



روش اجزای محدود

بخش اول

مؤلف:

داریل ل. لوگان

ویرایش چهارم

مترجم:

دکتر محمد شیشه ساز

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران

دانشکده‌ی مهندسی

روش اجزای محدود

بر حمله دکتر محمد شیشه ساز
اعضای شورای کمیسیون تخصصی علوم پایه فنی و مهندسی: دکتر ناهید پوررضا، دکتر مرتضی زرگر شوشتری، دکتر مرضی رزار،
دکتر عبدالجبار بدیع الزمان، دکتر سعید برومند نسب، دکتر محمد شمشه سار

ویراستار علمی: دکتر سید حلال الدین هاشمی

ویراستار ادبی: دکتر عادل سواعدی

ناشر: دانشگاه شهید چمران اهواز

لیتوگرافی چاپ و صحافی: اداره چاپ و انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز

سرشناسه	لوگان، داریل ال. LOGAN, Daryl A.
عنوان و دیدآور	روش اجزای محدود / داریل ال لوگان مترجم محمد شیشه سار
مشخصات نشر	اهواز: دانشگاه شهید چمران (اهواز)، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری	۱۳۸۱ص. مصور. نمودار
فروست	انتشارات دانشگاه شهید چمران، ۲۰۲
شابک	978-964-8659-67-3
وصفیت فهرست نویسی	فیبیا
یادداشت	: عنوان اصلی. A first course in the finito Element Method, 4 Edition, c2007
یادداشت	: کتانباعه.
موضوع	: روش الماء

محل های فروش کتاب

اهواز گلستان - شهر دانشگاهی - کتابفروشی دانشگاه شهید چمران اهواز.

تلفاکس ۰۷۲-۳۳۲۱۰۶۱۱

تهران ح کارگر شمالی، ح بصرت، ح. دکتر فریب برسیده به ح فرصت، پلاک ۱۱- مؤسسه کنلیبران

تلفن ۰۲۱-۶۶۵۶۶۵۱۰-۱۵

قیمت ۱۰۰۰/۰۰۰ ریال

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است

THOMSON

A First Course in the Finite Element Method, Fourth Edition
by Daryl L. Logan

**Associate Vice-President
and Editorial Director:**

Evelyn Veitch

Publisher:

Chris Carson

Developmental Editors:

Kamilah Reid Burrell/
Hilda Gowans

Permissions Coordinator:

Vicki Gould

Production Services:

RPK Editorial Services

Copy Editor:

Harlan James

Proofreader:

Erin Wagner

Indexer:

RPK Editorial Services

Production Manager:

Renate McCloy

Creative Director:

Angela Chier

Interior Design:

RPK Editorial Services

Cover Design:

Andrew Adams

Compositor:

International Typesetting
and Composition

Printer:

R. R. Donnelley

Cover Images:

Courtesy of ALGOR, Inc.

COPYRIGHT © 2007 by Nelson,
a division of Thomson Canada
Limited

Printed and bound in the
United States
1 2 3 4 07 06

For more information contact
Nelson, 1120 Birchmount Road,
Toronto, Ontario, Canada,
M1K 5G4. Or you can visit our
Internet site at
<http://www.nelson.com>

Library of Congress Control Number,
2006904397

ISBN: 0-534-55298-6

ALL RIGHTS RESERVED. No part
of this work covered by the copyright
herein may be reproduced,
transcribed, or used in any form or
by any means—graphic, electronic,
or mechanical, including
photocopying, recording, taping,
Web distribution, or information
storage and retrieval systems—
without the written permission of
the publisher.

For permission to use material
from this text or product, submit
a request online at
www.thomsonrights.com

Every effort has been made to
trace ownership of all copyright
material and to secure permission
from copyright holders. In the
event of any question arising as to
the use of any material, we will be
pleased to make the necessary
corrections in future printings.

North America
Nelson
1120 Birchmount Road
Toronto, Ontario M1K 5G4
Canada

Asia
Thomson Learning
5 Shenton Way #01-01
GIC Building
Singapore 068808

Australia/New Zealand
Thomson Learning
102 Droids Street
Southbank, Victoria
Australia 3006

Europe/Middle East/Africa
Thomson Learning
High Holborn House
50/51 Bedford Row
London WC1R 4LR
United Kingdom

Latin America
Thomson Learning
Seneca, 53
Colonia Polanco
11569 Mexico D.F.
Mexico

Spain
Paraninfo
Calle/Magallanes, 25
28015 Madrid, Spain

90, 10, 12

THOMSON

A First Course in the Finite Element Method, Fourth Edition
by Daryl L. Logan

**Associate Vice-President
and Editorial Director:**

Evelyn Ventch

Publisher:

Chris Carson

Developmental Editors:

Kamilah Reid Burrell

Hilda Gowans

Permissions Coordinator:

Vicki Gould

Production Services:

RPK Editorial Services

Copy Editor:

Harlan James

Proofreader:

Erin Wagner

Indexer:

RPK Editorial Services

Production Manager:

Renate McCloy

Creative Director:

Angela Coker

Interior Design:

RPK Editorial Services

Cover Design:

Andrew Adams

Compositor:

International Typesetting
and Composition

Printer:

R. R. Donnelley

Cover Images:

Courtesy of ALGOR, Inc.

© COPYRIGHT © 2007 by Nelson
a division of Thomson Canada
Limited

Printed and bound in the
United States
1 2 3 4 07 06

For more information contact
Nelson, 1120 Birchmount Road,
Toronto, Ontario, Canada,
M1K 5G4. Or you can visit our
Internet site at
<http://www.nelson.com>

Library of Congress Control Number:
2006004397

ISBN: 0-834-55298-6

ALL RIGHTS RESERVED. No part
of this work covered by the copyright
herein may be reproduced,
transcribed, or used in any form or
by any means—graphic, electronic,
or mechanical, including
photocopying, recording, taping,
Web distribution, or information
storage and retrieval systems,
without the written permission of
the publisher.

For permission to use material
from this text or product, submit
a request online at
www.thomsonrights.com

Every effort has been made to
trace ownership of all copyright
material and to secure permission
from copyright holders. In the
event of any question arising as to
the use of any material, we will be
pleased to make the necessary
corrections in future printings.

North America

Nelson
1120 Birchmount Road
Toronto, Ontario M1K 5G4
Canada

Asia

Thomson Learning
5 Shenton Way #01-01
UIC Building
Singapore 068808

Australia/New Zealand

Thomson Learning
102 Dodd Street
Southbank, Victoria
Australia 3006

Europe/Middle East/Africa

Thomson Learning
High Holborn House
50/51 Bedford Row
London WC1R 4LR
United Kingdom

Latin America

Thomson Learning
Seneca, 53
Colonia Polanco
11560 Mexico DF
Mexico

Spain

Paraninfo
Calle/Magallanes, 25
28015 Madrid, Spain

پیش‌گفتار مترجم

روش اجزای محدود از جمله روش‌های عددی است که بدان وسیله می‌توان مسائل پیچیده را در زمینه‌های مختلف، از جمله مسائل سازه‌ای و انتقال حرارت در مهندسی مکانیک، مسائل سازه‌ای در مهندسی عمران، مسائل الکترومغناطیس در مهندسی برق و دیگر زمینه‌ها حل نمود. در این روش، محیط مورد نظر به محیط‌های کوچکی، که اصطلاحاً المان نامیده می‌شوند، تقسیم شده و معادله‌ای برای تغییرات پارامتر مورد نظر در آن محیط در نظر گرفته می‌شود. این معادله را می‌توان به صورت خطی، زوج خطی، درجه دو، و در نظر گرفت. سپس، ضرایب معادلات منظور شده در هر المان را می‌توان از روش‌های مختلفی تعیین نموده و نهایتاً تغییرات پارامتر یاد شده را در آن محیط مشخص نمود. روش انرژی، روش مستقیم سختی، گالرکین، پسماند وزنی، و دیگر روش‌ها، از جمله روش‌های تعیین ضرایب یا تعیین معادلات در هر المان می‌باشند. از جمله کاربردهای روش اجزای محدود، علاوه بر مطالب قید شده در این کتاب و موارد متعدد دیگر، می‌توان پروژه‌های عملی و تحقیقاتی دیگری را که توسط مترجم به انجام رسیده و تصاویری از آن‌ها بر روی جلد رویی و جلد پشتی این کتاب

آورده شده نام برد. تصاویر مندرج بر جلد رویی شامل تجزیه و تحلیل تنش در یک جرخ دنده‌ی ماریپیچ، تحلیل تنش‌های ناشی از بارگذاری حرارتی و فشار حاصل از انفجار سوخت و هوا در سیلندر موتور پراید، و تحلیل تنش در لوله‌های تقویت شده‌ی پلی اتیلنی مدفون شده در عمق یک متری است که تحت تأثیر ضربه قوچ قرار گرفته است. از لوله‌های یاد شده در مزارع نیشکر در خلال مراحل زهکشی استفاده می‌شود. تصاویر مندرج بر جلد پشتی، معرف تحلیل تنش‌های ناشی از فشار، تغییر دما، و اتصالات بر لوله‌های گاز مدفون شده‌ای است که در عمق ۱۲۰ سانتیمتری قرار گرفته‌اند. همچنین، تصویر تغییر مکان ریل قطاری که بر روی تکیه‌گاه الاستیکی (زمین) قرار گرفته مشاهده می‌شود. در این تحقیق، هدف، بررسی خستگی ناشی از بارگذاری وزن قطار و واگن‌ها (در اثر عبور مکرر قطار از روی ریل) بود که در محل جوش دو ریل حاصل می‌شد. همچنین، تصویری از تحلیل تنش در لوله‌های دو جداره‌ی پلی اتیلنی آورده شده است. هر یک از تحلیل‌های یاد شده، جزئی از پروژه‌های جداگانه‌ای است که جهت رفع مشکلات صنعتی به انجام رسیده است.

کتابی که هم اکنون در دست خوانندگان گرامی است کتابی است که به نظر مترجم از جمله کتب معدود در این زمینه است که به نحوی بسیار شایسته و مطلوب مطالب یاد شده را برای دانشجویان یا افرادی که بخواهند حتی بدون حضور در کلاس درس با این محث آشنا شده و آن را به کار گیرند، ارائه نموده است. این مطلب را می‌توان از به چاپ رسیدن ویرایش‌های متعدد آن در خلال مدت زمانی کوتاه به خوبی درباقت. از جمله مزیت‌های این کتاب می‌توان جامع بودن نسبی آن در قالب یک کتاب مقدماتی و حتی متوسطه در این محث، آسان بودن درک مطالب قید شده، ارائه‌ی مثال‌های متعدد به منظور درک بهتر، و ارائه‌ی روش‌های متعدد در قالبی ساده و قابل فهم برای خواننده

دانست. امید است تا دانشجویان و محققان عزیز بتوانند به نحو شایسته از این کتاب بهره برداری نمایند.

در خاتمه، مایلم تا از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه شهید چمران، شورای انتشارات دانشگاه، آقایان مهندس محسن معلم‌نیا و مهندس علی امیدی‌فرد که اینجانب را در تهیهی معادلات یاری نمودند، تشکر نمایم. یقیناً، نظرات داوران، ویراستاران علمی و ادبی نقش شایسته‌ای را در ارائه‌ی بهتر این کتاب ایفا نموده است.

همچنین مایلم تا از خانواده‌ی خود به ویژه پدر و مادر و نیز همسر مهربان و فرزندان عزیزم عمیقاً تشکر و قدردانی نمایم. یقیناً، صبر و تحمل، پشتیبانی و نیر گذشت‌های بی‌دریغ آن‌ها، منجر به تکمیل ترجمه‌ی این کتاب گردید.

محمد شبشه ساز

تابستان ۱۳۸۷

پیش‌گفتار مؤلف

هدف از ویرایش چهارم، مجدداً در دسترس قرار دادن روش پایه و ساده‌ای در اجزای محدود است تا دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد، بدون هیچ پیش‌نیازی، (از قبیل تجلیل سازه) که عموماً در بیش‌تر کتب مرتبط با این موضوع به آن نیاز است، بتوانند آن را درک نمایند. این کتاب اساساً به عنوان ابزار اولیه‌ی یادگیری دانشجویان کارشناسی در رشته‌ی مهندسی عمران و مکانیک که تمایل اصلی آن‌ها تحلیل تنش و انتقال حرارت است نوشته شده است. به هر حال، اصول به طریقی ساده ارائه شده تا این کتاب بتواند کمک ارزشمندی به دانشجویان دیگر زمینه‌ها و نیز مهندسان، در فراگیری نماید. مطالب کتاب به قسمی انتخاب شده اند تا افراد ذینفع بتوانند از روش اجزای محدود در حل مسائل فیزیکی عملی استفاده نمایند.

در هر یک از عناوین، اصول کلی ارائه شده و به دنبال آن کاربرد سستی آن اصول، که حسب نیاز، کاربرد رایانه‌ای آن‌ها ارائه شده، آورده شده است. از این روش به منظور تشریح اصولی که در تحلیل برنامه‌های رایانه‌ای بزرگ به کار می‌رود استفاده شده است.

مطالب کتاب از اصول پایه به سمت اصول پیشرفته تنظیم شده و می‌توان آن را برای دو درس برنامه ریزی نمود. عناوین، شامل کاربردهای مقدماتی (۱) میله‌ها و فنرهای ساده که منجر به تحلیل دو و سه بعدی خریا می‌شوند؛ (۲) خمش در تیرها، که منجر به تحلیل قاب و تحلیل شبکه و قاب‌های فضایی می‌شود؛ (۳) المان‌های اولیه‌ی تنش / کرنش صفحه‌ای، که منجر به المان‌های پیشرفته‌ی تنش / کرنش صفحه‌ای می‌شوند؛ (۴) المان‌های متقارن محور؛ (۵) فرمول بندی ایزوپارامتریک در روش اجزای محدود؛ (۶) تنش سه بعدی؛ (۷) خمش در ورق؛ (۸) انتقال حرارت و انتقال جرم در سیال؛ (۹) مکانیک سیالات مقدماتی؛ (۱۰) تنش‌های حرارتی؛ و (۱۱) انتقال حرارت و تنش‌های وابسته به زمان می‌شوند.

از ویژگی‌های دیگر، می‌توان نحوه‌ی به‌کارگیری تکیه‌گاه‌های اریب یا شیب‌دار، المان‌های تیر با گره‌های لولایی، المان تیر با جهتی دلخواه در فضا، و مفهوم تحلیل زیر سازه را نام برد.

از روش مستقیم، اصل مینیمم انرژی پتانسیل و روش پسماند گالرکین در مقاطع مختلف، حسب نیاز، به منظور استخراج معادلات لازم در تحلیل استفاده شده است.

در پیوست‌ها، مطالبی با عناوین زیر استفاده شده است: (A) جبر پایه در ماتریس‌ها که از آن در خلال کتاب استفاده شده است، (B) نحوه‌ی حل همزمان معادلات، (C) اصول اولیه‌ی الاستیسیته، (D) نیروهای معادل گره‌ای، (E) اصل کار مجازی، و (F) خصوصیات مقاطع فولادهای سازه‌ای و آلومینیومی.

ویژگی‌های جدید این ویرایش شامل اطلاعات مازاد در مدل سازی، تفسیر نتایج، و مقایسه‌ی نتایج حاصل از اجزای محدود با حل‌های واقعی است. مضافاً، تشریح جزء به جزء مثال‌ها به منظور تشریح روش‌های پسماند وزنی، با هم گذاری، جمع مربع‌ها، زیر

مجموعه، و روش گالرکین اضافه شده است. ماتریس سختی تیر تیموشنکو، همراه با مثالی که نتایج حاصل از تیر تیموشنکو را با نتایج حاصل از ماتریس سختی تیر اولر-برنولی مقایسه می‌کند به مطالب این کتاب اضافه شده است. همچنین، روش‌های همگرایی p و h و قفل برشی تشریح شده‌اند. برای راحتی، جدول‌هایی از مقاطع فولادهای سازه‌ای آلومینیومی در قالب یک پیوست به مطالب این کتاب اضافه شده‌اند. در این ویرایش، تعمداً از برنامه‌های رایانه‌ای با منظوره‌های خاص استفاده نشده و پیشنهاد می‌شود تا استادان برنامه‌ای را انتخاب کنند که خود با آن آشنا می‌باشند.

لیست عنوان‌های پیشنهادی در این کتاب برای اولین درس (حدود ۴۴ جلسه‌ی ۵۰ دقیقه‌ای برای هر یک) به شرح ذیل آورده شده است:

عنوان	تعداد جلسات
پیوست A	۱
پیوست B	۱
فصل ۱	۲
فصل ۲	۳
فصل ۳، بخش‌های ۱-۳ الی ۱۱-۳	۵
امتحان اول	۱
فصل ۴، بخش‌های ۱-۴ الی ۶-۴	۴
فصل ۵، بخش‌های ۱-۵ الی ۳-۵، ۵-۵	۴
فصل ۶	۴
فصل ۷	۳
امتحان دوم	۱

Hari, Hidajat Harintho, Kowas Koswara, Konstantinos Kariotis, Davignon
Khailan Zhang و YanPing Lu, Joe Keswari, Salemganesan
حل مسائل در دو ویرایش اول این کتاب و پیشنهادهای بسیاری از دانشجویان دانشگاه
در مورد نحوه‌ی نگارش این کتاب به خاطر درک بهتر، تشکر می‌کنم.

این‌جانب از دانشجویان فعلی خود Mark Guard و Mark Blair در دانشگاه
ویسکانسن- پلات ویل (UPW) به خاطر ارائه‌ی مدل‌های سه بعدی در درس اجزای
محدود، همان‌طور که به‌ترتیب در شکل‌های ۱۱-۱۱a و ۱۱-۱۱b نشان داده شده‌اند تشکر
می‌نمایم. همچنین از دانشجویان کارشناسی ارشد در UPW، Angela Moe،
David Walgrave، و Bruce Figi به‌ترتیب به خاطر ارائه‌ی نتایج مندرج در جدول
۱۱-۲ و شکل ۷-۲۱، قدردانی می‌نمایم. همچنین از Andrew Heckman، به‌عنوان
یکی از فارغ‌التحصیلان UPW و مهندس طراح در شرکت Seagraves Fire
Apparatus به خاطر اعطای مجوز استفاده از شکل ۱۱-۱۰، و آقای یوسف عمر،
مهندس سازه در شرکت John Deere Dubuque به خاطر اجازه‌ی استفاده از شکل ۱-
۱۰ تشکر فراوان می‌شود.

همچنین از داوران ویرایش چهارم، Raghu B. Agarwal، از دانشگاه ایالتی
San Jose؛ H. N. Hashemi، از دانشگاه Northeastern؛ Arif Masud، از دانشگاه ایالتی
آریزونا؛ Keith E. Rouch، از دانشگاه کنتاکی؛ Richard Sayles، از دانشگاه Main؛ و
Ramin Sedaghati، از دانشگاه Concordia، که پیشنهادهای مؤثری در جهت تکمیل
بیش‌تر کتاب نمودند تشکر می‌شود.

نهایتاً، از همسرم Diane، به خاطر فداکاری‌های متعدد ایشان در خلال تکمیل
ویرایش چهارم تشکر می‌نمایم.

فصل ۹	۲
فصل ۱۰	۴
فصل ۱۱	۳
فصل ۱۳	۵
امتحان سوم	۱

برنامه‌ی یاد شده را می‌توان برای دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک و عمران در یک ترم ارائه نمود. (اگر نیاز باشد تا بر تحلیل تنش تمرکز بیش‌تری شود، می‌توان برای مثال، فصل ۱۳ را با مطالب فصل‌های ۸ و ۱۲، یا قسمت‌هایی از فصل‌های ۱۵ و ۱۶ جای‌گزین نمود.) مطالب دیگر مندرج در این کتاب را می‌توان به انضمام مطالب دیگری که استاد درس اضافه خواهد نمود به عنوان ترم دوم ارائه نمود.

ابن‌جانب تشکر عمیق خود را از کارکنان شرکت نشر تامسون، ناشرین، به ویژه Bill Stenquist و Chris Carson؛ ویراستارهای تکوینی، Kamilah Reid Burrell و Hilda Gowans؛ و به Rose Kernan از خدمات ویراستاری RPK، برای کمک آن‌ها در ارائه‌ی این ویرایش ابراز می‌نماید.

ابن‌جانب از دکتر Ted Belytschko به خاطر تدریس بی‌نظیر ایشان در درس اجزای محدود که من را در نوشتن این کتاب کمک نمود قدردانی می‌نمایم. همچنین، مایلم تا از دکتر Joseph Renis به خاطر در اختیار گذاشتن حل تحلیلی مسائل دینامیکی سازه‌ها به منظور مقایسه‌ی جواب‌های اجزای محدود در فصل ۱۶-۱۷ تشکر نمایم. همچنین مایلم تا از تعداد زیادی از دانشجویان که مطالب گروه‌های آن‌ها منجر به تکمیل این کتاب گردید تشکر نمایم. این‌جانب به‌طور اخص از Ron Cenfeteli، Barry

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
iii	پیش‌گفتار مترجم
vi	پیش‌گفتار مؤلف
۱	۱. مقدمه
۱	پیش‌گفتار
۳	۱-۱ تاریخچه به اختصار
۶	۲-۱ معرفی نماد ماتریسی
۱۰	۳-۱ نقش رایانه
۱۲	۴-۱ گام‌های کلی در روش اجزای محدود
۲۶	۵-۱ کاربرد روش اجزای محدود
۳۵	۶-۱ مزایای روش اجزای محدود

صفحه	عنوان
۳۷	۷-۱ برنامه‌های رایانه‌ای در روش اجزای محدود
۴۱	مراجع
۴۵	مسائل
<hr/>	
۴۷	۲. معرفی روش سختی (جابه‌جایی)
۴۷	مقدمه
۴۸	۱-۲ تعریف ماتریس سختی
۴۹	۲-۲ استخراج ماتریس سختی در المان فنر
۵۸	۳-۲ مثال‌هایی مرتبط با به هم گذاری المان‌های فنری شکل
۶۳	۴-۲ نحوه‌ی دستیابی به ماتریس سختی کل از روش انطباق (روش مستقیم سختی)
۶۷	۵-۲ شرایط مرزی
۹۰	۶-۲ روش انرژی پتانسیل در استخراج معادلات المان فنری شکل
۱۰۴	مراجع
۱۰۴	مسائل
<hr/>	
۱۱۱	۳. استخراج معادلات خرپا
۱۱۱	مقدمه

صفحه	عنوان
۱۱۳	دست‌یابی ماتریس سختی المان میله‌ای شکل در مختصات محلی ۱-۳
۱۲۲	انتخاب توابع تقریب برای جابجایی ۲-۳
۱۲۶	انتقال بردارها در فضای دو بعدی ۳-۳
۱۳۱	ماتریس سختی اصلی ۴-۳
۱۳۷	محاسبه‌ی تنش در میله‌ای که در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد ۵-۳
۱۴۰	حل یک خر پای دو بعدی ۶-۳
۱۵۳	ماتریس‌های انتقال و سختی برای یک میله در فضایی سه بعدی ۷-۳
۱۶۴	استفاده از تقارن در سازه ۸-۳
۱۷۰	تکیه‌گاه‌های شیب دار یا اریب ۹-۳
۱۷۹	روش انرژی پتانسیل در استخراج معادلات المان میله‌ای شکل ۱۰-۳
۱۹۵	مقایسه‌ی حل اجزای محدود با حل مستقیم ریاضی یک میله ۱۱-۳
۲۰۱	روش پسماند گالرکین و کاربرد آن در استخراج معادلات المان میله‌ای شکل یک بعدی ۱۲-۳
۲۰۵	روش‌های دیگر پسماند و اعمال آن‌ها به مسائل مرتبط با المان میله‌ای شکل ۱۳-۳
۲۱۲	مراجع
۲۱۲	مسائل

صفحه	عنوان
۲۴۰	۴. استخراج معادلات تیر
۲۴۰	مقدمه
۲۴۱	۱-۴ سختی تیر
۲۵۷	۲-۴ مثالی در مورد جمع بندی ماتریس‌های سختی تیر
۲۶۰	۳-۴ مثال‌هایی در مورد تجزیه و تحلیل یک تیر با استفاده از روش مستقیم سختی
۲۷۹	۴-۴ بارگذاری گسترده
۳۰۰	۵-۴ مقایسه‌ی حل المان محدود با حل واقعی در یک تیر
۳۱۰	۶-۴ المان تیر با گره لولایی
۳۱۷	۷-۴ کاربرد انرژی پتانسیل در استخراج معادلات تیر آهن
۳۲۲	۸-۴ روش گالرکین در استخراج معادلات المان تیر
۳۲۵	مراجع
۳۲۶	مسائل
۳۴۱	۵. معادلات قاب و شبکه
۳۴۱	مقدمه
۳۴۲	۱-۵ المان تیر آهن دو بعدی با جهتی دلخواه
۳۴۹	۲-۵ مثال‌هایی از قاب صفحه‌ای

صفحه	عنوان
۳۷۸	۳-۵ تکیه‌گاه‌های اریب - المان قاب
۳۷۹	۴-۵ معادلات شبکه
۴۰۸	۵-۵ المان تیر با جهتی دلخواه در فضا
۴۲۹	۶-۵ ایده‌ی تحلیل زیر سازه
۴۳۸	مراجع
۴۳۸	مسائل
<hr/>	
۴۷۹	۶. استخراج معادلات سختی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای
۴۷۹	مقدمه
۴۸۱	۱-۶ مفاهیم اولیه تنش و کرنش صفحه‌ای
۴۸۸	۲-۶ استخراج معادلات و ماتریس سختی المان مثلثی شکل در حالت کرنش ثابت
۵۱۱	۳-۶ نحوه‌ی به‌کارگیری نیروهای حجمی و سطحی
۵۱۸	۴-۶ عبارات صریح برای ماتریس سختی در المان مثلثی شکل با کرنش ثابت
۵۲۱	۵-۶ حل اجزای محدود مسأله‌ای با تنش ثابت
۵۳۹	مراجع
۵۳۹	مسائل

صفحه	عنوان
۵۴۸	۷. نکات کاربردی در مدل سازی، تفسیر نتایج و مثال‌هایی از تحلیل تنش/ کرنش صفحه‌ای
۵۴۸	مقدمه
۵۴۹	۱-۷ مدل سازی در اجرای محدود
۵۷۱	۲-۷ تعادل و هم سارگاری در نتایج حاصل از روش اجرای محدود
۵۷۵	۳-۷ همگرایی در حل
۵۷۷	۴-۷ تفسیر مقادیر تنش
۵۸۰	۵-۷ خلاصه ساری استاتیکی
۵۸۷	۶-۷ نمودار گردش کار نحوه‌ی حل مسائلی از نوع تنش/ کرنش صفحه‌ای
۵۸۸	۷-۷ حل گام به گام به کمک برنامه‌ی رایانه‌ای، دیگر مدل‌ها و نتایج حاصل از مسائلی از نوع تنش/ کرنش صفحه‌ای
۵۹۶	مراجع
۵۹۸	مسائل
۶۲۱	۸. استخراج معادلات المان مثلثی شکل با کرنش خطی
۶۲۱	مقدمه
۶۲۲	۱-۸ استخراج ماتریس سختی و معادلات المان مثلثی شکل با کرنش خطی

صفحه	عنوان
۶۳۶	۲-۸ مثالی در مورد نحوه‌ی تعیین المان CST
۶۴۰	۳-۸ مقایسه‌ی المان‌ها
۶۴۶	مراجع
۶۴۷	مسائل
<hr/>	
۶۵۱	۹. المان‌های متقارن محور
۶۵۱	مقدمه
۶۵۲	۱-۹ استخراج ماتریس سختی
۶۶۹	۲-۹ حل مخزن فشار متقارن محور
۶۷۹	۳-۹ کاربرد المان‌های متقارن محور
۶۸۵	مراجع
۶۸۶	مسائل
<hr/>	
۷۰۰	۱۰. فرمول بندی ایزوپارامتریک
۷۰۰	مقدمه
۷۰۱	۱-۱۰ فرمول بندی ایزوپارامتریک ماتریس سختی المان میله‌ای شکل
۷۱۱	۲-۱۰ المان تنش صفحه‌ای مستطیل شکل
۷۱۶	۳-۱۰ فرمول بندی ایزوپارامتریک ماتریس سختی المان صفحه‌ای
۷۳۴	۴-۱۰ کوادراچور گوس و نیوتن-کوتس (انتگرال گیری عددی)

صفحه	عنوان
۷۴۵	۵-۱۰ تعیین ماتریس‌های سختی و تنش از روش کوادراچور گوس
۷۵۴	۶-۱۰ توابع شکل با مرتبه‌ی بالاتر
۷۶۹	مراجع
۷۷۰	مسائل
<hr/>	
۷۷۸	۱۱. تحلیل تنش سه بعدی
۷۷۸	مقدمه
۷۸۰	۱-۱۱ تنش و کرنش سه بعدی
۷۸۲	۲-۱۱ المان چهار وجهی
۷۹۳	۳-۱۱ فرمول بندی ایزوپارامتریک
۸۰۶	مراجع
۸۰۷	مسائل
<hr/>	
۸۱۶	۱۲. المان خمش در ورق
۸۱۶	مقدمه
۸۱۷	۱-۱۲ اصول اولیه‌ی خمش در ورق
۸۲۴	۲-۱۲ استخراج معادلات و ماتریس سختی المان خمشی در ورق
۸۳۱	۳-۱۲ مقایسه‌ی عددی چند المان ورق
۸۳۶	۴-۱۲ حل رایانه‌ای مسائل خمشی در یک ورق

xix	فهرست مطالب
صفحه	عنوان
۸۴۰	مراجع
۸۴۱	مسائل
<hr/>	
۸۵۰	۱۳. انتقال حرارت و انتقال جرم
۸۵۰	مقدمه
۸۵۲	۱-۱۳ استخراج معادله‌ی دیفرانسیل مبنا
۸۵۷	۲-۱۳ انتقال حرارت به روش جابه‌جایی
۸۵۹	۳-۱۳ آحاد نمونه؛ ضرایب هدایتی K ؛ و ضرایب انتقال حرارت h
۸۶۲	۴-۱۳ کاربرد روش تغییرات در فرمول بندی اجزای محدود یک بعدی
۸۸۸	۵-۱۳ فرمول بندی اجزای محدود دو بعدی
۹۰۲	۶-۱۳ منابع متمرکز یا خطی
۹۰۶	۷-۱۳ فرمول بندی اجزای محدود در انتقال حرارت سه بعدی
۹۱۱	۸-۱۳ انتقال حرارت یک بعدی با انتقال جرم
۹۱۲	۹-۱۳ فرمول بندی اجزای محدود انتقال حرارت با انتقال جرم از روش گالرکین
۹۱۹	۱۰-۱۳ نمودار گردش کار و نمونه‌هایی از برنامه‌های رایانه‌ای انتقال حرارت
۹۲۳	مراجع
۹۲۳	مسائل

صفحه	عنوان
<hr/>	
	۱۴. جریان سیال
۹۴۹	مقدمه
۹۴۹	۱-۱۴ استخراج معادلات دیفرانسیل مبنا
۹۵۰	۲-۱۴ فرمول بندی اجزای محدود یک بعدی
۹۵۷	۳-۱۴ فرمول بندی اجزای محدود دو بعدی
۹۷۱	۴-۱۴ نمودار گردش کار و مثالی در مورد برنامه‌ی رایانه‌ای جریان یک
۹۷۸	سیال
۹۸۱	مراجع
۹۸۲	مسائل
<hr/>	
	۱۵. تنش‌های حرارتی
۹۸۸	مقدمه
۹۸۸	۱-۱۵ فرمول بندی مسائل مرتبط با تنش حرارتی و مثال‌های
۹۸۹	مربوطه
۱۰۲۴	مراجع
۱۰۲۴	مسائل

صفحه	عنوان
۱۰۳۷	۱۶. دینامیک سازه‌ای و انتقال حرارت وابسته به زمان
۱۰۳۷	مقدمه
۱۰۳۸	۱-۱۶ دینامیک سیستم جرم و فنر
۱۰۴۱	۲-۱۶ استخراج مستقیم معادلات المان میله ای شکل
۱۰۴۷	۳-۱۶ انتگرال گیری عددی نسبت به زمان
۱۰۶۷	۴-۱۶ فرکانس‌های طبیعی یک میله‌ی یک بعدی
۱۰۷۳	۵-۱۶ تحلیل میله‌ی یک بعدی وابسته به زمان
۱۰۸۱	۶-۱۶ ماتریس‌های جرم و فرکانس‌های طبیعی المان تیر
۱۰۹۲	۷-۱۶ ماتریس جرم المان‌های خریا، فاب صفحه‌ای، تنش / کرنش صفحه‌ای، متقارن محور و سه بعدی
۱۰۹۹	۸-۱۶ انتقال حرارت وابسته به زمان
۱۱۱۱	۹-۱۶ حل متال‌هایی از طریق برنامه‌های رایانه‌ای در دینامیک سازه‌ها
۱۱۲۳	مراجع
۱۱۲۴	مسائل
<hr/>	
۱۱۳۲	پیوست A. جبر ماتریسی
۱۱۳۲	مقدمه
۱۱۳۲	۱-A تعریف یک ماتریس
۱۱۳۴	۲-A عملیات ماتریسی

صفحه	عنوان
۱۱۴۵	۳-A روش کوفاکتور یا الحاقی در تعیین معکوس یک ماتریس
۱۱۴۸	۴-A معکوس یک ماتریس از روش ردیف کاهی
۱۱۵۱	مراجع
۱۱۵۱	مسائل
<hr/>	
۱۱۵۴	پیوست B. روش‌های حل معادلات خطی همزمان
۱۱۵۴	مقدمه
۱۱۵۴	۱-B قالب کلی معادلات
۱۱۵۵	۲-B یکتایی، غیر یکتایی، و نبود جواب در مسأله
۱۱۵۷	۳-B روش‌های حل معادلات جبری خطی
۱۱۷۴	۴-B روش‌های ماتریس‌های متقارن نواری، پهنای باند، خط مرزی، و جبهه موج
۱۱۸۵	مراجع
۱۱۸۵	مسائل
<hr/>	
۱۱۸۸	پیوست C. معادلات مبتنی بر تئوری الاستیسیته
۱۱۸۸	مقدمه
۱۱۸۹	۱-C معادلات دیفرانسیلی تعادل
۱۱۹۱	۲-C معادلات کرنش - جابه‌جایی و هم‌سازگاری

xxiii	فهرست مطالب
صفحه	عنوان
۱۱۹۵	۳-C روابط تنش / کرنش
۱۱۹۹	مراجع
۱۲۰۰	پیوست D. نیروهای گره‌ای معادل
۱۲۰۰	مسائل
۱۲۰۴	پیوست E. اصل کار مجازی
۱۲۰۹	مراجع
۱۲۱۰	پیوست F. خصوصیات مقاطع فولاد و آلومینیوم سازه‌ای
۱۲۲۴	پاسخ مسائل منتخب
۱۱۶۲	خصوصیات اجسام جامد
۱۱۶۳	خصوصیات سطوح مسطح
۱۲۶۴	واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی

نماد گذاری

علائم انگلیسی

مختصات عمومی (ضرایب مورد استفاده در تشریح جابه‌جایی به صورت کلی)	a_i
اندازه‌ی سطح مقطع	A
ماتریس رابط کرنش‌ها با جابه‌جایی گره‌ها یا رابط گرا دیان دما با دما در گره‌ها	\underline{B}
گرمای ویژه‌ی ماده	c
ماتریس رابط تنش‌ها با جابه‌جایی در گره‌ها	\underline{C}
کسینوس هادی در فضایی دو بعدی	C
کسینوس‌های هادی در فضایی سه بعدی	C_2, C_1, C_3
ماتریس جابه‌جایی گره‌ای المان و سازه در مختصات اصلی	\underline{d}
ماتریس جابه‌جایی گره‌ای المان در مختصات محلی	$\underline{\hat{d}}$

سختی خمشی در ورق	D
ماتریس رابط تنش‌ها با کرنش‌ها	\underline{D}
تابع نمایی	e
مدول الاستیسیته	E
ماتریس نیروهای گره‌ای در مختصات اصلی	\underline{f}
ماتریس نیروهای گره‌ای در مختصات محلی المان	$\hat{\underline{f}}$
ماتریس نیروی جرمی	\underline{f}_h
ماتریس نیرو در انتقال حرارت	\underline{f}_h
ماتریس نیروی شار حرارتی	\underline{f}_q
ماتریس نیروی منبع حرارتی	\underline{f}_Q
ماتریس نیروی سطحی	\underline{f}_s
ماتریس نیرو در سازه در مختصات اصلی	\underline{E}
ماتریس نیروی خلاصه شده	\underline{E}_t
نیروهای گره‌ای در فضای اصلی	\underline{E}_t
ماتریس نیروی معادل	\underline{E}_Q
ماتریس گرادیان دما یا ماتریس گرادیان هیدرولیک	\underline{g}
مدول برشی	G
ضریب انتقال حرارت (یا جابه‌جایی)	h
گره‌های یک المان مثلثی شکل	m, j, i
ممان اینرسی اصلی	I
ماتریس زاکوبین	\underline{J}

سختی فنر	k
ماتریس سختی یا انتقال حرارت هدایتی یک المان در مختصات اصلی	\underline{k}
ماتریس سختی فشرده، و قسمت انتقال حرارت هدایتی ماتریس سختی در مسائل انتقال حرارت	\underline{k}_c
ماتریس سختی المان در مختصات محلی	\hat{k}
بخش انتقال حرارت از طریق جابه‌جایی در ماتریس سختی در مسائل انتقال حرارت	\underline{k}_h
ماتریس سختی سازه در مختصات اصلی	\underline{K}
ضریب هدایت (یا نفوذ پذیری در مکانیک سیالات)، به ترتیب در جهت‌های x و y	K_{yy}, K_{xx}
طول المان میله‌ای یا تیرآهنی	L
حداکثر تفاضل بین شماره‌ی گره‌ها در یک المان	m
عبارت کلی گشتاور	$m(x)$
گشتاورها در یک ورق	m_{xy}, m_y, m_x
ماتریس جرم در مختصات محلی	\hat{m}
گشتاورهای گره‌ای در مختصات محلی	\hat{m}_i
ماتریس جرم در مختصات اصلی	\underline{M}
ماتریس رابط تغییر مکان‌ها و مختصات عمومی در فرمول بندی المان مثلثی شکل کرنش خطی	\underline{M}'
ماتریس رابط کرنش‌ها و مختصات عمومی در فرمول بندی المان مثلثی شکل کرنش خطی	\underline{M}''

پهنای باند یک سازه	n_b
تعداد درجات آزادی در هر گره	n_d
ماتریس تابع شکل (میان یاب یا پایه)	\underline{N}
توابع شکل	N_i
فشار اعمال شده بر سطح (یا ارتفاع سیال در گره‌ها، در مکانیک سیالات)	p
فشارهای شعاعی و محوری (طولی) (به ترتیب)	p_z, P_r
بار متمرکز	P
ماتریس نیروی متمرکز محلی	\hat{p}
جریان حرارتی بر واحد سطح (شار) یا بار گسترده بر یک ورق	q
نرخ جریان حرارت	\bar{q}
جریان حرارت بر واحد مساحت دز سطح مرزی	q^*
منبع حرارتی تولید شده بر واحد حجم یا منبع درونی سیال	Q
منبع حرارت متمرکز یا خطی	Q^*
بارهای خطی برشی عرضی در یک ورق	Q_y, Q_x
به ترتیب، مختصات شعاعی، محیطی و محوری	r, θ, z
پسماند در انتگرال گالرکین	R
نیروی حجمی در جهت شعاعی	R_b
عکس‌العمل‌های گره‌ای به ترتیب در جهت x و y	R_{iy}, R_{ix}
مختصات طبیعی متصل به المان ایزوپارامتریک	z', t, s

مساحت سطح	S
ضخامت المان ورق یا المان صفحه	t
دماهای گره ای در المان مثلثی شکل	t_m, t_j, t_i
تابع دما	T
دمای محیط اطراف	T_r
ماتریس انتقال جابه‌جایی، نیرو و سختی	\underline{I}
ماتریس تنش سطحی در جهت i	\underline{I}_i
توابع جابه‌جایی به ترتیب در جهت‌های x ، y و z	w, v, u
انرژی کرنشی	U
تغییر در انرژی ذخیره شده	ΔU
سرعت جریان سیال	v
نیروی برشی در تیر آهن	\hat{V}
بار گسترده روی یک تیر یا در امتداد لبه‌ی یک المان صفحه‌ای	w
کار	W
مختصات گره‌ای به ترتیب در جهت‌های x ، y و z	$\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$
مختصات محلی در المان	$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$
محورهای مختصات اصلی یا مرجع در سازه	x, y, z
ماتریس نیروی حجمی	\underline{X}
نیروهای حجمی به ترتیب در جهت‌های x ، y و z	X_h, Y_h, Z_h
نیروی حجمی در جهت طولی (حالت متقارن محور) با در جهت z (در حالت سه بعدی)	Z_h

علائم یونانی

ضریب انبساط حرارتی	α
به منظور تشریح توابع شکلی که در معادله‌ی (۶-۲-۱۰) و معادلات (۱۱-۲-۵) الی (۱۱-۲-۸) تعریف شده اند به کار می روند	$\delta_i, \gamma_i, \beta_i, \alpha_i$
تغییر طول فنر یا میله	δ
کرنش عمودی	ε
ماتریس کرنش حرارتی	ε_T
انحنایها در خمش یک ورق	$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$
ضریب یواسون	ν
زاویه‌ی چرخش یا شیب گره‌ای در یک المان تیر	ϕ_i
تابعک در مسائل انتقال حرارت	π_h
انرژی پتانسیل کل	π_p
چگالی جرمی یک ماده	ρ
چگالی وزنی یک ماده	ρ_w
سرعت زاویه ای و فرکانس طبیعی	ω
انرژی پتانسیل نیروها	Ω
ارتفاع سیال یا پتانسیل یا دوران یا شیب در یک تیرآهن	ϕ
تنش عمودی	σ

ماتریس تنش حرارتی	$\underline{\sigma}_T$
تنش برشی و پیروی ارتعاشات	τ
زاویه‌ی بین محور x و محور محلی \hat{x} در مسائل دو بعدی	θ
زاویه‌ی اصلی	θ_p
به ترتیب، زوایای بین محوره‌های اصلی x و y و z با محور محلی \hat{x} یا دوران حول محوره‌های x و y در یک ورق	$\theta_x, \theta_y, \theta_z$
ماتریس تابع جابه‌جایی عمومی	$\underline{\Psi}$

علائم دیگر

مشتق یک متغیر نسبت به x	$\frac{d(\)}{dx}$
دیفرانسیل زمان	dt
نقطه‌ای که در بالای یک متغیر قرار می‌گیرد معرف مشتق آن نسبت به زمان است.	()
معرف ماتریس مستطیلی یا مربعی است	[]
معرف ماتریس ستونی است	{ }
خطی که در زیر متغیری آورده می‌شود دلالت بر ماتریس بودن آن می‌نماید	()
کلاهک بالای هر متغیر دلالت بر تشریح آن متغیر در مختصات محلی می‌نماید	(^)
معرف معکوس یک ماتریس است	[Γ] ⁻¹

معرف برگردان یک ماتریس است	$[]^T$
مشتق جزئی نسبت به x	$\frac{\partial ()}{\partial x}$
مشتق جزئی نسبت به کلیه متغیرهای $\{d\}$	$\frac{\partial ()}{\partial \{d\}}$
معرف اتمام حل یک مثال است	■

فصل ۱

مقدمه

پیش‌گفتار

روش اجزای محدود روشی عددی است که از طریق آن می‌توان مسائل مهندسی و ریاضی فیزیک را حل نمود. از زمینه‌های مورد علاقه‌ای که می‌توان از روش اجزای محدود در حل مسائل مهندسی و ریاضی فیزیک استفاده نمود می‌توان تجزیه و تحلیل سازه‌ها، انتقال حرارت، حرکت سیال، انتقال جرم و پتانسیل‌های الکترو مغناطیسی را نام برد.

در مسائلی که شکل هندسی، بارگذاری، و خواص ماده در آن‌ها پیچیده یا مختلط است نمی‌توان حل تحلیلی ریاضی مشخصی را ارائه نمود. حل‌های تحلیلی آن‌هایی هستند که توسط عبارت ریاضی خاصی مشخص شده و می‌توان مقدار کمیت مجهول مورد نظر را در هر نقطه‌ای از جسم (در این‌جا می‌تواند کل سازه و یا سیستم فیزیکی مورد علاقه باشد) توسط آن‌ها پیدا نموده و در نتیجه، در کلیه‌ی نقاط جسم معتبر خواهند بود. حل‌های تحلیلی یاد شده عموماً بر پایه‌ی حل یک معادله‌ی دیفرانسیلی عمومی یا جزئی استوار بوده که اغلب به دلیل پیچیده بودن

شکل هندسی، بارگذاری و خواص مواد، دسترسی به آن‌ها امکان پذیر نیست؛ بنابراین نیاز است تا به منظور دستیابی به جواب‌های قابل قبول، به روش‌های عددی، از جمله روش اجزای محدود تکیه نمود. فرمول بندی مسأله از طریق روش اجزای محدود، به جای نیاز به حل معادلات دیفرانسیلی منجر به حل مسأله از طریق سیستمی از معادلات همزمان جبری می‌شود. چنین روش‌هایی، مقادیر تقریبی مجهولات را در نقاط مجزایی از محیط پیوسته به صورت عددی محاسبه می‌کنند؛ بنابراین فرآیند مدل‌سازی جسمی از طریق تقسیم آن به سیستمی از اجسام یا واحدهای کوچک‌تر (اجزای محدود)، که توسط نقاط، دو یا بیش از دو المان، و یا خطوط مرزی و یا سطوح مشترک به هم متصل می‌شوند را *المان بندی* گویند. در روش اجزای محدود به جای آن که مسأله برای کل جسم در یک مرحله حل شود معادلات برای هر یک از المان‌ها نوشته شده و سپس با ادغام آن‌ها حل مسأله برای کل جسم به دست می‌آید.

به‌طور خلاصه، حل مسائل سازه‌ای عموماً منجر به تعیین جابه‌جایی‌های هر گره و تعیین تنش در المان‌هایی که سازه‌ی تحت بار را تشکیل می‌دهند می‌شود. در مسائل غیر سازه‌ای، مقادیر مجهول در هر گره، می‌توانند برای مثال، دما و یا فشار سیال ناشی از شارهای حرارتی یا سیالاتی باشند. در این فصل ابتدا تاریخچه‌ی از گسترش روش اجزای محدود ارائه می‌شود. از تاریخچه‌ی ارائه شده در خواهید یافت که این روش فقط از ۵۰ سال گذشته (به موازات پیشرفت‌های حاصل و مرتبط با رایانه‌های دیجیتال الکترونیکی با سریع)، روشی عملی در حل مسائل مهندسی گشته است. به دنبال این تاریخچه، مقدمه‌ای بر نحوه‌ی ارائه‌ی ماتریس‌ها آورده شده و سپس نیاز به روش‌های ماتریسی (که با گسترش رایانه‌های مدرن دیجیتال عملی شده است) در فرمول بندی معادلات، جهت حل آن‌ها، تشریح شده است. در این بخش نقش رایانه‌های دیجیتال در حل سیستم‌های بزرگی از معادلات

جبری همزمان که از مسائل پیچیده ناشی می‌شوند و نیز گسترش برنامه‌های رایانه‌ای متعددی که مبتنی بر روش اجزای محدود می‌باشند مورد بحث قرار گرفته است. سپس تشریح کلی مراحل کلی که منجر به تعیین حل یک مسأله می‌شود آورده شده است. کاربردهای مختلفی به منظور ارائه‌ی توانایی این روش در حل مسائلی با شکل‌های هندسی مختلط یا پیچیده، مواد مختلف و یا بارگذاری نامنظم آورده شده است. در انتها، بعضی از مزایای روش اجزای محدود در حل مسائل مهندسی و ریاضی فیزیک ذکر شده است.

