگر پاره‌خط باشد. سپس او $n-1$ بار دست می‌زند. هر بار که او دست می‌زند، هر وزغ فوراً روی پاره‌خط خود به نقطه تقاطع بعدی می‌پرد. وزغ‌ها هیچ‌گاه جهت پرش خود را عوض نمی‌کنند. جعفر می‌خواهد وزغ‌ها را طوری قرار دهد که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌زمان روی یک نقطه تقاطع قرار نگیرند.

الف) ثابت کنید اگر n فرد باشد جعفر می‌تواند به خواسته خود برسد.

ب) ثابت کنید اگر n زوج باشد جعفر نمی‌تواند به خواسته خود برسد.