۱-۱ تاریخچه به اختصار

این بخش معرف تاریخچه‌ای از روش اجزای محدود است که در زمینه‌های سازه‌ای و غیر سازه‌ای به علوم مهندسی و ریاضی فیزیک اعمال شده است. از مراجعی که در این قسمت ذکر شده به منظور تکمیل این تاریخچه به اختصار استفاده شده است. گسترش قابل ملاحظه‌ی روش اجزای محدود در زمینه‌ی مهندسی سازه توسط [۱] Hrennikoff در سال ۱۹۴۱ و [۲] McHenry در سال ۱۹۴۳ که از شبکه‌ی المان‌های خطی (یک بعدی) از قبیل میله‌ها و تیرها در تعیین تنش در جامدات پیوسته استفاده نمودند شروع شد. در مقاله‌ای که در سال ۱۹۴۳ به چاپ رسید علی‌رغم بی‌توجهی به آن تا چندین سال، [۳] Courant پیشنهاد نمود تا حل تنش‌ها به شکل تغییرات نوشته شوند. وی سپس توابعی را به صورت توابع تقریبی بر محدوده‌های مثلثی شکل کوچکی که کل ناحیه‌ی مورد نظر را شکل می‌دادند به عنوان راه حل عددی تقریبی ارائه نمود. در سال ۱۹۴۷، [۴] Levy روش انعطاف پذیری یا نیرو را ابداع نموده و در سال ۱۹۵۳ کار وی پیشنهاد نمود که روش دیگری (روش سختی یا جابه‌جایی) می‌تواند جای‌گزین مناسبی در تجزیه و تحلیل استاتیکی سازه‌های تکراری در فضا پیمایا باشد. البته حل دستی معادلات او

کار سخت و طاقت فرسایی بود و در نتیجه روش وی هنگامی محبوبیت یافت که رایانه‌های دیجیتال با سرعت عملکرد بالا اختراع گردید.

در سال ۱۹۵۴، [۶، ۷]، Argris و Kelsey با استفاده از اصول انرژی روش‌های تجزیه و تحلیل ماتریسی سازه را توسعه دادند. این توسعه نقش مهم اصول انرژی را در روش اجزای محدود آشکار نمود.

اولین کاربرد المان‌های دو بعدی توسط [۸] Turner و همکاران وی در سال ۱۹۵۶ انجام گرفت. آن‌ها ماتریس‌های سختی را برای المان‌های خریا و تیر آهن، و المان‌های دو بعدی مثلثی و مستطیل شکل را برای تنش دو بعدی استخراج نموده و روشی را برای تعیین ماتریس سختی کل سازه که روش مستقیم سختی نامیده می‌شود ارائه نمودند. در اوایل سال‌های ۱۹۵۰، همگام با گسترش رایانه‌های دیجیتال سریع، [۸] Turner و همکاران وی معادلات سختی المان‌های محدود را که به صورت ماتریسی تشریح شده بود گسترش دادند. عبارت *المان محدود* اولین بار توسط [۹] Clough در سال ۱۹۶۰، هنگامی که از المان‌های مثلثی و مستطیل شکل در تجزیه و تحلیل تنش استفاده گردید، به کار گرفته شد.

در سال ۱۹۶۱ ماتریس سختی برای المان‌های مسطح مستطیل شکل تحت خمش توسط [۱۰] Melosh به وجود آمد. به دنبال آن در سال ۱۹۶۳ ماتریس سختی المان پوسته‌ای تحت خمش برای پوسته‌های متقارن محور و مخازن تحت فشار توسط Grafton و [۱۱] Strome گسترش یافت.

گسترش روش اجزای محدود به مسائل سه بعدی با به وجود آمدن ماتریس سختی برای المان‌های چهار وجهی توسط [۱۲] Martin در سال ۱۹۶۱، [۱۳] Gallagher و همکاران در سال ۱۹۶۲ و Melosh در سال ۱۹۶۳ صورت گرفت. المان‌های سه بعدی بیش‌تری در سال ۱۹۶۴ توسط [۱۵] Argyris مطالعه گردید.

در سال ۱۹۶۵ حالت خاص اجسام صلب متقارن محور، توسط Clough و [۱۶] Rashid، و [۱۷] Wilson بررسی گردید.

بیشترین کار انجام شده در زمینه‌ی اجزای محدود تا اوایل سال‌های ۱۹۶۰ در ارتباط با کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های کوچک رفتار الاستیک مواد و بارگذاری استاتیکی بود. هرچند خیزهای بزرگ و تجزیه و تحلیل حرارتی در سال ۱۹۶۰ توسط [۱۸] Turner و همکاران، و غیر خطی بودن مواد توسط [۱۳] Gallegher و همکاران در ۱۹۶۲ بررسی گردید ولی مسائل مربوط به کمانش در ابتدا توسط [۱۹] Gallegher و Padlog در سال ۱۹۶۳ مورد بحث قرار گرفت. گسترش این روش به مسائل ویسکو الاستیک توسط [۲۰] Zienkiewicz و همکاران در سال ۱۹۶۸ صورت گرفت.

در سال ۱۹۶۵، [۲۱] Archer، تحلیل دینامیکی را در تعیین ماتریس جرم یکپارچه، که کاربرد آن در تحلیل سیستم‌هایی با جرم گسترده از قبیل میله‌ها و تیرآهن‌ها و تحلیل سازه است، به کار گرفت.

با تشخیص [۱۴] Melosh در سال ۱۹۶۳ در خصوص استفاده از فرمول بندی تغییرات در روش اجزای محدود، استفاده از این روش در حل کاربردهای غیر سازه‌ای شروع شد. مسائل میدانی از قبیل تعیین پیچش یک محور، جریان سیال، و انتقال حرارت از طریق جابه‌جایی توسط [۲۲] Zienkiewicz و [۲۲] Cheung در سال ۱۹۶۵، [۲۳] Martin در سال ۱۹۶۸ و [۲۴] Wilson و [۲۴] Nickel در سال ۱۹۶۶ امکان پذیر گردید.

مضافاً، با به کارگیری روش توابع پسماند وزنی، بسط این روش ابتدا به منظور استخراج معادلات الاستیسیته‌ای که در تجزیه و تحلیل سازه‌ها به کار می‌رود توسط [۲۵] Szabo و [۲۵] Lee در سال ۱۹۶۹ و سپس برای مسائل مربوط به میدان‌های گذرا توسط [۲۶] Zienkiewicz و [۲۶] Parekh در سال ۱۹۷۰ ممکن گشت. متعاقب آن معلوم شد که اگر استفاده از فرمول بندی مستقیم و فرمول بندی تغییرات تابع

مشکل و یا غیر ممکن باشد روش پسماندهای وزنی می‌تواند در بسیاری از مواقع مناسب باشد. برای مثال در سال ۱۹۷۷، Lyness [۲۷] و همکاران از روش پسماند وزنی برای تعیین میدان مغناطیسی استفاده نمودند.

در سال ۱۹۷۶ Belytschko [۲۹، ۲۸] مسائل مرتبط با جابه‌جایی‌های بزرگ در رفتار دینامیکی غیر خطی را بررسی نموده و تکنیک‌های عددی را به منظور حل سیستم معادلات به دست آمده بهبود بخشیدند. برای اطلاعات بیش‌تر در این زمینه، به کتابی که توسط Liu، Belytschko، و Moran [۵۸] نوشته شده مراجعه نمایید. میدان نسبتاً جدیدی از کاربرد روش اجزای محدود زمینه‌ی بیومهندسی [۳۰، ۳۱] است. در این زمینه هنوز مشکلاتی از قبیل رفتار غیر خطی مواد، شکل هندسی غیر خطی و پیچیدگی‌های دیگری که هنوز باید باز شوند وجود دارد.

از اوایل سال‌های ۱۹۵۰ تا کنون پیشرفت‌های گسترده‌ای در کاربرد روش اجزای محدود در حل مسائل مهندسی صورت گرفته است. بدون شک، مهندسان، ریاضی دانان کاربردی، و دیگر دانشمندان به منظور دستیابی به کاربردهای جدید فعالیت خواهند نمود. برای آشنایی با تاریخچه‌ی گسترده‌ی روش اجزای محدود می‌توان به تحقیقات [۳۲] Kardestuncer، [۳۳] Clough، یا [۵۷] Noor مراجعه نمود.

۱-۲ معرفی نماد ماتریسی

در روش اجزای محدود به منظور ساده‌تر نمودن و فرمول‌بندی معادلات المان‌های سختی، روش‌های ماتریسی ابزار مورد نیازی است که از آن‌ها به منظور حل مسائل مختلف و مهم‌تر از آن، در روش‌های برنامه‌نویسی در رایانه‌های الکترونیکی دیجیتال با سرعت بالا استفاده می‌شود. بنا براین نماد ماتریسی معادلات،

روش ساده‌ای است که به راحتی می‌توان از آن برای نوشتن و حل دستگاه معادلات جبری استفاده نمود.

پیوست A مفاهیم مهم ماتریس‌ها را که در خلال این کتاب از آن‌ها استفاده می‌شود تشریح می‌کند. در این جا فقط خلاصه‌ی کوتاهی از این نماد سازی که در این کتاب آورده شده ذکر می‌شود.

یک ماتریس، رشته‌ی مستطیل شکلی از کمیت‌ها است که به صورت ردیف‌ها و ستون‌ها در کنارهم قرار گرفته و اغلب جهت کمک به معرفی و حل دستگاه معادلات جبری از آن استفاده می‌شود. از جمله مثال‌هایی که در فصل‌های بعد تشریح خواهند شد می‌توان مؤلفه‌های یک نیرو $(F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, \dots, F_{nx}, F_{ny}, F_{nz})$ در نقاط یا گره‌های مختلف یک سازه را $(1, 2, \dots, n)$ همراه با تغییر مکان‌های گره‌ای مربوطه $(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}, d_{2x}, d_{2y}, d_{2z}, \dots, d_{nx}, d_{ny}, d_{nz})$ که هر دو به صورت ماتریسی زیر تشریح شده‌اند، نام برد.

$$\{F\} = \underline{F} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \end{Bmatrix}, \quad \{d\} = \underline{d} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{nx} \\ d_{ny} \\ d_{nz} \end{Bmatrix} \quad (1-2-1)$$

زیر نویس‌های کوچکی که در سمت راست F و d قرار دارند به ترتیب دلالت بر شماره‌ی گره و جهت نیرو یا جابه‌جایی می‌نمایند. به‌طور مثال F_{1x} معرف نیرو در

گره ۱ است که در جهت x اعمال می‌شود. ماتریس‌هایی که در رابطه‌ی (۱-۲-۱) آورده شده‌اند ماتریس‌های ستونی نامیده شده و ابعاد آن‌ها $n \times 1$ است. در خلال این کتاب از علامت آکولاد $\{\}$ به منظور شناسایی ماتریس‌های ستونی استفاده خواهد شد. کلیه‌ی مقادیر نیروها و جابه‌جایی‌هایی که در ماتریس‌های ستونی آورده شده‌اند به اختصار به صورت $\{F\}$ یا $\{d\}$ نشان داده می‌شوند. علامت مختصر شده‌ی دیگری که از آن در خلال این کتاب به منظور معرفی هر آرایه‌ی مستطیل شکل استفاده می‌شود خط کوچکی است که در زیر متغیر رسم می‌شود. به عبارتی دیگر، \underline{d} و \underline{F} معرف ماتریس هستند (احتمالاً ماتریس‌های ستونی یا مستطیلی - نوع آن از بحث متن مرتبط با متغیر مورد نظر مشخص خواهد شد).

حالت کلی‌تری از یک ماتریس مستطیل شکل با استفاده از علامت کروشه $[]$ مشخص می‌شود. برای مثال ماتریس سختی هر المان $[k]$ و نیز ماتریس سختی اصلی $[K]$ که در خلال این کتاب برای المان‌های مختلف (از قبیل المان‌های شکل ۱-۱ در صفحه‌ی ۱۸) به دست آمده‌اند توسط ماتریس‌های مربع شکلی به شرح زیر معرفی می‌شوند.

$$[k] = \underline{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (2-2-1)$$

و

$$[K] = \underline{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (3-2-1)$$

در حالی که در تئوری سازه‌ها، المان‌های k_{ij} و K_{ij} را اغلب ضرایب موثر سختی می‌نامند.

بعداً درخواهید یافت که نیروهای گره‌های اصلی \underline{F} و نیز جابه‌جایی‌های مربوط به آن‌ها \underline{d} ، از طریق ماتریس سختی کل \underline{K} به هم ارتباط می‌یابند.

$$\underline{F} = \underline{Kd} \quad (۴-۲-۱)$$

رابطه‌ی (۴-۲-۱) معادله‌ی سختی اصلی نامیده شده و معرف تعدادی رابطه‌ی همزمان است. این معادله اساسی‌ترین رابطه در روش تجزیه و تحلیل مسائل به روش سختی یا جابه‌جایی است. استفاده از روش خلاصه‌تری که در آن خط کوچکی در زیر متغیر رسم می‌شود، همانند معادله‌ی (۴-۲-۱)، نباید سبب شود تا در نحوه‌ی تعیین ماتریس‌های ستونی یا مستطیل شکل مشکلی به وجود آید. به منظور درک بهتر المان‌های K_{ij} در معادله‌ی (۳-۲-۱)، با استفاده از معادله‌ی (۱-۲-۱)، معادله‌ی (۴-۲-۱) را به صورت گسترش یافته‌ی زیر می‌نویسیم.

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{nz} \end{Bmatrix} \quad (۵-۲-۱)$$

حال فرض می‌کنیم که سازه‌ای تحت تأثیر یک نیرو به قسمی جابه‌جا شده است که در آن $d_{1x} = 1$ ، $d_{1y} = 0$ ، $d_{1z} = \dots = d_{nz} = 0$. بنابراین با توجه به معادله‌ی (۴-۲-۱) داریم:

$$F_{1x} = K_{11} \quad F_{1y} = K_{12}, \dots, F_{nz} = K_{n1} \quad (۶-۲-۱)$$

معادلات (۱-۲-۶) شامل کلیه المان‌ها در اولین ستون \underline{K} است. مضافاً، این معادلات نشان می‌دهند که المان‌های $K_{11}, K_{21}, \dots, K_{n1}$ برابر کلیه نیروهای اعمال شده بر گره‌هایی هستند که باعث می‌شوند تا جابه‌جایی تحمیل شده بر جسم حفظ شود. به طریقی مشابه، دومین ستون ماتریس \underline{K} معرف مقادیر نیروهایی است که باعث می‌شوند تا جابه‌جایی $d_{1j} = 1$ شده و جابه‌جایی گره‌های دیگر برابر صفر شوند. حال، با توجه به مطالب فوق، ضرایب مؤثر سختی باید به نحو مطلوب‌تری درک شده باشند.

در فصل‌های بعد ماتریس سختی \underline{k} برای المان‌های مختلفی از قبیل میله‌ها، تیرها و نیز حالت تنش سطحی تشریح خواهند شد. در این فصول، نحوه‌ی تعیین ماتریس سختی کل \underline{K} برای سازه‌های مختلف، به منظور حل معادله‌ی (۱-۲-۴)، و نیز به منظور تعیین مقادیر مجهول جابه‌جایی در ماتریس \underline{d} آورده شده است. استفاده از اصول ماتریس‌ها و عملیات مربوط به آن‌ها ضمن تمرین امری عادی خواهد شد. همچنین، استفاده از آن‌ها ابزار مناسبی برای حل دستی مسائل کوچک است. در عین حال استفاده از روش‌های ماتریسی در حل دستگاه معادلات همزمان مرتبط با مسائل پیچیده توسط رایانه‌های دیجیتال امری اجتناب‌ناپذیر است.



۳-۱ نقش رایانه

همان‌طور که ذکر شد، تا قبل از اوایل سال‌های ۱۹۵۰ روش‌های ماتریسی و روش‌های اجزای محدود مربوطه به دلیل تعدد زیاد معادلات دیفرانسیلی، روش‌های قابل قبول مناسبی در حل مسائل پیچیده به شمار نمی‌رفتند. علی‌رغم آن که از روش اجزای محدود در تشریح سازه‌های پیچیده استفاده می‌شد ولی با این وصف به دلیل تعدد زیاد معادلاتی که از این روش در تجزیه و تحلیل سازه‌ها حاصل

می‌گشت استفاده از آن را بسیار دشوار و غیر عملی می‌نمود. مع الاصف، با اختراع رایانه حل هزاران معادله در خلال چند دقیقه امکان پذیر گشت.

به نظر می‌رسد اولین رایانه‌ی تجاری پیشرفته‌ی مدرن امروزی از نوع ۷۰۱ IBM Univac باشد که در دهه‌ی ۱۹۵۰ به وجود آمد. رایانه‌ی یاد شده بر اساس تکنولوژی لامپ خلاً ساخته شده بود. همراه با سیستم UNIVAC، تکنولوژی کارت سوراخ دار که در آن اطلاعات از طریق کارت های سوراخ شده‌ای وارد رایانه می‌شد به بازار آمد. در دهه‌ی ۱۹۶۰، به دلیل کاهش قیمت، وزن، مصرف انرژی، و قابلیت اعتماد بالاتر ترانزیستور، تکنولوژی مبتنی بر ترانزیستور جای‌گزین تکنولوژی لامپ خلاً گردید. از سال ۱۹۶۰ تا اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰، تکنولوژی مبتنی بر مدار مجتمع (IC) که به میزان قابل توجهی باعث افزایش سرعت رایانه‌ها می‌شد در حال تدوین بود، لذا بدین وسیله حل مسائل بزرگ‌تر اجزای محدود با درجه‌های آزادی بیش‌تر ممکن شد. از اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ تا دهه‌ی ۱۹۸۰، مجموعه‌ی رایانه‌ها در مقیاس بالا و نیز سیستم های رایانه‌ای، با رابط‌های گرافیکی مشابه با ویندوز، همراه با موس در کنار هم قرار گرفتند. اولین رایانه‌ای که موس در کنار آن قرار داشت در ۱۷ نوامبر ۱۹۷۰ به ثبت رسید. امروزه، رایانه‌های شخصی، به وفور تولید می‌شوند. چنین گسترشی در خلال ظهور ارتباطات شبکه‌ای، که پیامد آن ظهور اینترنت و World Wide Web بود پا به عرصه‌ی وجود نهاد. در دهه‌ی ۱۹۹۰، سیستم عامل ویندوز به وجود آمد که در اثر آن، کار با IBM و رایانه‌های شخصی هم سازگار با آن، با ارائه‌ی رابط گرافیکی پیش ساخته‌ی درون نرم افزار، راحت‌تر گردید.

گسترش رایانه موجب بسط برنامه‌هایی در زمینه‌ی محاسبات عددی گردید. برنامه‌های عمومی و خاص متعددی نوشته شده تا از آن‌ها به منظور حل مسائل ساده‌ای (غیرسازه‌ای) پیچیده استفاده شود. برنامه‌هایی که در این زمینه نوشته شده

[۴۶-۵۶] نمایانگر ظرافت روش اجزای محدود بوده و نیاز به فهم آن را تقویت می‌بخشد.

در واقع، برنامه‌های رایانه‌ای مبتنی بر اجزای محدود را می‌توان در رایانه‌هایی که دارای یک پردازنده است، همانند رایانه‌های شخصی (PC) یا رایانه‌ی قابل حمل (Laptop) و یا بر مجموعه‌ای از رایانه‌ها اجرا نمود. حافظه‌های قدرتمند رایانه‌های شخصی و مزیت برنامه‌های حلال گر، امکان حل مسائلی را با بیش از یک میلیون مجهول فراهم می‌سازد.

به منظور استفاده از رایانه، تحلیل گر پس از مدل سازی مسأله به روش اجزای محدود، اطلاعات مربوطه را وارد رایانه می‌کند. این اطلاعات می‌توانند شامل مختصات گره‌های یک المان، ترتیب اتصال المان‌ها به یک دیگر، خواص ماده‌ای المان‌ها، بارهای اعمال شده، شرایط مرزی یا موانع و یا نوع بررسی مورد نظر باشد. سپس رایانه از اطلاعات داده شده به منظور ایجاد و حل معادلات لازم برای تجزیه و تحلیل استفاده می‌نماید.



۱-۴ گام‌های کلی در روش اجزای محدود

این بخش معرف مراحل کلی است که در فرمول بندی روش اجزای محدود و نیز حل مسائل مهندسی در نظر گرفته می‌شوند. از این مراحل به عنوان راهنما در حل مسائل سازه‌ای و غیرسازه‌ای در فصل‌های بعد استفاده خواهد شد.

به منظور آسان سازی معرفی مراحل کلی که بعداً گفته خواهد شد فقط مسائل سازه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. مسائل غیر سازه‌ای، انتقال حرارت، و مسائل مکانیک سیالات، و قیاس آن‌ها با مسائل سازه‌ای در فصل‌های ۱۳ و ۱۴ بررسی شده‌اند.

در مسائل مربوط به تجزیه و تحلیل تنش در سازه‌ها، یک مهندس به‌طور اخص به دنبال تعیین جابه‌جایی و تنش‌ها در سازه‌ای است که تحت بار اعمال شده در حالت تعادل به سر می‌برد. در بسیاری از سازه‌ها، تعیین جابه‌جایی با استفاده از روش‌های رایج موجود سخت بوده و بنابراین الزاماً باید از روش اجزای محدود استفاده نمود.

نوفاً، به منظور اعمال روش اجزای محدود به مسائل مکانیک سازه‌ای، دو روش مستقیم رایج وجود دارد. در اولین شیوه، که روش نیرو یا انعطاف پذیری نامیده می‌شود، نیروهای داخلی به عنوان مجهولات مسأله محسوب می‌شوند. به منظور تعیین معادلات مورد نیاز، ابتدا از معادلات تعادل استفاده می‌شود. سپس با معرفی معادلات همسازگاری، روابط اضافی مورد نیاز به دست می‌آیند. نتیجه، مجموعه‌ای از معادلات جبری است که به منظور تعیین نیروهای مجهول یا مازاد از آن‌ها استفاده می‌شود.

در دومین شیوه، که روش جابه‌جایی یا سختی نام دارد، جابه‌جایی گره‌ها بعنوان مجهولات مسأله محسوب می‌شوند. برای مثال شرایط هم سازگاری که بر اساس آن‌ها المان‌های هم گره، هم مرز و یا مشترک در یک سطح باید پس از جابه‌جایی در گره مربوطه، مرز و یا سطح مشترک به هم متصل باقی بمانند از ابتدا ارضا می‌شوند. سپس با استفاده از معادلات تعادل و روابط بین نیروها و جابه‌جایی‌ها معادلات مربوطه بر حسب جابه‌جایی گره‌ها نوشته می‌شوند.

حاصل تجزیه و تحلیل مسأله از طریق این دو روش، مجهولات (نیروها یا جابه‌جایی‌ها) و ماتریس‌های مختلفی است که در این ارتباط به کار گرفته شده‌اند (انعطاف پذیری و یا سختی). در تجزیه و تحلیل بسیاری از مسائل سازه‌ای ثابت شده است [۳۴] که از نقطه نظر محاسبات، روش جابه‌جایی (سختی) به دلیل ساده‌تر بودن فرمول بندی آن مطلوب‌تر از روش‌های دیگر است. مضافاً در بسیاری از برنامه‌های رایانه‌ای مرتبط با اجزای محدودی که کاربرد عمومی دارند از روش

جابه‌جایی در حل مسائل سازه‌ای استفاده شده است. به همین دلیل در خلال این کتاب فقط از روش جابه‌جایی استفاده خواهد شد.

روش تغییرات، روش عمومی دیگری است که می‌توان از آن به منظور استخراج معادلات مسائل سازه‌ای و غیر سازه‌ای استفاده نمود. روش تغییرات اصول متعددی را در بر دارد. یکی از این اصول که به دلیل سهولت نسبی آن، اغلب در دروس مکانیک پایه آورده شده و در این کتاب به‌طور گسترده از آن استفاده می‌شود قضیه‌ی مینیمم انرژی پتانسیلی است که به موادی اعمال می‌شود که دارای رفتار الاستیک خطی باشند. قضیه‌ی یاد شده در بخش‌های متعددی از این کتاب، همانند بخش ۲-۶ برای المان فنر، بخش ۳-۱۰ برای المان میله‌ای شکل، بخش ۴-۷ برای المان تیر، بخش ۶-۲ برای المان کرنش ثابت مثلثی شکل در تنش و کرنش صفحه‌ای، بخش ۱۱-۲ برای المان سه بعدی چهار وجهی، و بخش ۱۲-۲ برای المان خمشی ورق، تشریح شده و از آن استفاده شده است. سپس، از تابعی همانند آن چه که در قضیه‌ی مینیمم انرژی پتانسیل ارائه شده استفاده نموده تا معادلات اجزای محدود مسائل غیر سازه‌ای انتقال حرارت، که در فصل ۱۳ آورده شده استخراج شوند.

از دیگر اصول تغییرات که اغلب از آن به منظور استخراج معادلات حاکم استفاده می‌شود اصل کار مجازی است. کاربرد این اصل، بیش‌تر در موادی است که رفتار آن‌ها به صورت الاستیک خطی یا غیر خطی باشد. برای آن دسته از افرادی که به منظور استخراج معادلات اجزای محدود، به ویژه میله‌ها، تیرآهن‌ها، و اجسام دو و سه بعدی، در سیستم‌های استاتیکی یا دینامیکی، از کار مجازی استفاده می‌کنند، این اصل در پیوست E تشریح شده است.

در روش اجزای محدود، سازه به کمک المان‌های متصل به هم کوچکی که المان‌های محدود نامیده می‌شوند مدل سازی می‌شود. سپس در هر المان تابعی از جابه‌جایی در نظر گرفته می‌شود. هر المان به‌طور مستقیم یا غیر مستقیم از طریق

مرزهای مشترک از قبیل گره‌ها، خطوط یا سطوح مرزی مشترک به المان دیگر اتصال می‌یابد. به منظور استفاده از خواص تنش- کرنش ماده‌ای که سازه از آن ساخته شده می‌توان رفتار گره مورد نظر را بر حسب خواص هر یک از المان‌های موجود در سازه تعیین نمود. مجموعه معادلاتی که معرف رفتار هر گره بوده و بدین ترتیب حاصل می‌شوند را می‌توان به بهترین وجه از طریق سری معادلات جبری که به‌طور ماتریسی نوشته می‌شوند ارائه نمود.

در این مقطع مراحل فرمول بندی و حل یک مسأله‌ی سازه‌ای را همراه با تشریح مورد نیاز آن معرفی می‌کنیم. هدف از بیان این مراحل آن است تا شما را با روشی که از آن در فرمول بندی مسائل در روش اجزای محدود استفاده می‌شود آشنا سازیم. شما نحوه‌ی اعمال این مراحل را به مسائلی از قبیل فنرها، میله‌ها، خرپاها، تیر آهن‌ها، قاب‌های صفحه‌ای، تنش صفحه‌ای، تنش متقارن محور، تنش سه بعدی، انتقال حرارت، و جریان سیال، در خلال فصل‌های بعد به راحتی متوجه خواهید شد.

باید در نظر داشت که تحلیل‌گر باید در زمینه تقسیم سازه یا محیط پیوسته به المان‌های محدود تصمیم لازم را اتخاذ نموده و نوع یا انواع المان‌ها، نوع بارهای اعمال شده، و شرایط مرزی یا تکیه گاه‌ها را که باید در تجزیه و تحلیل مورد استفاده قرار گیرند (مرحله‌ی ۱) انتخاب نماید. بقیه‌ی مراحل، ۲ الی ۷، به‌طور اتوماتیک توسط رایانه انجام می‌شود.

✓ مرحله‌ی ۱ تقسیم بندی و انتخاب نوع المان‌ها

مرحله‌ی ۱ شامل تقسیم بندی جسم به سیستم معادلی از المان‌های محدود با گره‌های به هم پیوسته و نیز انتخاب مناسب ترین نوع المانی است که تا حد امکان منطبق با رفتار فیزیکی واقعی باشد. تعداد کل المان‌های به کار رفته و نیز تغییرات در اندازه و نوع آن‌ها در یک جسم از نکات اساسی در قضاوت مهندسی محسوب

می‌شوند. المان‌ها باید به اندازه‌ای کوچک باشند تا جواب‌ها قابل استفاده بوده و از طرف دیگر آن‌قدر بزرگ در نظر گرفته شوند که حجم محاسبات کاهش یابد. عموماً در مواقعی که آهنگ تغییرات نتایج بالا است، از جمله هنگام بروز تغییرات در هندسه‌ی جسم، المان‌های کوچک‌تر (و احتمالاً پیشرفته‌تر) مطلوب‌تر بوده در حالی که از المان‌های بزرگ می‌توان در مواقعی که نتایج ثابت باشند استفاده نمود. در خصوص راهنمایی‌های مربوط به تقسیم بندی محیط در فصل‌های بعد، علی‌الخصوص در فصل ۷ که اهمیت این مسأله بسیار خواهد شد، توضیح داده خواهد شد. عموماً تقسیم بندی جسم یا شبکه بندی آن توسط برنامه‌های شبکه سازی و یا برنامه‌های موجود در این زمینه برای کاربر صورت می‌گیرد.

در بررسی مسائل از روش اجزای محدود انتخاب المان‌ها به شکل فیزیکی سازه تحت بارگذاری و نیز خواسته‌ی تحلیل‌گر به نزدیک بودن نتایج به رفتار واقعی بستگی دارد مناسب بودن مدل سازی به صورت یک، دو و یا سه بعدی به قضاوت نیازمند است. مضافاً انتخاب مناسب‌ترین المان برای یک مسأله‌ی خاص یکی از وظایف اصلی یک تحلیل‌گر یا طراح است. المان‌هایی که عموماً در عمل بیش‌تر از آن‌ها استفاده می‌شود - بیش‌تر آن‌ها در این کتاب منظور شده‌اند - در شکل ۱-۱ نمایش داده شده‌اند.

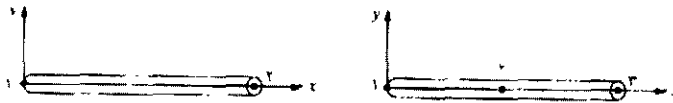
عمده‌ی المان‌های خطی [شکل ۱-۱(a)] شامل المان‌های میله‌ای (یا خرپا) و المان‌های تیر آهن می‌باشند. علی‌رغم مقطع دار بودن، این المان‌ها عموماً به صورت یک خط نشان داده می‌شوند. به‌طور کلی، سطح مقطع می‌تواند در امتداد المان متغیر باشد در حالی که در خلال این کتاب اندازه‌ی آن ثابت در نظر گرفته خواهد شد. از این المان‌ها عموماً به منظور مدل سازی خرپاها و سازه‌های قابی شکل (برای مثال به شکل ۱-۲ در صفحه‌ی ۲۸ مراجعه شود) استفاده می‌شود. اگر چه المان‌های پیشرفته‌تری که دارای سه گره یا بیش‌تر می‌باشند [شکل ۱-۱(a)] وجود دارد (المان‌های درجه دو، سه و غیره نامیده می‌شوند) ولی ساده‌ترین نوع آن‌ها (که

المان خطی نامیده می‌شود) دارای دو گره. یک گره در هر انتها، است. المان‌های خطی ساده‌ترین نوع المان بوده که به منظور معرفی بسیاری از اصول اولیه روش اجزای محدود در فصل‌های ۲ الی ۵ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

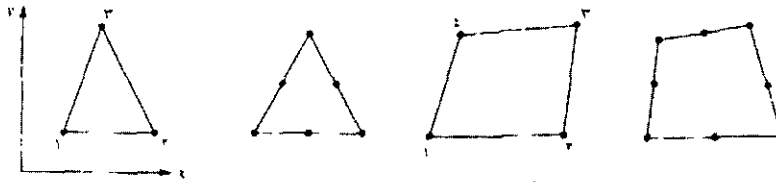
المان‌های ساده‌ی دو بعدی (یا سطحی) [شکل ۱-۱(b)]، توسط نیروهایی در سطح خود (حالت تنش یا کرنش سطحی) بارگذاری می‌شوند. این المان‌ها مثلثی شکل یا چهار ضلعی می‌باشند. اگر چه المان‌های پیشرفته تری وجود دارد که در وسط هر ضلع گره دیگری [شکل ۱-۱(b)] (المان‌های درجه دو نامیده می‌شوند) وجود داشته و اضلاع آن‌ها منحنی شکل است (فصل‌های ۸ و ۹)، ولی ساده‌ترین نوع المان دو بعدی در هر گوشه فقط یک گره داشته (به فصل ۶ مراجعه شود) و دارای جوانبی متشکل از خطوط مستقیم است (المان‌های خطی). ضخامت المان، در کل می‌تواند متغیر یا ثابت باشد. از این المان‌ها در مدل سازی بسیاری از مسائل مهندسی استفاده می‌شود (به شکل‌های ۱-۳ و ۱-۴ در صفحه‌ی ۳۰ و ۳۱ مراجعه شود).

عمومی ترین نوع المان‌های سه بعدی، [شکل ۱-۱(c)]، المان‌های سه وجهی و شش وجهی (با آجری) بوده که از آن‌ها در مواقع لزوم در تجزیه و تحلیل سه بعدی تنش استفاده می‌شود. ساده‌ترین المان‌های سه بعدی (فصل ۱۱) دارای ضلعی خطی و گره‌ای در هر گوشه است، در حالی که در المان‌های پیشرفته‌تر، هر یک از سطوح جانبی منحنی شکل بوده و در وسط هر ضلع (یا احتمالاً وسط هر سطح) گره دیگری وجود دارد [شکل ۱-۱(c)].

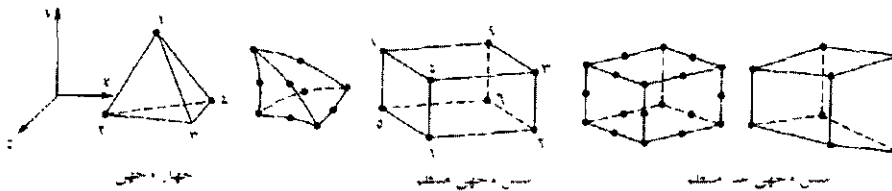
المان متقارن محور، [شکل ۱-۱(d)]، از چرخش 360° یک مثلث یا مستطیل، حول محوری ثابت که در صفحه‌ی المان قرار دارد به وجود می‌آید. از این المان (که در فصل ۹ تشریح شده) می‌توان در مواقعی که شکل جسم و بارگذاری اعمال شده حول یک محور متقارن است استفاده نمود.



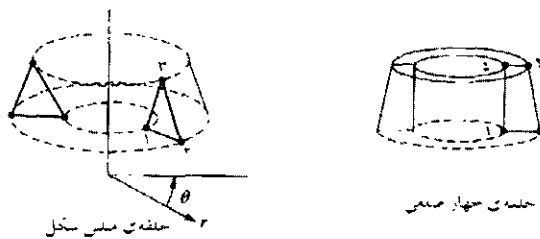
a) انعام حلقه ساده و دو گره ای - معمولاً به منظور معرفی انعام میله یا تیر در درجه آزادی و انعام حلقه در تمامی حالات



b) انعام های ساده و دو بعدی یا تیر - معمولاً به منظور معرفی تیر در دو سطح صاف یا به زاویه درجه می شود ،
انعام های دو بعدی در سه حالت بالا با تیرهای میانی در وجه ها



c) انعام های ساده و سه بعدی - معمولاً به منظور معرفی تیر سه بعدی یا دراز می باشد ، انعام های سه بعدی در سه حالت بالا با تیرهای
میانی در جهات مختلف



d) انعام های مثلث شکل و چهار ضلعی - منفرجه محور - در مسائل مسائل محور استفاده می شود.

شکل ۱-۱ انواع مختلف المان های ساده و مرتبه ی پایین فقط با گره های در گوشه ،
و المان های مرتبه ی بالاتر با گره های میانی.

✓ مرحله ۲ انتخاب تابع جابه‌جایی

مرحله ۲ شامل انتخاب تابع جابه‌جایی در هر المان است. تابع درون المان با استفاده از مقادیر گره‌ای المان تعریف می‌شود. عموماً در روش اجزای محدود، از چند جمله‌ای‌های خطی، درجه دو و سه، به دلیل ساده بودن کار با آن‌ها در فرمول بندی مسأله استفاده می‌شود. علی‌رغم این مطلب، می‌توان از سری‌های مثلثاتی نیز استفاده نمود. در یک المان دو بعدی، جابه‌جایی تابعی از مختصات مرتبط با صفحه‌ی آن المان (برای مثال $(x-y)$) است. این گونه توابع بر حسب مقادیر مجهول در گره (در یک مسأله‌ی دو بعدی بر حسب مؤلفه‌های x و y) تشریح می‌شوند. از حالت عمومی این تابع می‌توان کراراً برای هر المان استفاده نمود. بنا براین روش اجزای محدود روشی است که در آن کمیت پیوسته‌ای همانند تغییر مکان درون جسم، از طریق مدل تقسیم شده‌ای که در آن از مجموعه توابع جزء پیوسته‌ای که درون هر محیط یا المانی محدود تعریف شده‌اند، به صورت تقریبی محاسبه می‌شود.

$$\sigma - \epsilon \quad \epsilon - \delta$$

✓ مرحله ۳ تعریف روابط کرنش - جابه‌جایی و تنش - کرنش

به منظور استخراج روابط مورد نیاز در هر المان محدود به روابط کرنش - جابه‌جایی و تنش - جابه‌جایی نیاز است. در جابه‌جایی یک بعدی، مثلاً در جهت x چنانچه کرنش کوچک باشد، کرنش ϵ_x از طریق رابطه‌ی زیر با جابه‌جایی u مرتبط است.

$$\epsilon = \frac{\delta}{\rho} \quad \epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1-4-1)$$

مضافاً مقادیر تنش باید از طریق قانون تنش - کرنش که عموماً قانون ترکیبی نامیده می‌شود ارتباط یابند. توانایی در تعریف رفتار دقیق ماده از نکات مهم در دست‌یابی به نتایج قابل قبول به شمار می‌رود. ساده‌ترین رابطه‌ی تنش و کرنش، قانون هوک، که اغلب در تجزیه و تحلیل تنش به کار می‌رود به صورت زیر است:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (۲-۴-۱)$$

در جایی که σ_x تنش در راستای x و E مدول الاستیسیته می‌باشد.

مرحله‌ی ۴ استخراج روابط و ماتریس سختی المان

در ابتدا، گسترش و یا دست‌یابی به ماتریس‌ها و معادلات هر المان، بر اساس مفهوم ضرائب مؤثر سختی، که در آن پیش‌زمینه‌ی تجزیه و تحلیل سازه مورد نیاز است، استوار بود. حال روش‌های دیگری در این کتاب ارائه می‌شوند که نیازی به این پیش‌زمینه‌ی خاص ندارند.

روش تعادل مستقیم

بر اساس این روش، ماتریس سختی و معادلات مربوط به هر المان، که نیروهای هر گره را به جابه‌جایی‌های مربوطه مرتبط می‌سازند، از شرایط تعادل و روابط بین نیرو و جابه‌جایی در هر المان حاصل می‌شوند. از آن‌جا که این روش را می‌توان به راحتی در مورد المان‌های خطی یا یک بعدی به کار برد لذا فصل‌های ۲، ۳، و ۴ به ترتیب نمایانگر کاربرد این روش در مورد المان‌های فنری، میله‌ای، و تیر آهن می‌باشند.

روش کار یا انرژی

به منظور دست‌یابی به ماتریس سختی و معادلات مربوط به المان‌های دو و سه بعدی، ساده‌تر است تا از روش کار یا انرژی استفاده شود [۳۵]. اصل کار مجازی (با استفاده از جابه‌جایی‌های مجازی)، اصل مینیمم انرژی پتانسیل و قضیه‌ی

کاستیگ لیانو از روش‌هایی هستند که اغلب به منظور استخراج روابط های مربوط به هر المان از آن‌ها استفاده می‌شود.

اصل کار و انرژی که در ضمیمه‌ی E آورده شده در مورد هر نوع ماده ای قابل اعمال بوده در حالی که قضیه‌ی کاستیگ لیانو و مینیم انرژی پتانسیل فقط در مورد مواد الاستیک قابل اعمال می‌باشند. مضافاً اصل کار مجازی را می‌توان حتی در مواردی که تابع پتانسیلی وجود ندارد استفاده نمود. در هر حال، بر اساس هر سه اصل، معادلات به دست آمده برای المان در مواد الاستیک خطی یکسان است؛ لذا این مطلب که در تجزیه تحلیل یک سازه از چه روشی در مورد ماده‌ی به کار رفته در سازه استفاده می‌شود، به اولویتی که فرد تشخیص می‌دهد بستگی دارد. اصل مینیم انرژی پتانسیل که حیثاً مهم‌ترین روش از سه روش یاد شده است را با جزئیات آن در فصل‌های ۲ و ۳، به منظور استخراج معادلات المان میله‌ای و فنری ارائه خواهیم نمود. سپس این اصل را عمومیت بخشیده و در فصل ۴ آن را به المان تیر و در فصل ۶ به المان دو بعدی تنش - کشش اعمال می‌کنیم. پس از آن، از اصل یاد شده به عنوان شالوده‌ای در تجزیه و تحلیل تنش به منظور استخراج ماتریس‌های سختی و معادلات المان‌ها، که در فصل‌های ۸، ۹، ۱۱، و ۱۲ آورده شده استفاده می‌شود.

به منظور اعمال روش اجزای محدود به زمینه‌هایی غیر از تجزیه و تحلیل سازه‌ها، انتخاب تابعی^۱ (که خود تابعی از تابع دیگری تعریف می‌شود)، همانند تابع مورد استفاده در اصل مینیم انرژی پتانسیل، به میزان قابل ملاحظه‌ای در استخراج ماتریس سختی المان و معادلات مربوط به آن (به فصل‌های ۱۳ و ۱۴ که به ترتیب مرتبط با انتقال حرارت و جریان سیال می‌باشند مراجعه شود)، مؤثر

^۱ تابع عبارتی انتگرالی است که به‌طور صمنی حاوی معادلاتی دیفرانسیلی است که مسأله‌ی مورد نظر را تشریح می‌نماید. به عنوان نمونه، یک تابع به صورت $I(u) = \int F(x, u, u') dx$ بوده که در آن $u(x)$ و F حقیقی بوده به قسمی که $I(u)$ نیز حقیقی است

است. برای مثال اگر π معرف تابعک و $f(x,y)$ معرف تابعی همانند f از دو متغیر x و y باشد در آن صورت خواهیم داشت $\pi = \pi(f(x,y))$ ، در جایی که π خود تابعی از تابع f است. حالت کلی تری، تابعک که تابعی از دو متغیر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ بوده و در آن متغیرهای مستقل در مختصات دکارتی، x و y می‌باشند برابر است با:

$$\pi = \iint F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, u_{xx}, \dots, v_{yy}) dx dy \quad (۳-۴-۱)$$

روش‌های پسماند وزنی

روش‌های پسماند وزنی در تعیین معادلات المان، به ویژه در روش گالرکین کاربرد مؤثری دارند. این روش‌ها منجر به همان نتایجی می‌شوند که روش انرژی، در صورت قابل اعمال بودن آن، ایجاد خواهد نمود. کاربرد خاص این روش‌ها هنگامی است که تابعک مورد نظر، مثلاً انرژی پتانسیل، به راحتی در دسترس نباشد. روش‌های توابع پسماند وزنی این امر را ممکن می‌سازند که بتوان روش اجزای محدود را مستقیماً به هر معادله‌ی دیفرانسیلی اعمال نمود.

روش گالرکین، همراه با روش‌های با هم گذاری، مربع‌های جزئی، و زیر مجموعه‌ی پسماند وزنی، در فصل ۳ معرفی شده‌اند. به منظور تشریح هر روش، از آن‌ها در حل مسائل یک بعدی، که حل واقعی آن‌ها به منظور مقایسه موجود است، استفاده خواهد شد. همان‌طور که از روش پسماند به راحتی در حل مسائل استفاده می‌شود، از روش گالرکین نیز در استخراج معادلات المان میله‌ای در فصل ۳، معادلات المان تیر در فصل ۴، و نیز به منظور حل مسائل ترکیبی انتقال حرارت از طریق هدایت/ جابه‌جایی/ و انتقال جرم در فصل ۱۳ استفاده خواهد شد. جهت کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد نحوه‌ی کاربرد روش‌های پسماند وزنی به مرجع

[۳۶] مراجعه شود؛ به منظور آشنایی با کاربرد های دیگر روش اجزای محدود، مراجع [۳۷] و [۳۸] را ملاحظه فرمایید.

با استفاده از یکی از روش هایی که تشریح شد می توان معادلاتی که رفتار هر المان را تشریح می نمایند استخراج نمود. برای راحتی، این معادلات به صورت ماتریسی، برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \dots & \dots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (۴-۴-۱)$$

و یا به صورت فشرده ی ماتریسی برابرند با:

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (۵-۴-۱)$$

در جایی که $\{f\}$ بردار نیروهای گره ای در المان، $[k]$ ماتریس سختی المان، و $\{d\}$ معرف درجه های آزادی مجهول مرتبط با گره های المان، یا جابه جایی های عمومی n می باشد. در این جا ممکن است جابه جایی های عمومی شامل کمیت هایی از قبیل جابه جایی های واقعی، شیب، و یا حتی انحناءها باشند. در فصل های بعد ماتریس های مندرج در معادله ی (۵-۴-۱) برای المان های خاصی از قبیل آنچه که در شکل ۱-۱ نشان داده شده استخراج شده و جزئیات آن ها تشریح خواهد شد.

مرحله ۵ بر هم گذاری معادلات المان‌ها به منظور دستیابی به معادلات کلی یا اصلی و معرفی شرایط مرزی

در این مرحله، معادلات تعادل گره ای هر یک از المان‌هایی که در مرحله ۴ استخراج گردید در قالب معادلات گره ای در مختصات اصلی بر هم گذارده می‌شوند. این مفهوم، در بخش ۲-۲ برای مجموعه‌ای از ۲ فنر نشان داده شده است. قالب مستقیم‌تر دیگری از اصل روی هم گذاری (روش مستقیم سختی نیز نامیده می‌شود)، که اساس آن تعادل در گره‌ها است، را می‌توان برای تعیین معادلات اصلی کل سازه استفاده نمود. روش یاد شده، در بخش ۲-۴ برای مجموعه‌ای از فنرها نشان داده شده است. اصول پیوستگی، یا هم سازگاری، که بر اساس آن اجزای سازه باید در کنار هم قرار داشته و نباید در هیچ نقطه‌ای از آن گسسته‌گی وجود داشته باشد، به‌طور ضمنی در روش مستقیم سختی منظور شده است.

معادله‌ی نهایی هم گذار شده یا معادله‌ی اصلی، به صورت ماتریسی، برابر است با:

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (1-4-6)$$

در جایی که $\{F\}$ بردار مربوط به نیروهای گره‌های اصلی، $[K]$ ماتریس سختی کل یا ماتریس سختی سازه، و $\{d\}$ ماتریسی است ستونی که حاوی درجه‌های آزادی یا جابه‌جایی‌های عمومی معلوم و مجهول سازه است. در این مرحله می‌توان نشان داد که به دلیل صفر بودن دترمینان ماتریس سختی کل $[K]$ ، این ماتریس منفرد است. نه منظور رفع این مشکل شرایط مرزی (یا موانع یا تکیه‌گاه‌ها) باید به قسمی انتخاب شوند که به‌جای آن که سازه به صورت یک جسم صلب حرکت نماید، در جای خود بدون حرکت باقی بماند. جزییات بیشتر در این مورد و روش تعیین شرایط مرزی در فصل‌های بعد آورده شده است. در این مرحله کافی است تا در

نظر داشت که انتخاب شرایط مرزی یا تکیه‌گاه‌ها باعث بهبود معادلات اصلی (۱-۶) می‌شوند. همچنین تأکید می‌شود بارهای اعمال شده‌ای که معلومند در ماتریس اصلی نیروی $\{F\}$ منظور شده‌اند.

مرحله‌ی ۶ تعیین درجه‌های آزادی مجهول (یا جابه‌جایی‌های کلی)

معادله‌ی (۱-۶-۶) که با احتساب شرایط مرزی تعدیل شده است مجموعه‌ای از سیستم معادلاتی است که می‌توان آن‌ها را به صورت بسط یافته ماتریسی به شرح زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (7-6-1)$$

در جایی که n دلالت بر تعداد کل درجه‌های آزادی مجهول سازه می‌نماید. از این معادلات می‌توان به منظور محاسبه‌ی مقادیر d با استفاده از روش حذف نمایی (از قبیل روش گوس)، یا روش تکراری (از قبیل روش گوس-سیدل) استفاده نمود. هر دو روش در پیوست B آورده شده‌اند. به دلیل آن که مقادیر d اولین کمیت‌هایی هستند که با استفاده از روش سختی (یا جابه‌جایی) المان محدود محاسبه می‌شوند لذا مجهولات اولیه نامیده می‌شوند.

مرحله‌ی ۷ محاسبه‌ی تنش‌ها و کرنش‌های المان

در مسائل تجزیه و تحلیل تنش در سازه‌ها می‌توان کمیت‌های مهم ثانویه‌ای را همانند کرنش و تنش (یا گشتاور و نیروی برشی)، به دلیل امکان ارباط مستقیم آن‌ها با جابه‌جایی‌هایی که در مرحله‌ی ۶ گفته شد، محاسبه نمود. از روابطی همانند

کرنش و جابه‌جایی و نیز تنش و کرنشی که در معادلات (۱-۴-۱) و (۲-۴-۱) ذکر گردید می‌توان برای تنش‌های یک بعدی که در مرحله‌ی ۳ آورده شد استفاده نمود.

مرحله‌ی ۸ تفسیر نتایج

هدف نهایی، تفسیر و بررسی نتایج به منظور استفاده از آن‌ها در مراحل تجزیه و تحلیل یا طراحی است. تعیین محلی از سازه که دارای تغییر مکان‌ها و تنش‌های بزرگ است از نکات مهم در تصمیمات اتخاذ شده در خلال طراحی یا تجزیه و تحلیل محسوب می‌شود. برنامه‌های پس پردازنده‌ی کامپیوتری به کاربر کمک می‌نمایند تا با نمایش ترسیمی، نتایج را تفسیر نماید.

۱-۵ کاربرد روش اجزای محدود

از روش اجزای محدود می‌توان در حل مسائل سازه‌ای و غیر سازه‌ای استفاده نمود. از زمینه‌های سازه‌ای می‌توان موارد زیر را ذکر نمود.

۱. تجزیه و تحلیل تنش، شامل تحلیل سازه‌ها و قاب‌ها، مسائل تمرکز تنش مرتبط با سوراخ‌ها، گوشه‌ها یا هرگونه تغییراتی در شکل هندسی جسم.
۲. کماتش.
۳. بررسی ارتعاشات.

مسائل غیر سازه‌ای شامل موارد زیر است.

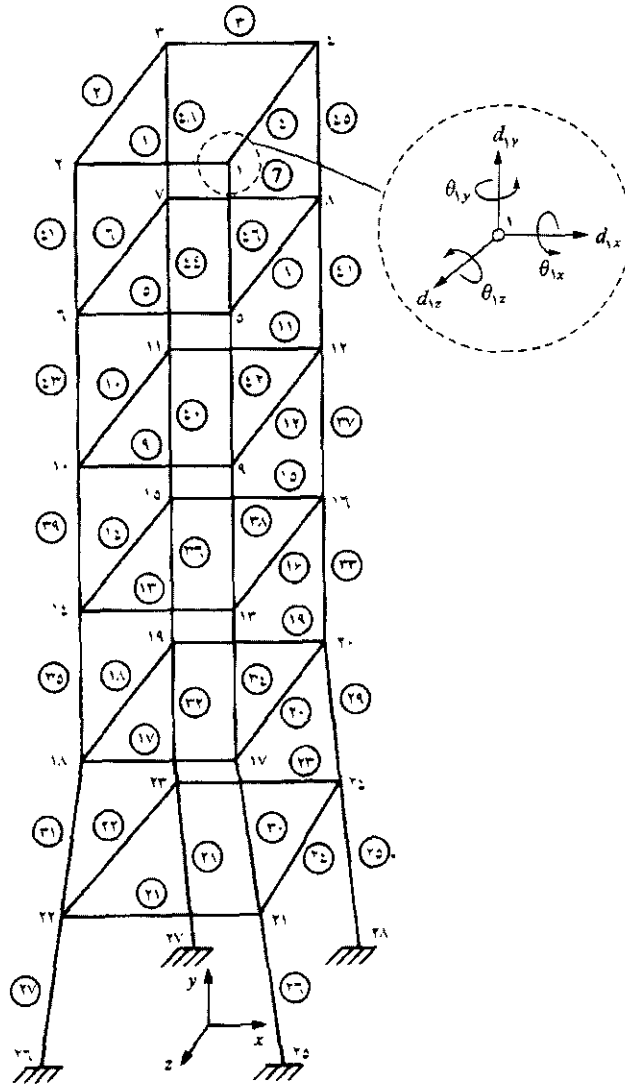
۱. انتقال حرارت.
۲. جریان سیال، شامل نفوذ درون محیطی متخلخل.
۳. توزیع پتانسیل‌های مغناطیسی یا الکتریکی.

نهایتاً، بعضی از مسائل مهندسی بیومکانیک (که ممکن است شامل تجزیه و تحلیل تنش نیز شود) که اساساً شامل بررسی ستون فقرات انسان، جمجمه، مفاصل کشاله‌ی ران، فک یا کاشت دندان‌ها، قلب، و چشم می‌شوند.

حال به عنوان نمونه، بعضی از کاربردهای روش اجزای محدود را ارائه می‌نماییم. چنین کاربردهایی نمایانگر تنوع، اندازه و پیچیدگی مسائلی است که می‌توان با توجه به روش و فرآیند تقسیم‌سازی و نیز نوع المان‌های به کار رفته آن‌ها را حل نمود.

شکل ۱-۲ نمایانگر برج مراقبتی در یک خط راه آهن است. این برج، قابی سه بعدی است که از تعدادی المان‌های تیرآهن تشکیل شده است. کلیه‌ی ۴۸ المان این سازه توسط اعداد محصور شده در یک دایره و ۲۸ گره آن توسط اعداد فاقد دایره مشخص شده‌اند. هر گره دارای سه مؤلفه‌ی دوران و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی است. دوران‌ها (θ) و جابه‌جایی‌ها (d)، درجه‌های آزادی نامیده می‌شوند. به دلیل نحوه‌ی بار اعمال شده بر سازه، مدل سه بعدی آن در نظر گرفته شده است.

روش اجزای محدودی که در مورد این قاب اعمال می‌شود طراح یا تحلیل‌گر را قادر می‌سازد تا سریعاً جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها را به ازای حالات مختلف بارگذاری، که باید کدهای طراحی را ارضا نمایند، محاسبه نماید. قبل از گسترش روش اجزای محدود و رایانه، حتی حل این مسأله‌ی ساده به زمان زیادی نیاز داشت.

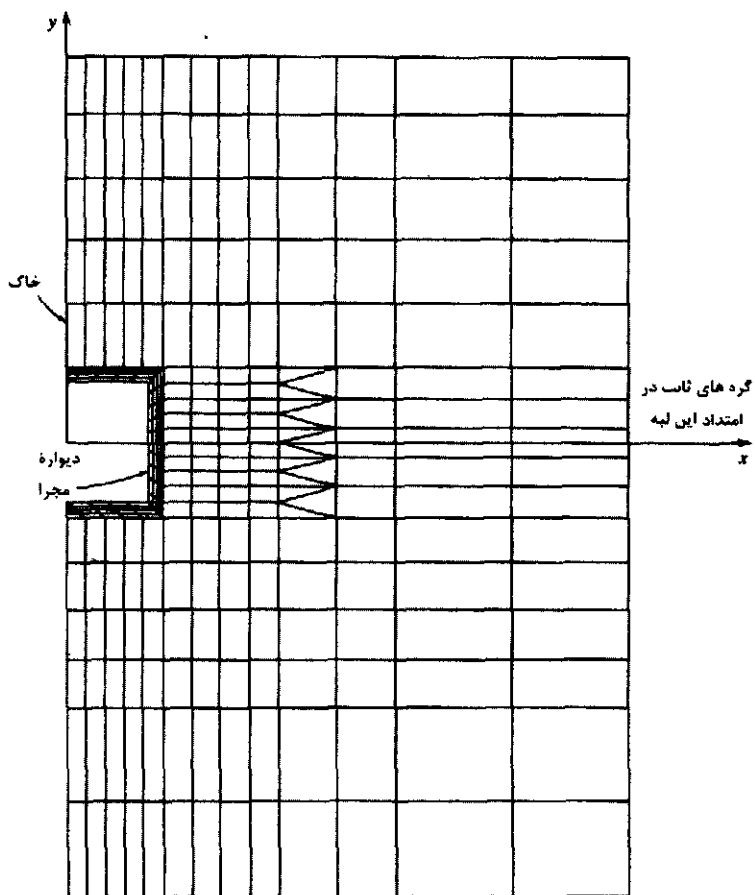


شکل ۱-۲ مدل المان بندی شده‌ی برج مراقبت راه آهن (۲۸ گره، ۴۸ المان تیر آهن) با نمونه‌ای از درجه‌های آزادی نشان داده شده در گره ۱، به عنوان یک مثال (توسط D. L. Logan).

دومین مثال کاربرد روش اجزای محدود در حل مسائل، تعیین جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در مجرای زیر زمینی است که تحت تأثیر بار ضربه‌ای ناشی از انفجار یک بمب قرار گرفته است. شکل ۱-۳ نمایانگر مدل المان بندی شده‌ی چنین مجرای است که شامل ۳۶۹ گره، ۴۰ المان یک بعدی میله‌ای یا خرپا، به منظور مدل سازی میله‌های تقویت کننده‌ی فولادی بدنه‌ی آن، و ۳۳۳ المان مستطیل شکل دو بعدی با کرنش دو بعدی است که به منظور مدل سازی خاک و بتن اطراف استفاده شده است. به فرض متقارن بودن مجرا، فقط نیمی از آن بررسی شده است. در این مسأله باید حدوداً ۷۰۰ جابه‌جایی مجهول در ارتباط با گره‌ها مشخص شوند. این مسأله نمایانگر آن است که از المان‌های مختلف (در این جا میله‌ای و کرنش دو بعدی) می‌توان در یک مدل اجزای محدود استفاده نمود.

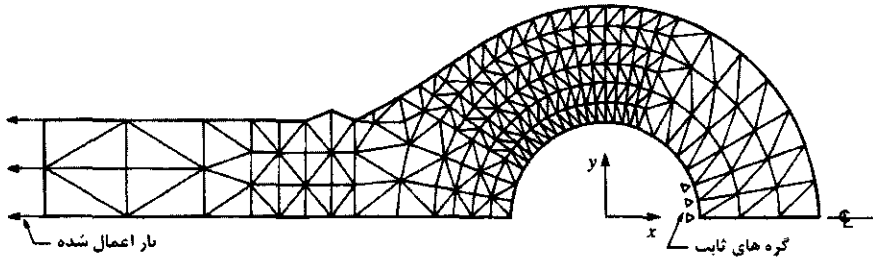
به عنوان مثالی دیگر، انتهای میله‌ای از یک سیلندر هیدرولیکی که در شکل ۱-۴ نمایش داده شده توسط ۲۹۷ المان مثلثی شکل با کرنش صفحه‌ای و ۱۲۰ گره مدل سازی شده است. با اعمال تقارن به انتهای میله فقط نیمی از آن، مطابق شکل، نیاز به بررسی داشت. منظور از چنین تجزیه و تحلیلی، تعیین مناطق تمرکز تنش در انتهای میله بود.

شکل ۱-۵ نمایانگر قسمتی از ستون دود کشی است که ارتفاع آن از ۴ قسمت متفاوت (کلاً با ارتفاعی برابر ۳۲ فوت) تشکیل شده است. در این شکل از ۵۸۴ المان تیر آهن به منظور مدل سازی تقویت کننده‌های افقی و عمودی موجود در جسم و ۲۵۲ المان ورقی مسطح، که در مدل سازی قسمت چوبی داخلی و پوسته‌ی بتنی به کار رفته، استفاده شده است. به دلیل بار گذاری نامتقارن اعمال شده بر سازه، از یک مدل سه بعدی استفاده شده است. در این مسأله تعیین تنش و جابه‌جایی‌ها در بتن از اهداف اصلی به شمار می‌رفتند.

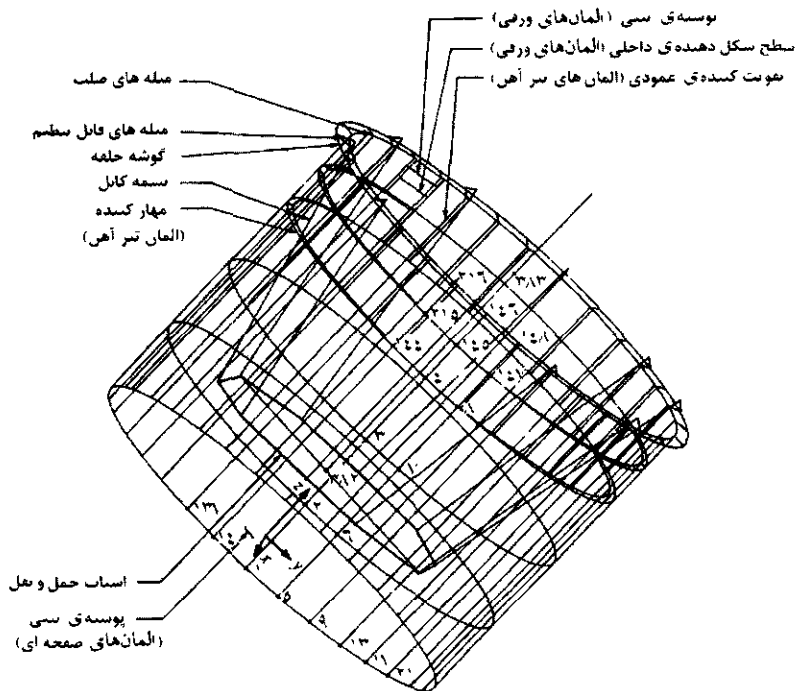


گره های ثابت در امتداد سطح ربریس

شکل ۳-۱ مدل تقسیم بندی شده ی یک مجرای زیر زمینی (۳۶۹ گره، ۴۰ المان، و ۳۳۳ المان کرنش صفحه ای) [۳۹].



شکل ۱-۴ تحلیل دو بعدی انتهای میله‌ی یک سیلندر هیدرولیکی (۱۲۰ گره، ۲۹۷ المان مثلثی شکل با کرنش صفحه‌ای).

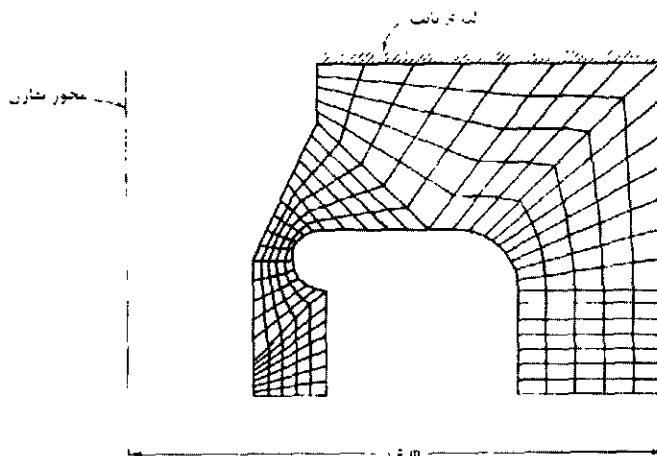


شکل ۱-۵ مدل اجزای محدود قسمتی از ستون یک دود کش (نمای انتهایی 45° چرخیده است)، (۵۸۴ المان تیر آهن و ۲۵۲ المان مسطح ورقه‌ای) (توسط D. L. Logan).

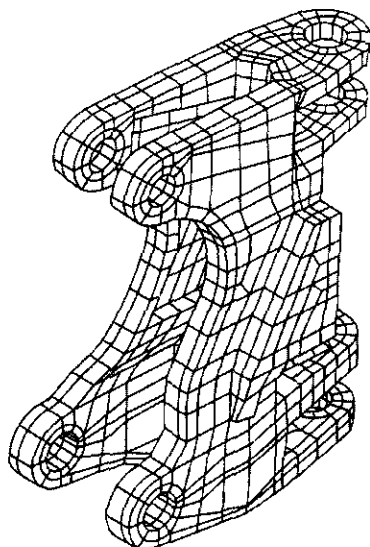
شکل ۶-۱ نمایانگر مدل تقسیم بندی شده‌ی یک قالب فولادی پیشنهاد شده در ساخت ورق‌های نازک یلاستیکی است. شکل هندسی نامتقارن و وجود تمرکز تنش‌های بالقوه سبب گردید تا از روش اجزای محدود در تعیین جواب قابل قبولی استفاده شود. در این جا از دویست و چهل المان که حول یک محور متقارنند در مدل سازی قالب سه بعدی استفاده شده است.

شکل ۷-۱ نحوه‌ی استفاده از المان سه بعدی بک جسم جامد را در مدل سازی قطعه‌ی ریخته‌گری شده‌ی مفصل نوعی بیل مکانیکی نشان می‌دهد. به منظور مدل سازی سه بعدی قطعه‌ی ریخته‌گری شده که دارای شکل هندسی خاصی نیست به المان‌های سه بعدی شش وجهی نیاز است. یقیناً مدل‌های دو بعدی حل مهندسی دقیقی را برای این مسأله به دنبال نخواهند داشت.

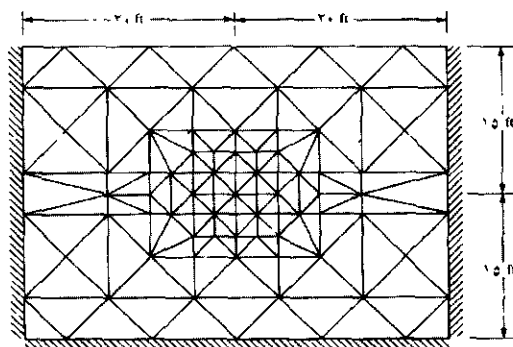
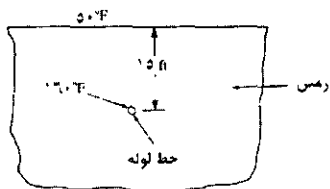
شکل ۸-۱ نمایانگر مدل دو بعدی انتقال حرارتی است که به منظور تعیین توزیع دما در زمین، با منبع حرارتی از قبیل لوله‌ی مدفون شده‌ی حامل گاز داغ، به کار می‌رود.



شکل ۶-۱ مدل یک قالب فولادی مقاومت بالا (۲۴۰ المان متقارن محور) که در صنعت ساخت ورق‌های نازک پلاستیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴۰].

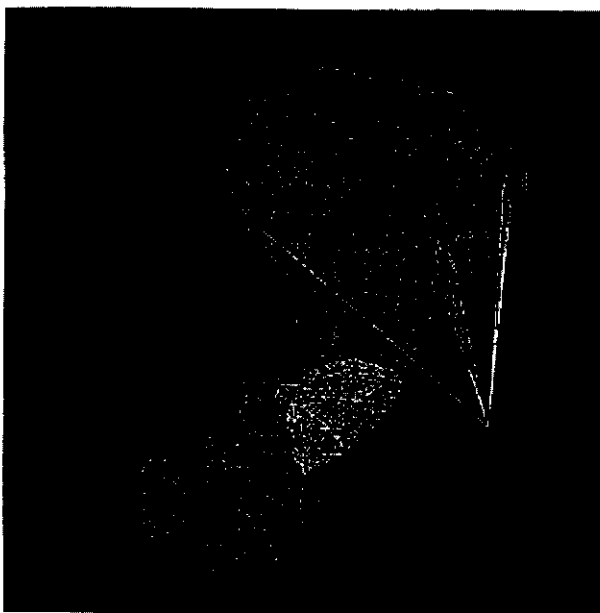


شکل ۱-۷ مدل المان بندی شده‌ی سه بعدی یک قطعه‌ی ریخته‌گری شده برای قاب نوعی بیل.



شکل ۱-۸ مدل اجزای محدود دو بعدی گسترش دما در زمین.

شکل ۱-۹ مدل سه بعدی اجزای محدود استخوان رانی را با یک شیء کاشته شدهی خارجی نشان می‌دهد که از آن به منظور بررسی تنش در استخوان و لایه‌ی ماده‌ی اتصال دهندهی استخوان به شیء خارجی، استفاده می‌شود.



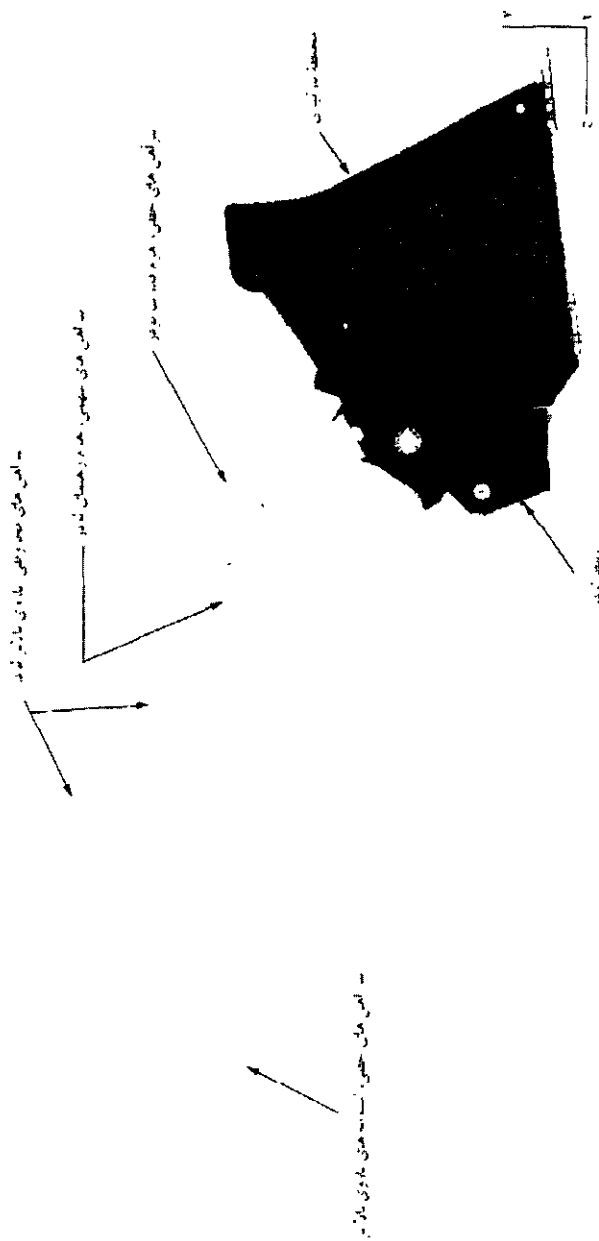
شکل ۱-۹ مدل اجزای محدود استخوان رانی با یک شیء کاشته شدهی خارجی (از بیش از ۵۰۰۰ المان سه بعدی در این مدل استفاده شده بود) (© Thomas Hanson، با تشکر از مرکز تحقیقات التهاب مفاصل Harrington) [۴۱].

نهایتاً، شکل ۱-۱۰ نمایانگر مدل سه بعدی محفظه‌ی بارگیری ۷۱۰G به منظور بررسی تنش در آن است.

این نمودارها معرف نوع مسائلی است که می‌توان از روش اجزای محدود در حل آن‌ها استفاده نمود. در فصل ۷، راهبردهای دیگری در مورد تکنیک‌های مدل سازی ارائه خواهد شد.

۱-۶ مزایای روش اجزای محدود

- همانطور که قبلاً اشاره گردید، روش اجزای محدود به مسائل متعدد سازه‌ای و غیر سازه‌ای اعمال می‌شود. این روش دارای مزایایی است که باعث محبوبیت آن شده است. از جمله توانایی‌های این روش می‌توان موارد زیر را نام برد.
۱. اجسامی با اشکال نامنظم را می‌توان به راحتی مدل سازی نمود.
 ۲. حالت های مختلف بار گذاری را بدون مشکل انجام داد.
 ۳. از آن جا که معادلات هر یک از المان‌ها به طور جداگانه ارزیابی می‌شوند لذا اجسامی با چند نوع ماده‌ی مختلف را می‌توان مدل سازی نمود.
 ۴. مسائل بی‌شماری را با شرایط مرزی مختلف حل نمود.
 ۵. امکان تغییر اندازه‌ی المان‌ها به منظور استفاده از المان‌های کوچک‌تر در مواقع ضروری.
 ۶. امکان ایجاد تغییرات در مدل اجزای محدود به راحتی و با هزینه‌ی کم.
 ۷. احتساب تأثیرات دینامیکی.
 ۸. توانایی برخورد با رفتارهای غیر خطی مرتبط با تغییر مکان‌های بزرگ و مواد غیر خطی.



شکل ۱۰-۱ مدل اجزای محدود محفظه بارگیری ۷۱۰G با ۱۶۹۵۹۵ المان و ۱۸۵۰۲۶ گره (همراه با ۷۸۵۶۶ المان چهار ضلعی خطی پوسته‌ای نازک برای محفظه بارگیری، ۸۳۰۱۰۴ المان آجری خطی سه بعدی به منظور مدل سازی برجستگی ها، و ۲۱۲ المان تیر آهن به منظور مدل سازی بازوهای بالابر، سیلندرها و بازوهای بالابر و اهرم های راهنما) (با تشکر از یوسف عمر، شرکت John Deere Dubuque، طراحی سازه های مهندسی، بخش ساختمان و جنگل داری)

کاربرد روش اجزای محدود در تجزیه و تحلیل سازه‌ها طراح را قادر می‌سازد تا تنش، ارتعاشات، و مشکلات ناشی از تغییرات دما را در خلال طراحی یافته و تغییرات مورد نیاز در طراحی را قبل از ساخت اولین نمونه‌ی آزمایشگاهی مورد ارزیابی قرار دهد. بنابراین اطمینان خاطر از مورد قبول واقع شدن اولین نمونه‌ی آزمایشگاهی بدین ترتیب حاصل می‌شود. مضافاً، اگر از این روش به‌طور صحیح استفاده شود تعداد نمونه‌های آزمایشگاهی مورد نیازی که باید ساخته شوند کاهش می‌یابد.

اگرچه در ابتدا از روش اجزای محدود در تجزیه و تحلیل سازه استفاده شد ولی از آن پس تا کنون، در زمینه‌های دیگر مهندسی و ریاضی - فیزیک از قبیل جریان سیال، انتقال حرارت، پتانسیل‌های الکترو مغناطیسی، مکانیک خاک، و مسائل صوتی [۴۲-۴۴، ۲۷، ۲۲-۲۴] از آن استفاده شده است.



۱-۷ برنامه‌های رایانه‌ای در روش اجزای محدود

دو روش عمومی رایانه‌ای در رسیدن به حل مسائل از روش اجزای محدود وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از برنامه‌های بزرگ تجاری است که بسیاری از آن‌ها به منظور اجرا در رایانه‌های شخصی (PCs) ساده تر شده‌اند؛ از این برنامه‌های چند منظوره در حل مسائل گوناگون استفاده می‌شود. در روش دیگر، برنامه‌های کوتاهی با منظورهای خاص نوشته شده تا مسأله‌ی مورد نظر حل شود. در این بخش مزایا و معایب هر دو روش مورد بحث قرار خواهد گرفت. سپس تعدادی از برنامه‌های چند منظوره را معرفی نموده و بعضی از توانایی‌های آن‌ها مورد بحث قرار خواهد گرفت.

بعضی از مزایای برنامه‌های چند منظوره:

۱. آرایش مقادیر ورودی به صورت منظم و با توجه به سهولت بخشی برای کاربر برنامه ریزی شده‌اند. نیازی نیست تا کاربرها در مورد سخت افزار یا نرم افزار اطلاعاتی داشته باشند. پیش پردازنده‌ها به سهولت در دسترس بوده تا بتوان به کمک آن‌ها مدل اجزای محدود را ایجاد نمود.

۲. این برنامه‌ها سیستم‌های حجیمی هستند که عموماً می‌توان توسط آن‌ها مسائل متعدد بزرگ یا کوچکی را با استفاده از ورودی‌های قالب بندی شده‌ای حل نمود.

۳. بسیاری از این برنامه‌ها را می‌توان با اضافه نمودن قسمت‌های جدید برای حل مسائلی نو و یا تکنولوژی جدید بسط داد. بنابراین می‌توان با اندکی تلاش آن‌ها را به روز در آورد.

۴. با اضافه نمودن قابلیت ضبط و بازدهی محاسبات در رایانه‌های شخصی، می‌توان تعداد زیادی از برنامه‌های چند منظوره را در این رایانه‌ها اجرا نمود.

۵. تعداد زیادی از برنامه‌های تجاری موجود از لحاظ قیمت بسیار جذاب شده و می‌توانند طیف گسترده‌ای از مسائل را حل نمایند [۴۵-۵۶].

بعضی از معایب برنامه‌های چند منظوره:

۱. هزینه‌ی اولیه‌ی نوشتن چنین برنامه‌هایی بالا است.
۲. بازدهی برنامه‌های چند منظوره در مقایسه با برنامه‌های خاص پایین تر است؛ زیرا برای هر مسأله، رایانه باید بررسی‌های متعددی را انجام دهد؛ در حالی که اگر برنامه‌ای در موردی خاص نوشته شود به بعضی از این مراحل نیازی نخواهد بود.

۳. بسیاری از این برنامه‌ها اختصاصی می‌باشند. لذا کاربر دسترسی مختصری به منطق آن دارد. چنانچه نیاز به ایجاد تغییرات در آن باشد این امر غالباً باید توسط نویسنده‌ی برنامه صورت پذیرد.

بعضی از مزایای برنامه‌های خاص:

۱. برنامه‌ها عموماً کوتاه بوده و هزینه‌ی تهیه‌ی آن‌ها پایین است.
۲. رایانه‌های کوچک قادر به اجرای آن‌ها می‌باشند.
۳. اضافه نمودن به آن‌ها را می‌توان سریعاً با صرف هزینه‌ی مختصری انجام داد.
۴. بازدهی این نوع برنامه‌ها در حل مسائلی که بدان منظور طراحی شده‌اند خوب است.

از معایب اصلی برنامه‌های خاص، عدم قابلیت آن‌ها در حل مسائل گوناگون است. لذا به منظور حل مسائل مختلف باید به همان تعداد برنامه‌های مختلف در دسترس داشت.

فروشنده‌های متعددی هستند که برنامه‌های اجزای محدود را ارائه نموده و لذا شخص متقاضی باید قبل از خرید هر نرم افزار به دقت با تولید کننده‌ی آن مشورت نماید. به هر حال، به منظور شناسایی برنامه‌های تجاری گوناگونی که برای حل مسائل مختلف از روش اجزای محدود بر روی رایانه‌های شخصی وجود دارد لیست مختصری از آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

۱. ALGOR [۴۶]

۲. Abaqus [۴۷]

۳. ANSYS [۴۸]

۴. COSMOS/M [۴۹]

۵. GT-STRUDL [۵۰]

۶. MARC [۵۱]

۷. MSC/NASTRAN [۵۲]

۸. NISA [۵۳]

۹. Pro/MECHANICA [۵۴]

۱۰. SAP۲۰۰۰ [۵۵]

۱۱. SRARDYNE [۵۶]

قابلیت استاندارد شده‌ی بسیاری از برنامه‌های ذکر شده در مراجع فوق الذکر و نیز در مرجع [۴۵] آورده شده است. این قابلیت‌ها شامل اطلاعاتی به شرح زیر می‌باشند.

۱. نوع المان‌های موجود، همانند تیر آهن، تنش سطحی، و المان‌های جامد سه بعدی.

۲. نوع تجزیه و تحلیل موجود، از قبیل استاتیکی و دینامیکی.

۳. رفتار ماده، از قبیل الاستیک خطی و غیر خطی.

۴. نوع بارگذاری، از قبیل بار متمرکز، گسترده، حرارتی و جابه‌جایی (نشست).

۵. ایجاد اطلاعات، از قبیل تولید خودکار گره‌ها، المان‌ها و قید و بندها (در بسیاری از برنامه‌ها از پیش پردازنده‌ها به منظور شبکه بندی مدل استفاده می‌شود).

۶. رسم پارامترهایی از قبیل نمودار تغییر شکل یافته‌ی اولیه‌ی جسم، طیف‌های مختلف تنش و حرارت (بسیاری از برنامه‌ها دارای پس پردازنده‌هایی هستند که کمک می‌نمایند تا نتایج به صورت گرافیکی تفسیر شوند).

۷. رفتار جابه‌جایی، همانند جابه‌جایی‌های کوچک و بزرگ و کماتش.

۸. خروجی‌های مورد نظر، از قبیل گره‌ها، المان‌ها، و ماکزیمم یا مینیمم مقادیر مورد نظر.

کلیه‌ی برنامه‌ها حداقل شامل المان‌های میله‌ای، تیرآهن، تنش سطحی، خمش در ورق و سه بعدی بوده و اخیراً تعداد زیادی از آن‌ها قابلیت بررسی انتقال حرارت را دارا می‌باشند.

توانایی‌های کامل چنین برنامه‌هایی به بهترین وجه در کتابچه‌های راهنمای این برنامه‌ها، از قبیل مراجع [۴۶-۵۶] آورده شده است.

مراجع

- [1] Hrennikoff, A., "Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 8, No. 4, pp. 169-175, Dec. 1941.
- [2] McHenry, D., "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems," *Journal of Institution of Civil Engineers*, Vol. 21, pp. 59-82, Dec. 1943.
- [3] Courant, R., "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations," *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 49, pp. 1-23, 1943.
- [4] Levy, S., "Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuities and Sweepback," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 14, No. 10, pp. 547-560, Oct. 1947.
- [5] Levy, S., "Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 20, No. 7, pp. 449-454, July 1953.
- [6] Argyris, J. H., "Energy Theorems and Structural Analysis," *Aircraft Engineering*, Oct., Nov., Dec. 1954 and Feb., Mar., Apr., May 1955.
- [7] Argyris, J. H., and Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, London, 1960 (collection of papers published in *Aircraft Engineering* in 1954 and 1955).
- [8] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 9, pp. 805-824, Sept. 1956.
- [9] Clough, R. W., "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis," *Proceedings*, American Society of Civil Engineers, 2nd

- Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA, pp. 345-378, Sept. 1960.
- [10] Melosh, R. J., "A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending," *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 28, No. 1, pp. 34-42, Jan. 1961.
- [11] Grafton, P. E., and Strome, D. R., "Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol.1, No. 10, pp. 2342-2347, 1963.
- [12] Martin, H. C., "Plane Elasticity Problems and the Direct Stiffness Method," *The Trend in Engineering*, Vol. 13, pp. 5-19, Jan. 1961.
- [13] Gallagher, R. H., Padlog, J., and Bijlaard, P. P., "Stress Analysis of Heated Complex Shapes," *Journal of the American Rocket Society*, Vol. 32, pp. 700-707, May 1962.
- [14] Melosh, R. J., "Structural Analysis of Solids," *Journal of the Structural Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, pp. 205-223, Aug. 1963.
- [15] Argyris, J. H., "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis," *Progress in Aeronautical Science*, Vol. 4, Pergamon Press, New York, 1964.
- [16] Clough, R. W., and Rashid, Y., "Finite Element Analysis of Axisymmetric Solids," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 91, pp. 71-85, Feb. 1965.
- [17] Wilson, E. L., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 3, No. 12, pp. 2269-2274, Dec. 1965.
- [18] Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R. J., "Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 27, No. 2, pp. 97-107, Feb. 1960.
- [19] Gallagher, R. H., and Padlog, J., "Discrete Element Approach to Structural Stability Analysis," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol., No. 6, pp. 1437-1439, 1963.
- [20] Zienkiewicz, O. C., Watson, M., and King, I. P., "A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 10, pp. 807-827, 1968.
- [21] Archer, J. S., "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using FiniteElement Techniques," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 3, No. 10, pp. 1910-1918, 1965.

- [22] Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite Elements in the Solution of Field Problems," *The Engineer*, pp. 507-510, Sept. 24, 1965.
- [23] Martin, H. C., "Finite Element Analysis of Fluid Flows," *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 517-535, act. 1968. (AFFDL-TR-68-150, Dec. 1969; AD-703-685, N.T.I.S.)
- [24] Wilson, E. L., and Nickel, R. E., "Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 4, pp. 276-286, 1966.
- [25] Szabo, B. A., and Lee, G. C., "Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.1, pp. 301-310, 1969.
- [26] Zienkiewicz, O. C., and Parekh, C. J., "Transient Field Problems: Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, No. 1, pp. 61-71, 1970.
- [27] Lyness, J. F., Owen, D. R. J., and Zienkiewicz, O. C., "Three-Dimensional Magnetic Field Determination Using a Scalar Potential. A Finite Element Solution," *Transactions on Magnetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, pp. 1649-1656, 1977.
- [28] Belytschko, T., "A Survey of Numerical Methods and Computer Programs for Dynamic Structural Analysis," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 37, No.1, pp. 23-34, 1976.
- [29] Belytschko, T., "Efficient Large-Scale Nonlinear Transient Analysis by Finite Elements," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 579-596, 1976.
- [30] Huisckies, R., and Chao, E. Y. S., "A Survey of Finite Element Analysis in Orthopedic Biomechanics: The First Decade," *Journal of Biomechanics*, Vol. 16, No. 6, pp. 385-409, 1983.
- [31] *Journal of Biomechanical Engineering*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, (published quarterly) (1st issue published 1977).
- [32] Kardestuncer, H., ed., *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [33] Clough, R. W., "The Finite Element Method after Twenty-Five Years: A Personal View," *Computers and Structures*, Vol. 12, No. 4, pp. 361-370, 1980.

- [34] Kardestuncer, H., *Elementary Matrix Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [35] Oden, J. T., and Ripperger, E. A., *Mechanics of Elastic Structures*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1981.
- [36] Finlayson, B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, 1972.
- [37] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
- [38] Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York, 1989.
- [39] Koswara, H., *A Finite Element Analysis of Underground Shelter Subjected to Ground Shock Load*, M.S. Thesis, Rose-Hulman Institute of Technology, 1983.
- [40] Greer, R. D., "The Analysis of a Film Tower Die Utilizing the ANSYS Finite Element Package," M.S. Thesis, Rose-Hulman Institute of Technology, Terre Haute, Indiana, May 1989.
- [41] Koeneman, J. B., Hansen, T. M., and Beres, K., "The Effect of Hip Stem Elastic Modulus and Cement/Stem Bond on Cement Stresses," 36th Annual Meeting, Orthopaedic Research Society, Feb. 5-8, 1990, New Orleans, Louisiana.
- [42] Girijavallabham, C. V., and Reese, L. C., "Finite-Element Method for Problems in Soil Mechanics," *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, No. Sm2, pp. 473-497, Mar. 1968.
- [43] Young, c., and Cracker, M., "Transmission Loss by Finite-Element Method," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 57, No. 1, pp. 144-148, Jan. 1975.
- [44] Silvester, P. P., and Ferrari, R. L., *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1983.
- [45] Falk, H., and Beardsley, C. W., "Finite Element Analysis Packages for Personal Computers," *Mechanical Engineering*, pp. 54-71, Jan. 1985.
- [46] Algor Interactive Systems, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238.
- [47] Web site <http://www.abaqus.com>.
- [48] Swanson, J. A., ANSYS-Engineering Analysis Systems User's Manual, Swanson Analysis Systems, Inc., Johnson Rd., P.O. Box 65, Houston, PA 15342.
- [49] COSMOS/M, Structural Research & Analysis Corp., 12121 Wilshire Blvd., Los Angeles, CA 90025.

- [50] web site <http://ce6000.cegatech.edu>.
- [51] web site <http://www.mscsoftware.com>.
- [52] MSC/NASTRAN, MacNeal-Schwendler Corp., 600 Suffolk St., Lowell, MA, 01854.
- [53] web site <http://emrc.com>.
- [54] Toogood, Roger, Pro/MECHANICA Structure Tutorial, SDC Publications, 2001.
- [55] Computers & Structures, Inc., 1995 University Ave., Berkeley, CA 94704.
- [56] STARDYNE, Research Engineers, Inc., 22700 Savi Ranch Pkwy, Yorba Linda, CA 92687.
- [57] Noor, A. K., "Bibliography of Books and Monographs on Finite Element Technology," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 44, No.6, pp. 307-317, June 1991.
- [58] Belytschko, T., Liu W. K., and Moran, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley, 1996.

مسائل

- ۱-۱ عبارت اجزای محدود را تعریف کنید.
- ۲-۱ در روش اجزای محدود منظور از شبکه بندی چیست؟
- ۳-۱ در چه سالی گسترش مدرن روش اجزای محدود شروع شد؟
- ۴-۱ در چه سالی روش مستقیم سختی معرفی شد؟
- ۵-۱ واژه‌ی ماتریس را تعریف کنید.
- ۶-۱ رایانه چه نقشی را در کاربرد روش اجزای محدود ایفا نمود؟
- ۷-۱ مراحل کلی در روش اجزای محدود را ذکر نموده و به اختصار شرح کنید.
- ۸-۱ روش جابه‌جایی چه روشی است؟
- ۹-۱ چهار نوع متعارف اجزای محدود را نام ببرید.
- ۱۰-۱ سه روش متعارف را که در استخراج ماتریس سختی المان و معادلات آن به کار می‌روند ذکر کنید. به اختصار هر روش را تشریح کنید.
- ۱۱-۱ درجه‌ی آزادی عطف به چه می‌نماید؟

۱۲-۱ پنج محدوده‌ی نمونه از مهندسی را ذکر کنید که روش اجزای محدود به آن اعمال می‌شود.

۱۳-۱ پنج مزیت از مزایای روش اجزای محدود را نام ببرید.

فصل ۲

معرفی روش سختی (جابه‌جایی)

مقدمه

در این فصل برخی از اصول اولیه‌ای که روش سختی بر پایه‌ی آن استوار است معرفی می‌شوند. علی‌رغم سادگی، ابتدا فنر خطی به دلیل ساده و سازنده بودن آن در تشریح اصول اولیه، معرفی می‌شود. در این مورد با تعریف کلی ماتریس سختی شروع نموده و سپس نحوه‌ی تعیین ماتریس سختی المانی از یک فنر را که رفتار آن الاستیک است بررسی می‌کنیم. سپس، با استفاده از اصول اولیه‌ی تعادل و هم‌سازگاری، نحوه‌ی دست‌یابی به ماتریس سختی کل یک سازه را که از به هم پیوستن المان‌های فنری شکل حاصل می‌شود نشان خواهیم داد. پس از آن، نحوه‌ی تعیین ماتریس سختی کل را به‌طور مستقیم با روی هم گذاشتن ماتریس‌های سختی هر المان نشان می‌دهیم. عبارت روش مستقیم سختی از این شیوه ناشی شده است. پس از دست‌یابی به ماتریس سختی کل سازه، نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی همگن و غیر همگن را نشان خواهیم داد. بدین گونه، حل کامل مسأله که شامل

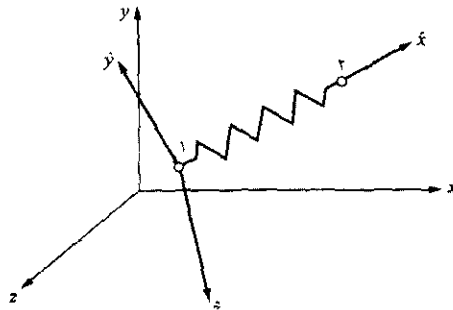
تعیین جابه‌جایی گره‌ها و عکس‌العمل‌ها است حاصل می‌شود. (نحوه‌ی تعیین نیروهای داخلی مرتبط با المان‌های میله‌ای در فصل ۳ تشریح می‌شود).

سپس اصل مینیمم انرژی پتانسیل را معرفی نموده و ضمن به کارگیری آن در استخراج معادلات المان‌های فنی، از آن به منظور حل مسائل مربوط استفاده می‌کنیم. کاربرد این اصل را در ساده‌ترین المان‌ها (آن‌هایی که درجه‌ی آزادی پائینی دارند) نشان می‌دهیم، به نحوی که در هنگام اعمال الزامی آن به سیستم‌هایی با درجه‌ی آزادی بیش‌تر در فصل‌های بعد، مفهوم آن راحت‌تر قابل درک باشد.

۱-۲ تعریف ماتریس سختی

آشنایی با ماتریس سختی از نکات اساسی در درک روش سختی به شمار می‌رود. ماتریس سختی به قرار زیر تعریف می‌شود. در یک المان، ماتریس سختی \hat{k} ماتریسی است که به ازای آن $\hat{f} = \hat{k}\hat{d}$ باشد، که در آن \hat{k} مختصات محلی $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ جابه‌جایی \hat{d} گره‌ها را به نیروهای محلی یک المان، \hat{f} ، مرتبط می‌سازد (در خلال این کتاب خط کوچکی که در زیر یک کمیت رسم می‌شود معرف ماتریس بودن آن و علامت \wedge معرف کمیت‌هایی است که در مختصات محلی مناسب آن المان، مطابق شکل ۱-۲، منظور می‌شوند).

در یک محیط پیوسته یا سازه‌ای که از تعدادی المان تشکیل شده است ماتریس سختی K جابه‌جایی \hat{d} گره‌ها را در محور مختصات اصلی (x, y, z) ، به نیروهای اصلی F در کل محیط پیوسته یا سازه مرتبط می‌سازد (حروف کوچکی همانند x, y, z بدون علامت \wedge ، معرف متغیرهایی در محور مختصات اصلی است).

شکل ۲-۱ مختصات محلی $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ و مختصات اصلی (x, y, z) .

۲-۲ استخراج ماتریس سختی در المان فنر

حال، با استفاده از روش مستقیم تعادل، ماتریس سختی فنری یک بعدی از نوع خطی را استخراج می‌نماییم - به عبارتی دیگر، فنری که تابع قانون هوک است و فقط نیرو در راستای فنر را تحمل می‌کند. المان فنری شکل را مطابق با نمودار ۲-۲ در نظر می‌گیریم. نقاط مرجع ۱ و ۲ در دو انتهای فنر در نظر گرفته شده‌اند. چنین نقاط مرجعی گره‌های المان فنری شکل نامیده می‌شوند. نیروهای گره‌ای این المان که در راستای محلی \hat{x} اندازه گرفته می‌شوند \hat{f}_{1x} و \hat{f}_{2x} هستند. محور محلی به نحوی در امتداد فنر عمل می‌کند که بتوان نیروها و جابه‌جایی‌ها را در امتداد المان اندازه گرفت. در المان فنر، جابه‌جایی محلی گره‌ها d_{1x} و d_{2x} است. جابه‌جایی این گره‌ها درجه‌های آزادی هر گره نامیده می‌شود. همان‌طور که در شکل نشان داده شده جابه‌جایی و نیروی مثبت در هر گره در جهت مثبت \hat{x} در نظر گرفته می‌شود. پارامتر k ضریب ثابت یا سختی فنر است.



شکل ۲-۲ المان فنری شکل خطی با نیرو و جابه‌جایی قراردادی مثبت.

در شبیه بسیاری از مسائل مهندسی، موارد متعددی بروز می‌کند که مشابه با ضرایب ثابت فنرند. در فصل ۳ مشاهده می‌شود که یک میله‌ی دراز و باریک ضریب فنریتی برابر با $k = \frac{AE}{L}$ دارد به قسمی که A معرف سطح مقطع میله، E مدول الاستیسیته، و L طول میله است. متشابهاً، در فصل ۵ نشان داده خواهد شد که برای میله‌ی دراز و باریکی با مقطع دایره‌ای شکل که تحت پیچش قرار دارد، ضریب ثابت فنر برابر $k = \frac{JG}{L}$ است در جایی که J ممان اینرسی قطبی و G مدول پیچشی ماده‌ی مورد نظر است. در انتقال حرارت یک بعدی به روش جابه‌جایی (فصل ۱۳)، $k = \frac{AK_{xx}}{L}$ ، در جایی که K_{xx} قابلیت انتقال دمای ماده است، همچنین، در حرکت یک بعدی سیال درون یک جسم متخلخل (فصل ۱۴) $k = \frac{AK_{xx}}{L}$ بوده به قسمی که K_{xx} تراوایی ماده است.

بعداً در خواهیم یافت که روش سختی را می‌توان به مسائل غیر سازه‌ای همانند انتقال حرارت، جریان سیال و شبکه‌های الکتریکی، همانند مسائل غیرسازه‌ای، صرفاً با اعمال قانون اساسی مناسب (همانند قانون هوک در مورد مسائل سازه‌ای، قانون فوریه در مورد انتقال حرارت، قانون دارسی در مورد جریان سیال، و قانون اهم در مورد شبکه‌های الکتریکی)، و یک اصل بقا، همانند تعادل در گره‌ها یا بقای انرژی، اعمال نمود.

حال می‌خواهیم رابطه‌ای بین نیروهای گره‌ای در المان فنر و جابه‌جایی آن‌ها بیابیم. این رابطه ماتریس سختی خواهد بود. لذا، هدف آن است تا ماتریس نیروی گره‌ای را به ماتریس تغییر مکان‌های گره‌ای به شرح زیر مرتبط سازیم.

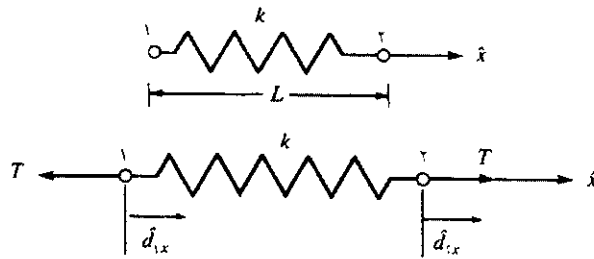
$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (1-2-2)$$

در رابطه‌ی (۱-۲-۲)، باید درایه‌های ماتریس سختی k_{ij} در ماتریس \underline{K} مشخص شوند. از روابط (۱-۲-۱) و (۱-۲-۶) ملاحظه می‌شود که k_{ij} معرف نیروی F_i در i مین درجه‌ی آزادی به ازای جابه‌جایی واحد d_j در j زمین درجه‌ی آزادی است، در حالی که دیگر جابه‌جایی‌ها برابر صفرند. به عبارتی دیگر، فرض شده است $d_k = 0$ ، $d_j = 1$ به ازای $k \neq j$ و $F_i = k_{ij}$.

حال مراحل کلی قید شده در بخش ۱-۴ را جهت استخراج ماتریس سختی المان فنری شکل این بخش، و سپس به منظور نمایش نحوه‌ی دستیابی به حل کامل مسائلی مرتبط با به هم گذاری فنرها در بخش ۲-۳، مورد استفاده قرار می‌دهیم (در حالی که باید در نظر داشت که همین مراحل را می‌توان بعداً در استخراج ماتریس‌های سختی المان‌های کلی‌تر به کار گرفت). از آن‌جا که رهیافت ما در خلال این کتاب استنتاج ماتریس سختی المان‌های گوناگون و سپس توضیح یا شرح چگونگی حل مسائل مهندسی به کمک آن‌ها است، لذا مرحله‌ی اول فقط انتخاب نوع المان را در بر دارد.

مرحله‌ی ۱ انتخاب نوع المان

فنری خطی، (که می‌تواند المانی از یک مجموعه فنر باشد)، را به قسمی در نظر می‌گیریم که گره‌های آن تحت تأثیر نیروی کششی T ، (ممکن است حاصل از عکس‌العمل فنر مجاور باشد)، در راستای فنر و در جهت \hat{x} مطابق شکل ۲-۳ قرار گرفته و در حال تعادل باشد. محور مختصات محلی \hat{x} از گره ۱ به سمت گره ۲ نشانه می‌رود. فنر توسط یک گره در هر انتها، و عددی برای المان معرفی می‌شود. طول اولیه‌ی بین دو گره قبل از ایجاد جابه‌جایی برابر L است. خصوصیات جنس المان (ضریب ثابت) برابر k است.



شکل ۲-۳ فنر خطی تحت تأثیر نیروی های کششی

مرحله ۲ انتخاب تابع جابه‌جایی

قبل از هر چیز باید تابع ریاضی معرف المان فنر تغییر شکل یافته‌ی تحت بار را انتخاب کرد. از آن‌جا که دست‌یابی به شکل بسته یا حل دقیق اگر ناممکن نباشد مشکل است، لذا جواب مسأله یا توزیع جابه‌جایی در المان توسط تابع ریاضی مناسبی حدس زده می‌شود. از رایج‌ترین توابع می‌توان چند جمله‌ای‌ها را نام برد. از آن‌جا که المان فنری شکل، بار اعمال شده را فقط از طریق درجه‌های آزادی محلی که به میزان \hat{d}_{1x} و \hat{d}_{2x} در راستای \hat{x} جابه‌جا می‌شوند تحمل می‌نماید، لذا تابع جابه‌جایی \hat{u} به قسمی انتخاب می‌شود که معرف جابه‌جایی در امتداد المان باشد. با توجه به آن‌که یک تابع خطی با مقادیر انتهایی معلوم مسیر مشخصی دارد، بنابراین تغییرات جابه‌جایی فنر در امتداد محور \hat{x} به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود [شکل ۲-۴ (b)]. بنابراین،

$$\begin{cases} a_1 = d_{1x} \\ a_2 = d_{2x} \end{cases}$$

$$\hat{u} = a_1 + a_2 \hat{x} \quad (2-2-2)$$

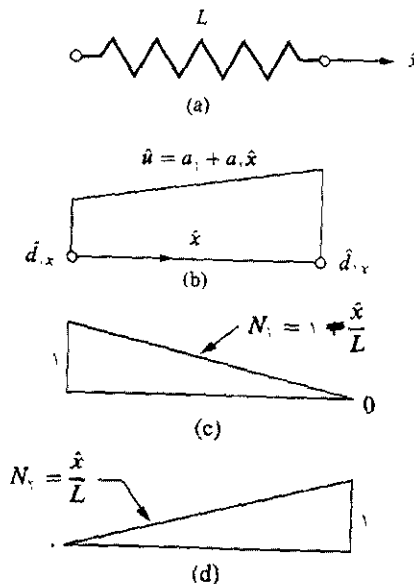
به‌طور کلی، تعداد ضرایب a با تعداد کل درجه‌های آزادی آن المان برابر است. در این‌جا تعداد کل درجه‌های آزادی برابر دو است - یک جابه‌جایی محوری به ازای هر یک از دو گره المان (بعدها در مورد انتخاب تابع جابه‌جایی در بخش ۲-۳ توضیح داده خواهد شد). معادله‌ی (۲-۲-۲) به صورت ماتریسی برابر است با:

$$\hat{u} = [1 \quad \hat{x}] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (3-2-2)$$

حال می‌خواهیم \hat{u} را به صورت تابعی از تغییر مکان‌های گره‌ای $\hat{d}_{1,x}$ و $\hat{d}_{2,x}$ تشریح کنیم؛ چرا که چنین امری این امکان را فراهم می‌سازد تا بتوان شرایط فیزیکی را همان‌طور که در مرحله‌ی ۳ ذکر شد مستقیماً به جابه‌جایی‌های گره‌ای مرتبط ساخته و سپس جابه‌جایی‌های گره‌ای را به نیروهای گره‌ای در مرحله‌ی ۴ ربط داد. دستیابی به این امر، ضمن ارزیابی \hat{u} در هر گره و تعیین a_1 و a_2 از معادله‌ی (۲-۲) به شرح زیر صورت می‌گیرد.

$$\hat{u}(0) = \hat{d}_{1,x} = a \quad (4-2-2)$$

$$\hat{u}(l) = \hat{d}_{2,x} = a_1 l + \hat{d}_{1,x} \quad (5-2-2)$$



شکل ۲-۴ (a) المان فنری شکل و نمایش (b) تابع جابه‌جایی \hat{u} و توابع شکل (c) N_1 و N_2 (d) در امتداد محدوده‌ی المان.

از حل معادله‌ی (۴-۲-۲) a_r برابر است با:

$$a_r = \frac{\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{lx}}{l} \quad (6-2-2)$$

از جای‌گزینی معادلات (۴-۲-۲) و (۶-۲-۲) در رابطه‌ی (۲-۲-۲) داریم:

$$\hat{u} = \left(\frac{\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{lx}}{l} \right) \hat{x} + \hat{d}_{lx} \quad (7-2-2)$$

عبارت (۷-۲-۲) به صورت ماتریسی به شرح زیر است.

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\hat{x}}{L} & \frac{\hat{x}}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{lx} \\ \hat{d}_{rx} \end{Bmatrix} \quad (8-2-2)$$

یا

$$\hat{u} = [N_l \quad N_r] \begin{Bmatrix} \hat{d}_{lx} \\ \hat{d}_{rx} \end{Bmatrix} \quad (9-2-2)$$

در این جا

$$N_r = \frac{\hat{x}}{l} \quad \text{و} \quad N_l = 1 - \frac{\hat{x}}{l} \quad (10-2-2)$$

توابع شکل نامیده شده‌اند؛ زیرا N_i ها معرف شکل تابع جابه‌جایی فرض شده در محدوده‌ی المان (مختصات \hat{x}) بوده در حالی که مقدار i مین درجه‌ی آزادی برابر یک و دیگر درجه‌های آزادی برابر صفرند. در این مورد N_r و N_l توابعی خطی با این خواص هستند که $N_l = 1$ در گره ۱، و $N_l = 0$ در گره ۲ است در

صورتی که $N_r = 1$ در گره ۲ و $N_r = 0$ در گره ۱ است. به منظور رؤیت تغییرات توابع شکل در محدوده‌ی المان فنری به شکل‌های ۲-۴ (c) و (d) توجه کنید. همچنین به ازای هر محور مختصات دیگری در امتداد میله، $N_1 + N_2 = 1$ است (این رابطه‌ی مهم در فصل ۳-۲ بیش‌تر مورد کاوش قرار خواهد گرفت). مضافاً به دلیل آن‌که از N_i ها به منظور میان‌یابی مقدار یک تابع بین دو گره استفاده می‌شود؛ لذا به آن‌ها توابع میان‌یاب گفته می‌شود. ممکن است مقدار تابع میان‌یاب با تابع حقیقی متفاوت باشد، بجز در نقاط انتهایی یا گره‌ها که در آن مقدار هر دو تابع مساوی و برابر مقدار مربوط به آن گره است.

مرحله‌ی ۳ تعریف روابط کرنش - جابه‌جایی و تنش - کرنش

نیروی کششی T باعث افزایش طول (جابه‌جایی) فنر به میزان δ می‌شود. نمونه‌ای از افزایش طول یک فنر در شکل ۲-۵ نشان داده شده است. در این جا به دلیل آن‌که جهت جابه‌جایی $\hat{d}_{r,x}$ در خلاف مثبت \hat{x} است لذا اندازه‌ی آن منفی بوده در حالی که اندازه‌ی $\hat{d}_{r,x}$ مثبت است.



شکل ۲-۵ فنر تغییر طول یافته

تغییر طول فنر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\delta = \hat{d}_{r,x} - \hat{d}_{l,x} \quad (11-2-2)$$

از معادله‌ی (۱۱-۲-۲) در می‌یابیم که تغییر طول کل فنر برابر اختلاف جابه‌جایی گره‌ها در راستای \hat{x} است.

برای المان فنری شکل، می‌توان نیرو را مستقیماً با جابه‌جایی مرتبط ساخت. لذا در این جا نیازی به رابطه‌ی بین کرنش - جابه‌جایی وجود ندارد.

رابطه‌ی تنش و کرنش را می‌توان بر حسب نیرو- جابه‌جایی به صورت زیر نوشت.

$$T = K\delta \quad (12-2-2)$$

حال با جای‌گزینی رابطه‌ی (۱۱-۲-۲) در معادله‌ی (۱۲-۲-۲) داریم:

$$T = k(\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{lx}) \quad (13-2-2)$$

مرحله‌ی ۴ استخراج ماتریس سختی و معادلات المان

حال ماتریس سختی المان را استخراج می‌نماییم. با توجه به علامت قراردادی برای نیروهای گره‌ای و تعادل داریم:

$$\hat{f}_{lx} = -T \quad \hat{f}_{rx} = T \quad (14-2-2)$$

با استفاده از معادلات (۱۳-۲-۲) و (۱۴-۲-۲) داریم:

$$T = -\hat{f}_{lx} = k(\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{lx}) \quad (15-2-2)$$

$$T = \hat{f}_{rx} = k(\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{lx})$$

از باز نویسی روابط (۲-۲-۱۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1x} &= k(\hat{d}_{1x} - \hat{d}_{2x}) \\ \hat{f}_{2x} &= k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})\end{aligned}\quad (۱۶-۲-۲)$$

حال با تشریح عبارت (۱۶-۲-۲) به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix}\quad (۱۷-۲-۲)$$

رابطه‌ی فوق برای فنری است که در راستای \hat{x} قرار دارد. با توجه به تعریف اولیه‌ی ماتریس سختی و اعمال معادله‌ی (۲-۲-۱) به رابطه‌ی (۲-۲-۱۷)، ماتریس سختی برای المان فنری شکل به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\quad (۱۸-۲-۲)$$

در این جا \hat{k} ماتریس سختی محلی المان نامیده می‌شود. از معادله‌ی (۲-۲-۱۸) مشاهده می‌شود که \hat{k} ماتریسی متقارن و مربعی است ($k_{ij} = k_{ji}$) (تعداد ردیف‌ها و ستون‌های \hat{k} با هم برابر است). در پیوست A ماتریس‌های متقارن و مربعی بیش‌تر توضیح داده شده و مثال‌هایی در این مورد آورده شده است.

مرحله‌ی ۵ به هم گذاری معادلات المان‌ها به منظور دستیابی به معادلات کلی و اعمال شرایط مرزی

با استفاده از معادلات تعادل، معادلات هم سازگاری و روابط نیرو و جابه‌جایی در بخش ۲-۳، و روش مستقیم سختی که در بخش ۲-۴ توضیح داده شد، ماتریس

سختی کل و نیز ماتریس نیروی کل حاصل می‌شوند. این مرحله در مورد سازه‌هایی صادق است که بیش از یک المان داشته باشند به نحوی که:

$$\underline{K} = [K] = \sum_{e=1}^N \underline{k}^{(e)} \quad \underline{F} = \{F\} = \sum_{e=1}^N \underline{f}^{(e)} \quad (19-2-2)$$

به قسمی که \underline{k} و \underline{f} ماتریس‌های نیرو و سختی المان بوده و در محور مختصات اصلی مرجع بیان شده‌اند. (در خلال این کتاب علامت Σ که در متن آورده شده به معنی جمع بندی معمولی ماتریس المان‌ها نیست بلکه بدان معنی است که ماتریس المان‌ها باید به نحو مقتضی و بر حسب روش مستقیم سختی که در بخش ۲-۴ تشریح شد جمع شوند).

مرحله ۶ تعیین جابه‌جایی گره‌ها

جابه‌جایی‌ها با اعمال شرایط مرزی، از قبیل شرایط تکیه‌گاه‌ها، و حل سیستم معادلات $\underline{F} = \underline{Kd}$ به‌طور همزمان، حاصل می‌شوند.

مرحله ۷ تعیین نیرو در المان‌ها

نهایتاً، نیرو در المان‌ها را می‌توان از جای‌گزینی معکوس در هر المان از طریق روابط شبیه به معادلات (۱۶-۲-۲) به دست آورد.

۳-۲ مثال‌هایی مرتبط با هم‌گذاری المان‌های فنی شکل

سازه‌هایی همانند خریاها، اسکلت بندی ساختمان‌ها و پل‌ها، از سازه‌های اولیه‌ای هستند که از اتصال قطعات به یک دیگر به منظور تشکیل سازه‌ی نهایی

حاصل می‌شوند. به منظور تجزیه و تحلیل این سازه‌ها، باید ماتریس سختی کل سازه را که از به هم پیوستن المان‌ها حاصل می‌شود به دست آورد. قبل از نظر گرفتن خرپا و قاب، با استفاده از روبرط ماتریسی نیرو- جابه‌جایی که در بخش ۲-۲ برای المان‌های فنری شکل استخراج گردید همراه با لحاظ نمودن اصول اولیه‌ی هم سازگاری و تعادل در گره‌ها، ماتریس سختی کل سازه را که از المان‌های یاد شده تشکیل شده است به دست می‌آوریم. سپس مرحله‌ی ۵ که قبلاً ذکر شد تشریح و توضیح داده خواهد شد.

حال به‌طور اخص، مثال به هم گذاری دو فنری را که در شکل ۲-۶* نمایش داده شده‌اند در نظر می‌گیریم. این مثال عمومیت کافی جهت تشریح روش مستقیم تعادل، در دست‌یابی به ماتریس سختی کل، در مجموعه‌ی فنرها را دارد. در این‌جا گره ۱ را ثابت نموده و نیروی محوری F_{rx} را بر گره ۳ و F_{rx} را بر گره ۲ اعمال می‌کنیم. سختی المان‌های فنری شکل ۱ و ۲ به ترتیب برابر k_1 و k_2 است. به منظور عمومیت بخشی بیشتر، گره‌های کل مجموعه به صورت ۱، ۳، ۲ و شماره گذاری شده‌اند؛ زیرا در مسائل بزرگ، عموماً شماره گذاری بین المان‌ها به صورت ترتیبی صورت نمی‌گیرد.



شکل ۲-۶ مجموعه‌ی جفت فنر

محور x محور اصلی کل سیستم است. در این مثال، مختصات محلی \hat{x} هر المان بر محور مختصات کل مجموعه منطبق است.

* در خلال متن، شماره‌ی المان‌ها در شکل‌ها توسط عددی که دور آن دایره‌ای کشیده شده مشخص شده‌اند.

در المان ۱، با استفاده از معادله‌ی (۲-۲-۱۷) داریم:

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ f_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(1)} \\ d_{rx}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (۲-۳-۱)$$

و در المان ۲ داریم:

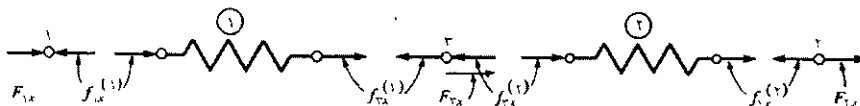
$$\begin{Bmatrix} f_{rx} \\ f_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx}^{(2)} \\ d_{rx}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (۲-۳-۲)$$

مضافاً، المان‌های ۱ و ۲ باید در خلال جابه‌جایی در گره مشترک ۳ به هم متصل باشند. این شرط را شرط هم‌سازگاری یا پیوستگی می‌نامند. بر اساس شرط هم‌سازگاری داریم:

$$d_{rx}^{(1)} = d_{rx}^{(2)} = d_{rx} \quad (۳-۳-۲)$$

در خلال متن، بالا نویس درون پرانتز برای d دلالت بر شماره‌ی المان می‌نماید. یادآوری می‌شود که زیر نویس‌های سمت راست، به ترتیب معرف شماره‌ی گره و جهت جابه‌جایی آن بوده و d_{rx} معرف جابه‌جایی کل و یا جابه‌جایی مجموعه فنر است.

نمودار جسم آزاد هر المان و گره (با استفاده از علامت قراردادی برای نیروهای مرتبط با گره‌های هر المان در شکل ۲-۲)، در نمودار ۲-۷ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۷ نیروهای گره‌ای منطبق با علامت قراردادی نیرو در المان

بر اساس نمودار جسم آزاد هر گره که در شکل ۲-۷ نشان داده شده، و این واقعیت که نیروهای خارجی در هر گره باید با نیروهای داخلی برابر باشند، می‌توان معادلات تعادل در گره‌های ۱، ۲، ۳ را به صورت زیر نوشت:

$$F_{rx} = f_{rx}^{(1)} + f_{rx}^{(2)} \quad (۴-۳-۲)$$

$$F_{rx} = f_{rx}^{(2)} \quad (۵-۳-۲)$$

$$F_{ix} = f_{ix}^{(1)} \quad (۶-۳-۲)$$

که F_{ix} عکس‌العمل ناشی از تکیه‌گاه ثابت است.

در این‌جا در حرکت از یک گره به المان مرتبط با آن گره، از قانون سوم نیوتن؛ یعنی نیروها مساوی و مخالف هم اعمال می‌شوند استفاده شده است. با جای‌گزینی معادلات (۱-۳-۲) الی (۳-۳-۲) در روابط (۴-۳-۲) الی (۶-۳-۲) داریم:

$$\begin{aligned} F_{rx} &= (-k_1 d_{ix} + k_1 d_{rx}) + (k_r d_{rx} - k_r d_{rx}) \\ F_{rx} &= -k_r d_{rx} + k_r d_{rx} \\ F_{ix} &= k_1 d_{ix} - k_1 d_{rx} \end{aligned} \quad (۷-۳-۲)$$

معادلات (۷-۳-۲) به صورت ماتریسی به شرح زیر است:

$$\begin{Bmatrix} F_{rx} \\ F_{rx} \\ F_{ix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_r & -k_r & -k_1 \\ -k_r & k_r & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{rx} \\ d_{ix} \end{Bmatrix} \quad (۸-۳-۲)$$

ضمن باز چینی معادله‌ی (۸-۳-۲) بر اساس افزایش شماره‌ی درجه‌های آزادی داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{yx} \\ F_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_y & -k_y \\ -k_1 & -k_y & k_1 + k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{yx} \\ d_{rx} \end{Bmatrix} \quad (9-3-2)$$

حال معادله‌ی (۹-۳-۲) به صورت رابطه‌ی ماتریسی نوشته می‌شود.

$$\underline{F} = \underline{K}d \quad (10-3-2)$$

در جایی که $\underline{F} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{yx} \\ F_{rx} \end{Bmatrix}$ ماتریس اصلی نیروهای گره‌ای و $\underline{d} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{yx} \\ d_{rx} \end{Bmatrix}$ ماتریس

اصلی جابه‌جایی‌های گره‌ای نامیده شده و

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_y & -k_y \\ -k_1 & -k_y & k_1 + k_y \end{bmatrix} \quad (11-3-2)$$

ماتریس سختی کل یا اصلی سیستم نامیده می‌شود.

به‌طور خلاصه، به منظور ایجاد معادلات و ماتریس سختی (۹-۳-۲) و (۳-۲-۳-۲) برای یک مجموعه فنر، از روابط نیرو-جابه‌جایی (۱-۳-۲) و (۲-۳-۲)، معادلات هم‌سازگاری (۳-۳-۲)، و روابط (۴-۳-۲) - (۶-۳-۲) مرتبط با تعادل نیرو در گره‌ها استفاده نموده‌ایم. حل کامل این مسأله پس از تعیین روش عملی‌تری به منظور دستیابی به ماتریس سختی در بخش ۲-۴، و تشریح شرایط مرزی تکیه‌گاه در بخش ۲-۵، بررسی خواهد شد.

۲-۴ نحوه‌ی دست‌یابی به ماتریس سختی کل از طریق روش انطباق (روش مستقیم سختی)

حال روش مناسب‌تری را جهت تشکیل ماتریس سختی کل بررسی می‌کنیم. این روش بر اساس انطباق مناسب المان‌های ماتریس‌های سختی تشکیل دهنده‌ی کل سازه استوار است (به مراجع [۱] و [۲] مراجعه شود).

با توجه به جمع بندی جفت فنر بخش ۲-۳، ماتریس سختی المان‌ها که در معادلات (۲-۳-۱) و (۲-۳-۲) داده شده‌اند برابرند با:

$$\underline{k}^{(۱)} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{1x} \\ d_{rx} \end{matrix} \quad \underline{k}^{(۲)} = \begin{bmatrix} k_r & -k_r \\ -k_r & k_r \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{rx} \\ d_{rx} \end{matrix} \quad (۱-۴-۲)$$

در این جا d_{ix} های مندرج در بالای هر ستون و هم جوار هر یک از ردیف های ماتریس \underline{k} دلالت بر درجه‌ی آزادی مرتبط با ردیف و ستون هر المان می نمایند . در رابطه‌ی (۲-۴-۱)، ماتریس سختی المان‌ها با درجه‌های آزادی مشابه مرتبط نیستند؛ به عبارتی دیگر، المان ۱ با جابه‌جایی محوری گره‌های ۱ و ۳ در ارتباط بوده در حالی که المان ۲ با جابه‌جایی محوری گره‌های ۲ و ۳ مرتبط است. لذا ماتریس سختی هر یک از المان‌ها را نمی‌توان به‌طور مستقیم در قالب فعلی با هم جمع (منطبق) نمود. به منظور انطباق ماتریس المان‌ها، باید آن‌ها را به مرتبه (اندازه‌ی) ماتریس سختی کل سازه (مجموعه فنرها) بسط داده به قسمی که ماتریس سختی هر المان با درجه‌های آزادی کل سازه مرتبط شود. به منظور بسط ماتریس سختی هر المان به مرتبه‌ی ماتریس سختی کل، کافی است که ردیف‌ها و ستون‌های صفر برای جابه‌جایی‌های غیر مرتبط به آن المان را اضافه نمود.

در المان ۱، ماتریس سختی را به صورت گسترش یافته به قسمی باز نویسی می‌کنیم که معادله‌ی (۲-۳-۱) به شرح زیر شود:

$$k_1 \begin{matrix} d_{1x} & d_{rx} & d_{rx} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(1)} \\ d_{rx}^{(1)} \\ d_{rx}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{rx}^{(1)} \\ f_{rx}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2-4-2)$$

در جایی که از رابطه‌ی (۲-۴-۲) ملاحظه می‌شود که $d_{rx}^{(1)}$ و $f_{rx}^{(1)}$ با $\underline{k}^{(1)}$ مرتبط نمی‌باشند. متشابهاً برای المان ۲ داریم:

$$k_2 \begin{matrix} d_{1x} & d_{rx} & d_{rx} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(2)} \\ d_{rx}^{(2)} \\ d_{rx}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(2)} \\ f_{rx}^{(2)} \\ f_{rx}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3-4-2)$$

حال با در نظر گرفتن تعادل نیرو در هر گره داریم:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ 0 \\ f_{rx}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{rx}^{(2)} \\ f_{rx}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{rx} \\ F_{rx} \end{Bmatrix} \quad (4-4-2)$$

به قسمی که معادله‌ی (۲-۴-۲)، در واقع همان روابط (۲-۳-۲) - (۲-۳-۳) بوده که به صورت ماتریسی تشریح شده‌اند. از جای‌گزینی معادلات (۲-۴-۲) و (۳-۴-۲) در رابطه‌ی (۴-۴-۲) داریم:

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(1)} \\ d_{rx}^{(1)} \\ d_{rx}^{(1)} \end{Bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(2)} \\ d_{rx}^{(2)} \\ d_{rx}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{rx} \\ F_{rx} \end{Bmatrix} \quad (5-4-2)$$

در جایی که، مجدداً، بالا نویس‌های d معرف شماره‌ی المان می باشند. از ساده سازی معادله‌ی (۵-۴-۲) داریم:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{rx} \\ d_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{rx} \\ F_{rx} \end{Bmatrix} \quad (6-4-2)$$

در این جا بالا نویس‌هایی که معرف شماره‌ی المان‌ها بوده و مرتبط با گره‌ها می‌باشند حذف شده‌اند؛ زیرا $d_{1x}^{(1)}$ در واقع برابر با d_{1x} ، $d_{rx}^{(1)}$ برابر با d_{rx} و با توجه به معادله‌ی (۳-۳-۲)، $d_{rx}^{(1)} = d_{rx}^{(2)} = d_{rx}$ ، برابر با جابه‌جایی گره ۳ در کل مجموعه است. معادله‌ی (۶-۴-۲) که از طریق روش انطباق حاصل شده مشابه با رابطه‌ی (۹-۳-۲) است.

می‌توانستیم ماتریس‌های سختی بسط یافته‌ی هر المان در روابط (۲-۴-۲) و (۳-۴-۲) را مستقیماً با هم جمع بسته تا ماتریس سختی کل سازه که در معادله‌ی (۶-۴-۲) آورده شد حاصل شود. چنین روش موثقی به منظور دستیابی به ماتریس سختی هر المان و تشکیل ماتریس سختی کل سازه و مجموعه‌ی کامل معادلات سختی، روش مستقیم سختی نام دارد. این مرحله مهم‌ترین گام در روش اجزای محدود است.

در این مثال ساده، می‌توان ماتریس‌های سختی هر المان را به راحتی بسط داده و سپس از انطباق آن‌ها ماتریس سختی کل را به دست آورد. به هر حال، در مسائلی با درجه‌های آزادی بالا، بسط ماتریس سختی هر المان به منظور دستیابی به ماتریس سختی کل خسته‌کننده است. در روش مستقیم سختی، به منظور اجتناب از بسط ماتریس سختی هر المان، به منظور دستیابی به ماتریس سختی کل، روش کوتاهی را پیشنهاد می‌کنیم. برای مثال، در مجموعه فزنی که ذکر گردید هر یک از ردیف‌ها و ستون‌های ماتریس سختی هر المان بر حسب درجه‌های آزادی مرتبط با آن‌ها به شرح زیر علامت گذاری می‌شوند.

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{rx} \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{1x} \\ d_{rx} \end{matrix} \quad \underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{rx} & d_{rx} \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{rx} \\ d_{rx} \end{matrix} \quad (7-4-2)$$

\underline{K} به راحتی از جمع مستقیم عبارات مربوط به درجه‌های آزادی در $\underline{k}^{(1)}$ و $\underline{k}^{(2)}$ در محل متناسب با جایگاه همان درجه‌ی آزادی در ماتریس \underline{K} به شرح زیر حاصل می‌شود. در ماتریس سختی \underline{K} ، عبارات مرتبط با ردیف و ستون d_{1x} فقط متأثر از گره ۱ بوده است؛ زیرا درجه‌ی آزادی d_{1x} فقط با المان ۱ مرتبط است [معادله‌ی (۲-۷-۴)]، به عبارتی دیگر، $k_{11} = k_1$. ستون و ردیف مرتبط با d_{rx} در ماتریس \underline{K} متأثر از هر یک از المان‌های ۱ و ۲ بوده است؛ زیرا درجه‌ی آزادی d_{rx} با هر دو المان مرتبط است؛ بنابراین، $k_{22} = k_1 + k_2$. با استدلال‌های مشابه، \underline{K} برابر است با:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{rx} & d_{rx} \\ k_1 & \cdot & -k_1 \\ \cdot & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} d_{1x} \\ d_{rx} \\ d_{rx} \end{matrix} \quad (8-4-2)$$

در این جا درایه‌های ماتریس K بر اساس درجه‌های آزادی در محل خود جای‌گزین شده و بر حسب افزایش شماره‌ی عددی گره‌ها برای کل سازه مرتب شده‌اند. بخش ۲-۵ به حل کامل مجموعه‌ی جفت فنر، همراه با تشریح شرایط مرزی تکیه‌گاه‌ها اشاره می‌نماید.

۵-۲ شرایط مرزی

حال باید شرایط مرزی (تکیه‌گاه) در مدل های سازه‌ای را، همانند مجموعه جفت فنر مندرج در شکل ۲-۴، مشخص نماییم؛ چه در غیر اینصورت K منفرد خواهد بود؛ به عبارتی دیگر، دترمینان K صفر بوده و ماتریس معکوس آن وجود نخواهد داشت. این بدان معنی است که سازه ناپایدار خواهد بود. بدون اعمال شرایط مرزی یا سینماتیکی مناسب، سازه آزاد است تا به صورت یک جسم صلب حرکت نموده و نتواند هیچ نیروی اعمال شده‌ی آن را تحمل کند. به‌طور کلی، تعداد شرایط مرزی مورد نیاز جهت غیر منفرد کردن $[K]$ ، برابر تعداد مدهای صلب ممکن در جسم است.

شرایط مرزی بر دو نوع کلی است. شرایط مرزی همگن - که از رایج‌ترین نوع بوده و در تکیه‌گاه‌هایی اتفاق می‌افتد که کاملاً ساکن باشند؛ شرایط مرزی غیر همگن در تکیه‌گاه‌هایی رخ می‌دهد که جابه‌جایی‌های محدودی غیر از صفر، از قبیل نشست یک تکیه‌گاه، وجود داشته باشد.

به منظور معرفی دو نوع شرط مرزی یاد شده، معادله‌ی (۲-۴-۶) را که در مورد مجموعه جفت فنر مندرج در شکل ۲-۶ استخراج گردید در نظر می‌گیریم. ابتدا حالت شرایط مرزی همگن در نظر گرفته می‌شود. در این حالت شرایط مرزی به قسمی است که جابه‌جایی در گره‌های خاصی صفر است. در این جا با توجه به

آن که گره ۱ ثابت است، $d_{1x} = 0$ می باشد. لذا معادله‌ی (۲-۴-۶) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_r & -k_r \\ -k_1 & -k_r & k_1 + k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ d_{rx} \\ d_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{rx} \\ F_{rx} \end{Bmatrix} \quad (1-5-2)$$

از بسط معادله‌ی (۲-۵-۱) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} k_1(0) + (0)d_{rx} - k_1d_{rx} &= F_{1x} \\ 0(0) + k_rd_{rx} - k_rd_{rx} &= F_{rx} \\ -k_1(0) - k_rd_{rx} + (k_1 + k_r)d_{rx} &= F_{rx} \end{aligned} \quad (2-5-2)$$

در جایی که F_{1x} عکس العمل مجهول، و F_{rx} و F_{rx} نیروهای معلوم اعمال شده می باشند.

چنانچه دومین و سومین معادله در روابط (۲-۵-۲) به صورت ماتریسی نوشته شوند داریم:

$$\begin{bmatrix} k_r & -k_r \\ -k_r & k_1 + k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{rx} \\ F_{rx} \end{Bmatrix} \quad (3-5-2)$$

بدین ترتیب، به طور مؤثری اولین ردیف و ستون از ماتریس \underline{K} و نیز اولین ردیف \underline{d} و \underline{F} را بیرون کشیده تا معادله‌ی (۲-۵-۳) حاصل شود.

می توانستیم به ازای شرایط مرزی همگن، معادله‌ی (۲-۵-۳) را به طور مستقیم با حذف ردیف و ستون مرتبط با جابه جایی صفر برای درجه های آزادی، از رابطه‌ی (۲-۵-۱) به دست آوریم. در این جا ردیف و ستون ۱ به آن دلیل حذف می شوند که

ستون ۱ در ماتریس K ، در واقع در $d_{1x} = 0$ ضرب می‌شود. با این وصف، F_{1x} لزوماً صفر نبوده و می‌توان مقدار آن را پس از تعیین d_{rx} و d_{rx} به دست آورد.

پس از حل معادله‌ی (۲-۵-۳) برای d_{rx} و d_{rx} داریم:

$$\begin{cases} d_{rx} \\ d_{rx} \end{cases} = \begin{bmatrix} k_r & -k_r \\ -k_r & k_1 + k_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} F_{rx} \\ F_{rx} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \end{bmatrix} \begin{cases} F_{rx} \\ F_{rx} \end{cases} \quad (۲-۵-۴)$$

حال با مشخص شدن مقادیر d_{rx} و d_{rx} از معادله‌ی (۲-۵-۴)، آن‌ها را در اولین رابطه در معادلات (۲-۵-۲) جای‌گزین نموده تا F_{1x} به شرح زیر حاصل شود.

$$F_{1x} = -K_1 d_{rx} \quad (۲-۵-۵)$$

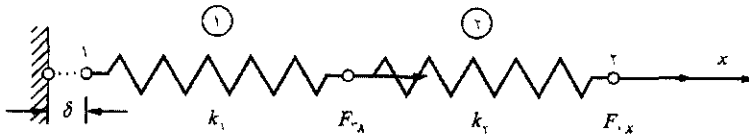
با استفاده از مقدار d_{rx} از معادله‌ی (۲-۵-۴) و جای‌گزینی آن در رابطه‌ی (۲-۵-۵) می‌توان نیروی مجهول در گره ۱ را (که عکس‌العمل نیز نامیده می‌شود) بر حسب نیروهای گره‌ای F_{rx} و F_{rx} محاسبه نمود. نتیجه به شرح زیر است.

$$F_{1x} = -F_{rx} - F_{rx} \quad (۲-۵-۶)$$

بنابراین برای کلیه‌ی شرایط مرزی همگن، می‌توان ردیف‌ها و ستون‌های مربوط به درجه‌های آزادی جابه‌جایی صفر را از مجموعه‌ی اولیه معادلات حذف نموده و سپس مجهولات مسأله را تعیین نمود. این روش در حل دستی مسائل مفید است (مع الوصف، فصل ۴ روش عملی‌تری را که کار برد رایانه‌ای دارد به منظور حل همزمان سیستم معادلات ارائه می‌دهد).

حال شرایط مرزی غیر همگن را در نظر می‌گیریم. در این حالت بعضی از جابه‌جایی‌های قید شده صفر نیستند. به منظور ساده‌سازی مسأله فرض می‌کنیم

$d_{1,x} = \delta$ در جایی که در رابطه‌ی (۲-۴-۶) دلالت بر جابه‌جایی معلومی می‌نماید (شکل ۲-۸).



شکل ۲-۸ مجموعه‌ی جفت فنر با جابه‌جایی معلوم δ در گره ۱

حال داریم

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_r & -k_r \\ -k_1 & -k_r & k_1 + k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ d_{r,x} \\ d_{r,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,x} \\ F_{r,x} \\ F_{r,x} \end{Bmatrix} \quad (۷-۵-۲)$$

از بسط رابطه‌ی (۲-۵-۷) داریم

$$\begin{aligned} K_1 \delta + 0(\delta_{r,x}) - K_1 d_{r,x} &= F_{1,x} \\ 0 \cdot \delta + K_r d_{r,x} - k_r d_{r,x} &= F_{r,x} \\ -K_1 \delta - K_r d_{r,x} + (k_1 + k_r) d_{r,x} &= F_{r,x} \end{aligned} \quad (۸-۵-۲)$$

در جایی که $F_{1,x}$ عکس‌العمل تکیه‌گاهی است که به میزان δ جابه‌جا شده است. از آن‌جا که نیروهای $F_{1,x}$ و $F_{r,x}$ که در سمت راست دومین و سومین رابطه از معادلات (۲-۵-۸) قرار دارند معلومند؛ لذا با در نظر گرفتن این دو رابطه داریم:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \delta + K_r d_{r,x} - k_r d_{r,x} &= F_{r,x} \\ -K_1 \delta - K_r d_{r,x} + (k_1 + k_r) d_{r,x} &= F_{r,x} \end{aligned} \quad (۹-۵-۲)$$

با انتقال مقادیر δ به سمت راست معادله‌ی (۲-۵-۹)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} K_r d_{r,x} - k_r d_{r,x} &= F_r \\ -K_r d_{r,x} + (k_1 + k_r) d_{r,x} &= k_1 \delta + F_{r,x} \end{aligned} \quad (۱۰-۵-۲)$$

از دوباره نویسی معادله‌ی (۲-۵-۱۰) به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} k_r & -k_r \\ -k_r & k_1 + k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{rx} \\ k_1 \delta + F_{rx} \end{Bmatrix} \quad (۲-۵-۱۱)$$

بنابراین، درمسائلی با شرایط مرزی غیر همگن، همان‌طور که از روابط (۲-۵-۱۱) مشاهده می‌شود نمی‌توان ابتدا ردیف ۱ و ستون ۱ از معادله‌ی (۲-۵-۷) را که مربوط به شرایط مرزی غیر همگن است حذف نمود. اگر چنین امری صورت می‌گرفت، عبارت $K_1 \delta$ در معادله‌ی (۲-۵-۱۱) حذف شده و باعث بروز خطا در مقادیر جابه‌جایی‌ها می‌شد. برای شرایط مرزی غیر همگن، به‌طور کلی باید عبارات مربوط به جابه‌جایی‌های معلوم را، قبل از تعیین جابه‌جایی‌های مجهول، به سمت راست ماتریس نیرو انتقال داد. این امر با انتقال عبارت $K_1 \delta$ از دومین رابطه‌ی معادله‌ی (۲-۵-۹) به سمت راست دومین رابطه از معادله‌ی (۲-۵-۱۰) نشان داده شد.

حال می‌توان مقادیر جابه‌جایی در رابطه‌ی (۲-۵-۱۱) را به همان روشی که برای معادله‌ی (۲-۵-۳) ارائه شد تعیین نمود؛ بنابراین حل مسأله‌ی (۲-۵-۱۱) را بیش از این ادامه نباید داد؛ چرا که اطلاعات جدیدی از آن عاید ما نخواهد شد.

به هر حال، با جای‌گزینی جابه‌جایی به دست آمده در رابطه‌ی (۲-۵-۷)،

عکس‌العمل مربوطه برابر است با:

$$F_{1x} = k_1 \delta - k_1 d_{rx} \quad (۲-۵-۱۲)$$

عبارت به دست آمده با عبارت مشابهی که از رابطه‌ی (۲-۵-۵) به دست آمد متفاوت است.

در این مرحله بعضی از خصوصیات ماتریس سختی مندرج در معادله‌ی (۲-۵-۵) را که در روش کلی اجزای محدود کاربرد دارند خلاصه می‌کنیم.

۱- همان‌طور که ماتریس سختی هر المان متقارن است، \underline{K} نیز متقارن است. اگر با مکانیک سازه‌ها آشنا باشید، چنین تقارنی جای تعجب نداشته و می‌توان با استفاده از قوانین معکوس که در مراجعی از قبیل [۳] و [۴] تشریح شده‌اند آن را به اثبات رساند.

۲- \underline{K} ماتریسی منفرد بوده و معکوس آن وجود نخواهد داشت مگر آن که شرایط مرزی کافی بر مسأله اعمال شده تا از منفرد بودن آن و حرکت جسم به صورت صلب جلوگیری شود.

۳- عبارات قطر اصلی ماتریس \underline{K} پیوسته مثبت بوده است؛ چه در غیر این صورت نیروی گره‌ای مثبت F_i باعث جابه‌جایی منفی d_i خواهد شد - رفتاری که مخالف با عملکرد فیزیکی هر سازه‌ی واقعی است.

به‌طور کلی، شرایط تکیه‌گاهی قید شده به صورت ریاضی از طریق جزء بندی نمودن معادلات تعادل اصلی، به شرح زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \hline \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \end{array} \right\} \quad (13-5-2)$$

در جایی که \underline{d}_1 معرف جابه‌جایی‌های آزاد یا بدون قید و \underline{d}_2 دلالت بر جابه‌جایی‌های مشخص می‌نمایند. با استفاده از معادله‌ی (۱۳-۵-۲) داریم؛

$$\underline{K}_{11} \underline{d}_1 = \underline{F}_1 - \underline{K}_{12} \underline{d}_2 \quad (14-5-2)$$

و

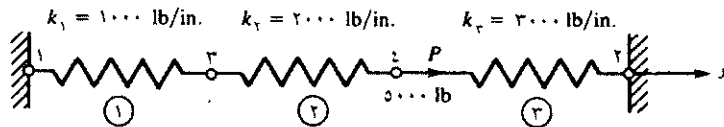
$$\underline{F}_2 = \underline{K}_{21} \underline{d}_1 + \underline{K}_{22} \underline{d}_2 \quad (15-5-2)$$

در جایی که F_1 معرف نیروهای گره‌ای معلوم و F_2 دلالت بر نیروهای گره‌ای مجهول در گره‌هایی می‌نماید که جابه‌جایی مشخصی دارند. F_2 از رابطه‌ی (۲-۵) - (۱۵)، پس از محاسبه‌ی d_1 از رابطه‌ی (۲-۵-۱۴)، حاصل می‌شود. در رابطه‌ی (۲-۱۴-۵) فرض می‌شود که K_{11} دیگر منفرد نبوده، لذا می‌توان مقادیر d_1 را به دست آورد.

به منظور روشن ساختن کاربرد روش سختی در حل مجموعه فنرها، به ذکر مثالهای زیر می‌پردازیم.

مثال ۲-۱

در مجموعه فنرهایی که مطابق شکل ۲-۹ گره‌های آن به‌طور دلخواه شماره گذاری شده‌اند مطلوبیست، (a) ماتریس سختی کل، (b) جابه‌جایی گره‌های ۳ و ۴، (c) نیروی عکس‌العمل در گره‌های ۱ و ۲، (d) نیرو در هر فنر. نیرویی برابر $1b$ در جهت x به گره ۴ اعمال شده است. ضریب ثابت فنرها در شکل نشان داده شده‌اند. گره‌های ۱ و ۲ ثابت می‌باشند.



شکل ۲-۹ مجموعه‌ی فنرهای مورد استفاده در حل مسأله

(a) ابتدا با استفاده از معادله‌ی (۲-۲-۱۸) ماتریس سختی هر المان را به شرح

زیر به دست می‌آوریم:

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \underline{k}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (16-5-2)$$

$$\underline{k}^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3000 & -3000 \\ -3000 & 3000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

در جایی که شماره‌ی بالای هر یک از ستون‌ها و یا در کنار هر ردیف دلالت بر درجه‌ی آزادی گره‌های مربوط به هر المان می‌نماید. برای مثال، درجه‌های آزادی d_{7x} و d_{1x} مرتبط با المان ۱ می‌باشند.

با استفاده از ایده‌ی انطباق (روش مستقیم سختی)، ماتریس سختی کل را به شرح زیر به دست می‌آوریم.

$$\underline{K} = \underline{k}^{(1)} + \underline{k}^{(2)} + \underline{k}^{(3)}$$

یا

$$\underline{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & -3000 \\ -1000 & 0 & 1000+2000 & -2000 \\ 0 & -3000 & -2000 & 2000+3000 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (17-5-2)$$

(b) معادله‌ی (17-5-2) یا ماتریس سختی کل، نیروهای اصلی را به شرح زیر

با جابه‌جایی‌های اصلی مرتبط می‌سازد:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{rx} \\ F_{tx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & -3000 \\ -1000 & 0 & 3000 & -2000 \\ 0 & -3000 & -2000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{rx} \\ d_{tx} \end{Bmatrix} \quad (18-5-2)$$

با اعمال شرایط مرزی همگن $d_{1x} = 0$ و $d_{2x} = 0$ به رابطه‌ی (۱۸-۵-۲)، جای‌گزینی نیروهای اعمال شده بر گره‌ها و تقسیم بندی اولین جفت از معادلات رابطه‌ی (۱۸-۵-۲) (یا حذف اولین جفت از ردیف‌های $\{F\}$ و $\{d\}$ و اولین جفت از ردیف‌ها و ستون‌های K مرتبط با شرایط مرزی جابه‌جایی صفر) داریم:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{tx} \end{Bmatrix} \quad (19-5-2)$$

از حل معادله‌ی (۱۹-۵-۲) جابه‌جایی گره‌های اصلی برابر است با:

$$d_{rx} = \frac{10}{11} \text{ in} \quad d_{tx} = \frac{15}{11} \text{ in} \quad (20-5-2)$$

(c) به منظور تعیین نیروی‌های اصلی در گره‌ها (که عکس‌العمل‌ها در گره‌های ۱ و ۲ را شامل می‌شود) معادلات (۲۰-۵-۲) و شرایط مرزی $d_{1x} = 0$ و $d_{2x} = 0$ را در رابطه‌ی (۱۸-۵-۲) جای‌گزین می‌کنیم. از این جای‌گزینی داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{rx} \\ F_{tx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & -3000 \\ -1000 & 0 & 3000 & -2000 \\ 0 & -3000 & -2000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{10}{11} \\ \frac{15}{11} \end{Bmatrix} \quad (21-5-2)$$

از ضرب ماتریس‌های رابطه‌ی (۲-۵-۲۱) و خلاصه نمودن عبارات، نیرو در هر گره برابر است با:

$$\begin{aligned} F_{ix} &= -\frac{10000}{11} \text{ lb} & F_{rx} &= \frac{-45000}{11} \text{ lb} & F_{rx} &= 0 \\ F_{ix} & & F_{ix} &= \frac{55000}{11} \text{ lb} & & \end{aligned} \quad (2-5-22)$$

از این نتایج ملاحظه می‌شود که مجموع عکس‌العمل‌های F_{ix} و F_{rx} با مقدار F_{ix} برابر بوده و از لحاظ جهت با آن مخالف است. این نتیجه، تعادل در کل مجموعه فنر را به اثبات می‌رساند.

(d) در مرحله‌ی بعد با استفاده از معادله‌ی (۲-۵-۱۷) مرتبط با المان محلی،

نیروها در هر المان را محاسبه می‌شوند.

المان ۱

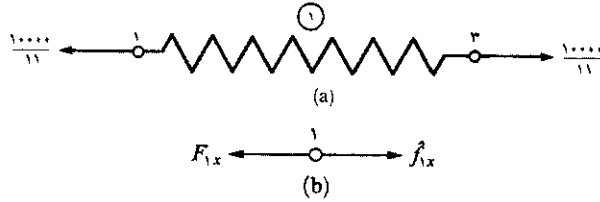
$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{ix} \\ \hat{f}_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 11 \end{Bmatrix} \quad (2-5-23)$$

پس از ساده کردن معادله‌ی (۲-۵-۲۳) داریم:

$$\hat{f}_{ix} = -\frac{10000}{11} \text{ lb} \quad \hat{f}_{rx} = \frac{10000}{11} \text{ lb} \quad (2-5-24)$$

نمودار جسم آزاد المان فنری ۱، در نمودار ۲-۱۰ (a) نشان داده شده است. فنر یاد شده تحت تأثیر نیرویی کششی قرار گرفته که در معادله‌ی (۲-۵-۲۴) داده شده است. همچنین، \hat{f}_{ix} برابر با نیروی عکس‌العمل F_{ix} بوده که در معادله‌ی (۲-۵-۲۴)

(۲۲) داده شده است. نمودار جسم آزاد گره ۱ (شکل ۲-۱۰) (b) نمایانگر این نتیجه است.



شکل ۲-۱۰ (a) نمودار جسم آزاد المان ۱ و (b) نمودار جسم آزاد گره ۱

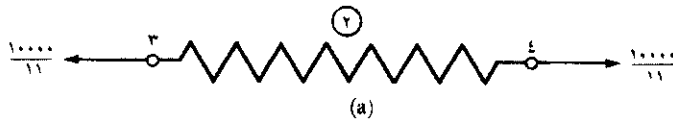
المان ۲

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{rx} \\ \hat{f}_{lx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{10}{11} \\ \frac{15}{11} \end{Bmatrix} \quad (2-5-24)$$

پس از ساده نمودن معادله‌ی (۲-۵-۲۴) داریم:

$$\hat{f}_{rx} = \frac{-10000}{11} \text{ lb} \quad \hat{f}_{lx} = \frac{10000}{11} \text{ lb} \quad (2-5-26)$$

نمودار جسم آزاد المان فتری شکل ۲ در نمودار ۲-۱۱ نشان داده شده است. فتر یاد شده تحت تأثیر نیروی کششی برابر با مقدار داده شده در معادله‌ی (۲-۵-۲۶) قرار گرفته است.



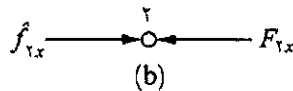
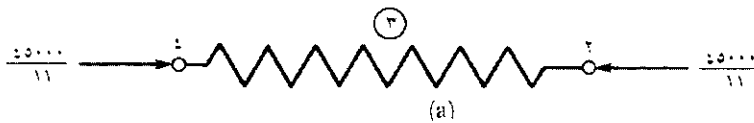
شکل ۲-۱۱ نمودار جسم آزاد المان ۲

المان ۳

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{ix} \\ \hat{f}_{ix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & -3000 \\ -3000 & 3000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 15 \\ 11 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27-5-2)$$

از ساده نمودن معادله‌ی (۲۷-۵-۲) داریم:

$$\hat{f}_{ix} = \frac{45000}{11} \text{ lb} \quad \hat{f}_{ix} = -\frac{45000}{11} \text{ lb} \quad (28-5-2)$$



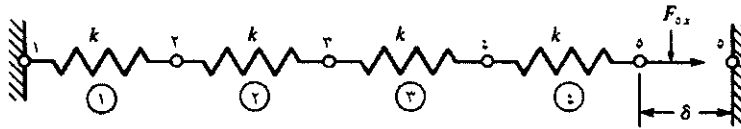
شکل ۲-۱۲ (a) نمودار جسم آزاد المان ۳ و (b) نمودار جسم آزاد گره ۲

نمودار جسم آزاد المان فنری شکل ۳ در شکل ۲-۱۲ (a) نشان داده شده است. فنریاد شده تحت تأثیر نیروی متراکمی که از رابطه‌ی (۲۸-۵-۲) به دست می‌آید قرار گرفته است. همچنین، f_{ix} با عکس‌العمل F_{ix} که در رابطه‌ی (۲۲-۵-۲) داده شده برابر است. نمودار جسم آزاد گره ۲ (شکل ۲-۱۲ (b)) نمایانگر این نتیجه است. ■

مثال ۲-۲

در مجموعه‌ی فنر مندرج در شکل ۲-۱۳، مطلوبست تعیین (a) ماتریس سختی کل، (b) جابه‌جایی گره‌های ۲-۴، (c) نیرو در گره‌های اصلی و (d) نیروهای

محلی در هر المان. گره ۱ ثابت است؛ در حالی که گره ۵ تحت تأثیر جابه‌جایی ثابتی برابر با $\delta = 20 \text{ mm}$ قرار گرفته است. ضرائب ثابت کلیه فنرها با هم برابر و مساوی $k = 200 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ می‌باشند.



شکل ۲-۱۳ مجموعه‌ی فنرهای مورد استفاده در حل مسأله

(a) با استفاده از معادله‌ی (۲-۲-۱۸) ماتریس سختی هر المان به شرح زیر

بیان می‌شود.

$$\underline{k}^{(1)} = \underline{k}^{(2)} = \underline{k}^{(3)} = \underline{k}^{(4)} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \quad (2-5-29)$$

مجدداً با استفاده از روش روی هم گذاری، ماتریس سختی کل به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 400 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 400 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 400 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & -200 & 200 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (2-5-30)$$

(b) معادله‌ی (۲-۵-۳۰) یا ماتریس سختی کل، به شرح زیر ماتریس نیروهای

کل را با جابه‌جایی‌های کل مرتبط می‌سازد.

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{rx} \\ F_{rx} \\ F_{ix} \\ F_{ox} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 400 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 400 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 400 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{rx} \\ d_{rx} \\ d_{ix} \\ d_{ox} \end{Bmatrix} \quad (31-5-2)$$

ضمن اعمال شرایط مرزی $d_{1x} = 0$ و $d_{ox} = 20 \text{ mm} (= 0/02 \text{ m})$ و جایگزینی نیروهای کلی $F_{rx} = 0$ و $F_{rx} = 0$ و جزء بندی اولین و پنجمین رابطه از معادله‌ی (31-5-2) مرتبط با شرایط مرزی یاد شده داریم:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 & 400 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 400 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 400 & -200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{rx} \\ d_{ix} \\ 0/02 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (32-5-2)$$

حال ضمن حاصل ضرب ضریب سختی (-200) در جابه‌جایی معلوم (0/02 m) و انتقال آن به سمت چپ، معادله‌ی (32-5-2) را باز نویسی می‌کنیم.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \text{ kN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 400 & -200 \\ 0 & -200 & 400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{rx} \\ d_{ix} \end{Bmatrix} \quad (33-5-2)$$

از حل معادله‌ی (33-5-2) داریم:

$$d_{rx} = 0/005 \text{ m} \quad d_{rx} = 0/01 \text{ m} \quad d_{ix} = 0/015 \text{ m} \quad (34-5-2)$$

(c) نیروهای اصلی هر گره از جای‌گزینی معکوس شرایط مرزی جابه‌جایی و معادلات (۳۴-۵-۲)، در رابطه‌ی (۳۱-۵-۲) حاصل می‌شوند. با انجام این عمل داریم:

$$F_{1x} = (-200)(0/0.05) = -1/0 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = (400)(0/0.05) - 200(0/0.1) = 0$$

$$F_{2y} = (-200)(0/0.05) + (400)(0/0.1) - (200)(0/0.15) = 0 \quad (35-5-2)$$

$$F_{3x} = (200)(0/0.1) + (400)(0/0.15) - (200)(0/0.2) = 0$$

$$F_{3y} = (-200)(0/0.15) + (200)(0/0.2) = 1/0 \text{ kN}$$

عکس‌العمل F_{1x} ، مخالف نیروی گره‌ای F_{0x} (که به منظور جابه‌جایی گره ۵ به میزان $\delta = 20 \text{ mm}$ مورد نیاز است) بوده و از نتایج مندرج در معادلات (۳۵-۵-۲) حاصل می‌شود. چنین نتیجه‌ای تعادل کل مجموعه فنر را به اثبات می‌رساند.

(d) حال با استفاده از معادله‌ی (۱۷-۲-۲)، مرتبط با المان محلی، نیرو در هر المان حاصل می‌شود.

المان ۱

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0/0.05 \end{Bmatrix} \quad (36-5-2)$$

از حل معادله‌ی (۳۶-۵-۲) داریم:

$$\hat{f}_{1x} = -1/0 \text{ kN} \quad \hat{f}_{2x} = 1/0 \text{ kN} \quad (37-5-2)$$

المان ۲

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{rx} \\ \hat{f}_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0/005 \\ 0/01 \end{Bmatrix} \quad (38-5-2)$$

از حل معادله‌ی (۳۸-۵-۲) داریم:

$$\hat{f}_{rx} = -1/0 \text{ kN} \quad \hat{f}_{rx} = 1/0 \text{ kN} \quad (39-2-2)$$

المان ۳

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{rx} \\ \hat{f}_{lx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0/01 \\ 0/015 \end{Bmatrix} \quad (40-5-2)$$

از حل معادله‌ی (۴۰-۵-۲) داریم:

$$\hat{f}_{rx} = -1 \text{ kN} \quad \hat{f}_{lx} = 1 \text{ kN} \quad (41-5-2)$$

المان ۴

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{lx} \\ \hat{f}_{ox} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0/015 \\ 0/02 \end{Bmatrix} \quad (42-5-2)$$

از حل معادله‌ی (۴۲-۵-۲) داریم:

$$\hat{f}_{lx} = -1 \text{ kN} \quad \hat{f}_{ox} = 1 \text{ kN} \quad (43-5-2)$$

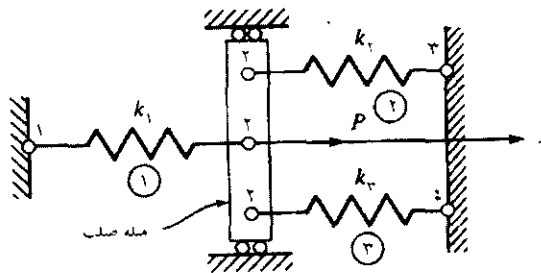
شما باید نمودار جسم آزاد هر گره و المان را رسم نموده و با استفاده از معادلات (۳۵-۵-۲) الی (۴۳-۵-۲)، تعادل در هر گره و المان را باز بینی نمایید. ■

نهایتاً به منظور مرور بر اصول اولیه ای که در این فصل ارائه شد مثال زیر را حل می‌کنیم.

مثال ۲-۳

(a) با استفاده از ایده‌هایی که در بخش ۲-۳ در مورد فنرهای الاستیک خطی، مندرج در شکل ۲-۱۴، ارائه شد، شرایط مرزی، هم‌سازگاری یا پیوستگی را مشابه با معادله‌ی (۲-۳-۳)، و شرایط تعادل در گره‌ها را مشابه با معادلات (۲-۳-۴) الی (۲-۳-۶)، تشریح کنید. سپس به منظور تعیین جابه‌جایی‌ها و نیروهای اصلی مجهول، معادلات و ماتریس‌های سختی را به دست آورید. ضرائب ثابت فنر برای المان‌ها k_1 ، k_2 و k_3 بوده؛ و نیروی اعمال شده بر گره ۲ است.

(b) با استفاده از روش مستقیم سختی، معادلات و ماتریس سختی اصلی مشابه با بند (a) را به دست آورید.



شکل ۲-۱۴ مجموعه‌ی فنرهای مورد استفاده در حل مسأله

(a) شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشند:

$$d_{1,x} = 0 \quad d_{3,x} = 0 \quad d_{2,x} = 0 \quad (2-5-44)$$

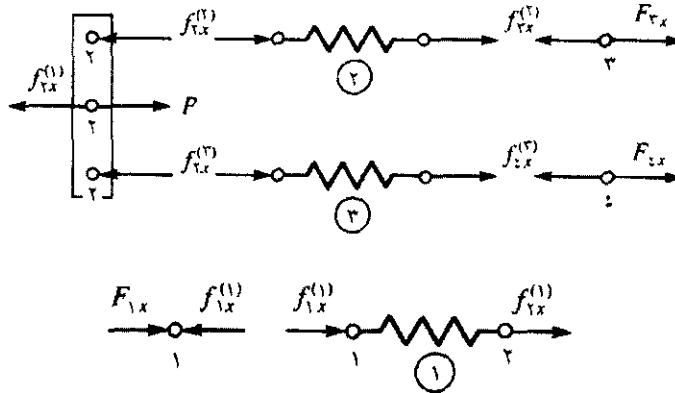
شرایط هم‌سازگاری در گره ۲ به صورت زیر است:

$$d_{rx}^{(1)} = d_{rx}^{(2)} = d_{rx}^{(3)} = d_{rx} \quad (45-0-2)$$

شرایط تعادل در گره‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= f_{1x}^{(1)} \\ p &= f_{rx}^{(1)} + f_{rx}^{(2)} + f_{rx}^{(3)} \\ F_{rx} &= f_{rx}^{(3)} \\ F_{2x} &= f_{2x}^{(3)} \end{aligned} \quad (46-0-2)$$

در جایی که به منظور نوشتن معادلات (۴۶-۰-۲) از علامت قراردادی ارائه شده در شکل ۲-۲ برای نیروهای گره‌ای مثبت هر یک از المان‌ها استفاده شده است. شکل ۲-۱۵ نمودارهای جسم آزاد نیرو در المان و گره را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱۵ نمودارهای جسم آزاد المان‌ها و گره‌ها در مجموعه فنر شکل ۲-۱۴

با استفاده از ماتریس سختی محلی، معادله (۲-۲-۱۷)، و اعمال آن به هر المان، و نیز شرایط هم‌سازگاری، معادله‌ی (۲-۰-۴۵)؛ معادلات کلی تعادل به شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= k_1 d_x - k_1 d_{1x} \\
 p &= -k_1 d_{1x} + k_1 d_{1x} + k_1 d_{1x} - k_1 d_{1x} + k_1 d_{1x} - k_1 d_{1x} \\
 F_{rx} &= -k_r d_{rx} + k_r d_{rx} \\
 F_{ix} &= -k_r d_{rx} + k_r d_{ix}
 \end{aligned} \quad (47-5-2)$$

معادلات (47-5-2) به صورت ماتریسی به شرح زیر است.

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ p \\ F_{rx} \\ F_{ix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & \cdot & \cdot \\ -k_1 & k_1 + k_r + k_r & -k_r & -k_r \\ \cdot & -k_r & k_r & \cdot \\ \cdot & -k_r & \cdot & k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1x} \\ d_{rx} \\ d_{ix} \end{Bmatrix} \quad (48-5-2)$$

بنابراین ماتریس سختی کل که در سمت راست معادله‌ی (48-5-2) قرار دارد ماتریسی مربعی و متقارن است. با استفاده از شرایط مرزی، معادلات (44-5-2)، و سپس با در نظر گرفتن دومین رابطه از معادلات (47-5-2) یا (48-5-2)، مقدار d_{rx} برابر است با:

$$d_{rx} = \frac{p}{k_1 + k_r + k_r} \quad (49-5-2)$$

همان‌طور که قبلاً در بخش ۲-۴ تشریح شد می‌توان با حذف ردیف‌های ۱، ۳ و ۴ در ماتریس‌های F و d و ردیف‌ها و ستون‌های ۱، ۳ و ۴ در ماتریس K ، مرتبط با جابه‌جایی‌های صفر، مقدار d_{rx} را تعیین نموده و به همین نتیجه دست یافت.

با استفاده از معادلات (47-5-2)، نیروهای اصلی به شرح زیر محاسبه می‌شوند.

$$F_{1x} = -k_1 d_{1x} \quad F_{rx} = -k_r d_{rx} \quad F_{ix} = -k_r d_{rx} \quad (50-5-2)$$

در این مثال، نیروهای به دست آمده در معادلات (۲-۵-۵۰) را می‌توان عکس‌العمل‌های اصلی تفسیر نمود. علامت منها در پشت این نیروها دلالت بر عملکرد آن‌ها به سمت چپ (خلاف محور x) می‌نماید.

(b) با استفاده از روش مستقیم سختی، ماتریس سختی کل را فرمول بندی می‌کنیم. ابتدا با استفاده از معادله‌ی (۲-۲-۱۸)، ماتریس سختی هر المان را به شرح زیر تشریح می‌کنیم.

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1x} \\ k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \quad \underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{rx} & d_{rx} \\ k_r & -k_r \\ -k_r & k_r \end{bmatrix} \quad \underline{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} d_{rx} & d_{\varepsilon x} \\ k_r & -k_r \\ -k_r & k_r \end{bmatrix}$$

(۲-۵-۵۱)

به قسمی که درجه‌های آزادی خاص مرتبط با هر المان، در بالای ستون‌های هر ماتریس نوشته شده است. با استفاده از روش مستقیم سختی که در بخش ۲-۴ آورده شد، هر یک از عبارات ماتریس سختی هر المان را در ردیف و ستون مناسب در ماتریس سختی کل افزوده تا ماتریس زیر به دست آید.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1x} & d_{rx} & d_{\varepsilon x} \\ k_1 & -k_1 & \cdot & \cdot \\ -k_1 & k_1 + k_r + k_r & -k_r & -k_r \\ \cdot & -k_r & k_r & \cdot \\ \cdot & -k_r & \cdot & k_r \end{bmatrix} \quad (۲-۵-۵۲)$$

ملاحظه می‌شود که ماتریس سختی \underline{k} هر یک از المان‌ها در جایگاهی از ماتریس اصلی \underline{K} اضافه شده است که دلالت بر درجه‌ی آزادی مشابه در ماتریس \underline{k} می‌نماید. برای مثال، المان ۳ با درجه‌های آزادی d_{rx} و $d_{\varepsilon x}$ مرتبط است. لذا، هم

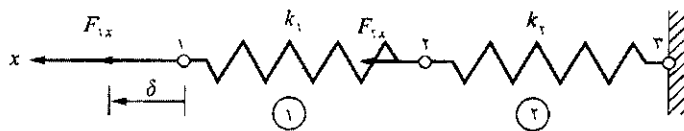
بخشی آن در ماتریس K ، همان‌طور که در معادله‌ی (۲-۵-۵۲) توسط عبارات k_1 نشان داده شده است، در محل‌های ۲-۲، ۲-۴، ۴-۲، و ۴-۴ آورده شده است.

ضمن تشکیل ماتریس سختی کل از روش مستقیم سختی، با استفاده از معادله‌ی (۲-۳-۱۰)، $F = Kd$ ، معادلات کلی طبق روش معمول فرمول بندی می‌شوند. این معادلات قبلاً در رابطه‌ی (۲-۵-۴۸) قید شده‌اند و لذا از تکرار آن‌ها اجتناب می‌شود.



روش دیگری که بدان طریق می‌توان شرایط مرزی تحمیل شده‌ی ای را منظور نمود که کاربرد درجه‌های آزادی همگن (صفر) یا غیر همگن (غیر از صفر) را امکان پذیر می‌نماید روش پنالتی است. این روش را می‌توان به آسانی به یک برنامه‌ی رایانه‌ای اعمال نمود.

همان‌طور که در شکل ۲-۱۶ نشان داده شده، مجموعه فنر ساده‌ی ای را در نظر می‌گیریم که تحت تأثیر نیروهای $F_{1,x}$ و $F_{2,x}$ قرار گرفته است. فرض می‌شود که گره ۱ به اجبار به میزان $d_{1,x} = \delta$ جابجا شده است.



شکل ۲-۱۶ مجموعه فنر مورد استفاده در مصور کردن روش پنالتی

همان‌طور که در شکل ۲-۱۷ نشان داده شده، فنر دیگری را که دارای سختی بالایی است (عموماً آلمان مرزی نامیده می‌شود) به مجموعه فنر در جهت جابه‌جایی گره‌ای $d_{1,x} = \delta$ اضافه می‌کنیم. سختی این فنر حدوداً باید 10^6 برابر بزرگترین مقدار k_{ii} باشد.



شکل ۲-۱۷ مجموعه فنر همراه با المان مرزی فنری شکل افزوده شده به گره ۱ حال با افزودن نیروی $k_b \delta$ در جهت d_{1x} ، مسأله را به روش معمول به شرحی که آورده خواهد شد حل می‌کنیم.

ماتریس سختی المان‌ها برابرند با

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \quad \underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_r & -k_r \\ -k_r & k_r \end{bmatrix} \quad (53-5-2)$$

با استفاده از روش مستقیم سختی، از جمع بندی ماتریس‌های سختی، ماتریس سختی کل برابر است با:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_b & -k_1 & \cdot \\ -k_1 & k_1 + k_r & -k_r \\ \cdot & -k_r & k_r \end{bmatrix} \quad (54-5-2)$$

ضمن تشکیل روابط اصلی $\underline{F} = \underline{K} \underline{d}$ و اعمال شرط مرزی $d_{rx} = 0$ داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} + k_b \delta \\ F_{2x} \\ F_{rx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_b & -k_1 & \cdot \\ -k_1 & k_1 + k_r & -k_r \\ \cdot & -k_r & k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{rx} = 0 \end{Bmatrix} \quad (55-5-2)$$

از حل اولین و دومین رابطه از معادلات (۵۵-۵-۲) داریم:

$$d_{ix} = \frac{F_{rx} - (k_1 + k_r)d_{rx}}{-k_1} \quad (56-5-2)$$

و

$$d_{rx} = \frac{(k_1 + k_b)F_{rx} + F_{ix}k_1 + k_b\delta k_1}{k_bk_1 + k_bk_r + k_1k_r} \quad (57-5-2)$$

با نزدیک شدن k_b به سمت بی‌نهایت، معادله‌ی (۵۷-۵-۲) به شرح زیر ساده می‌شود.

$$d_{rx} = \frac{F_{rx} + \delta k_1}{k_1 + k_r} \quad (58-5-2)$$

معادله‌ی (۵۶-۵-۲) به شرح زیر ساده می‌شود.

$$d_{ix} = \delta \quad (59-5-2)$$

این نتایج با نتایج مشابهی که در ابتدا از برقراری رابطه‌ی $d_{ix} = \delta$ حاصل شد منطبقند.

همان‌طور که در مثال قبل آورده شد، به منظور استفاده از روش پنالتی، المانی که دارای ماتریس سختی بالا است باید موازی با درجه‌ی آزادی به کار رود. اگر k_b به صورت مایل بوده و یا درون سازه قرار گیرد، اثر آن بر عبارات قطری و غیر قطری ماتریس K آشکار خواهد شد. چنین مسأله‌ای می‌تواند به مشکلات محاسباتی در خلال حل روابط $F = Kd$ منجر شود. به منظور اجتناب از این امر، همان‌طور که در بخش ۳-۹ آورده شد، جابه‌جایی‌ها از تکیه‌گاه مایل را به تکیه‌گاه محلی منتقل می‌نماییم.

روش انرژی پتانسیل در استخراج معادلات المان فنی شکل

یکی از روش‌های جای‌گزینی که اغلب به منظور استخراج معادلات المان‌ها و نیز ماتریس سختی هر المان استفاده می‌شود بر پایه‌ی اصل مینیمم انرژی پتانسیل استوار است (استفاده از این اصل در مکانیک سازه‌ها به‌طور کامل در مرجع [۴] تشریح شده است). این روش دارای مزیت عمومی‌تر بودن آن نسبت به روشی است که در آن معادلات تعادل المان‌ها و گره‌ها و نیز رابطه‌ی تنش و کرنش برای هر المان منظور شده و در بخش ۲-۲ آورده شد. بنابراین، در المان‌های پیچیده (آن‌هایی که درجه‌ی آزادی بالایی دارند)، از قبیل المان‌های تنش - کرنش دو بعدی، المان‌های متقارن حول یک محور، المان‌های خمشی در ورق‌ها و المان‌های سه بعدی تنش، به منظور تعیین معادلات المان‌ها، می‌توان روش انرژی راحت‌تر بر مسأله اعمال نمود.

مجدداً خاطر نشان می‌سازد که اصل کار مجازی (به پیوست E مراجعه شود) را می‌توان به موادی با رفتارهای متفاوت اعمال نمود در حالی که اصل مینیمم انرژی پتانسیل فقط به موادی با رفتار الاستیک قابل اعمال است. با این وصف، معادلات به دست آمده در مواد الاستیک خطی، که تنها نوع منظور شده در این کتاب است، از هر دو اصل یکسان می‌باشند. مضافاً، اصل مینیمم انرژی پتانسیل که در رده بندی کلی روش تغییرات (همانند روش کار مجازی) قرار می‌گیرد، باعث به وجود آمدن توابع تغییرات (یا تابع‌ها) دیگری شبیه به روش انرژی می‌شود که می‌توان از آن‌ها در فرمول بندی گروه دیگری از مسائل که اساساً غیر سازه‌ای هستند استفاده نمود. این مسائل که عموماً مرتبط با محیطی خاص می‌باشند مواردی از قبیل

پیچش یک میله، انتقال حرارت (به فصل ۱۳ مراجعه شود)، جریان سیال (فصل ۱۴) و پتانسیل الکتریکی را شامل می‌شوند.

هنوز می‌توان گروه‌های دیگری از مسائل را که فرمول بندی تغییرات به درستی برای آن‌ها تعریف نشده، از طریق روش‌های توابع وزنی فرمول بندی نمود. در این ارتباط، روش گالرکین در بخش ۳-۱۲، همراه با روش‌های با هم گذاری، جمع مربع‌ها، و زیر مجموعه‌ی توابع وزنی، در بخش ۳-۱۳ را تشریح خواهیم نمود. در بخش ۳-۱۳، روش‌های یاد شده را از طریق حل میله‌ای یک بعدی، توسط هر یک از چهار روش پسماند و مقایسه‌ی هر یک از نتایج با حل واقعی، نشان خواهیم داد. (برای اطلاعات بیشتر در مورد روش‌های توابع وزنی، به مراجع [۵-۷] نیز مراجعه نمایید).

در این‌جا اصل مینیمم انرژی پتانسیل را که از آن در استخراج معادلات المان میله‌ای استفاده شده است معرفی می‌نماییم. ما استفاده از این اصل را با اعمال آن به ساده‌ترین المان نشان داده به این امید که خواننده در هنگام اعمال آن به المان‌های پیچیده تر در فصل‌های آینده، احساس راحتی بیش‌تری نماید.

انرژی پتانسیل کل یک سازه π_p بر حسب جابه‌جایی‌ها تشریح می‌شود. در فرمول بندی مسائل از روش اجزای محدود، این مقادیر عموماً جابه‌جایی گره‌ها بوده به قسمی که $\pi = \pi_p(d_1, d_2, \dots, d_n)$. چنان‌چه π بر حسب این جابه‌جایی‌ها مینیمم شود معادلات تعادل حاصل خواهند شد. برای المان فنری شکل نشان خواهیم داد که این معادلات، $\underline{f} = \underline{k}\underline{d}$ ، همان معادلاتی است که در بخش ۲-۲ استخراج گردید.

ابتدا اصل مینیمم انرژی پتانسیل را به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

از میان کلیه‌ی شکل‌های ممکنه‌ی که می‌توان برای یک سازه تصور نمود، شکل واقعی آن که دلالت بر ارضای تعادل پایدار در جسم می‌نماید، توسط مینیمم انرژی پتانسیل کل مشخص می‌شود.

به منظور تشریح این اصل، ابتدا باید مفهوم انرژی پتانسیل و ثابت نمودن مقدار یک تابع را تشریح نماییم. حال به تشریح این دو مطلب می‌پردازیم.

انرژی پتانسیل کل برابر است با مجموع انرژی کرنشی U و انرژی پتانسیل نیروهای خارجی Ω ؛ به عبارتی دیگر:

$$\pi_p = U + \Omega \quad (1-6-2)$$

انرژی کرنشی معرف ظرفیت انجام کار نیروهای داخلی (تنش‌ها) در خلال ایجاد جابه‌جایی‌ها (کرنش) در یک سازه است. Ω معرف ظرفیت نیروها، از قبیل نیروهای حجمی، نیروهای سطحی، و نیروهای اعمال شده بر گره‌ها، در انجام دادن کار از طریق جابه‌جایی حاصل در سازه است.

یاد آوری می‌شود که در یک فنر خطی، نیرو از طریق $F = kx$ با جابه‌جایی مرتبط است به قسمی که k ضریب ثابت فنر و x میزان جابه‌جایی در آن است (شکل ۱۸-۲).

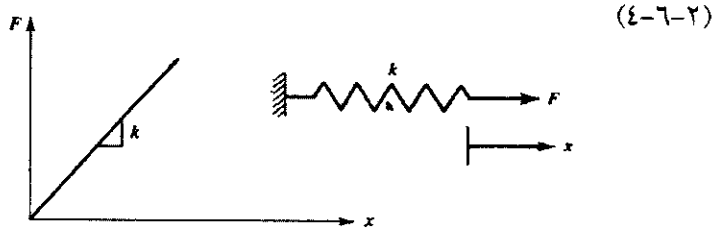
به ازای تغییرات کوچک در طول فنر، دیفرانسیل کار داخلی (یا انرژی کرنشی) dU بوجود آمده از حاصل ضرب نیروی داخلی در تغییرات جابه‌جایی نیرو حاصل می‌شود به قسمی که:

$$dU = F dx \quad (2-6-2)$$

حال نیروی F را به شرح زیر می‌نویسیم.

$$F = kx \quad (3-6-2)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۳-۶-۲) در رابطه‌ی (۲-۶-۲)، انرژی دیفرانسیلی کرنشی برابر است با:



شکل ۱۸-۲ منحنی نیرو- جابه‌جایی در یک فنر خطی

لذا انرژی کرنشی کل برابر است با:

$$U = \int_0^x kx dx \quad (۵-۶-۲)$$

پس از انتگرال‌گیری صریح از معادله‌ی (۵-۶-۲) داریم:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (۶-۶-۲)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۳-۶-۲) در عبارت (۶-۶-۲) داریم:

$$U = \frac{1}{2} (kx)x = \frac{1}{2} Fx \quad (۷-۶-۲)$$

بر اساس معادله‌ی (۷-۶-۲)، انرژی کرنشی با مساحت زیر منحنی تغییرات نیرو بر حسب جابه‌جایی برابر است.

با توجه به آن‌که انرژی پتانسیل نیروی خارجی در خلال انجام کار توسط آن از بین می‌رود، لذا انرژی پتانسیل ناشی از نیروی خارجی که دارای علامتی مخالف با عبارت کار خارجی است، برابر است با:

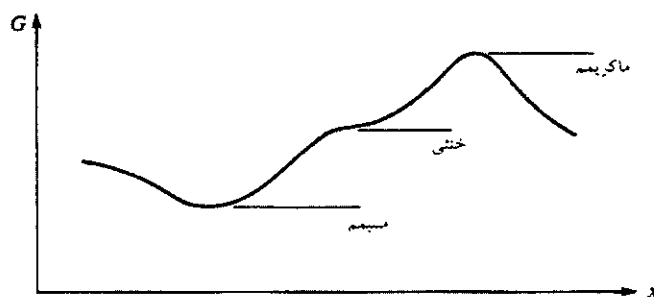
$$\Omega = -Fx \quad (۸-۶-۲)$$

بنابراین، از جای‌گزینی معادلات (۲-۶-۶) و (۲-۶-۸) در معادله‌ی (۲-۶-۱)، انرژی پتانسیل برابر است با:

$$\pi_p = \frac{1}{2} kx^2 - Fx \quad (۲-۶-۹)$$

مفهوم ثابت بودن تابعی همانند G (که در تعریف اصل مینیمم انرژی پتانسیل استفاده می‌شود) در شکل ۲-۱۹ نشان داده شده است. در این جا G تابعی از متغیر x تعریف شده است. مقدار ثابت تابع می‌تواند در یکی از نقاط ماکزیمم، مینیمم یا نقطه‌ی خنثی $G(x)$ اتفاق افتد. به منظور تعیین مقداری از x که باعث ثابت شدن $G(x)$ می‌شود با استفاده از مبحث حساب دیفرانسیل، از عبارت G نسبت به x مشتق‌گیری نموده و به شرح زیر آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dG}{dx} = 0 \quad (۲-۶-۱۰)$$



شکل ۲-۱۹ مقدار ثابت یک تابع

بعداً از روشی مشابه، π_p با G و x با مقادیر گسسته‌ی d_i (جابه‌جایی گره‌ها) جای‌گزین خواهند شد. با شناختی از مبحث ریاضیات تغییرات (به مرجع [۸] مراجعه شود) می‌توان با استفاده از اولین تغییرات π_p (که توسط $\delta\pi_p$ نمایش داده می‌شود، δ معرف تغییرات دلخواه است) نسبت به مینیمم نمودن π_p اقدام نمود.

در هر حال، بجای تشریح روش ریاضیات تغییرات، نشان خواهیم داد که حقیقتاً می‌توان با استفاده از حساب دیفرانسیل، π_p را مینیمم نمود. به منظور اعمال اصل مینیمم انرژی پتانسیل - به عبارتی دیگر، مینیمم نمودن $-\pi_p$ تغییرات π_p را که تابعی از جابه‌جایی‌های گره‌ای d_i است، به شرحی که آورده شده می‌نویسیم.

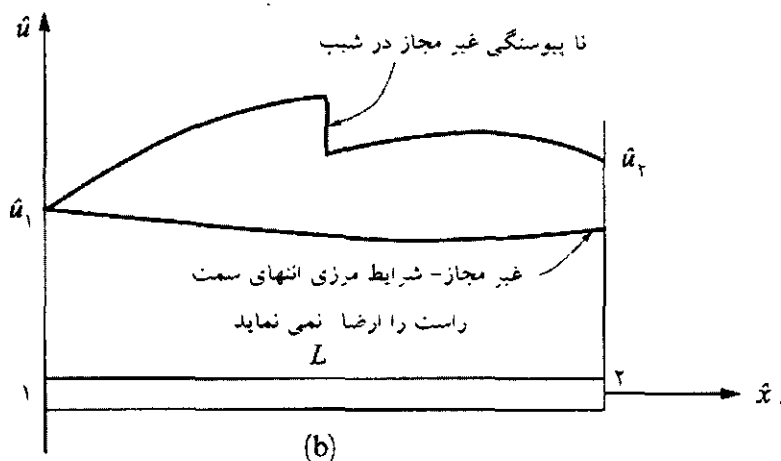
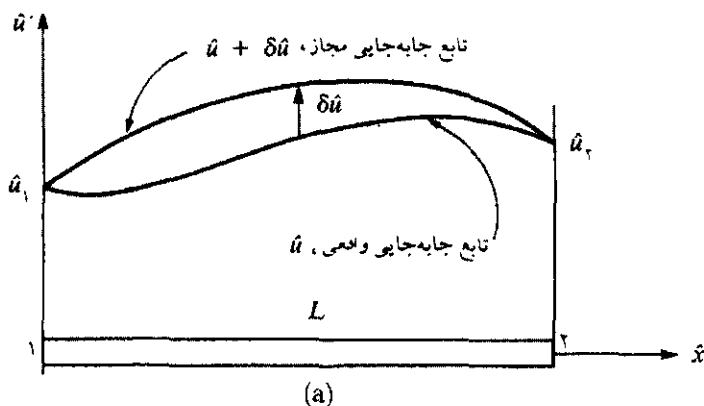
$$\delta\pi_p = \frac{\partial\pi_p}{\partial d_1} \delta d_1 + \frac{\partial\pi_p}{\partial d_r} \delta d_r + \dots + \frac{\partial\pi_p}{\partial d_n} \delta d_n \quad (11-6-2)$$

براساس اصل یاد شده تعادل به شرطی وجود دارد که به ازای هر گونه تغییرات مجاز دلخواه در جابه‌جایی δd_i از حالت تعادل، که معرف موقعیتی از سازه است، $\delta\pi_p$ ناشی از d_i برابر صفر باشد (تغییر در انرژی پتانسیل = ۰). تغییر مجاز تغییری است که میدان جابه‌جایی، هنوز شرایط مرزی و پیوستگی بین المان‌ها را ارضا نماید. شکل ۲-۲۰ (a)، معرف جابه‌جایی محوری واقعی و مجاز یک مسأله‌ی فرضی در میله‌ای است که جابه‌جایی مرزها مشخص و برابر \hat{u}_1 و \hat{u}_2 باشند. شکل ۲-۲۰ (b)، معرف توابع غیر مجازی است که به دلیل ناپیوستگی شیب مابین دو انتهای ۱ و ۲ و نیز به دلیل عدم توانایی ارضای شرط مرزی $u(l) = \hat{u}_1$ در انتهای سمت راست، نمی‌توان از آن‌ها استفاده نمود. در اینجا $\delta\hat{u}$ معرف تغییرات در \hat{u} است. عموماً در فرمول بندی روش اجزاء محدود، $\delta\hat{u}$ با δd_i جای‌گزین می‌شود. این بدان معنی است که ممکن است هیچ یک از یک از مقادیر δd_i صفر نباشند. بنابراین، به منظور آن که $\delta\pi_p = 0$ باشد باید کلیه ضرایب $d\delta d_i$ به‌طور مستقل برابر صفر قرار گیرند. لذا:

$$\frac{\partial\pi_p}{\partial d_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad \text{یا} \quad \frac{\partial\pi_p}{\partial \{d\}} = 0 \quad (12-6-2)$$

در جایی که برای تعیین n عدد از مقادیر d_i که حالت تعادل استاتیکی یک سازه را تعریف می‌کنند، باید n معادله را حل نمود. از نظر ما در خلال این کتاب، معادله‌ی (۱۲-۶-۲) نمایانگر آن است که تغییرات π_p را می‌توان به صورت نماد فشرده‌ای

که معادل مشتق π_p نسبت به مقادیر جابه‌جایی‌های گره‌ای مجهولی که π_p بر حسب آن‌ها تعریف شده است، تفسیر نمود. برای مثال، در مرجع [۴] نشان داده شده است که در مواد الاستیک خطی تحت تعادل، π_p مینیمم است.



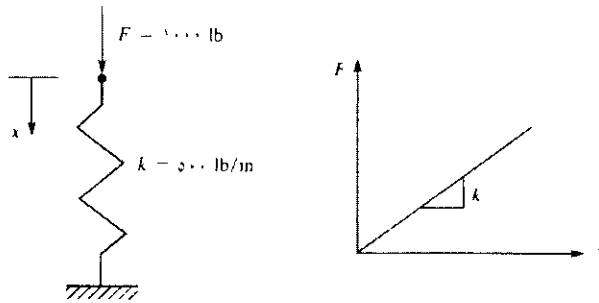
شکل ۲-۲۰ (a) توابع جابه‌جایی واقعی و مجاز و (b) توابع جابه‌جایی غیر مجاز

قبل از تشریح نحوه‌ی فرمول‌بندی معادلات المان‌های فنری شکل، ضمن بررسی فنری که درجه‌ی آزادی آن یک بوده و تحت تأثیر نیروی مشابهی با مسأله‌ی

۲-۴ قرار گرفته است، به تشریح مفهوم اصل حداقل انرژی پتانسیل می پردازیم. در این مثال نشان خواهیم داد که موقعیت تعادل فنر دلالت بر حداقل انرژی پتانسیل می نماید.

مثال ۲-۴

در فنر الاستیک خطی مندرج در شکل ۲-۲۱ که تحت نیروی 1000 lb قرار گرفته است، انرژی پتانسیل را به ازای جابه‌جایی‌های مختلف محاسبه نموده و نشان دهید که حداقل مقدار آن در حالت تعادل فنر اتفاق می افتد.



شکل ۲-۲۱ نیروی اعمال شده بر فنر؛ منحنی تغییرات نیرو- جابه‌جایی

مقدار انرژی کل را مطابق با عبارت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\pi_p = U + \Omega$$

$$u = \frac{1}{2}(kx)(x) \quad \text{و} \quad \Omega = FX \quad \text{در جایی که}$$

حال نحوه‌ی مینیمم سازی π_p را از روش معمول ریاضی نشان می‌دهیم. ضمن تعیین تغییرات π_p نسبت به x یا معادل آن، از مشتق گیری π_p نسبت به x (با توجه به آن که π_p فقط تابعی از جابه‌جایی x است)، مطابق با معادلات (۲-۶-۱۱) و (۲-۶-۱۲)، داریم:

$$\delta\pi_p = \frac{\partial\pi_p}{\partial x} \delta x = 0$$

از آن جا که δx دلخواه بوده و ممکن است برابر صفر نباشد، لذا

$$\frac{\delta\pi_p}{\delta x} = 0$$

با استفاده از عبارت قبلی برای π_p داریم:

$$\frac{\delta\pi_p}{\delta x} = 500x - 1000 = 0$$

$$x = 2/00 \text{ in.} \quad \text{یا}$$

اگر مقدار یاد شده x را در عبارت π_p جایگزین کنیم، داریم:

$$\pi_p = 250(2)^2 - 1000(2) = -1000 \quad \text{in-lb}$$

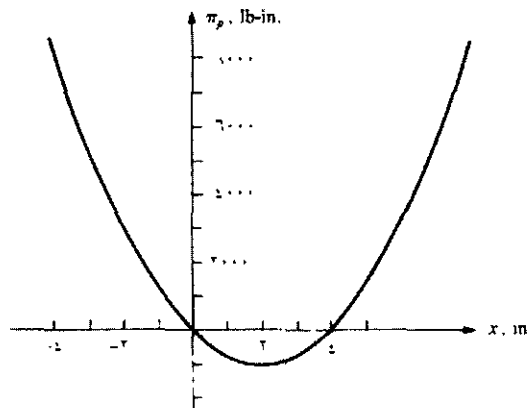
این عدد دلالت بر حداقل انرژی پتانسیلی می نماید که ضمن ارزیابی مقادیر مندرج در جدول ۱-۲ می توان به آن دست یافت. در این جا $U = \frac{1}{2}(kx)(x)$ انرژی کرنشی یا سطح زیر منحنی جابه جایی- بار بوده که در شکل ۲-۱ نشان داده شده و $\Omega = -FX$ انرژی پتانسیل ناشی از نیروی F است. به ازای مقادیر داده شده F و K داریم:

$$\pi_p = \frac{1}{2}(500)(x^2) - 1000x = 250x^2 - 1000x$$

حال به ازای مقادیر مختلف جابه جایی x حد اقل مقدار π_p را شناسایی می کنیم. نتایج در جدول ۱-۲ نشان داده شده اند. منحنی تغییرات π_p در شکل ۲-۲ رسم شده در حالی که ملاحظه می شود که مینیمم مقدار π_p به ازای $x = 2 \text{ in}$ می دهد.

جدول ۱-۲ انرژی پتانسیل کل به ازای جابه‌جایی‌های مختلف

انرژی پتانسیل کل π_p , lb-in.	جابه‌جایی x , in.
۸۰۰۰	-۴/۰۰
۵۲۵۰	-۳/۰۰
۳۰۰۰	-۲/۰۰
۱۲۵۰	-۱/۰۰
۰	۰/۰۰
-۷۵۰	۱/۰۰
-۱۰۰۰	۲/۰۰
-۷۵۰	۳/۰۰
۰	۴/۰۰
۱۲۵۰	۵/۰۰



شکل ۲-۲ تغییرات انرژی پتانسیل با تغییرات طول در فنر

از آن جا که به ازای $x=2 \text{ in}$ ، $\frac{\partial \pi_p}{\partial x} = 500(2) - 1000 = 0$ ، لذا این موقعیت دلالت بر حالت تعادل نیز می نماید.

حال با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل، معادلات ماتریس سختی المان فنری شکل را استخراج می کنیم. بدین منظور فنری خطی را که مطابق شکل ۲-۲۳ تحت تأثیر نیروهای گره‌ای قرار گرفته در نظر می گیریم. با استفاده از معادله‌ی (۲-۹-۶)، انرژی پتانسیل کل برابر است با:

$$\pi_p = \frac{1}{4}k(\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{lx})^2 - \hat{f}_{lx}\hat{d}_{lx} - \hat{f}_{rx}\hat{d}_{rx} \quad (13-6-2)$$

که در آن $d_{rx} - d_{lx}$ دلالت بر جابه‌جایی فنری می نماید که در معادله‌ی (۲-۹-۶) داده شد. اولین عبارت در سمت راست معادله‌ی (۲-۱۳-۶)، دلالت بر انرژی کرنشی در فنر می نماید. از خلاصه نمودن معادله‌ی (۲-۱۳-۶) داریم:

$$\pi_p = \frac{1}{4}k(\hat{d}_{rx}^2 - 2\hat{d}_{rx}\hat{d}_{lx} + \hat{d}_{lx}^2) - \hat{f}_{lx}\hat{d}_{lx} - \hat{f}_{rx}\hat{d}_{rx} \quad (14-6-2)$$

به منظور مینیمم نمودن π_p نسبت به جابه‌جایی هر یک از گره‌ها نیاز به آن است تا از π_p نسبت به جابه‌جایی هر یک از گره‌ها مشتق گرفته شود به قسمی که:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \hat{d}_{lx}} = \frac{1}{2}k(-2\hat{d}_{rx} + 2\hat{d}_{lx}) - \hat{f}_{lx} = 0 \quad (15-6-2)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \hat{d}_{rx}} = \frac{1}{2}k(2\hat{d}_{rx} - 2\hat{d}_{lx}) - \hat{f}_{rx} = 0$$

از ساده کردن معادلات (۲-۱۵-۶) داریم:

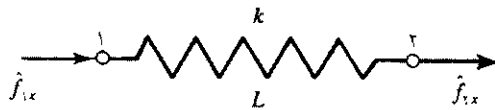
$$\begin{aligned} k(-\hat{d}_{rx} + \hat{d}_{lx}) &= \hat{f}_{lx} \\ k(\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{lx}) &= \hat{f}_{rx} \end{aligned} \quad (16-6-2)$$

معادله‌ی (۱۶-۶-۲) را به شرح زیر به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (17-6-2)$$

از آن جا که $\{\hat{f}\} = [\hat{k}][\hat{d}]$ ، لذا با استفاده از معادله‌ی (۱۷-۶-۲)، ماتریس سختی برای المان فنر برابر است با:

$$[\hat{k}] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (18-6-2)$$



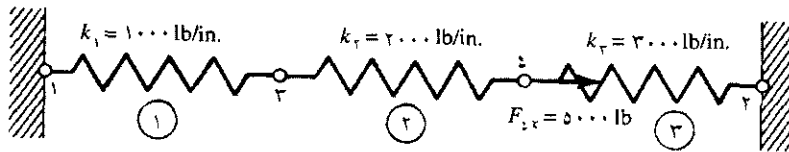
شکل ۲-۲۳ فنر خطی تحت تأثیر نیروهای گره‌ای

همان‌طور که انتظار می‌رفت، معادله‌ی (۱۸-۶-۲) شبیه به ماتریس سختی است که در بخش ۲-۲، معادله‌ی (۱۸-۲-۲)، آورده شد.

معادله‌ی تعادل المان فنری شکل با مینیمم انرژی پتانسیل نسبت به جابه‌جایی گره‌ها (به مثال ۲-۴ مراجعه شود) به دست آمد. همچنین معادلات اجزای محدود المان فنری شکل را با مینیمم نمودن انرژی پتانسیل کل نسبت به جابه‌جایی گره‌ها به دست آوردیم. حال نشان می‌دهیم که انرژی پتانسیل کل یک سازه (در این جا مجموعه‌ای از فنرها) را می‌توان نسبت به درجه‌ی آزادی هر گره مینیمم نموده که این عمل باعث دستیابی به همان معادلات اجزای محدودی می‌شود که برای حل مسأله از روش مستقیم سختی حاصل شد.

مثال ۲-۵

در مثال ۲-۱، عبارتی برای انرژی پتانسیل کل مجموعه فنر (شکل ۲-۲۴) یافته و مینیم مقدار آن را پیدا کنید. بدین طریق می‌شود در یافت که معادلات المان‌ها را می‌توان از طریق مینیم نمودن انرژی پتانسیل کل به دست آورد.



شکل ۲-۲۴ مجموعه فنری که از روش اصل انرژی حل شده است

با استفاده از معادله‌ی (۱۰-۶-۲) برای هر یک از المان‌های مجموعه فنر،

می‌توان دریافت که انرژی پتانسیل کل برابر است با:

$$\begin{aligned} \pi_p &= \sum_{e=1}^r \pi_p^{(e)} = \frac{1}{2} k_1 (d_{rx} - d_{1x})^2 - f_{1x}^{(1)} d_{1x} - f_{rx}^{(1)} d_{rx} \\ &\quad + \frac{1}{2} k_2 (d_{ix} - d_{rx})^2 - f_{rx}^{(2)} d_{rx} - f_{ix}^{(2)} d_{ix} \quad (19-6-2) \\ &\quad + \frac{1}{2} k_3 (d_{rx} - d_{ix})^2 - f_{ix}^{(3)} d_{ix} - f_{rx}^{(3)} d_{rx} \end{aligned}$$

از مینیم نمودن π_p نسبت به جابه‌جایی هر یک از گره‌ها داریم:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial d_{1x}} = -k_1 d_{rx} + k_1 d_{1x} - f_{1x}^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial d_{ix}} = k_2 d_{rx} - k_2 d_{ix} - f_{ix}^{(2)} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial d_{rx}} = k_1 d_{rx} - k_1 d_{1x} - k_2 d_{ix} + k_2 d_{rx} - f_{rx}^{(1)} - f_{rx}^{(2)} = 0 \quad (20-6-2)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial d_{ix}} = k_2 d_{ix} - k_2 d_{rx} - k_3 d_{rx} + k_3 d_{ix} - f_{ix}^{(2)} - f_{ix}^{(3)} = 0$$

معادله‌ی (۲۰-۶-۲) به صورت ماتریسی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_r & 0 & -k_r \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_r & -k_r \\ 0 & -k_r & -k_r & k_r + k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{rx} \\ d_{ix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{2x}^{(r)} \\ f_{rx}^{(1)} + f_{rx}^{(r)} \\ f_{ix}^{(1)} + f_{ix}^{(r)} \end{Bmatrix} \quad (21-6-2)$$

با استفاده از تعادل نیروهای گره‌ای شبیه به معادلات (۴-۳-۲) - (۶-۳-۲) داریم:

$$\begin{aligned} f_{1x}^{(1)} &= F_{1x} \\ f_{2x}^{(r)} &= F_{2x} \\ f_{rx}^{(1)} + f_{rx}^{(r)} &= F_{rx} \\ f_{ix}^{(1)} + f_{ix}^{(r)} &= F_{ix} \end{aligned} \quad (22-6-2)$$

از جای‌گزینی معادلات (۲۲-۶-۲) در (۲۱-۶-۲) و جای‌گزینی مقادیر k_r و k_1 داریم:

$$\begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & -3000 \\ -1000 & 0 & 3000 & -2000 \\ 0 & -3000 & -2000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{rx} \\ d_{ix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{rx} \\ F_{ix} \end{Bmatrix} \quad (23-6-2)$$

معادله‌ی (۲۳-۶-۲) شبیه به معادله‌ی (۱۸-۵-۲) است که از طریق روش مستقیم سختی به دست آمد. بنابراین مشاهده می‌شود که مجموعه معادلات (۲۳-۶-۲) را می‌توان از طریق مینیمم نمودن انرژی پتانسیل کل به دست آورد. پس از اعمال شرایط مرزی و جای‌گزینی $F_{rx} = 0$ و $F_{ix} = 5000 \text{ lb}$ در معادله‌ی (۲۳-۶-۲)، حل مسأله مشابه با مثال ۱-۲ خواهد بود.



مراجع

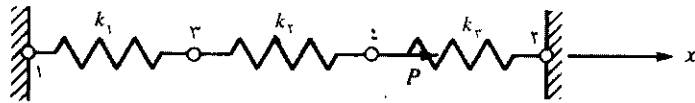
- [1] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23. No. 9, pp. 805-824, Sept. 1956.
- [2] Martin, H. C., *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw Hill, York, 1966.
- [3] Hsieh, Y. Y., *Elementary Theory of Structures*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [4] Oden, J. T., and Ripperger, E. A., *Mechanics of Elastic Structures*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1981.
- [5] Finlayson, B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic press, New York, 1972.
- [6] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
- [7] Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E., *Concepts and application of Finite element Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York, 1989.
- [8] Forray, M. J., *Variational Calculus in Science and Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1968.



مسائل

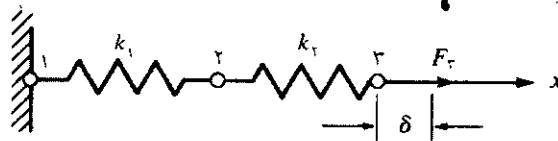
- a. ۱-۲. ماتریس سختی K مجموعه‌ی مندرج در شکل ۱-۲P را از انطباق ماتریس سختی هر یک از فنرها به دست آورید. در این جا، همان‌طور که نشان داده شده، هر یک از مقادیر k_1 ، k_2 و k_3 سختی هر فنر می‌باشد.
- b. اگر گره‌های ۱ و ۲ ثابت بوده و نیروی P در جهت مثبت x بر گره ۴ عمل کند عبارتی برای جابه‌جایی گره‌های ۳ و ۴ بیابید.
- c. نیروهای عکس‌العمل را در گره‌های ۱ و ۲ بیابید.

(راهنمایی): این مسأله را با نوشتن معادلات تعادل در گره‌ها و استفاده از روابط نیرو-جابه‌جایی برای هر المان، همان‌طور که در اولین قسمت بخش ۲-۴ قید گردید، انجام دهید. سپس مسأله را از روش مستقیم سختی حل نمایید.



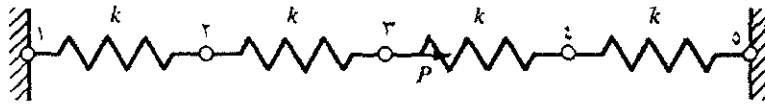
شکل ۱-۲P

۲-۲ در مجموعه فتری که در شکل ۲-۲P نشان داده شده، نیرو در کلیه المان‌های فتری شکل و تغییر مکان گره ۲ را بیابید. همچنین نیروی F_2 را تعیین کنید. مفروضات: به ازای نیروی F_2 و $K_1 = K_2 = 1000 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$ ، گره ۳ به میزان $\delta = 1 \text{ in.}$ در جهت مثبت x جابه‌جا می‌شود.



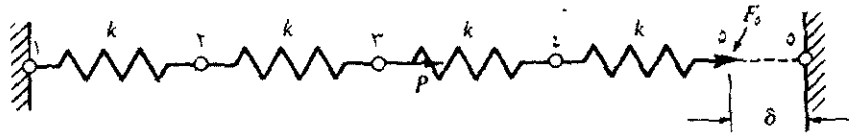
شکل ۲-۲P

- ۳-۲ a. در مجموعه فتری که در شکل ۳-۲P نشان داده شده، با استفاده از روش مستقیم انطباق ماتریس سختی کل را به دست آورید.
- b. اگر گره‌های ۱ و ۵ ثابت بوده و نیروی P بر گره ۳ اعمال شده باشد جابه‌جایی گره‌ها را به دست آورید.
- c. عکس‌العمل گره‌های ثابت ۱ و ۵ را بیابید.



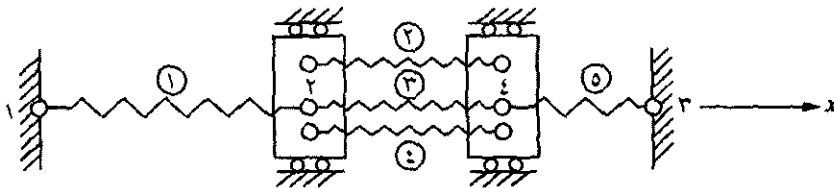
شکل ۲P-۳

۴-۲ مسأله‌ی ۳-۲ را به فرض آن‌که $P = 0$ (هیچ نیرویی بر گره ۳ اعمال نمی‌شود) و جابه‌جایی گره ۵ ثابت و برابر عدد مشخص و معلومی برابر δ مطابق شکل ۲P-۴ است، حل نمایید.



شکل ۲P-۴

۵-۲ در مجموعه فنرهای مندرج در شکل ۲P-۵، با استفاده از روش مستقیم سختی، ماتریس سختی کل را بیابید. فرض کنید $k^{(1)} = 1 \text{ kip/in}$ ، $k^{(2)} = 2 \text{ kip/in}$ ، $k^{(3)} = 3 \text{ kip/in}$ ، $k^{(4)} = 4 \text{ kip/in}$ و $k^{(5)} = 5 \text{ kip/in}$.

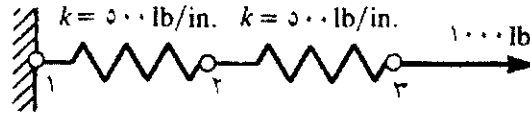


شکل ۲P-۵

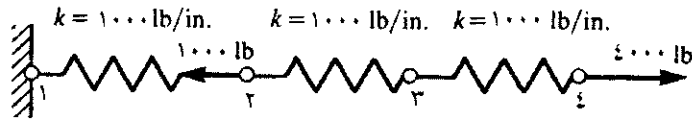
۶-۲ در مجموعه فنرهای مندرج در شکل ۲P-۵، نیروی متمرکز مثبتی برابر 2 kips در گره ۲، در جهت مثبت x اعمال نموده و تغییر مکان‌های گره‌های ۲ و ۴ را بیابید.

۷-۲ به جای فرض کشش در المان، همانند آنچه که در شکل ۳-۲P نشان داده شده، فرض کنید که المان تحت تراکم قرار دارد. به عبارتی دیگر، نیروی متراکمی به المان فر اعمال نموده و ماتریس سختی را استخراج کنید.

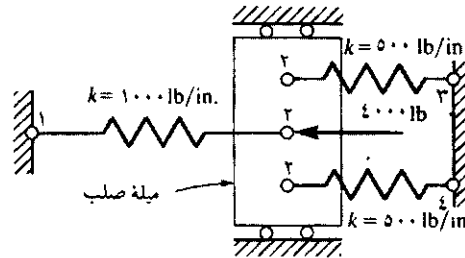
۸-۲ الی ۱۶-۲ در مجموعه فنرهای نشان داده شده در شکل های ۵-۲P الی ۲P-۱۲، جابه‌جایی گره‌ها، نیرو در هر المان، و عکس‌العمل‌ها را بیابید. از روش مستقیم سختی در کلیه‌ی مسائل استفاده کنید.



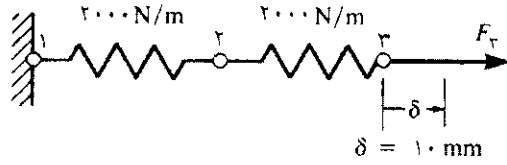
شکل ۸-۲P



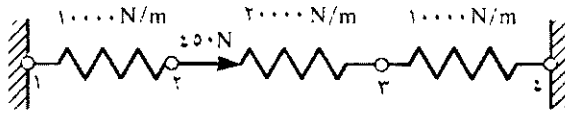
شکل ۹-۲P



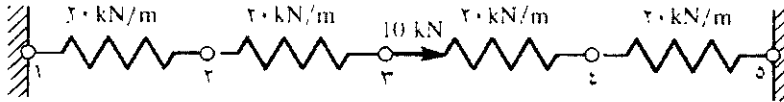
شکل ۱۰-۲P



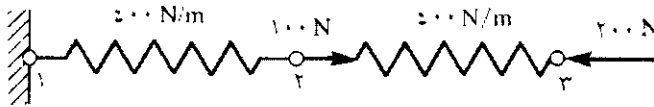
شکل ۱۱-۲P



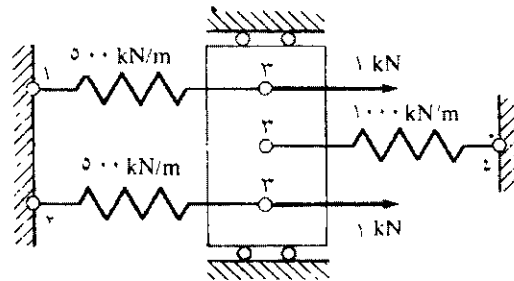
شکل ۱۲-۲P



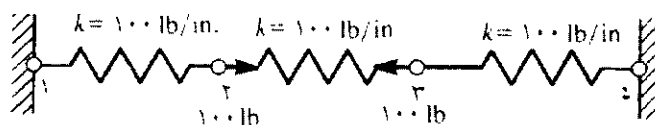
شکل ۱۳-۲P



شکل ۱۴-۲P

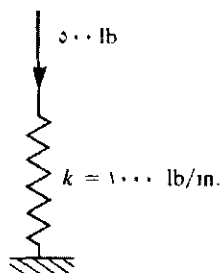


شکل ۱۵-۲P

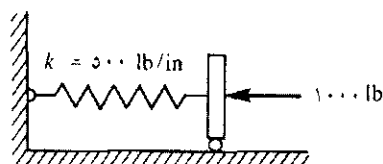


شکل ۲P-۱۶

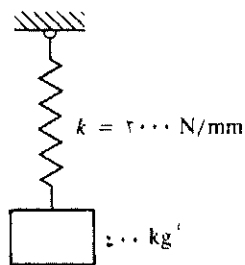
۲-۱۷ با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیلی که در بخش ۲-۶ پایه ریزی گردید، مسائل مرتبط با فنرهایی را که در شکل ۲P-۱۳ نشان داده شده‌اند حل نمایید. به عبارتی دیگر، منحنی تغییرات انرژی پتانسیل کل را بر حسب جابه‌جایی انتهای آزاد فنر رسم نموده تا حداقل انرژی پتانسیل مشخص شود. مشاهده نمایید که جابه‌جایی مرتبط با مینیمم انرژی پتانسیل، دلالت بر حالت تعادل پایدار می‌نماید.



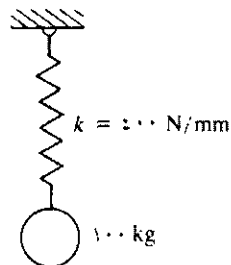
(a)



(b)



(c)

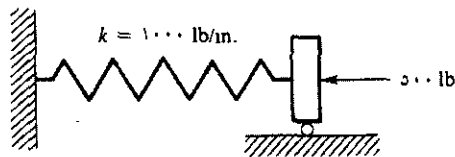


(d)

شکل ۲P-۱۷

۱۸-۲ جهت نیرو در مسأله‌ی ۲-۴ را عکس نموده و انرژی پتانسیل کل را مجدداً محاسبه نمایید. سپس از این عدد برای محاسبه‌ی جابه‌جایی مربوط به حالت تعادل استفاده کنید.

۱۹-۲ رابطه‌ی نیرو-جابه‌جایی در فنر غیر خطی مندرج در شکل ۲P-۱۵ به صورت $f = k\delta^2$ است. انرژی پتانسیل کل در فنر را یافته و از آن برای تعیین جابه‌جایی مربوط به حالت تعادل استفاده کنید.



شکل ۲P-۱۹

۲-۲۰ الی ۲-۲۱ مسائل ۲-۱۰ و ۲-۱۵ را از روش انرژی پتانسیل حل نمایید (به مثال ۲-۵ توجه نمایید).

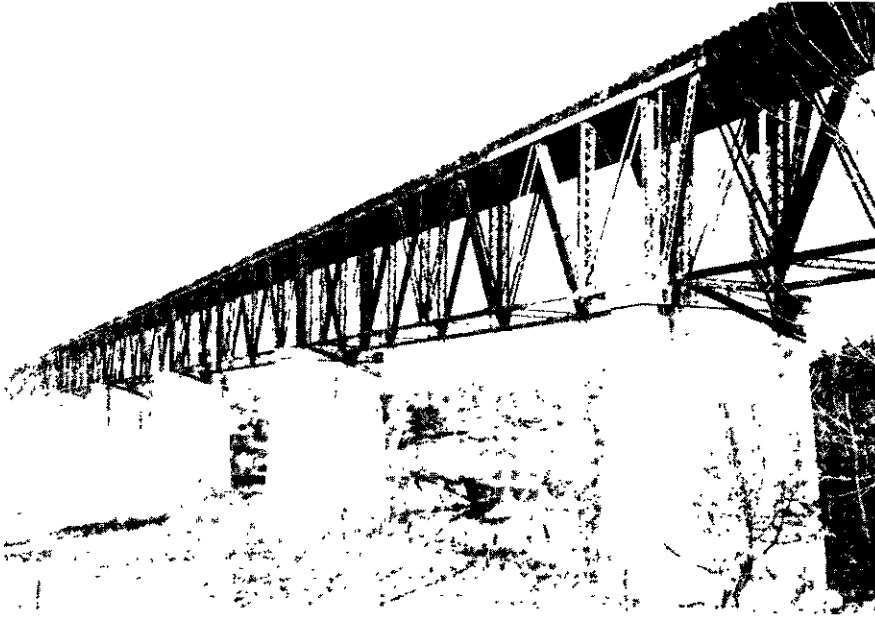
فصل ۳

استخراج معادلات خرپا

مقدمه

باتوجه به پایه ریزی مبانی اولیه‌ای که روش مستقیم سختی بر آن استوار است، بر اساس مراحل قید شده در فصل ۱، به استخراج ماتریس سختی المان میله‌ای شکلی از نوع الاستیک خطی (یا خرپا) می‌پردازیم. همچنین محور مختصات محلی، انتخاب شده برای المان مورد نظر، و نیز محور مختصات اصلی که به نحو مطلوب (به منظور انجام محاسبات عددی) برای کل سازه انتخاب می‌شود، معرفی خواهند شد. مضافاً، با استفاده از ماتریس‌های انتقال، نحوه‌ی انتقال یک بردار از محور مختصات محلی به محور مختصات اصلی، به منظور معرفی ماتریس سختی المان میله‌ای شکلی تحت زاویه‌ای دلخواه، در محور مختصات اصلی تشریح می‌شود. به منظور تشریح مراحل دستیابی به ماتریس سختی کل و معادلات مورد نیاز در حل یک سازه، سه مثال مرتبط با خرپاهای دو بعدی (به عنوان یک خرپای دو بعدی

نمونه، به پل پایه خریایی راه آهنی که در شکل ۳-۱ نشان داده شده توجه نمایید) نیز حل خواهند شد.



شکل ۳-۱ نمونه‌ای از پل پایه خریایی دو بعدی در راه آهن

سپس روش سختی به منظور اعمال آن به خریاهای سه بعدی بسط داده خواهد شد. بعد از آن، ماتریس انتقال را در فضای سه بعدی به دست آورده و از آن به منظور تجزیه و تحلیل دو خریای سه بعدی استفاده خواهد شد. سپس اصل تقارن را تشریح نموده و از آن به منظور کاهش حجم مسأله و آسان‌تر نمودن حل آن استفاده خواهد شد. به منظور نشان دادن اصول مربوطه، مسأله‌ای را در این زمینه حل نموده و سپس نحوه‌ی کار با تکیه‌گاه‌های شیب‌دار و اریب تشریح خواهد شد. بعد از آن، با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل و به کار گیری آن، معادلات المان میله‌ای شکل مجدداً استخراج خواهند شد. سپس حل اجزای محدود میله‌ای که تحت تأثیر بار گسترده‌ای از نوع متغیر خطی قرار گرفته با حل واقعی آن مقایسه

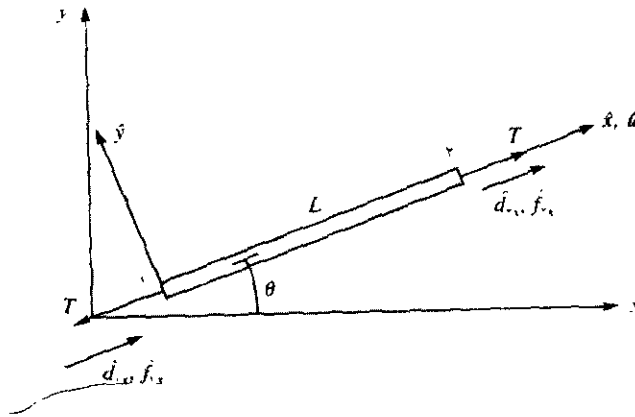
خواهد شد. بعد از آن، روش پسماند گالرکین را معرفی نموده و از آن به منظور استخراج معادلات المان میله‌ای شکل استفاده خواهیم نمود. نهایتاً، روش‌های پسماند رایج دیگر را از قبیل با هم گذاری، زیر محدوده، و حداقل مربع ها را صرفاً جهت آشنایی شما با آن‌ها، معرفی خواهیم نمود. روش‌های یاد شده، ضمن اعمال به میله‌ای که تحت تأثیر بار خطی متغیری قرار گرفته تشریح خواهند شد.

▲ ۱-۳ استخراج ماتریس سختی المان میله‌ای شکل در مختصات محلی ▲

حال نحوه‌ی استخراج ماتریس سختی المان میله‌ای شکلی با سطح مقطع یکنواخت (منشوری شکل)، که در شکل ۳-۲ نشان داده شده بررسی می‌شود. نتایج حاصل از این استخراج را می‌توان مستقیماً برای حل خریاهایی که اعضای آن‌ها به هم لولا شده‌اند اعمال نمود. میله‌ی یاد شده تحت تأثیر نیروی کششی T که در امتداد میله بوده و به گره‌های ۱ و ۲ وارد می‌شود قرار گرفته است.

در این جا دو محور مختصات معرفی شده است: یکی محور مختصات محلی (\hat{x}, \hat{y}) ، که در آن \hat{x} در راستای میله، و دیگری محور مختصات اصلی (x, y) ، به قسمی که انتخاب آن به بهترین وجه، با کل سازه سازگار است. نحوه‌ی انتخاب بهترین محور مختصات اصلی از طریق حل مسائل خریای دو و سه بعدی که در بخش‌های ۳-۶ و ۳-۷ آورده شده نشان داده شده است. از هر دو سیستم به‌طور گسترده در سر تا سر این کتاب استفاده خواهد شد.

فرض شده است که سطح مقطع المان میله‌ای شکل ثابت و برابر A بوده و مدول الاستیسیته‌ی آن E ، و طول اولیه‌ی آن برابر L است. درجه‌های آزادی گره‌ها، همان جابه‌جایی‌های محوری محلی (جابه‌جایی‌های طولی در امتداد میله) بوده که توسط \hat{d}_{1r} و \hat{d}_{1x} در انتهای هر المان مطابق شکل ۳-۲ مشخص شده‌اند.



شکل ۲-۳ میله در معرض نیروی کششی T ؛ کلیه نیروها و جابه‌جایی‌های مثبت گره‌ای در جهت \hat{x} محلی عمل می‌کنند.

با استفاده از قانون هوک [معادله‌ی (a)] و روابط کرنش - جابه‌جایی

[معادله‌ی (b)] یا معادله‌ی (۱-۴-۱) می‌توان نوشت:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (a)$$

$$\varepsilon_x = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \quad (b)$$

با استفاده از معادلات تعادل نیرو برای میله‌ای که بارگذاری در هر یک از دو انتهای آن اعمال شده داریم:

$$A\sigma_x = T = \text{ثابت} \quad (c)$$

(بار گسترده در بخش ۳-۱۰ بررسی خواهد شد). با جای‌گزینی معادله‌ی (b) در

(a)، و سپس جای‌گزینی (a) در (c) و مشتق‌گیری نسبت به \hat{x} ، معادله‌ی دیفرانسیلی

میله‌ای با رفتار الاستیک خطی برابر است با:

$$\frac{d}{d\hat{x}} \left(AE \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \right) = 0 \quad (c)$$

در جایی که \hat{u} تابع جابه‌جایی محوری در جهت \hat{x} بوده و A و E ، علی‌رغم فرض ثابت بودن آن‌ها در امتداد طول میله در خلال استخراج روابطی که بعداً آورده خواهد شد، به قسمی نوشته شده‌اند که در معادله‌ی دیفرانسیلی فوق تابعی از \hat{x} می‌باشند.

از فرضیات زیر به منظور استخراج ماتریس المان میله‌ای شکل استفاده شده است.

۱. میله نمی‌تواند نیروی برشی یا گشتاور خمشی را تحمل نماید، به عبارتی دیگر

$$\hat{m}_y = 0 \text{ و } \hat{m}_z = 0, \hat{f}_{xy} = 0, \hat{f}_{yz} = 0$$

۲. از تأثیر هر گونه جابه‌جایی عرضی صرف‌نظر شده است.

۳. قانون هوک قابل اعمال است: به عبارتی دیگر ارتباط بین تنش محوری و کرنش

$$\text{محوری } \varepsilon_x \text{ به صورت } \sigma_x = E\varepsilon_x \text{ می‌باشد.}$$

۴. هیچ بار میانی وجود ندارد.

حال از مراحل‌ی که قبلاً در فصل ۱ آورده شد به منظور استخراج ماتریس سختی المان میله‌ای شکل و سپس به منظور حل کلی مجموعه‌ای از میله‌ها (المان‌ها) استفاده خواهد شد.

مرحله‌ی ۱ انتخاب نوع المان

المان یا میله، با شماره گذاری گره‌ها در دو انتها و عموماً با شماره گذاری المان مشخص می‌شود (شکل ۳-۲).

مرحله‌ی ۲ انتخاب تابع جابه‌جایی

از آن‌جا که یک تابع خطی با نقاط ابتدایی و انتهایی مشخص، دارای مسیری خاص است لذا جابه‌جایی در امتداد محور \hat{x} میله را به صورت خطی فرض

می‌کنیم (هر گونه بحث دیگر در مورد نحوه‌ی انتخاب توابع جابه‌جایی در بخش ۳-۲ و مراجع [۳-۱] آورده شده است). لذا:

$$\hat{u} = a_1 + a_2 \hat{x} \quad (1-1-3)$$

در جایی که تعداد کل ضرائب a_i پیوسته با تعداد کل درجه‌های آزادی هر المان برابر است. در این جا تعداد کل درجه‌های آزادی - جابه‌جایی در هر یک از دو گره المان، برابر ۲ می‌باشد. با استفاده از روشی که در بخش ۲-۲ برای المان فنری شکل آورده شد، معادله‌ی (۳-۱-۱۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{u} = \left(\frac{\hat{d}_{rr} - \hat{d}_{ra}}{L} \right) \hat{x} + \hat{d}_{rx} \quad (2-1-3)$$

دلیل آن‌که تابع جابه‌جایی را از قالب معادله‌ی (۳-۱-۱۳) به معادله‌ی (۲-۱-۳) تغییر می‌دهیم آن است که معادله‌ی یاد شده این امکان را فراهم می‌سازد تا به کمک روابط کرنش / جابه‌جایی داده شده در معادله‌ی (۳-۱-۵)، بتوان کرنش‌ها را بر حسب جابه‌جایی گره‌ها تشریح نموده و سپس نیروهای گره‌ای را به تغییر مکان‌های گره‌ای ذکر شده در مرحله‌ی ۴ مرتبط نمود.

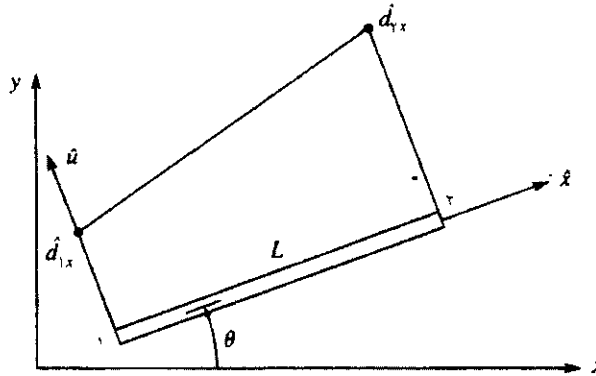
به صورت ماتریسی، معادله‌ی (۲-۱-۳) به شرح زیر است.

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{rx} \end{Bmatrix} \quad (3-1-3)$$

در حالی که توابع شکل به صورت زیر می‌باشند.

$$\checkmark \quad N_1 = 1 - \frac{\hat{x}}{L} \quad N_2 = \frac{\hat{x}}{L} \quad (3-1-4)$$

توابع شکل فوق شبیه به روابطی هستند که برای المان میله‌ای شکل مطرح شده در بخش ۲-۲ آورده شد. رفتار و خصوصیات این توابع در بخش یاد شده توضیح داده شد. تابع جابه‌جایی خطی \hat{u} [معادله‌ی (۳-۱-۳)] که در امتداد میله رسم شده در شکل ۳-۳ نشان داده شده است. میله با همان زاویه‌ای که شکل ۲-۳ رسم شده آورده شده است.



شکل ۳-۳ رسم جابه‌جایی \hat{u} در امتداد طول المان

مرحله ۳ تعریف روابط کرنش - جابه‌جایی و تنش - کرنش
رابطه‌ی کرنش - جابه‌جایی برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} = \frac{\hat{d}_{lx} - \hat{d}_{rx}}{L} \quad (3-1-5)$$

در جایی که از معادلات (۳-۱-۳) و (۳-۱-۴) به منظور دستیابی به معادله‌ی (۳-۱-۵) استفاده شده و رابطه‌ی بین تنش و کرنش به شرح زیر است.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (3-1-6)$$

مرحله ۴ استخراج معادلات و ماتریس سختی المان

ماتریس سختی المان به شرح زیر استخراج می‌شود. از مکانیک پایه داریم:

$$T = A\sigma_x \quad (3-1-7)$$

از جای‌گزینی معادلات (۳-۱-۵) و (۳-۱-۶) در معادلات (۳-۱-۷) داریم:

$$T = AE \left(\frac{\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{lx}}{L} \right) \quad (3-1-8)$$

متشابهاً، با توجه به علامت قراردادی نیروی گره‌ای مندرج در شکل ۳-۲،

$$\hat{f}_{lx} = -T \quad (3-1-9)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۳-۱-۸)، معادله‌ی (۳-۱-۹) برابر است با:

$$\hat{f}_{ix} = \frac{AE}{L}(\hat{d}_{ix} - \hat{d}_{rx}) \quad (۳-۱-۱۰)$$

مشابهاً:

$$\hat{f}_{rx} = T \quad (۳-۱-۱۱)$$

با استفاده از معادله‌ی (۳-۱-۸)، معادله‌ی (۳-۱-۱۱) برابر است با:

$$\hat{f}_{rx} = \frac{AE}{L}(\hat{d}_{rx} - \hat{d}_{ix}) \quad (۳-۱-۱۲)$$

از تشریح همزمان معادلات (۳-۱-۱۰) و (۳-۱-۱۱) به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{ix} \\ \hat{f}_{rx} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{ix} \\ \hat{d}_{rx} \end{Bmatrix} \quad (۳-۱-۱۳)$$

حال از آن‌جا که $\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{k}}\underline{\hat{d}}$ ، با استفاده از معادله‌ی (۳-۱-۱۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{rx} \end{Bmatrix} \quad (۳-۱-۱۴)$$

معادله‌ی (۳-۱-۱۴) معرف ماتریس سختی المانی میله‌ای شکل در مختصات محلی است. در این معادله، برای المان میله‌ای شکل، مشابه با ضریب ثابت فنر k در یک المان فنری شکل است.

مرحله‌ی ۵ جمع بندی معادلات المان‌ها به منظور دستیابی به معادلات کلی

با استفاده از روش مستقیم سختی که در فصل ۲ تشریح شد (به بخش ۳-۶ که مرتبط با مثالی در مورد خریا است رجوع شود) ماتریس‌های سختی و نیرو و نیز

معادلات اصلی را بر هم می گذاریم. این مرحله در مورد سازه‌هایی صادق است که دارای بیش از یک عضو بوده به قسمی که (مجدداً)

$$\underline{K} = [K] = \sum_{e=1}^N \underline{k}^{(e)} \quad \text{و} \quad \underline{F} = \{F\} = \sum_{e=1}^N \underline{f}^{(e)} \quad (15-1-3)$$

در جایی که قبل از اعمال روش مستقیم سختی مطابق با معادله‌ی (۱۵-۱-۳)، کلیه‌ی ماتریس‌های سختی محلی المان‌ها، \underline{k} ، باید به ماتریس سختی اصلی \underline{k} انتقال یابند (مگر آن که محورهای محلی بر محورهای اصلی منطبق باشند). (نحوه‌ی انتقال ماتریس سختی و محور مختصات در بخش‌های ۳-۳ و ۴-۳ تشریح شده است).

مرحله‌ی ۶ تعیین جابه‌جایی گره‌ها

با اعمال شرایط مرزی و حل همزمان سیستم معادلات $\underline{F} = \underline{Kd}$ جابه‌جایی‌ها حاصل می‌شوند.

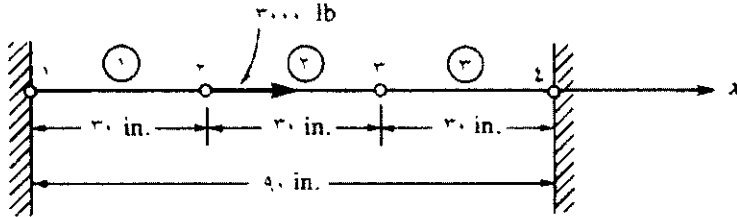
مرحله‌ی ۷ تعیین نیرو در المان‌ها

نهایتاً، با جای‌گزینی جابه‌جایی‌ها در معادلاتی شبیه به معادله‌ی (۱۵-۱-۳) و (۳-۱-۶)، تنش‌ها و کرنش‌ها در هر المان حاصل می‌شوند. حال نحوه‌ی حل میله‌ای یک بعدی را نشان می‌دهیم.

مثال ۳-۱

در مجموعه‌ای که از سه میله مطابق شکل ۳-۳ تشکیل شده مطلوبست (a) ماتریس سختی کل، (b) جابه‌جایی گره‌های ۲ و ۳، و (c) عکس‌العمل گره‌های ۱ و ۴. نیرویی برابر ۳۰۰۰ lb در جهت x بر گره ۲ اعمال شده است. طول هر المان برابر

۳۰ in. است. فرض کنید در المان‌های ۱ و ۲، $E = 30 \times 10^6$ psi و $A = 1$ in²، و در المان ۳، $E = 15 \times 10^6$ psi و $A = 2$ in² است. گره‌های ۱ و ۴ ثابت می‌باشند.



شکل ۳-۴ مجموعه‌ی سه میله

(a) با استفاده از معادله‌ی (۳-۱۴) در می‌یابیم که ماتریس‌های سختی برابرند با:

$$\begin{matrix} & 1 & 2^{(1)} \\ & 2 & 3^{(2)} \\ \underline{k}^{(1)} = \underline{k}^{(2)} = \frac{(1) \times (30 \times 10^6)}{30} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} & (16-1-3) \\ & 3 & 4 \end{matrix}$$

$$\underline{k}^{(3)} = \frac{(2) \times (15 \times 10^6)}{30} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}}$$

در جایی که، در رابطه‌ی (۳-۱۶)، مجدداً شماره‌هایی که در بالای ماتریس قرار دارند معرف جابه‌جایی‌های مرتبط با آن ماتریس می‌باشند. از به هم گذاری ماتریس‌های سختی از روش مستقیم سختی، ماتریس سختی کل به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{K} = 10^6 \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (17-1-3)$$

(b) معادله‌ی (۱۷-۱-۳)، نیروهای اصلی در گره‌ها را به شرح زیر با جابه‌جایی‌های اصلی در گره‌ها مرتبط می‌سازد.

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{4x} \end{Bmatrix} \quad (18-1-3)$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$d_{1x} = 0 \quad d_{2x} = 0 \quad (19-1-3)$$

با استفاده از شرایط مرزی، جای‌گزینی نیروهای اصلی اعمال شده در رابطه‌ی (۳-۱۸-۱)، و مجزا نمودن روابط ۲ و ۴ از معادله‌ی (۳-۱۸-۱)، به منظور حل مسأله، روابط ۲ و ۳ از معادله‌ی یاد شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{Bmatrix} 3000 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \end{Bmatrix} \quad (20-1-3)$$

از حل همزمان روابط (۳-۲۰-۱) برای تعیین جابه‌جایی‌ها داریم:

$$d_{2x} = 0.002 \text{ in.} \quad d_{3x} = 0.001 \text{ in.} \quad (21-1-3)$$

(c) از جای‌گزینی روابط (۳-۱۹) و (۳-۲۱) در معادله‌ی (۳-۱۸-۱)، نیرو در گره‌های اصلی که شامل عکس‌العمل‌های گره‌های ۱ و ۴ می‌باشند به شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$F_{1x} = 10^6 (d_{1x} - d_{2x}) = 10^6 (0 - 0.002) = -2000 \text{ lb}$$

$$F_{2x} = 10^6 (d_{1x} + d_{2x} - d_{3x}) = 10^6 (0 + 2(0.002) - 0.001) = 3000 \text{ lb}$$

$$F_{3x} = 10^6 (-d_{2x} + 2d_{3x} - d_{4x}) = 10^6 (-0.002 + 2(0.001) - 0) = 0$$

$$F_{4x} = 10^6 (-d_{3x} + d_{4x}) = 10^6 (-0.001 + 0) = -1000 \text{ lb}$$

(۲۲-۱-۳)

نتایج حاصل از روابط (۳-۱-۲۲) نشان می دهند که مجموع عکس العمل های F_{ix} و F_{ix} با نیروی اعمال شده ی ۳۰۰۰ پوندی در گره ۲ برابر بوده و علامت آن مخالف این نیرو است. لذا تعادل نیروها در این مجموعه میله ارضا شده است. مضافاً، معادلات (۳-۱-۲۲) نشان می دهند که $F_{ix} = 3000 \text{ lb}$ و $F_{ix} = 0$ ، به ترتیب نیروهای اعمال شده بر گره های ۲ و ۳ بوده که دلیلی مضاعف بر صحت نتایج به دست آمده است. ■

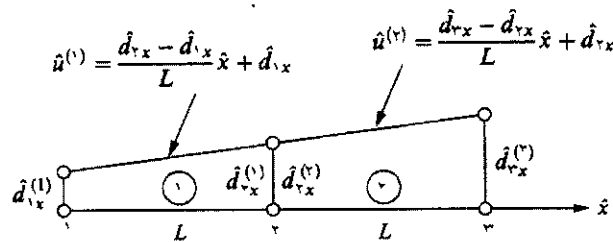
۳-۲ انتخاب توابع تقریب برای جابه جایی

به منظور تعیین تابع جابه جایی، راهبردهای زیر که مرتبط با المان میله ای شکل یک بعدی است در نظر گرفته می شوند. (بحث بیش تر در مورد انتخاب توابع جابه جایی و انواع دیگر توابع تقریبی (از قبیل توابع دما) در فصل ۴ برای المان تیر آهن، در فصل ۶ برای المان مثلثی شکل با کرنش ثابت، در فصل ۸ برای المان مثلثی شکل با کرنش خطی، در فصل ۹ برای المان متقارن محور، در فصل ۱۰ برای المان میله ای شکل و المان مسطح مستطیل شکل با سه گره، در فصل ۱۱ برای المان سه بعدی تنش، در فصل ۱۲ برای المان خمشی ورق، و در فصل ۱۳ برای مسائل مرتبط با انتقال حرارت آورده خواهد شد. اطلاعات بیش تر در این زمینه در مراجع [۳-۱] آورده شده است).

۱. توابع تقریب رایج عموماً چند جمله ای هایی هستند که در ساده ترین آنها تغییرات جابه جایی به صورت خطی و بر اساس معادله ی (۳-۱-۱)، و یا معادل آن، رابطه ی (۳-۱-۳)، داده شده و تابع بر حسب توابع شکل تشریح می شوند.

۲. تابع تقریب باید در امتداد المان میله‌ای شکل پیوسته باشد. تابع خطی ساده‌ی \hat{u} که در معادله‌ی (۳-۱-۱) داده شده، یقیناً درون المان پیوسته است؛ بنابراین مقادیر \hat{u} به دست آمده از تابع خطی یاد شده درون المان پیوسته بوده و به دلیل تغییرات ملایم و پیوسته‌ی \hat{u} (شکل ۳-۵)، هیچگونه ناپیوستگی، روی هم افتادگی، و یا پرشی در این تابع وجود ندارد.

۳. تابع تقریب باید به ازای کلیه‌ی درجه‌های آزادی در هر گره، پیوستگی بین المان‌ها را در المان‌های خطی، و در امتداد کلیه‌ی خطوط مرزی و سطوح، در المان‌های دو و سه بعدی ارضا نماید. در المان میله‌ای شکل، باید مطمئن بود که گره‌های مشترک بین دو و یا بیش از دو المان، پس از جابه‌جا شدن، بین المان‌ها مشترک باقی مانده و از روی هم افتادن و یا ناپیوستگی در آن‌ها جلوگیری می‌شود. برای مثال، سازه‌ای متشکل از دو میله که در شکل ۳-۵ نشان داده شده را در نظر می‌گیریم. در این سازه، انتخاب تابع خطی \hat{u} (معادله‌ی ۳-۱-۲) برای المان، اتصال المان‌های ۱ و ۲ را تضمین نموده و جابه‌جایی گره ۲ از المان ۱ با جابه‌جایی همان گره از المان برابر خواهد بود؛ به عبارتی دیگر، $\hat{d}_{rx}^{(1)} = \hat{d}_{rx}^{(2)}$. این قاعده نیز توسط معادله‌ی (۳-۳-۲) نشان داده شد. لذا در المان میله‌ای شکل، تابع خطی فوق را هم‌نوا یا هم سازگار می‌نامند؛ زیرا بدین وسیله پیوستگی در المان و نیز بین المان‌های مجاور تضمین می‌شود.



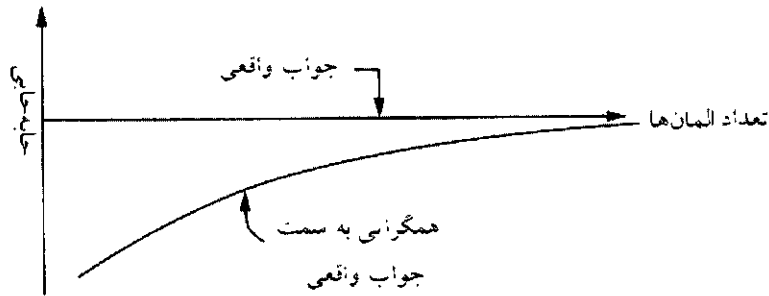
شکل ۳-۵ پیوستگی بین المانی سازه‌ی دو میله‌ای

به طور کلی، از C^m به منظور تشریح پیوستگی یک میدان جزء پیوسته (همانند جابه‌جایی محوری) استفاده می‌شود به قسمی که m معرف مرتبه‌ی مشتقی است که به ازای آن پیوستگی بین المانی از بین نخواهد رفت. لذا، اگر میدانی C^0 پیوسته باشد این بدان معنی خواهد بود که فقط خود تابع پیوستگی بین المان‌ها را ارضا می‌کند. برای مثال، چنان‌چه میدان متغیر مورد نظر تغییر مکان پیوسته‌ای باشد که در شکل ۳-۵ نشان داده شده، در آن صورت تابع در گره ۲ پیوسته خواهد بود. بنابراین گفته می‌شود که میدان جابه‌جایی C^0 پیوسته است. المان‌های میله‌ای شکل، المان‌های صفحه‌ای (به فصل ۷ مراجعه شود) و المان‌های سه بعدی (فصل ۱۱)، از جمله المان‌های C^0 هستند که پیوستگی در امتداد مرزهای مشترک را به اجبار برقرار می‌کنند.

چنان‌چه پیوستگی تابعی و مشتق اول آن در امتداد مرز مشترک برقرار باشد در آن صورت متغیر مورد نظر در میدان مربوطه، اصطلاحاً C^1 پیوسته است. به عبارتی دیگر، توابع یاد شده‌ی پیوستگی را در جابه‌جایی و شیب، در امتداد مرزهای مشترک به اجبار برقرار می‌کنند.

۴. تابع تقریب باید امکان جابه‌جایی به صورت یک جسم صلب و نیز کرنش ثابت درون المان را فراهم سازد. تابع جابه‌جایی یک بعدی (معادله‌ی (۳-۱-۱)) این شرایط را ارضا می‌کند؛ زیرا ضریب a_1 حرکت به صورت جسم صلب (حرکت ثابت جسم بدون ایجاد کرنش) را امکان پذیر نموده در حالی که عبارت $a_2 \bar{x}$ کرنش ثابت را به دلیل ثابت بودن $a_2 = \frac{d\bar{u}_x}{d\bar{x}} = \varepsilon_x$ ایجاد می‌کند. (در واقع حالت کرنش ثابت به شرطی می‌تواند در المان اتفاق افتد که المان‌ها به اندازه‌ی کافی کوچک انتخاب شوند). در المان میله‌ای شکل، چند جمله‌ای ساده‌ی معادله‌ی (۳-۱-۱)، که چهارمین خط مشی ذکر شده را ارضا می‌کند، کامل نامیده می‌شود. اندیشه‌ی کامل بودن بدان معنی است که عبارات مرتبه‌ی پایین‌تر را نمی‌توان در

مقایسه با عبارت مرتبه‌ی بالاتر حذف نمود. در یک تابع خطی ساده، این بدان معنی است که نمی‌توان از a_1 در مقایسه با $a_2 x$ صرف‌نظر نمود. کامل بودن یک تابع یکی از شروط لازم در همگرا شدن به سمت جواب واقعی، مثلاً در تعیین جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها، است (شکل ۳-۶) (به مرجع [۳] مراجعه شود). شکل ۳-۶ نمایانگر همگرایی تدریجی جابه‌جایی‌ها به سوی جواب‌های واقعی به ازای افزایش المان‌ها در حل اجزای محدود است. لذا همگرایی تدریجی روندی است که در آن جواب‌های تقریبی کراً (حل اجزای محدود) بدون تغییر علامت یا جهت دادن، به سمت جواب واقعی نزدیک می‌شوند.



شکل ۳-۶ همگرایی جابه‌جایی به سمت جواب واقعی با افزایش تعداد المان‌ها در یک حل اجزای محدود

این ایده که تابع میان یاب (تقریبی) باید امکان جابه‌جایی به صورت یک جسم صلب را فراهم سازد بدان معنی است که تابع مزبور باید قادر باشد تا به عدد ثابتی منتهی شود (برای مثال، a_1)؛ زیرا در حقیقت ممکن است چنین حالتی رخ دهد. بنابراین باید حالتی را در نظر گرفت که در آن

$$\hat{u} = a_1 \quad (۱-۲-۳)$$

چرا که انتخاب $\hat{u} = a_1$ سبب می‌شود تا جابه‌جایی گره‌ها برابر شوند، $\hat{d}_{1x} = \hat{d}_{2x}$ ؛ شرطی که برای جابه‌جایی به صورت صلب نیاز است. لذا

$$a_1 = \hat{d}_{1x} = \hat{d}_{2x} \quad (۲-۲-۳)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۳-۲-۳) در رابطه‌ی (۳-۱-۳) داریم:

$$\hat{u} = N_1 \hat{d}_{1x} + N_r \hat{d}_{rx} = (N_1 + N_r) a_1 \quad (۳-۲-۳)$$

با توجه به معادلات (۳-۲-۳) و (۱-۲-۳) داریم:

$$\hat{u} = a_1 = (N_1 + N_r) a_1 \quad (۴-۲-۳)$$

بنابراین، از معادله‌ی (۴-۲-۳) می‌توان نوشت:

$$N_1 + N_r = 1 \quad (۵-۲-۳)$$

رابطه‌ی (۵-۲-۳) معرف آن است که مجموع توابع تقریب جابه‌جایی در هر نقطه‌ای از المان باید برابر یک باشد به قسمی که اگر جابه‌جایی به صورت یک جسم صلب صورت گیرد \hat{u} برابر عددی ثابت خواهد بود.

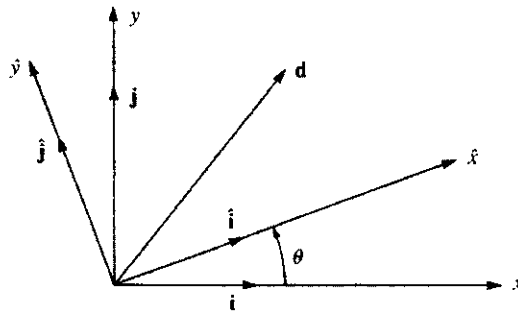
۳-۳ انتقال بردارها در فضای دو بعدی

در بسیاری از مسائل راحت‌تر است تا مختصات محلی و اصلی (مرجع) تعریف شوند. مختصات محلی، پیوسته به قسمی انتخاب می‌شوند که هر المان را به نحو مطلوب معرفی نمایند. مختصات اصلی به قسمی انتخاب می‌شوند که مناسب با کل سازه باشند.

چنانچه جابه‌جایی گره‌های یک المان، که توسط بردار \mathbf{d} در شکل ۳-۸ تعریف شده‌اند مشخص باشد، در آن صورت هدف آن خواهد بود تا مؤلفه‌های این بردار را از یک سیستم مختصات، به مؤلفه‌های آن در مختصات دیگری مرتبط سازیم. در حالت کلی، در این بخش فرض می‌کنیم که \mathbf{d} بر هیچ یک از مختصات اصلی و محلی منطبق نیست. تحت چنین شرایطی می‌خواهیم مؤلفه‌های جابه‌جایی اصلی را

به مؤلفه‌های محلی مرتبط سازیم. بدین منظور، ماتریس انتقال را استخراج نموده و متعاقباً از آن برای تعیین ماتریس سختی اصلی المان میله‌ای شکل استفاده خواهد شد. زاویه‌ی θ هنگامی مثبت تعریف می‌شود که به صورت پاد ساعت گرد از x به سمت \hat{x} اندازه گرفته شود. بردار جابه‌جایی \mathbf{d} را می‌توان در مختصات اصلی و محلی به صورت

$$\mathbf{d} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} = \hat{d}_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{d}_y \hat{\mathbf{j}} \quad (1-3-3)$$



شکل ۳-۷ بردار عمومی جابه‌جایی \mathbf{d}

تعریف نمود در جایی که \mathbf{i} و \mathbf{j} بردارهای یکه در امتداد محورهای اصلی x و y ، و $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ بردارهای یکه در امتداد مختصات محلی \hat{x} و \hat{y} می‌باشند. حال با استفاده از شکل ۳-۸ و \mathbf{j} را به $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ مرتبط می‌سازیم.

با استفاده از شکل ۳-۸ و جمع بردارها داریم:

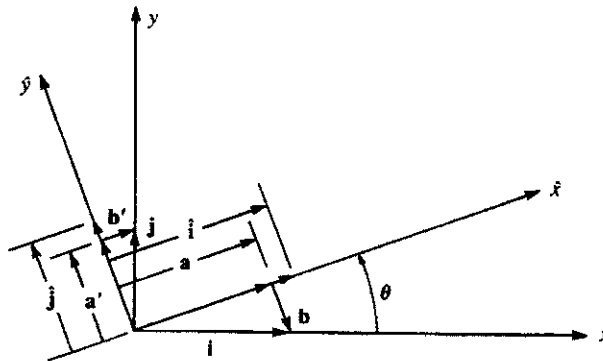
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{i} \quad (2-3-3)$$

همچنین از رابطه‌ی کسینوس‌ها،

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{i}| \cos \theta \quad (3-3-3)$$

از آن‌جا که طبق تعریف \mathbf{i} برداری یکه است لذا اندازه‌ی آن برابر است با:

$$|\mathbf{i}| = 1 \quad (4-3-3)$$



شکل ۳-۸ رابطه‌ی بین بردارهای یک‌ه‌ی محلی و اصلی

بنابراین داریم:

$$|a| = 1 \cos\theta \quad (5-3-3)$$

متشابهاً،

$$|b| = 1 \sin\theta \quad (6-3-3)$$

در این‌جا a در جهت \hat{i} و b در جهت $-\hat{j}$ است؛ لذا،

$$a = |a| \hat{i} = (\cos\theta) \hat{i} \quad (7-3-3)$$

و

$$b = |b| (-\hat{j}) = (\sin\theta)(-\hat{j}) \quad (8-3-3)$$

با جای‌گزینی معادلات (۷-۳-۳) و (۸-۳-۳) در رابطه‌ی (۲-۳-۳) داریم:

$$i = \cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j} \quad (9-3-3)$$

متشابهاً از شکل ۷-۳ داریم:

$$a' + b' = j \quad (10-3-3)$$

$$\mathbf{a}' = \cos\theta \hat{\mathbf{j}} \quad (11-3-3)$$

$$\mathbf{b}' = \sin\theta \hat{\mathbf{i}} \quad (12-3-3)$$

از جای‌گزینی روابط (۱۱-۳-۳) و (۱۲-۳-۳) در معادله‌ی (۱۰-۳-۳) داریم:

$$\mathbf{j} = \sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}} \quad (13-3-3)$$

حال با جای‌گزینی روابط (۹-۳-۳) و (۱۳-۳-۳) در معادله‌ی (۱-۳-۳) داریم:

$$d_x (\cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta \hat{\mathbf{j}}) + d_y (\sin\theta \hat{\mathbf{i}} - \cos\theta \hat{\mathbf{j}}) = d_x \hat{\mathbf{i}} + d_y \hat{\mathbf{j}} \quad (14-3-3)$$

اگر در معادله‌ی (۱۴-۳-۳) جمع ضرایب مشابه $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ را بیابیم، خواهیم داشت:

$$d_x \cos\theta + d_y \sin\theta = \hat{d}_x$$

$$-d_x \sin\theta + d_y \cos\theta = \hat{d}_y \quad (15-3-3) \quad \text{و}$$

معادله‌ی (۱۵-۳-۳) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_x \\ \hat{d}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \quad (16-3-3)$$

در جایی که $C = \cos\theta$ و $S = \sin\theta$.

رابطه‌ی (۱۶-۳-۳) جابه‌جایی‌های اصلی d را به جابه‌جایی‌های محلی \hat{d}

مرتبط می‌سازد. ماتریس

$$\begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \quad (17-3-3)$$

ماتریس انتقال (یا دوران) نامیده می‌شود. به منظور توضیح بیشتر در مورد این ماتریس به پیوست A رجوع شود. در بخش ۳-۴، از این ماتریس به منظور دستیابی به ماتریس سختی اصلی المان میله‌ای شکلی که تحت زاویه‌ی دلخواهی قرار دارد استفاده شده و سپس جابه‌جایی‌ها و نیروهای اصلی توسط آن به مقادیر مشابه محلی انتقال می‌یابند.

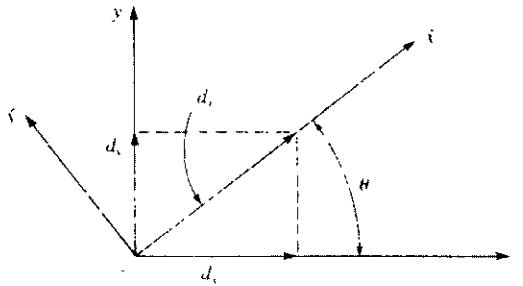
حال، با استفاده از رابطه‌ی (۱-۳-۳)، به ازای $\hat{d}_y = 0$ داریم:

$$d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} = \hat{d}_r \hat{\mathbf{i}} \quad (18-3-3)$$

در شکل ۹-۳، \hat{d}_r بر حسب مؤلفه‌های اصلی x و y تشریح شده‌اند. با استفاده از روابط مثلثاتی و شکل ۹-۳، مقدار \hat{d}_r را به شرح زیر به دست می‌آوریم:

$$\hat{d}_r = C d_x + S d_y \quad (19-3-3)$$

رابطه‌ی (۱۹-۳-۳)، معادل اولین رابطه در معادله‌ی (۱۶-۳-۳) است.

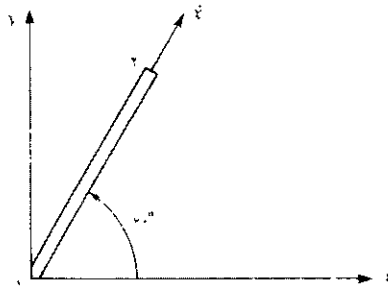


شکل ۹-۳ رابطه‌ی بین جابه‌جایی‌های محلی و اصلی

مثال ۲-۳

در المان میله‌ای شکلی که در شکل ۱۰-۳ نشان داده شده می‌دانیم مقدار جابه‌جایی اصلی گره ۲ برابر $d_{r1} = 0.1$ in و $d_{r2} = 0.2$ in است. مؤلفه‌ی \hat{d}_{r2} جابه‌جایی محلی در گره ۲ را بیابید.
با استفاده از رابطه‌ی (۱۹-۳-۳) داریم:

$$\hat{d}_{r2} = (\cos 60^\circ)(0.1) + (\sin 60^\circ)(0.2) = 0.223 \text{ in}$$



شکل ۳-۱۰ المان میله‌ای شکل



۳-۴ ماتریس سختی اصلی

حال با استفاده از رابطه‌ی انتقال (۳-۳-۱۶)، ماتریس سختی اصلی المان میله‌ای شکل را به دست می‌آوریم. این ماتریس برای هر المان مورد نیاز بوده تا بتوان بر اساس آن ماتریس سختی اصلی کل سازه را به دست آورد. در معادله‌ی (۳-۱-۱۳) نشان داده شد که برای المان میله‌ای شکل در مختصات محلی

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{11} \\ \hat{f}_{21} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{11} \\ \hat{d}_{21} \end{Bmatrix} \quad (۳-۴-۱)$$

یا

$$\hat{f} = k\hat{d} \quad (۳-۴-۲)$$

حال می‌خواهیم در المان میله‌ای شکلی که مطابق شکل ۳-۲ تحت زاویه‌ی دلخواهی نسبت به محورهای اصلی قرار گرفته، سروهای اصلی گره‌ای \underline{f} را با جابه‌جایی‌های اصلی گره‌ای، \underline{d} ، مرتبط سازیم. این رابطه منجر به تعیین ماتریس سختی اصلی k برای المان می‌شود. به عبارتی دیگر؛ می‌خواهیم ماتریس سختی k را به قسمی بیابیم که:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} \quad (3-4-3)$$

یا به صورت ماتریسی ساده، معادله‌ی (۳-۴-۳) برابر است با:

$$f = k d \quad (4-4-3)$$

از معادله‌ی (۳-۴-۳) مشاهده می‌شود که استفاده از مختصات اصلی منجر به چهار مؤلفه‌ی نیرو و چهار مؤلفه‌ی جابه‌جایی می‌شود. با این وصف، همان‌طور که در معادله‌ی (۱-۴-۳) نشان داده شده، چنان‌چه از مختصات محلی برای میل یا فنر استفاده شود تعداد کل مؤلفه‌های نیرو و جابه‌جایی هر یک برابر دو عدد است. با استفاده از روابط بین مؤلفه‌های نیروهای محلی و اصلی و نیز مؤلفه‌های محلی و اصلی جابه‌جایی، قادر خواهیم بود تا ماتریس سختی اصلی را به دست آوریم. با توجه به رابطه‌ی انتقال (۳-۳-۱۵) می‌دانیم که:

$$\hat{d}_{1r} = d_{1x} \cos \theta + d_{1y} \sin \theta \quad (5-4-3)$$

$$\hat{d}_{2x} = d_{2x} \cos \theta + d_{2y} \sin \theta$$

رابطه‌ی (۳-۴-۵) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} \quad (6-4-3)$$

یا

$$\hat{d} = \underline{T}^* d \quad (7-4-3)$$

درجایی که

$$\underline{T}^* = \begin{bmatrix} C & S & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C & S \end{bmatrix} \quad (8-4-3)$$

مشابهاً از آن جا که نیروها همانند جابه‌جایی‌ها انتقال می‌یابند داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} \quad (9-4-3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸-۴-۳)، معادله‌ی (۹-۴-۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\underline{\hat{f}} = \underline{T}^* \underline{f} \quad (10-4-3)$$

حال از جای‌گزینی معادله‌ی (۷-۴-۳) در رابطه‌ی (۲-۴-۳) داریم:

$$\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{kT}}^* \underline{d} \quad (11-4-3)$$

جای‌گزینی (۱۰-۴-۳) در معادله‌ی (۱۱-۴-۳) سبب می‌شود تا:

$$\underline{T}^* \underline{f} = \underline{\hat{kT}}^* \underline{d} \quad (12-4-3)$$

به هر حال، اگر بخواهیم در یک المان، عبارت نهایی را که نیروهای اصلی گره‌ها را به جابه‌جایی اصلی گره‌ها مرتبط می‌سازد بنویسیم، باید عبارت \underline{T}^* در معادله‌ی (۱۲-۴-۳) را معکوس نماییم. این امر را نمی‌توان سریعاً انجام داد زیرا \underline{T}^* ماتریسی مربعی نیست. بنابراین، علی‌رغم آنکه \hat{f}_{1y} و \hat{f}_{2y} صفرند، ولی باید $\underline{\hat{f}}$ و $\underline{\hat{d}}$ را به رتبه‌های هم‌خوان با محور مختصات اصلی بسط داد. با استفاده از معادله‌ی (۱۶-۳-۳) برای جابه‌جایی هر گره، داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{1y} \\ \hat{d}_{2x} \\ \hat{d}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & \cdot & \cdot \\ -S & C & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C & S \\ \cdot & \cdot & -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} \quad (13-4-3)$$

$$\underline{\hat{d}} = \underline{T} \underline{d} \quad (۱۴-۴-۳)$$

در جایی که:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} C & S & \cdot & \cdot \\ -S & C & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C & S \\ \cdot & \cdot & -S & C \end{bmatrix} \quad (۱۵-۴-۳)$$

متشابهاً می توان نوشت:

$$\underline{\hat{f}} = \underline{T} \underline{f} \quad (۱۶-۴-۳)$$

با توجه به وجه تشابه نیروها و جابه‌جایی‌ها، هر دو بردار محسوب می‌شوند. همچنین، $\underline{\hat{k}}$ باید به ماتریسی 4×4 بسط داده شود. بنابراین معادله‌ی (۱-۴-۳) به صورت بسط یافته برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{1y} \\ \hat{d}_{2x} \\ \hat{d}_{2y} \end{Bmatrix} \quad (۱۷-۴-۳)$$

در رابطه‌ی (۱۷-۴-۳)، از آن‌جا که $\hat{f}_{1y}, \hat{f}_{2y}$ برابر صفرند، لذا در ماتریس $\underline{\hat{k}}$ ردیف‌های صفر مرتبط با مقادیر \hat{f}_{1y} و \hat{f}_{2y} ظاهر می‌شوند. حال از جای‌گزینی روابط (۱۴-۴-۳) و (۱۶-۴-۳) در معادله‌ی (۲-۴-۳) داریم:

$$\underline{T} \underline{f} = \underline{\hat{k}} \underline{T} \underline{d} \quad (۱۸-۴-۳)$$

معادله‌ی (۱۸-۴-۳) حالت بسط یافته‌ی رابطه‌ی (۱۲-۴-۳) است. اگر طرفین معادله‌ی (۱۸-۴-۳) را در T^{-1} پیش ضرب نماییم داریم:

$$\underline{f} = \underline{T}^{-1} \underline{\hat{k}} \underline{T} \underline{d} \quad (۱۹-۴-۳)$$

در جایی که T^{-1} معکوس T است. از طرف دیگر، می‌توان نشان داد (به مسأله‌ی ۲۸-۳ مراجعه شود) که:

$$\underline{T}^{-1} = \underline{T}^T \quad (۲۰-۴-۳)$$

در جایی که \underline{T}^T ، برگردان T است. در ماتریس‌های مربعی از قبیل T خصوصیتی که در رابطه‌ی (۲۰-۴-۳) آورده شده، دال بر متعامد بودن آن ماتریس می‌نماید. به منظور توضیح بیشتر در مورد ماتریس‌های متعامد به پیوست A رجوع شود. ماتریس انتقال T در مختصات دکارته، متعامد است. از این خصوصیت T در خلال این کتاب استفاده شده است. از جای‌گزینی رابطه‌ی (۲۰-۴-۳) در معادله‌ی (۴-۳-۱۹) خواهیم داشت:

$$\underline{f} = \underline{T}^T \underline{\hat{k}} \underline{T} \underline{d} \quad (۲۱-۴-۳)$$

ضمن برابر قرار دادن رابطه‌ی (۴-۴-۳) با (۲۱-۴-۳)، ماتریس سختی اصلی المان به شرح زیر به دست می‌آید.

$$\underline{k} = \underline{T}^T \underline{k} \underline{T} \quad (۲۲-۴-۳)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۱۵-۴-۳) برای T و حالت بسط یافته‌ی $\underline{\hat{k}}$ مطابق با رابطه‌ی (۱۷-۴-۳)، در معادله‌ی (۲۲-۴-۳)، \underline{k} صریحاً به شرح زیر به دست می‌آید.

$$\underline{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^x & CS & -C^x & -CS \\ & S^x & -CS & -S^x \\ & & C^x & CS \\ \text{متقارن} & & & S^x \end{bmatrix} \quad (۲۳-۴-۳)$$

حال با توجه به آن که تابع جابه‌جایی فرضی در هر المان، معادله‌ی (۱-۱-۳)، به صورت جزء پیوسته در نظر گرفته شده لذا با استفاده از روش مستقیم سختی می‌توان از جمع ماتریس سختی هر المان نوشت:

$$\sum_{e=1}^N \underline{k}^{(e)} = \underline{K} \quad (24-4-3)$$

در جایی که \underline{K} ماتریس سختی کل و N تعداد کل المان‌ها است. متشابهاً، ماتریس‌های اصلی نیروی گره‌ای هر المان را می‌توان به قسمی جمع نمود که:

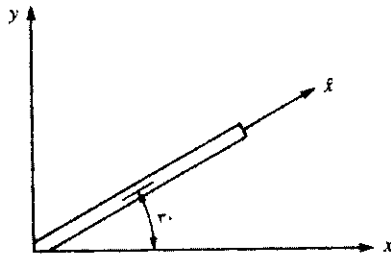
$$\sum_{e=1}^N \underline{f}^{(e)} = \underline{F} \quad (25-4-3)$$

حال، برای کل سازه، نیروهای اصلی گره‌ای \underline{F} از طریق \underline{K} به جابه‌جایی اصلی گره‌ها، \underline{d} ، مرتبط می‌شوند.

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{d} \quad (26-4-3)$$

مثال ۳-۳

در المان میله‌ای شکلی که در نمودار ۱۱-۳ نشان داده شده، ماتریس سختی اصلی را در مختصات x - y بیابید. سطح مقطع میله برابر 2 in^2 ، طول آن برابر 60 in ، و مدول الاستیسیته‌ی آن برابر $30 \times 10^6 \text{ psi}$ می‌باشد. زاویه‌ی میله با محور x برابر 30° است.



شکل ۱۱-۳ المان میله‌ای شکل به منظور محاسبه‌ی ماتریس سختی

به منظور ارزیابی ماتریس سختی میله، \underline{k} از معادله‌ی (۳-۴-۲۳)، که در آن θ به دلیل اندازه گیری آن به صورت پاد ساعتگرد از x به سمت \hat{x} ، مثبت در نظر گرفته شده، استفاده می‌کنیم. بنابراین،

$$\theta = 30^\circ \quad C = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad S = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\underline{k} = \frac{(2)(30 \times 10^6)}{60} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ & \frac{1}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{4} \\ & & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (3-4-27)$$

مقارن

پس از ساده کردن معادله‌ی (۳-۴-۲۷) داریم:

$$\underline{k} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.75 & 0.433 & -0.75 & -0.433 \\ & 0.25 & -0.433 & -0.25 \\ & & 0.75 & 0.433 \\ & & & 0.25 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (3-4-28)$$

مقارن

۳-۵ محاسبه‌ی تنش در میله‌ای که در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد

حال نحوه‌ی تعیین تنش در المان میله‌ای شکل را بررسی می‌کنیم. در یک میله، نیروهای محلی توسط رابطه‌ی (۳-۱-۱۳) یا (۳-۴-۱۷) با جابه‌جایی‌های محلی مرتبط می‌باشند. برای راحتی بیشتر، این معادله مجدداً در این‌جا تکرار می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (1-5-3)$$

طبق تعریف، تنش کششی برابر است با نیروی کششی تقسیم بر مساحت سطح مقطع. بنابراین تنش محوری برابر است با

$$\sigma = \frac{f_{1x}}{A} \quad (2-5-3)$$

در جایی که از \hat{f}_{2x} به آن دلیل استفاده شده است که بر اساس شکل ۳-۱۲، این نیرو باعث کشیدگی میله می‌شود. با توجه به معادله (۱-۵-۳)،

$$\hat{f}_{2x} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3-5-3)$$

بنابراین، از ترکیب روابط (۲-۵-۳) و (۳-۵-۳) می‌توان نوشت.

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{\hat{d}} \quad (4-5-3)$$

حال با استفاده از رابطه (۷-۴-۳)، داریم:

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{T}^* \underline{d} \quad (3-5-5)$$

معادله (۳-۵-۵) را می‌توان به صورت ساده تر زیر نوشت.

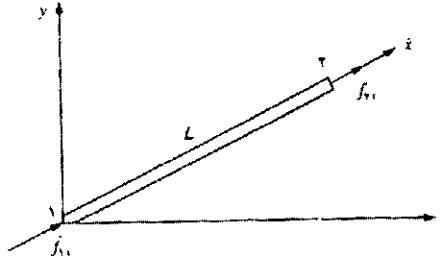
$$\underline{\sigma} = \underline{C}' \underline{d} \quad (6-5-3)$$

با استفاده از معادله (۸-۴-۳):

$$\underline{C}' = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \quad (7-5-3)$$

پس از ضرب ماتریس‌ها در معادله (۷-۵-۳) داریم:

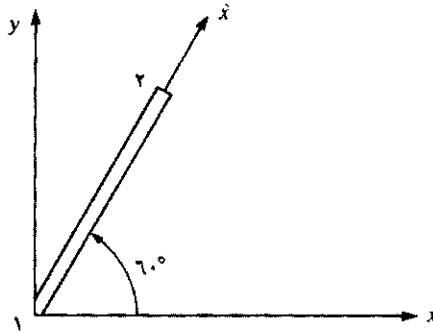
$$\underline{C}' = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -C & -S & C & S \end{bmatrix} \quad (8-5-3)$$



شکل ۳-۱۲ ساده‌ترین المان میله‌ای شکل با نیروهای گره‌ای مثبت

مثال ۳-۴

در میله‌ی مندرج در شکل ۳-۱۳، تنش محوری را محاسبه کنید. فرض کنید $L = 2 \text{ m}$ ، $E = 210 \text{ Gpa}$ ، $A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ، و زاویه‌ی بین x و x' 40° است. فرض کنید جابه‌جایی‌های اصلی از قبل مشخص و برابرند با $d_{1x} = 0.25 \text{ mm}$ ، $d_{1y} = 0.75 \text{ mm}$ و $d_{2x} = 0.50 \text{ mm}$ و $d_{2y} = 0.75 \text{ mm}$



شکل ۳-۱۳ المان میله‌ای شکل به منظور محاسبه‌ی تنش

از معادله‌ی (۳-۵-۶) می‌توان برای تعیین تنش محوری استفاده نمود؛ بنابراین ابتدا از معادله‌ی (۳-۵-۳) C' را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\underline{C}' = \frac{210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2}{2 \text{ m}} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (9-5-3)$$

در جایی که از $S = \sin 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $C = \cos 40^\circ = \frac{1}{2}$ در معادله‌ی (۹-۵-۳) استفاده شده است. حال d برابر است با:

$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.25 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 0 \\ 0.50 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 0.75 \times 10^{-2} \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (10-5-3)$$

از جای‌گزینی روابط (۹-۵-۳) و (۱۰-۵-۳) در معادله‌ی (۶-۵-۳)، تنش محوری به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_x = \frac{210 \times 10^6}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0.50 \\ 0.75 \end{Bmatrix} \times 10^{-2}$$

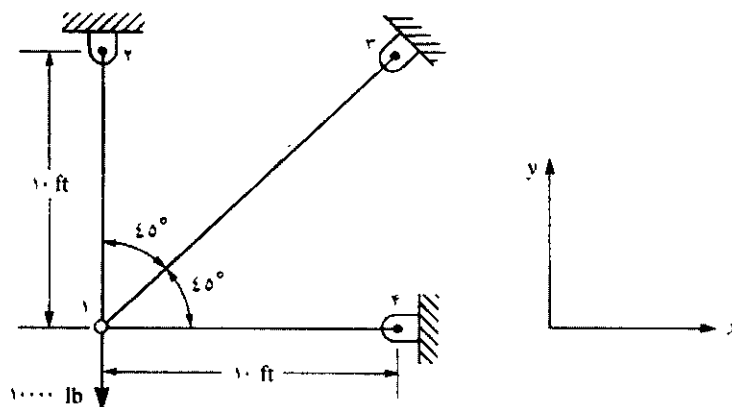
$$= 81/32 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 = 81/32 \text{ Mpa}$$

۶-۳ حل یک خرابای دو بعدی

حال کاربرد معادلاتی را که در بخش‌های ۳-۴ و ۳-۵ استخراج گردید همراه با نحوه‌ی جمع بندی معادلات و ماتریس سختی اصلی را از روش مستقیم سختی، در حل مسائل خرابای دو بعدی که آورده می‌شود نشان می‌دهیم. خرابای دو بعدی سازه‌ای است که همگی میله‌ها در یک صفحه قرار داشته و از طریق پین‌های بدون اصطکاک به هم متصلند. در یک خرابای دو بعدی، کلیه نیروها باید در یک صفحه‌ی مشترک و در محل گره‌ها یا اتصالات اعمال شوند.

مثال ۳-۵

در خریای دو بعدی مندرج در شکل ۳-۱۴ که از سه میله تشکیل شده و در گره ۱ تحت تأثیر نیروی 10000 lb به سمت پایین قرار گرفته است، مؤلفه‌های جابه‌جایی گره ۱ را در راستای x و y و تنش حاصل در هر المان را بیابید. فرض کنید در کلیه المان‌ها $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ و $A = 2 \text{ in}^2$ طول هر المان در شکل نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۴ خریای دو بعدی

ابتدا با استفاده از معادله‌ی (۳-۴-۲۳)، ماتریس‌های سختی اصلی را برای هر المان تعیین می‌کنیم. بدین منظور لازم است تا زاویه‌ی θ بین محور اصلی x و محور محلی \hat{x} برای هر المان مشخص شود. در این مثال، جهت محور \hat{x} برای هر المان از گره ۱ به سمت گره دیگر منظور شده است. هر المان به‌طور دلخواه شماره‌گذاری می‌شود. با این وصف، پس از انتخاب جهت محور، زاویه‌ی مثبت θ به صورت پاد ساعت گرد از مثبت x به سمت \hat{x} اندازه گرفته می‌شود. در المان ۱، محور مختصات محلی \hat{x} از گره ۱ به سمت گره ۲ نشانده می‌رود؛ بنابراین، $\theta^{(1)} = 90^\circ$. در المان ۲، محور محلی \hat{x} از گره ۱ به سمت گره ۳ نشانده

و $\theta^{(1)} = 25^\circ$ است. در المان ۳، محور محلی \hat{x} از گره ۱ به سمت گره ۳ هدایت شده و $\theta^{(3)} = 0^\circ$ می‌باشد. به منظور کمک به تعیین ماتریس سختی هر المان، بهتر است جدول ۱-۳ را رسم نماییم.

قبل از اعمال شرایط مرزی، در کل، هشت مؤلفه‌ی جابه‌جایی برای گره‌ها، یا درجه‌های آزادی، در خرپا وجود دارد؛ بنابراین مرتبه‌ی ماتریس سختی باید 8×8 باشد. لذا می‌توان ماتریس k هر المان را با اضافه نمودن ردیف‌ها و ستون‌های صفر، به همان ترتیب که در اولین قسمت از بخش ۲-۴ گفته شد به رتبه‌ی 8×8 بسط داد. متناوباً، همان‌طور که در قسمت بعدی بخش ۲-۴ گفته شد می‌توان ردیف‌ها و ستون‌های ماتریس سختی هر المان را بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی‌های مربوطه نام‌گذاری نمود. با استفاده از روش دوم، ماتریس سختی k ، به راحتی از جای‌گزینی ماتریس سختی هر المان در جایگاه مربوطه در ماتریس سختی K حاصل می‌شود. در این‌جا و در خلال این کتاب از این روش استفاده خواهد شد.

جدول ۱-۳ مقادیر داده شده برای خرپای مندرج در شکل ۳-۱۳

المان	θ	C	S	C^2	S^2	CS
۱	90°	۰	۱	۰	۱	۰
۲	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۳	0°	۱	۰	۱	۰	۰

در المان ۱، با استفاده از معادله‌ی (۳-۴-۲۳) و جدول ۱-۳ برای کسینوس‌های

هادی، داریم:

ماتریس سختی کل K یا معادله‌ی (۳-۶-۴)، نیروهای اصلی را به جابه‌جایی‌های اصلی مرتبط می‌سازد؛ بنابراین معادلات سختی کل سازه را با احتساب نیروی اعمال شده در گره ۱ و نیز شرایط مرزی در گره‌های ۲-۴ به شرح زیر می‌نویسیم:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \\ F_{rx} \\ F_{ry} \\ F_{rx} \\ F_{ry} \\ F_{ix} \\ F_{iy} \end{Bmatrix} = (0000000) \begin{bmatrix} 1/304 & 1/304 & 0 & 0 & -1/304 & -1/304 & -1 & 0 \\ 1/304 & 1/304 & 0 & -1 & -1/304 & -1/304 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/304 & -1/304 & 0 & 0 & 1/304 & 1/304 & 0 & 0 \\ -1/304 & -1/304 & 0 & 0 & 1/304 & 1/304 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{ix} = 0 \\ d_{iy} = 0 \\ d_{rx} = 0 \\ d_{ry} = 0 \\ d_{ix} = 0 \\ d_{iy} = 0 \end{Bmatrix} \quad (3-6-5)$$

حال می‌توان از روش تقسیم بندی ماتریس‌ها که در اولین قسمت از بخش ۲-۵ تشریح شد به منظور دستیابی به معادلاتی که بدان وسیله می‌توان مجهولات d_{ix} و d_{iy} را تعیین نمود استفاده نمود - به عبارتی دیگر، در رابطه‌ی (۳-۶-۵)، دو معادله‌ی اول را از معادلات سه الی هشت جدا می‌کنیم. متناوباً، همان‌طور که در قسمت بعدی بخش ۲-۵ گفته شد، می‌توان در ماتریس سختی کل، ردیف‌ها و ستون‌هایی را که مرتبط با جابه‌جایی‌های صفرند حذف نمود. در این‌جا از روش دوم استفاده می‌شود. به عبارتی دیگر، در معادله‌ی (۳-۶-۵) ردیف‌ها و ستون‌های ۳ الی ۸ را حذف می‌نماییم؛ چرا که ردیف‌ها و ستون‌های یاد شده مرتبط با جابه‌جایی‌های صفرند. (یادآوری می‌شود همان‌طور که در بخش ۲-۵ گفته شد، روش مستقیم سختی باید برای شرایط مرزی غیر همگن بهینه شود.) لذا داریم:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \end{Bmatrix} = (0000000) \begin{bmatrix} 1/304 & 1/304 \\ 1/304 & 1/304 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \end{Bmatrix} \quad (3-6-6)$$

حال می توان با ضرب دو طرف رابطه ی ماتریسی فوق در معکوس ماتریس سختی 2×2 ، و یا از حل همزمان دو رابطه ی معادله ی $(3-6-6)$ ، جابه جایی ها را تعیین نمود. از یکی از دو روش یاد شده جابه جایی ها برابرند با:

$$d_{1x} = 0.416 \times 10^{-2} \text{ in.} \quad d_{1y} = -1.09 \times 10^{-2} \text{ in.}$$

علامت منها در جواب به دست آمده برای d_{1x} دلالت بر آن می نماید که مؤلفه ی جابه جایی در گره ۱ و در راستای y ، در خلاف جهت مثبت y در مختصات اصلی مفروض است: به عبارتی دیگر در گره ۱ جابه جایی به سمت پایین رخ می دهد. با استفاده از معادله ی $(3-5-3)$ و جدول ۳-۱، تنش در هر المان را به شرح زیر حاصل می شود.

$$\sigma^{(1)} = -\frac{30 \times 10^6}{120} \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} d_{1x} = 0.414 \times 10^{-2} \\ d_{1y} = -1.09 \times 10^{-2} \\ d_{2x} = 0 \\ d_{2y} = 0 \end{array} \right\} = 3960 \text{ psi}$$

$$\sigma^{(2)} = -\frac{30 \times 10^6}{120 \times \sqrt{2}} \left[\begin{array}{cccc} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} d_{1x} = 0.414 \times 10^{-2} \\ d_{1y} = -1.09 \times 10^{-2} \\ d_{2x} = 0 \\ d_{2y} = 0 \end{array} \right\} \\ = 1471 \text{ psi}$$

$$\sigma^{(3)} = -\frac{30 \times 10^6}{120} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} d_{1x} = 0.414 \times 10^{-2} \\ d_{1y} = -1.09 \times 10^{-2} \\ d_{2x} = 0 \\ d_{2y} = 0 \end{array} \right\} = -1030 \text{ psi}$$

حال نتایج خود را با نتایج حاصل از اعمال تعادل نیروها در گره ۱ ارزیابی می کنیم: به عبارتی دیگر با جمع نیروها در جهت های اصلی x و y داریم:

$$\sum F_x = 0 \quad (1471 \text{ psi})(2 \text{ in}^2) \frac{\sqrt{2}}{2} - (1035 \text{ psi})(2 \text{ in}^2) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad (3965 \text{ psi})(2 \text{ in}^2) - (1471 \text{ psi})(2 \text{ in}^2) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



مثال ۳-۶

در خرابی دو میله‌ای مندرج در شکل ۳-۱۵، نیرو در هر المان و جابه‌جایی گره ۱ را در راستای لایباید. نیروی $P = 1000 \text{ kN}$ در جهت لایبر گره ۱ اعمال شده در حالی که این گره به میزان $\delta = 50 \text{ mm}$ در جهت منفی x نشست می‌کند. برای هر المان فرض کنید $E = 210 \text{ Gpa}$ و $A = 6/00 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. طول المان‌ها بر روی شکل نشان داده شده‌اند.

ابتدا از معادله‌ی (۳-۴-۲۳) شروع نموده و ماتریس سختی هر المان را تعیین می‌کنیم.

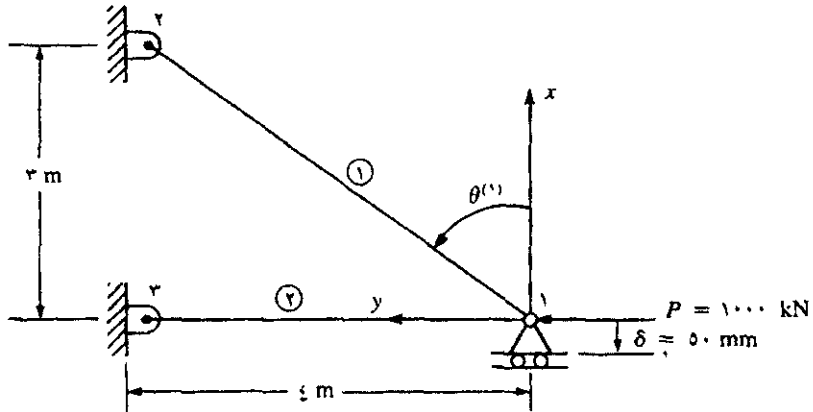
المان ۱

$$\cos \theta^{(1)} = \frac{3}{5} = 0/6 \quad \sin \theta^{(1)} = \frac{4}{5} = 0/8$$

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{(6/00 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(210 \times 10^3 \text{ kN/m}^2)}{0\text{m}} \begin{bmatrix} 0/36 & 0/48 & -0/36 & -0/48 \\ & 0/64 & -0/48 & -0/64 \\ & & 0/36 & 0/48 \\ \text{مقارن} & & & 0/64 \end{bmatrix}$$

(۳-۶-۷)

از ساده کردن معادله‌ی (۳-۶-۷) داریم:



شکل ۳-۱۵ خرابی دو میله‌ای

$$\underline{k}^{(1)} = (20200) \begin{bmatrix} d_{ix} & d_{iy} & d_{ix} & d_{iy} \\ \cdot/36 & \cdot/48 & -\cdot/36 & -\cdot/48 \\ & \cdot/64 & -\cdot/48 & -\cdot/64 \\ & & \cdot/36 & \cdot/48 \\ \text{متقارن} & & & \cdot/64 \end{bmatrix} \quad (8-6-3)$$

المان ۲

$$\cos \theta^{(1)} = \cdot/5 \quad \sin \theta^{(1)} = \cdot/5$$

$$\underline{k}^{(2)} = \frac{(7/0 \times 10^{-2})(210 \times 10^3)}{4} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \cdot & -1 \\ & & \cdot & \cdot \\ \text{متقارن} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (9-6-3)$$

$$\underline{k}^{(2)} = (25200) \begin{bmatrix} d_{ix} & d_{iy} & d_{rx} & d_{ry} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/25 & 0 & -1/25 \\ & & 0 & 0 \\ متقارن & & & 1/25 \end{bmatrix} \quad (10-6-3)$$

در جایی که به منظور سهولت در امر محاسبات، معادله‌ی (۱۰-۶-۳)، با همان ضریب ۲۵۲۰۰ قید شده در جلوی معادله‌ی ماتریسی (۸-۶-۳)، آورده شده است. از جمع ماتریس‌های سختی هر المان، معادلات (۸-۶-۳) و (۱۰-۶-۳)، ماتریس اصلی \underline{K} را یافته و نیروهای اصلی با جابه‌جایی‌های اصلی به شرح زیر مرتبط می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{rx} \\ F_{ry} \\ F_{rx} \\ F_{ry} \end{Bmatrix} = (25200) \begin{bmatrix} 0/36 & 0/48 & -0/36 & -0/48 & 0 & 0 \\ & 1/89 & -0/48 & -0/64 & 0 & -1/25 \\ & & 0/36 & 0/48 & 0 & 0 \\ & & & 0/64 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ متقارن & & & & & 1/25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{rx} \\ d_{ry} \\ d_{rx} \\ d_{ry} \end{Bmatrix} \quad (11-6-3)$$

مجدداً می‌توان معادلات را بر اساس جابه‌جایی‌های معلوم تقسیم بندی نموده و سپس معادلات مرتبط با جابه‌جایی‌های مجهول را به‌طور همزمان حل نمود. به منظور این تقسیم بندی شرایط مرزی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$d_{ix} = \delta \quad d_{rx} = 0 \quad d_{iy} = 0 \quad d_{ry} = 0 \quad (12-6-3)$$

لذا با توجه به روابط (۱۲-۶-۳)، معادله‌ی ۲ را از روابط ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶ در معادله‌ی (۱۱-۶-۳) جدا نموده و نهایتاً داریم:

$$P = 25200(0/48\delta + 1/89d_{iy}) \quad (13-6-3)$$

در جایی که $F_{iy} = P$ و $d_{ix} = \delta$ در معادله‌ی (۱۳-۶-۳) جای‌گزین شده‌اند. چنانچه معادله‌ی (۱۳-۶-۳) بر حسب P و δ تشریح شود قادر خواهیم بود تا

صریحاً اثر این دو پارامتر را بر d_{iy} از هم جدا کنیم. از حل رابطه‌ی (۳-۶-۱۳) برای d_{iy} داریم:

$$d_{iy} = 0.00021P - 0.254\delta \quad (14-6-3)$$

حال با جای‌گزینی مقدار عددی $P = 1000 \text{ kN}$ و $\delta = -0.37 \text{ m}$ در معادله‌ی (۳-۶-۱۴)، داریم:

$$d_{iy} = 0.337 \text{ m} \quad (15-6-3)$$

در جایی که مقدار مثبت دلالت بر جابه‌جایی افقی به سمت چپ می‌نماید. نیروهای محلی در هر المان را می‌توان با استفاده از معادله‌ی (۳-۶-۱۱) به دست آورد. لذا داریم:

المان ۱

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{ix} \\ \hat{f}_{ix} \end{Bmatrix} = (31500) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} = -0.05 \\ d_{iy} = 0.337 \\ d_{rx} = 0 \\ d_{ry} = 0 \end{Bmatrix} \quad (16-6-3)$$

پس از ضرب سه عبارت ماتریسی رابطه‌ی (۳-۶-۱۶) داریم:

$$\hat{f}_{ix} = -76/6 \text{ kN} \quad \hat{f}_{ix} = 76/6 \text{ kN} \quad (17-6-3)$$

المان ۲

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{ix} \\ \hat{f}_{ix} \end{Bmatrix} = (31500) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} = -0.05 \\ d_{iy} = 0.337 \\ d_{rx} = 0 \\ d_{ry} = 0 \end{Bmatrix} \quad (18-6-3)$$

پس از ضرب سه عبارت ماتریسی رابطه‌ی (۳-۶-۱۸) داریم:

$$f_{ix} = 10.61 \text{ kN} \quad f_{ix} = -10.61 \text{ kN} \quad (19-6-3)$$

ارزیابی محاسبات از طریق اعمال تعادل در گره ۱ به اختیار شما گذاشته می‌شود.

مثال ۷-۳

حال، به منظور تشریح نحوه‌ی ترکیب المان میله‌ای شکل و فنر، خریبای دو میله‌ای مندرج در شکل ۱۶-۳ را که بر روی فنری قرار دارد حل می‌کنیم. در هر دو میله، $E = ۲۱۰ \text{ GPa}$ و $A = ۵/۰ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^2$ طول المان یک ۵ m و طول المان دو ۱۰ m است. ضریب فنر برابر $k = ۲۰۰۰ \text{ kN/m}$ می‌باشد.

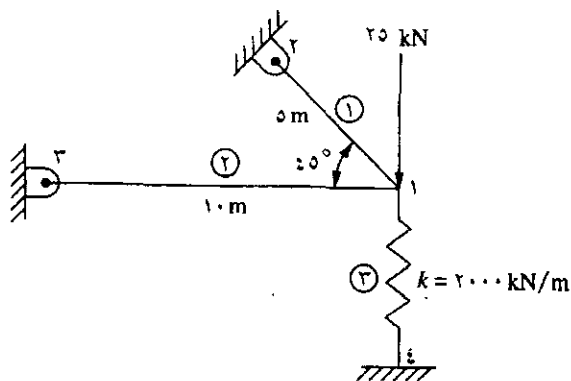
به منظور تعیین ماتریس سختی هر المان از معادله‌ی (۳-۴-۲۳) شروع می‌کنیم.

المان ۱

$$\theta^{(1)} = ۱۳۵^\circ \quad \cos \theta^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \theta^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{(۵/۰ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^2)(۲۱۰ \times ۱۰^۹ \text{ kN/m}^2)}{۵ \text{ m}} \begin{bmatrix} ۰/۵ & -۰/۵ & -۰/۵ & ۰/۵ \\ -۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ & -۰/۵ \\ -۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ & -۰/۵ \\ ۰/۵ & -۰/۵ & -۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

(۳-۶-۲۰)



شکل ۱۶-۳ خریبای دو میله‌ای با تکیه‌گاه فنری

از ساده کردن معادله‌ی (۲۰-۶-۳) داریم:

$$\underline{k}^{(1)} = 10.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (21-6-3)$$

المان ۲

$$\theta^{(2)} = 18.0^\circ \quad \cos \theta^{(2)} = -1/0. \quad \sin \theta^{(2)} = 0.$$

$$\underline{k}^{(2)} = \frac{(0/0 \times 10^{-4})(21.0 \times 10^6)}{1.0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22-6-3)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۲۲-۶-۳) داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = 10.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23-6-3)$$

المان ۳

$$\theta^{(3)} = 27.0^\circ \quad \cos \theta^{(3)} = 0. \quad \sin \theta^{(3)} = 1/0.$$

چنانچه از معادله‌ی (۲۳-۴-۳) استفاده شود، ضمن جای‌گزین نمودن AE/L

به‌جای k ، ماتریس سختی فنر به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{k}^{(3)} = 20.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24-6-3)$$

از اعمال شرایط مرزی داریم:

$$d_{rx} = d_{ry} = d_{rx} = d_{ry} = d_{ix} = d_{iy} = 0 \quad (25-6-3)$$

با استفاده از شرایط مرزی مندرج در رابطه‌ی (۲۵-۶-۳)، معادلات به هم گذاشته شده‌ی تقلیل یافته در مختصات اصلی برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} = 0 \\ F_{iy} = -25 \text{ kN} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 210 & -105 \\ -105 & 125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \end{Bmatrix} \quad (26-6-3)$$

از حل معادلات (۲۶-۶-۳) برای جابه‌جایی‌های اصلی، داریم:

$$d_{ix} = -1/724 \times 10^{-7} \text{ m} \quad d_{iy} = -3/448 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (27-6-3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۵-۶)، تنش در المان‌های میله‌ای شکل برابرند با:

$$\sigma^{(1)} = \frac{210 \times 10^9 \text{ MN/m}^2}{10 \text{ m}} \begin{bmatrix} 0/707 & -0/707 & -0/707 & 0/707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/724 \times 10^{-7} \\ -3/448 \times 10^{-7} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

از ساده کردن رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$\sigma^{(1)} = 51/2 \text{ MPa (T)}$$

متشابهاً، تنش در دومین المان برابر است با:

$$\sigma^{(2)} = \frac{210 \times 10^9 \text{ MN/m}^2}{10 \text{ m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/724 \times 10^{-7} \\ -3/448 \times 10^{-7} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

از ساده کردن رابطه‌ی فوق داریم:

$$\sigma^{(2)} = 36/2 \text{ MPa (C)}$$

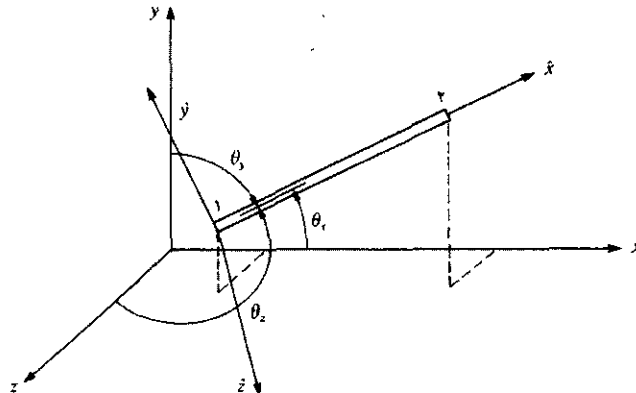
۷-۳ ماتریس‌های انتقال و سختی برای یک میله در فضایی سه بعدی

حال ماتریس انتقال مورد نیاز را جهت تعیین ماتریس سختی المان میله‌ای شکلی که طبق نمودار ۱۷-۳ تحت زاویه‌ی دلخواهی در فضایی سه بعدی قرار دارد تعیین می‌کنیم. مختصات فرض شده در گره ۱، α_1 و β_1 و در گره ۲، α_2 و β_2 و γ_2 می‌باشند. همچنین، θ_x ، θ_y و θ_z زاویه‌ای مختصات اصلی x ، y و z نسبت به مختصات محلی \hat{x} است. در این جا \hat{x} در امتداد المان و از گره ۱ به سمت گره ۲ است. حال T^* باید به قسمی تعیین شود که $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{T}^* \mathbf{d}$. به منظور تعیین T^* ابتدا برداری همانند $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}$ را در فضایی سه بعدی به قسمی در نظر می‌گیریم که

$$\hat{d}_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{d}_y \hat{\mathbf{j}} + \hat{d}_z \hat{\mathbf{k}} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (1-7-3)$$

در جایی که $\hat{\mathbf{i}}$ ، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ به ترتیب بردارهای یکه در مختصات محلی \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} و \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} بردارهای یکه در محور مختصات اصلی x ، y و z می‌باشند. با تعیین حاصل ضرب داخلی معادله‌ی (۱-۷-۳) در $\hat{\mathbf{i}}$ داریم:

$$\hat{d}_x + 0 + 0 = d_x (\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i}) + d_y (\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j}) + d_z (\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{k}) \quad (2-7-3)$$



شکل ۱۷-۳ میله در فضایی سه بعدی

طبق تعریف ضرب داخلی،

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} &= \frac{x_r - x_1}{L} = C_x \\ \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} &= \frac{y_r - y_1}{L} = C_y \\ \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} &= \frac{z_r - z_1}{L} = C_z\end{aligned}\quad (3-7-3)$$

در جایی که

$$L = \left[(x_r - x_1)^2 + (y_r - y_1)^2 + (z_r - z_1)^2 \right]^{1/2}$$

و

$$C_x = \cos \theta_x \quad C_y = \cos \theta_y \quad C_z = \cos \theta_z \quad (4-7-3)$$

در این جا C_x ، C_y و C_z به ترتیب تصاویر $\hat{\mathbf{i}}$ بر $\hat{\mathbf{i}}$ ، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ می باشند. لذا، از جایگزینی روابط (3-7-3) در (2-7-3) داریم:

$$\hat{d}_x = C_x d_x + C_y d_y + C_z d_z \quad (5-7-3)$$

در برداری فضایی در امتداد محور \hat{x} ، معادله‌ی (5-7-3) معرف مؤلفه‌های آن بردار در جهت های اصلی x ، y و z می باشد. حال، با استفاده از رابطه‌ی (5-7-3)، می توان رابطه‌ی $\hat{d} = \underline{T}^* d$ را صریحاً به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_{ix} \\ \hat{d}_{iy} \\ \hat{d}_{iz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \\ d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \end{Bmatrix} \quad (6-7-3)$$

در جایی که

$$\underline{T}^* = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \quad (7-7-3)$$

ماتریس انتقال بوده و سبب می شود تا بتوان ماتریس محلی جابه‌جایی \hat{d} را بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی در محور مختصات اصلی تشریح نمود.

در بخش ۳-۴ نشان دادیم که ماتریس سختی (برای المان میله‌ای شکلی در مختصات اصلی) به صورت $\underline{k} = \underline{T}^T \hat{k} \underline{T}$ بیان می‌شود. حال از این معادله به منظور تعریف حالت کلی ماتریس سختی المان میله‌ای شکلی که تحت زاویه‌ای دلخواهی در فضایی سه بعدی قرار دارد استفاده خواهد شد. عموماً، ماتریس انتقال را به همان صورتی بسط می‌دهیم که در بخش ۳-۴ از آن به منظور بسط \underline{T}^* به \underline{T} استفاده شد. با این وصف، چنانچه در این جا از \underline{T}^* ، تعریف شده در رابطه‌ی (۳-۷-۷)، به جای \underline{T} استفاده شود همان نتیجه حاصل خواهد شد. بنابراین، بسا استفاده از معادله‌ی $\underline{k} = (\underline{T}^*)^T \hat{k} \underline{T}^*$ به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} C_x & \cdot \\ C_y & \cdot \\ C_z & \cdot \\ \cdot & C_x \\ \cdot & C_x \\ \cdot & C_x \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \quad (۳-۷-۸)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۳-۷-۸)، ماتریس \underline{k} صریحاً به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C_x^T & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^T & -C_x C_y & -C_x C_z \\ & C_y^T & C_y C_z & -C_x C_y & -C_y^T & -C_y C_z \\ & & C_z^T & -C_x C_z & -C_y C_z & -C_z^T \\ & & & C_x^T & C_x C_y & C_x C_z \\ متقارن & & & & C_y^T & C_y C_z \\ & & & & & C_z^T \end{bmatrix} \quad (۳-۷-۹)$$

شما باید صحت معادله‌ی (۳-۷-۹) را ارزیابی کنید. بدین منظور، ابتدا همان‌طور که در بخش ۳-۴ برای حالت دو بعدی گفته شد ماتریس \underline{T}^* را به ماتریس 6×6 مربعی

بسط دهید. سپس با اضافه نمودن ردیف‌ها و ستون‌های صفر (برای عبارات \hat{d}_i) در معادله‌ی (۳-۴-۱۷)، \hat{k} را به ماتریسی 6×6 بسط دهید. نهایتاً، از ضرب سه عبارت ماتریسی، حاصل ضرب عبارت $\underline{k} = \underline{T}^T \underline{\hat{K}} \underline{T}$ را تعیین کنید (به مثال ۳-۴۴ مراجعه نمایید).

معادله‌ی (۳-۷-۹) ساده‌ترین ماتریس سختی در یک المان میله‌ای شکل در فضایی سه بعدی تحت زاویه‌ای دلخواه است. حال به منظور روشن ساختن اصول استخراج شده در این بخش، خرپای ساده‌ای را در فضایی سه بعدی تجزیه و تحلیل می‌کنیم. ما نشان خواهیم داد که روش مستقیم سختی، روشی ساده در حل خرپاهای سه بعدی به شمار می‌رود.

مثال ۳-۸

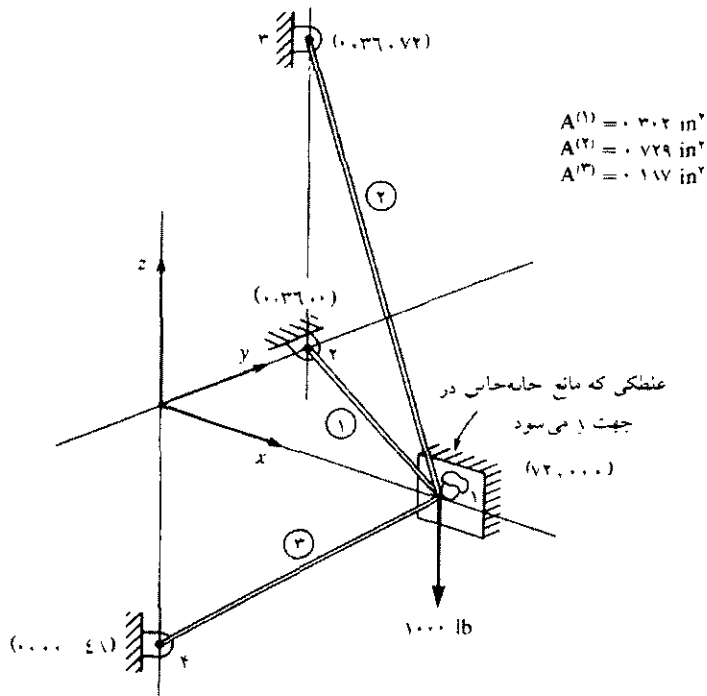
خرپای مندرج در شکل ۳-۱۸ را تجزیه و تحلیل نمایید. خرپا از چهار گره که مختصات آن‌ها (بر حسب اینچ) در شکل نشان داده شده و نیز سه المان که سطح مقطع هر یک بر روی شکل آورده شده‌اند تشکیل شده است. مدول الاستیسیته‌ی کلیه‌ی المان‌ها $E = 1/2 \times 10^6 \text{ psi}$ است. باری برابر 1000 lb در جهت منفی z بر گره ۱ اعمال شده است. تکیه‌گاه مفاصل ۲-۴ از نوع لولایی سه بعدی بوده و لذا جابه‌جایی آن‌ها در جهت x ، y و z برابر صفر است. همان‌طور که در شکل ۳-۱۸ نشان داده شده، گره ۱ به دلیل حضور غلطک، نمی‌تواند در جهت y حرکتی داشته باشد.

حال با استفاده از معادله‌ی (۳-۷-۹)، ماتریس سختی سه المان مندرج در شکل ۳-۱۸ را تعیین می‌کنیم. به منظور سهولت بخشی در محاسبات، ابتدا \underline{k} را برای هر المان توسط رابطه‌ی (۳-۷-۹) به صورت زیر تشریح می‌کنیم.

$$\underline{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \underline{\lambda} & -\underline{\lambda} \\ -\underline{\lambda} & \underline{\lambda} \end{bmatrix} \quad (10-7-3)$$

در جایی که $\underline{\lambda}$ جزء ماتریس 3×3 است که توسط رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} C_x^r & C_x C_y & C_x C_z \\ C_y C_x & C_y^r & C_y C_z \\ C_z C_x & C_z C_y & C_z^r \end{bmatrix} \quad (11-7-3)$$



شکل ۳-۱۸ خریای سه بعدی

لذا چنانچه \underline{k} تعیین شود ماتریس \underline{k} نیز مشخص خواهد شد.

المان ۳

کسینوس‌های هادی المان ۳ به‌طورکل برابرند با:

$$C_x = \frac{x_i - x_1}{L^{(r)}} \quad C_y = \frac{y_i - y_1}{L^{(r)}} \quad C_z = \frac{z_i - z_1}{L^{(r)}} \quad (3-7-12)$$

در جایی که از نماد x_i ، y_i و z_i به منظور نشان دادن مختصات هر گره استفاده شده و $L^{(e)}$ معرف طول المان است. با توجه به مختصات داده شده در شکل ۳-۱۸، طول و کسینوس های هادی را به شرح زیر به دست می آوریم.

$$L^{(r)} = \left[(-72/0)^2 + (-48/0)^2 \right]^{1/2} = 87/0 \text{ in}$$

$$C_x = \frac{-72/0}{87/0} = -0/833 \quad C_y = 0 \quad C_z = \frac{-48/0}{87/0} = -0/550 \quad (13-7-3)$$

از جای‌گزینی نتایج معادلات (۱۳-۷-۳) در معادله (۱۱-۷-۳) داریم:

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 0/79 & 0 & 0/46 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0/46 & 0 & 0/30 \end{bmatrix} \quad (14-7-3)$$

و از معادله (۱۰-۷-۳)،

$$\underline{k}^{(r)} = \frac{d_{1x}d_{1y}d_{1z} \quad d_{2x}d_{2y}d_{2z}}{87/0} \begin{bmatrix} \underline{\lambda} & -\underline{\lambda} \\ -\underline{\lambda} & \underline{\lambda} \end{bmatrix} \quad (15-7-3)$$

المان ۱

متشابهاً، در المان ۱ داریم:

$$L^{(1)} = 80/0 \text{ in.}$$

$$C_x = -0/89 \quad C_y = 0/40 \quad C_z = 0$$

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 0/79 & -0/40 & 0 \\ -0/40 & 0/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{(0/302)(1/2 \times 10^6)}{80/5} \begin{matrix} d_{1x}d_{1y}d_{1z} & d_{rx}d_{ry}d_{rz} \\ \left[\begin{array}{cc} \underline{\lambda} & -\underline{\lambda} \\ -\underline{\lambda} & \underline{\lambda} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (16-7-3)$$

المان ۲

نهایتاً، در المان ۲ داریم:

$$L^{(2)} = 10.8 \text{ in.}$$

$$C_x = -0/667 \quad C_y = 0/33 \quad C_z = 0/667$$

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 0/45 & -0/22 & -0/45 \\ -0/22 & 0/11 & 0/45 \\ -0/45 & 0/45 & 0/45 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^{(2)} = \frac{(0/729)(1/2 \times 10^6)}{10.8} \begin{matrix} d_{1x}d_{1y}d_{1z} & d_{rx}d_{ry}d_{rz} \\ \left[\begin{array}{cc} \underline{\lambda} & -\underline{\lambda} \\ -\underline{\lambda} & \underline{\lambda} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (17-7-3)$$

با استفاده از شرایط مرزی جابه‌جایی‌های صفر، $d_{1y} = 0$ ، $d_{rx} = d_{ry} = d_{rz} = 0$ ، می‌توان ردیف‌ها و ستون‌های مربوطه در هر یک از ماتریس‌های سختی را حذف نمود. پس از حذف ردیف‌ها و ستون‌های یاد شده در معادلات (۱۵-۷-۳) الی (۱۷-۷-۳) و جمع ماتریس‌های سختی به دست آمده در هر المان، ماتریس سختی کل خرابی برابر است با:

$$\underline{K} = \begin{matrix} d_{1z} & d_{1z} \\ \left[\begin{array}{cc} 9000 & -2450 \\ -2450 & 4450 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (18-7-3)$$

لذا معادلات سختی کل برابرند با:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -1000 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 9000 & -2450 \\ -2450 & 4450 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} d_{1z} \\ d_{1z} \end{array} \right\} \quad (19-7-3)$$

از حل معادله‌ی (۱۹-۷-۳) برای جابه‌جایی‌ها داریم:

$$\begin{aligned}d_{ix} &= -0.072 \text{ in.} \\d_{iz} &= -0.264 \text{ in.}\end{aligned}\quad (20-7-3)$$

در جایی که علامت منها در جابه‌جایی‌ها دلالت بر آن می‌نماید که مقادیر به دست آمده در جهت منفی x و z عمل می‌کنند.

حال تنش در هر المان را محاسبه می‌کنیم. تنش‌ها، با استفاده از معادله‌ی (۳-۵-۶)، در فضایی سه بعدی محاسبه می‌شوند. لذا در المانی با گره‌های i و j معادله‌ی (۳-۵-۶) در فضایی سه بعدی برابر است با:

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -C_x & -C_y & -C_z & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \\ d_{jx} \\ d_{jy} \\ d_{jz} \end{Bmatrix}. \quad (21-7-3)$$

معادله‌ی (۳-۵-۶) را از همان روشی که معادله‌ی (۳-۵-۶) استخراج گردید استخراج نمایید. (برای مثال، به مسأله‌ی ۳-۴۵ مراجعه شود). در المان ۳، با استفاده از معادلات (۳-۷-۱۳) برای کسینوس‌های هادی، و نیز طول و مدول الاستیسیته‌ی مربوطه، مقدار تنش برابر است با:

$$\underline{\sigma}^{(3)} = \frac{1/2 \times 10^7}{86/5} \begin{bmatrix} 0.183 & 0 & 0.05 & -0.183 & 0 & -0.05 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.072 \\ 0 \\ -0.264 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22-7-3)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۳-۷-۲۲)، نتیجه برابر است با:

$$\sigma^{(3)} = -2850 \text{ psi}$$

در جایی که علامت منفی در جواب، دلالت بر تراکمی بودن تنش می‌نماید. تنش در المان‌های دیگر را می‌توان به همان صورتی که در المان ۳ انجام شد محاسبه نمود. جهت اختصار، محاسبات را نشان نداده و فقط مقادیر تنش نوشته می‌شوند:

$$\sigma^{(1)} = -945 \text{ psi} \quad \sigma^{(2)} = 1440 \text{ psi}$$

مثال ۳-۹

خرپای سه بعدی مندرج در شکل ۳-۱۹ را تحلیل نمایید. این خرپا از چهار گره که مختصات آن‌ها (بر حسب متر) بر روی شکل نشان داده شده، و سه المان، که سطح مقطع هر یک برابر $m^2 \times 10^{-4}$ است، تشکیل شده است. مدول الاستیسیته‌ی کلیه‌ی المان‌ها برابر $E = 210 \text{ GPa}$ است. نیرویی برابر 20 kN در جهت اصلی x بر گره ۱ اعمال شده است. گره‌های ۲-۴ بر تکیه‌گاه‌های لولایی قرار داشته و نمی‌توانند در جهت x ، y ، و z حرکتی داشته باشند.

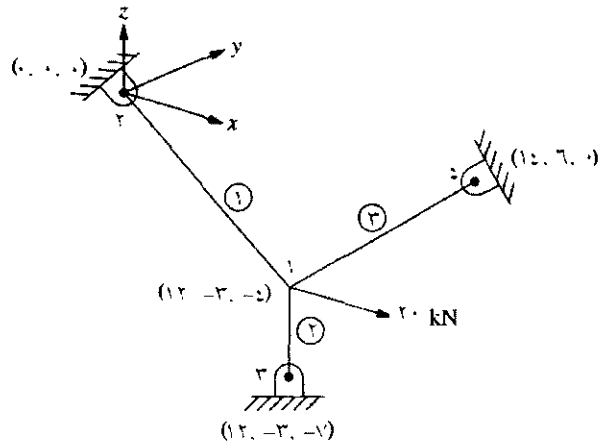
ابتدا با استفاده از مختصات داده شده در شکل ۳-۱۹ و فرمول فاصله‌ی بین نقاط، طول هر المان را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$L^{(1)} = [(0-12)^2 + (0-(-3))^2 + (0-(-4))^2]^{1/2} = 13 \text{ m}$$

$$L^{(2)} = [(12-12)^2 + (-3+3)^2 + (-7+4)^2]^{1/2} = 3 \text{ m}$$

$$L^{(3)} = [(14-12)^2 + (6+3)^2 + (0+4)^2]^{1/2} = 10.05 \text{ m}$$

برای راحتی، به منظور محاسبه‌ی کسینوس‌های هادی جدولی را تشکیل داده که در آن محور محلی x برای المان‌های ۱، ۲، و ۳ به ترتیب از گره ۱ به سمت گره ۲، از گره ۱ به سمت گره ۳، و از گره ۱ به سمت گره ۴، منظور شده است.



شکل ۳-۱۹ خریای سه بعدی

شماره‌ی المان	$C_1 = \frac{x_2 - x_1}{L^{(1)}}$	$C_2 = \frac{y_2 - y_1}{L^{(1)}}$	$C_3 = \frac{z_2 - z_1}{L^{(1)}}$
۱	$\frac{12}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{10.05}$
۲	۰	-۱	$\frac{2}{10.05}$
۳	$\frac{2}{10.05}$	$\frac{9}{10.05}$	$\frac{12}{13}$

حال، جدولی را که شامل حاصل ضرب کسینوس‌های هادی است بر اساس تعریف ۱ که در رابطه‌ی (۳-۷-۱۱) داده شد تشکیل می‌دهیم

شماره‌ی المان	C_1^2	$C_1 C_2$	$C_1 C_3$	C_2^2	$C_2 C_3$	C_3^2
۱	۰.۸۵۲	-۰.۰۷۱	-۰.۲۱۳	۰.۰۵۳	-۰.۲۸۴	۰.۰۹۵
۲	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۳	۰.۰۴۰	۰.۰۷۹	۰.۱۷۸	۰.۸۰۲	۰.۳۵۶	۰.۱۵۸

با استفاده از معادله‌ی (۳-۷-۱۱)، $\underline{\lambda}$ در هر المان به شرح زیر تشریح می‌شود:

$$\underline{\lambda}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0/852 & -0/213 & -0/284 \\ -0/213 & 0/053 & 0/071 \\ -0/284 & 0/071 & 0/095 \end{bmatrix} \quad \underline{\lambda}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23-7-3)$$

$$\underline{\lambda}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0/040 & 0/178 & 0/079 \\ 0/128 & 0/802 & 0/356 \\ 0/079 & 0/356 & 0/158 \end{bmatrix}$$

شرایط مرزی به شرح زیر می‌باشند:

$$d_{r_1} = d_{r_3} = d_{r_z} = 0, \quad d_{r_x} = d_{r_y} = d_{r_z} = 0, \quad d_{i_x} = d_{i_y} = d_{i_z} = 0 \quad (24-7-3)$$

ضمن تشریح ماتریس سختی بر حسب $\underline{\lambda}$ در قالب معادله‌ی (۳-۷-۱۰)، ماتریس سختی هر المان را به شرح زیر می‌نویسیم:

$$k^{(1)} = \frac{AE}{13} \left[\begin{array}{c|c} \underline{\lambda}^{(1)} & -\underline{\lambda}^{(1)} \\ \hline -\underline{\lambda}^{(1)} & \underline{\lambda}^{(1)} \end{array} \right] \quad k^{(2)} = \frac{AE}{3} \left[\begin{array}{c|c} \underline{\lambda}^{(2)} & -\underline{\lambda}^{(2)} \\ \hline -\underline{\lambda}^{(2)} & \underline{\lambda}^{(2)} \end{array} \right] \quad (25-7-3)$$

$$k^{(3)} = \frac{AE}{10/05} \left[\begin{array}{c|c} \underline{\lambda}^{(3)} & -\underline{\lambda}^{(3)} \\ \hline -\underline{\lambda}^{(3)} & \underline{\lambda}^{(3)} \end{array} \right]$$

ضمن اعمال شرایط مرزی و حذف ردیف‌ها و ستون‌های مرتبط با تغییر مکان‌های صفر در روابط (۳-۷-۲۵)، سپس انطباق ماتریس‌های سختی به دست آمده در هر المان، ماتریس سختی کل خرپا به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{K} = 210 \times 10^7 \begin{bmatrix} 79/519 & 1/327 & -13/985 \\ 1/327 & 83/879 & 40/885 \\ -13/985 & 40/885 & 356/363 \end{bmatrix} \text{ kN/m} \quad (26-7-3)$$

لذا، معادلات سختی اصلی برابر خواهند بود با:

$$\begin{Bmatrix} 20 \text{ kN} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 210 \times 10^3 \begin{bmatrix} 79/519 & 1/327 & -13/985 \\ 1/327 & 83/879 & 40/885 \\ -13/985 & 40/885 & 356/363 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \end{Bmatrix} \quad (27-7-3)$$

پس از محاسبه‌ی جابه‌جایی‌ها داریم:

$$d_{ix} = 1/383 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d_{iy} = -5/119 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (28-7-3)$$

$$d_{iz} = 6/015 \times 10^{-3} \text{ m}$$

حال، با استفاده از معادله‌ی (۲۱-۷-۳)، تنش در المان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma^{(1)} = \frac{210 \times 10^3}{13} \begin{bmatrix} 12 & -3 & -4 & -12 & 3 & 4 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/383 \times 10^{-3} \\ -5/119 \times 10^{-3} \\ 6/015 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29-7-3)$$

پس از ساده کردن رابطه‌ی (۲۹-۷-۳)، مقدار تنش بر حسب MPa برابر است با:

$$\sigma^{(1)} = 20/51 \text{ MPa} \quad (30-7-3)$$

تنش در دیگر المان‌ها را می‌توان به طریقی مشابه به دست آورد؛ به قسمی که:

$$\sigma^{(2)} = 4/21 \text{ MPa} \quad \sigma^{(3)} = -5/29 \text{ MPa} \quad (31-7-3)$$

علامت منها در رابطه‌ی (۳۱-۷-۳) دلالت بر تراکمی بودن تنش در المان ۳ می‌نماید.



۸-۳ استفاده از تقارن در سازه

در یک سازه ممکن است تقارن‌های مختلفی وجود داشته باشد. از جمله‌ی این

تقارن‌ها می‌توان تقارن‌های آینه‌ای یا انعکاسی، اریب، محوری و نوسانی را نام برد. در این جا رایج‌ترین نوع تقارن، تقارن آینه‌ای یا انعکاسی را معرفی می‌کنیم. تقارن محوری هنگامی حاصل می‌شود که جسم دواری از دوران سطح مسطحی حول یک محور که در صفحه‌ی آن شکل قرار دارد حاصل می‌شود. اجسام متعددی وجود دارند که حول یک محور متقارند، لذا تجزیه و تحلیل آن‌ها در فصل ۹ صورت خواهد گرفت.

در بسیاری از مواقع، می‌توان از تقارن آینه‌ای به منظور سهولت در حل یک مسأله استفاده نمود. تقارن آینه‌ای بدان معنی است که شباهت در اندازه، شکل، محل بارها، خصوصیات ماده و شرایط مرزی، نسبت به یک خط یا صفحه‌ی تقسیم‌کننده‌ای در جسم وجود داشته باشد. استفاده از تقارن، این امر را فراهم می‌سازد تا به جای کل مسأله، قسمتی از آن در نظر گرفته شود. لذا می‌توان اندازه‌ی ماتریس سختی کل و نیز تعداد کل معادلات را کاهش داد؛ بنابراین، زمان حل دستی مسأله کاهش یافته و زمان محاسبه‌ی یک مسأله بزرگ توسط رایانه نیز به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. از مسأله‌ی ۳-۱۰ به منظور تشریح تقارن آینه‌ای استفاده خواهد شد. مثال‌های بیشتری در زمینه کاربرد تقارن در تیرآهن‌ها در فصل ۴، و مسائل صفحه‌ای در فصل ۷ آورده شده است.

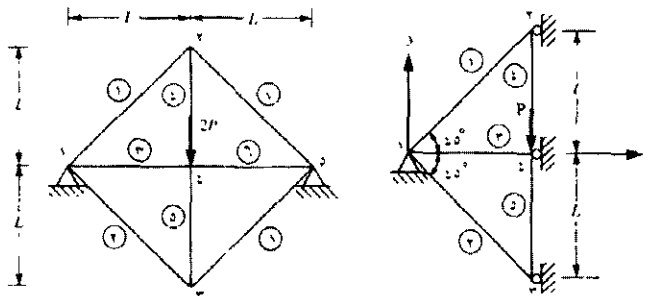
مثال ۳-۱۰

خربای مندرج در شکل ۳-۲۰ را حل کنید. همان‌طور که نشان داده شده، خربا از هشت المان و ۵ گره تشکیل شده است. بار قائم $2P$ بر گره ۴ اعمال شده است. گره‌های ۱ و ۵ از طریق لولا به تکیه‌گاه متصلند. سختی محوری المان‌های

میله‌ای شکل ۱، ۲، ۷، ۸ و $\sqrt{2}AE$ و در میله‌های ۳-۶، AE می باشد. مجدداً در این جا A و E معرف سطح مقطع و مدول الاستیسیته‌ی هر میله می‌باشند.

در این مسأله از صفحه‌ی تقارن استفاده خواهیم کرد. صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی خریا که از گره‌های ۲، ۴، و ۳ می‌گذرد صفحه‌ی تقارن انعکاسی است؛ زیرا شکل هندسی، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی در دو طرف این صفحه مشابه هم است. برای باری همانند $2P$ که در صفحه‌ی تقارن قرار دارد نصف آن باید بر سازه‌ی ساده شده اعمال شود. اندازه‌ی سطح مقطع المان‌هایی که در صفحه‌ی تقارن قرار دارند به نصف در سازه ساده شده کاهش می‌یابند. مضافاً، در گره‌هایی که در صفحه‌ی تقارن قرار دارند، باید جابه‌جایی آن‌ها عمود بر صفحه تقارن در سازه‌ی ساده شده، برابر صفر قرار داده شود. به عبارتی دیگر، $d_{\epsilon_x} = 0, d_{\nu_x} = 0, d_{\nu_y} = 0$. شکل ۳-۲۱ معرف سازه‌ی ساده شده‌ای است که از آن به منظور تجزیه و تحلیل خریای دو بعدی شکل ۳-۲۰ استفاده می‌شود.

حل مسأله را با تعیین زاویه‌ی θ برای هر المان میله‌ای شکل شروع می‌کنیم. برای مثال در المان ۱ به فرض آن که جهت x از گره ۱ به سمت گره ۲ باشد، داریم $\theta^{(1)} = 45^\circ$. به منظور تعیین ماتریس سختی هر المان از جدول ۳-۲ استفاده شده است.



شکل ۳-۲۱ خریای ساده شده‌ی شکل ۳-۲۰ خریای دو بعدی

۳-۲۰ به دلیل تقارن

جدول ۲-۳ داده‌های خربای مندرج در شکل ۲۱-۳

المان	θ°	C	S	C^2	S^2	CS
۱	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۲	315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
۳	0°	۱	۰	۱	۰	۰
۴	90°	۰	۱	۰	۱	۰
۵	90°	۰	۱	۰	۱	۰

قبل از اعمال شرایط مرزی، تعداد کل مؤلفه‌های جابه‌جایی گره‌های خربا هشت عدد است. لذا، مرتبه ماتریس K باید 8×8 باشد. با استفاده از معادله‌ی (۲۳-۴-۳) برای کسینوس هادی المان ۱ داریم:

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{\sqrt{2}AE}{\sqrt{2}L} \begin{matrix} d_{1,x} & d_{1,y} & d_{2,x} & d_{2,y} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-8-3)$$

متشابهاً برای المان‌های ۲-۵ داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}AE}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{2x} & d_{2y} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2-8-3)$$

$$\underline{k}^{(3)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{2x} & d_{2y} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-8-3)$$

$$\underline{k}^{(4)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{2x} & d_{2y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-8-3)$$

$$\underline{k}^{(5)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} d_{2x} & d_{2y} & d_{1x} & d_{1y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5-8-3)$$

در جایی که در معادلات (۱-۸-۳) الی (۵-۸-۳)، علامتی که در بالای ستون‌ها قرار دارد دلالت بر درجه‌های آزادی هر المان می‌نماید. همچنین از آنجا که المان‌های ۴

و ۵ در صفحه‌ی تقارن قرار دارند، لذا از نصف سطح مقطع آن‌ها در معادلات (۳-۳) و (۴-۸) استفاده شده است.

حل این مسأله را به تعیین مؤلفه‌های جابه‌جایی محدود می‌سازیم. لذا با در نظر گرفتن شرایط مرزی که منجر به مؤلفه‌های صفر جابه‌جایی می‌شوند، می‌توان از حذف ردیف‌ها و ستون‌های ماتریس سختی هر المان، که مرتبط با این جابه‌جایی‌ها می‌شوند، سریعاً مجموعه معادلات تقلیل یافته را به دست آورد. به عبارتی دیگر، از آن‌جا که $d_{1x} = 0$ و $d_{1y} = 0$ (به دلیل لولایی بودن تکیه‌گاه در گره ۱ شکل ۳-۲۱) و $d_{2x} = 0$ ، $d_{2y} = 0$ و $d_{3x} = 0$ (به دلیل شرط تقارن)، می‌توان قبل از تعیین ماتریس سختی کل، ردیف‌ها و ستون‌های مرتبط با مؤلفه‌های جابه‌جایی‌های یاد شده در ماتریس سختی هر المان را حذف نمود. مجموعه‌ی معادلات سختی که بدین ترتیب حاصل می‌شوند برابرند با:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ d_{2y} \\ d_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix} \quad (6-8-3)$$

از حل معادله‌ی (۳-۸-۶) برای جابه‌جایی‌ها داریم:

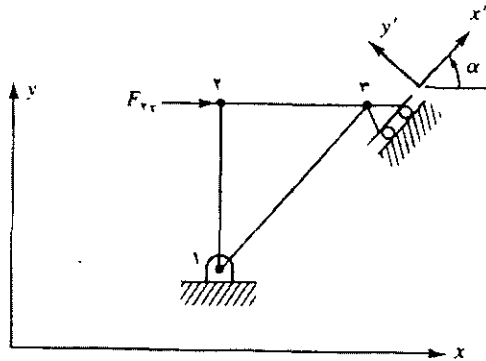
$$d_{1y} = -\frac{pl}{AE} \quad d_{2y} = \frac{-pl}{AE} \quad d_{3y} = -\frac{2pl}{AE} \quad (7-8-3)$$

ایده‌های مطرح شده در مورد استفاده از تقارن را باید کم‌تر و با احتیاط بیشتر در حل مسائل کمانش و ارتعاشات استفاده نمود. برای مثال، سازه‌ای همانند یک تیرآهن که بر روی تکیه‌گاه ساده‌ای قرار دارد حول مرکز خود متقارن بوده در حالی که مدهای ارتعاشی آن به صورت متقارن و پاد متقارن می‌باشند. این مطلب در فصل ۱۶ نشان داده خواهد شد. اگر با استفاده از شرایط تقارن آینه‌ای فقط نیمی از

تیر آهن مدل سازی شود، شرایط تکیه گاه‌ها فقط اجازه‌ی مدهای ارتعاشی متقارن را فراهم خواهند نمود.

۳-۹ تکیه‌گاه‌های شیب دار یا اریب

در فصل‌های قبل، تکیه‌گاه‌ها به نحوی قرار داشتند که شرایط مرزی ناشی از جابه‌جایی، بر جهت‌های اصلی منطبق بودند. با این وصف، چنانچه تکیه‌گاهی، همانند آن چه که در گره ۳ برای خرپای دو بعدی مندرج در شکل ۳-۲۲ در نظر گرفته شده، شیب دار یا اریب تحت زاویه‌ی α قرار داشته باشد، در آن صورت شرایط مرزی موجود برای جابه‌جایی در امتداد راستاهای اصلی $x-y$ نبوده و در عوض، در امتداد محورهای محلی $x'-y'$ قرار خواهند گرفت. حال دو روش را که بدان وسیله می‌توان چنین تکیه‌گاه‌هایی را تجزیه و تحلیل نمود تشریح می‌کنیم.



شکل ۳-۲۲ خرپای دو بعدی با شرایط مرزی اریب

در اولین روش، به منظور احتساب شرایط مرزی شیب دار، باید جابه‌جایی‌های اصلی در گره ۳ را به محور مختصات محلی $x'-y'$ در این گره انتقال داده در حالی که، دیگر جابه‌جایی‌ها در مختصات اصلی $x-y$ باقی می‌مانند. سپس می‌توان در

معادله های نیرو - جابه جایی، شرایط مرزی جابه جایی صفر را برای $d'_{r,y}$ اعمال نموده و نهایتاً معادلات را طبق روال معمول حل نمود.

انتقالی که در این مورد به کار می رود همانند نحوه ی انتقال یک بردار از محور مختصات محلی به مختصات اصلی است. در خریای دو بعدی، معادله ی (۳-۹-۱۶) را به شرح زیر به گره ۳ اعمال می کنیم:

$$\begin{Bmatrix} d_{r,x}' \\ d_{r,y}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{r,x} \\ d_{r,y} \end{Bmatrix} \quad (۳-۹-۱۷)$$

از باز نویسی معادله ی (۳-۹-۱۷) داریم:

$$\{d_r'\} = [t_r] \{d_r\} \quad (۳-۹-۱۸)$$

در جایی که

$$[t_r] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (۳-۹-۱۹)$$

حال نحوه ی انتقال بردار جابه جایی کلیه ی گره ها را به شرح زیر می نویسم:

$$\{d'\} = [T_r] \{d\} \quad (۳-۹-۲۰)$$

یا

$$\{d\} = [T_r]^T \{d'\} \quad (۳-۹-۲۱)$$

در جایی که ماتریس انتقال برای کل خریا، 6×6 است:

$$[T_r] = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [t_r] \end{bmatrix} \quad (۳-۹-۲۲)$$

هر یک از جزء ماتریس های معادله ی (۳-۹-۲۲) (ماتریس واحد $[I]$ ، ماتریس صفر $[0]$ ، و ماتریس $[t_r]$)، دارای مرتبه ی 2×2 هستند، مرتبه ای که عموماً برابر با درجه ی آزادی در هر گره است).

به منظور تعیین بردار جابه‌جایی مورد نیازی که حاوی مؤلفه‌های جابه‌جایی اصلی در گره‌های ۱ و ۲، و مؤلفه‌های جابه‌جایی محلی در گره ۳ است، از معادله (۳-۹-۵) استفاده نموده تا رابطه‌ی زیر به دست آید.

$$\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{rx} \\ d_{ry} \\ d_{rx} \\ d_{ry} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [t_r]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_{1x} \\ d'_{1y} \\ d'_{rx} \\ d'_{ry} \\ d'_{rx} \\ d'_{ry} \end{Bmatrix} \quad (۳-۹-۷)$$

در معادله‌ی (۳-۹-۷)، با توجه به حضور ماتریس $[t_r]^T$ ، ملاحظه می‌شود که در گره ۳ فقط مؤلفه‌های اصلی انتقال یافته‌اند. ماتریس مربعی معادله‌ی (۳-۹-۷) را با $[T_1]^T$ نشان می‌دهیم. به‌طور کلی، در مواقع نیاز به انتقال جابه‌جایی‌های اصلی به محلی (در جایی که تکیه‌گاه‌های اریب وجود دارند)، ماتریس 2×2 $[t]$ را در $[T_1]$ قرار می‌دهیم.

با در نظر گرفتن معادلات (۳-۹-۵) و (۳-۹-۶)، ملاحظه می‌شود که در واقع فقط مؤلفه‌های گره ۳ در ماتریس $\{d\}$ به مؤلفه‌های محلی (اریب) انتقال یافته‌اند. چنین انتقالی هنگامی نیاز است که ثبات جهت‌های مختصات محلی $x'-y'$ مشخص باشد.

مضافاً، بردار نیروهای اصلی را می‌توان همانند $\{d'\}$ انتقال داد:

$$\{f'\} = [T_1] \{f\} \quad (۳-۹-۸)$$

در مختصات اصلی داریم:

$$\{f\} = [K] \{d\} \quad (۳-۹-۹)$$

از پیش ضرب معادله‌ی (۳-۹-۹) در $[T_1]$ داریم:

$$[T] \{f\} = [T][K] \{d\} \quad (۳-۹-۱۰)$$

در خریایی که در شکل ۳-۲۲ نشان داده شده سمت چپ معادله‌ی (۳-۹-۱۰) برابر است با:

$$\begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [t_r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{rx} \\ f_{ry} \\ f_{rx} \\ f_{ry} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{rx} \\ f_{ry} \\ f'_{rx} \\ f'_{ry} \end{Bmatrix} \quad (۳-۹-۱۱)$$

در جایی که در معادله‌ی (۳-۹-۱۱) از این حقیقت که نیروهای محلی مشابه با معادله‌ی (۳-۹-۲) و به صورت زیر منتقل می‌شوند، استفاده شده است.

$$\{f'\} = [t_r] \{f_r\} \quad (۳-۹-۱۲)$$

از معادله‌ی (۳-۹-۱۱)، ملاحظه می‌شود که حسب نیاز، فقط مؤلفه‌های گره ۳ در ماتریس $\{f'\}$ به مؤلفه‌های محلی انتقال یافته‌اند.

از جای‌گزینی معادله‌ی (۳-۹-۵) در معادله‌ی (۳-۹-۱۰) داریم:

$$[T_r] \{f_r\} = [T_r] [K] [T_r]^T \{d'\} \quad (۳-۹-۱۳)$$

ضمن استفاده از معادله‌ی (۳-۹-۱۱)، ملاحظه می‌شود که با عنایت به رابطه‌ی (۳-۹-۷)، که از آن $d_{1x} = d'_{1x}$ ، $d_{1y} = d'_{1y}$ ، $d_{rx} = d'_{rx}$ ، $d_{ry} = d'_{ry}$ ، رابطه‌ی (۳-۹-۱۳) برابر خواهد بود با:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{rx} \\ F_{ry} \\ F_{rx} \\ F_{ry} \end{Bmatrix} = [T_r] [K] [T_r]^T \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{rx} \\ d_{ry} \\ d'_{rx} \\ d'_{ry} \end{Bmatrix} \quad (۳-۹-۱۴)$$

معادله‌ی (۳-۹-۱۴)، قالب مورد نیازی است که بدان وسیله کلیه‌ی شرایط مرزی اصلی و اریب معلوم اعمال می‌شوند. در این‌جا نیروهای اصلی در سمت چپ

معادله‌ی (۱۴-۹-۳) قرار دارند. به منظور حل معادله‌ی (۱۴-۹-۳)، ابتدا حاصل ضرب سه ماتریس $[T_1][K][T_1]^T$ را محاسبه می‌کنیم. سپس شرایط مرزی زیر را (بر خریای مندرج در شکل ۳-۲۲) اعمال می‌کنیم:

$$d_{1x} = 0 \quad d_{1y} = 0 \quad d'_{3y} = 0 \quad (15-9-3)$$

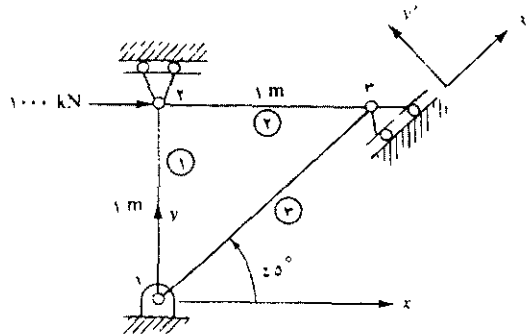
سپس مقادیر معلوم نیروهای اعمال شده‌ی F_{rx} ، همراه با $F_{ry} = 0$ و $F'_{rx} = 0$ را در معادله‌ی (۱۴-۹-۳) جای‌گزین می‌نماییم. نهایتاً، با دسته‌بندی معادلات مرتبط با جابه‌جایی‌های معلوم، در این‌جا روابط ۱، ۲، و ۶ در معادله‌ی (۱۴-۹-۳)، جابه‌جایی‌های مجهول d_{rx} ، d_{ry} ، و d'_{rx} را از حل همزمان روابط مربوطه تعیین می‌کنیم.

پس از تعیین جابه‌جایی‌ها، به معادله‌ی (۱۴-۹-۳) باز گشته تا عکس‌العمل‌های اصلی F_{1x} و F_{1y} و نیز عکس‌العمل غلطک سطح اریب، F'_{3y} ، را محاسبه کنیم.

مثال ۳-۱۱

در خریای دو بعدی مندرج در شکل ۳-۲۳، جابه‌جایی‌ها و عکس‌العمل‌ها را بیابید. در المان‌های فرض کنید ۱ و ۲ $E = 210 \text{ Gpa}$ ، و $A = 6/00 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ، و در المان ۳ $A = 6\sqrt{2} \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

برای تعیین ماتریس سختی هر المان از معادله‌ی (۳-۴-۲۳) شروع می‌کنیم.



شکل ۳-۲۳ خریای دو بعدی با تکیه‌گاه اریب

المان ١

$$\cos \theta = 0 \quad \sin \theta = 1$$

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{(6/0 \times 10^{-2} \text{ m}^2)(210 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{1 \text{ m}} \begin{matrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{rx} & d_{ry} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \text{متقارن} & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (16-9-3)$$

المان ٢

$$\cos \theta = 1 \quad \sin \theta = 0$$

$$\underline{k}^{(2)} = \frac{(6/0 \times 10^{-2} \text{ m}^2)(210 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{1 \text{ m}} \begin{matrix} d_{2x} & d_{2y} & d_{rx} & d_{ry} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{متقارن} & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (17-9-3)$$

المان ٣

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{k}^{(3)} = \frac{(6/0 \times 10^{-2} \text{ m}^2)(210 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{1 \text{ m}} \begin{matrix} d_{31} & d_{32} & d_{rx} & d_{ry} \\ \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & -0/5 & -0/5 \\ & 0/5 & -0/5 & -0/5 \\ & & 0/5 & 0/5 \\ \text{متقارن} & & & 0/5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(18-9-3)

ضمن اعمال روش مستقیم سختی بر معادلات (۳-۹-۱۶) الی (۳-۹-۱۸)، ماتریس سختی اصلی به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$\underline{K} = 1260 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 & 0 & -0/5 & -0/5 \\ & 1/5 & 0 & -1 & -0/5 & -0/5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1/5 & 0/5 \\ \text{متقارن} & & & & & 0/5 \end{bmatrix} \quad (19-9-3)$$

سپس با استفاده از معادله‌ی (۳-۹-۱۶)، به منظور انتقال جابه‌جایی‌های اصلی در گره ۳ به مختصات گره‌ای محلی y' - x' ، ماتریس انتقال T_1 را محاسبه می‌کنیم. در خلال استفاده از معادله‌ی (۳-۹-۱۶) زاویه‌ی α برابر 45° است.

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad (20-9-3)$$

سپس، به منظور تشریح معادلات به هم گذاشته شده، از معادله‌ی (۳-۹-۱۴) استفاده می‌شود (در اصل از معادله‌ی (۳-۹-۱۳) استفاده می‌کنیم). بدین منظور، ابتدا ماتریس $\underline{K}^* = \underline{T}_1 \underline{K} \underline{T}_1^T$ را تعریف نموده و آن را طی مراحل مختلفی که متعاقباً آورده شده تعیین می‌کنیم.

$$\underline{T, K} = 126 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 & 0 & -0/5 & -0/5 \\ 0/5 & 1/5 & 0 & -1 & -0/5 & -0/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0/707 & -0/707 & -0/707 & 0 & 1/414 & 0/707 \\ 0 & 0 & 0/707 & 0 & -0/707 & 0 \end{bmatrix} \quad (21-9-3)$$

و

$$\underline{T, KT}^T = \begin{matrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{rx} & d_{ry} & d'_{rx} & d'_{ry} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 & 0 & -0/707 & 0 \\ 0/5 & 1/5 & 0 & -1 & -0/707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0/707 & 0/707 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0/707 & -0/707 & -0/707 & 0 & 1/500 & -0/500 \\ 0 & 0 & 0/707 & 0 & -0/500 & 0/500 \end{bmatrix} \quad (22-9-3)$$

$126 \times 10^6 \text{ N/m}$

ضمن اعمال شرایط مرزی $d_{1x} = d_{1y} = d_{rx} = d_{ry} = 0$ به معادله‌ی (۲۲-۹-۳) داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{rx} = 1000 \text{ kN} \\ F'_{rx} = 0 \end{Bmatrix} = (126 \times 10^6 \text{ kN/m}) \begin{bmatrix} 1 & -0/707 \\ -0/707 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_{rx} \\ d'_{ry} \end{Bmatrix} \quad (23-9-3)$$

از حل معادله‌ی (۲۳-۹-۳) برای جابه‌جایی‌ها داریم:

$$d'_{rx} = 11/91 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (24-9-3)$$

$$d'_{ry} = 0/613 \times 10^{-2} \text{ m}$$

از پس ضرب بردار جابه‌جایی معلوم در معادله‌ی (۲۲-۹-۳) (به معادله‌ی ۹-۳-۹)

(۱۴) توجه شود، عکس‌العمل‌ها به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$F_{1x} = -500 \text{ kN}$$

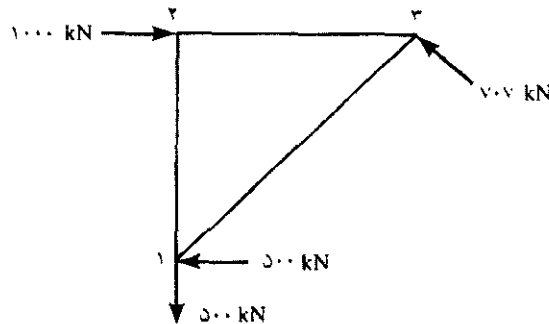
$$F_{1y} = -500 \text{ kN} \quad (25-9-3)$$

$$F_{2y} = 0$$

$$F_{2x} = 707 \text{ kN}$$

نمودار جسم آزاد خرپا همراه با عکس‌العمل‌ها در شکل ۲۴-۳ نشان داده شده است. شما به راحتی می‌توانید نشان دهید که خرپا در حال تعادل است.

در روش دومی که بدان وسیله می‌توان مسائل با شرایط مرزی اریب را حل نمود از المان‌های مرزی، که دارای سختی بالایی به منظور مقید نمودن جابه‌جایی مورد نظر است استفاده می‌شود. از این روش در بعضی از برنامه‌های رایانه‌ای استفاده می‌شود [۹].



شکل ۲۴-۳ نمودار جسم آزاد خرپای شکل ۲۳-۳

از المان‌های مرزی به منظور مشخص نمودن جابه‌جایی‌ها و دوران‌های گره‌های غیر صفر استفاده می‌شود. همچنین از آن‌ها به منظور تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های صلب و انعطاف پذیر استفاده می‌شود. المان‌های مرزی، شامل دو گره می‌باشند. خطی که رابط دو گره است معرف جهتی است که نیروی عکس‌العمل در آن راستا محاسبه شده یا جابه‌جایی در آن جهت تعریف می‌شود. چنان‌چه عکس‌العمل

گشتاور باشد، خط یاد شده معرف محوری است که گشتاور در آن راستا محاسبه شده یا دوران حول آن تعریف می‌شود.

در این‌جا آن دسته از المان‌های مرزی در نظر گرفته می‌شوند که از آن‌ها به منظور محاسبه‌ی نیروهای عکس‌العمل (المان‌های مرزی صلب)، یا تعیین جابه‌جایی‌های انتقالی (المان‌های مرزی جابه‌جایی)، در قالب المان‌های خرپا، فقط با یک سختی انتقالی غیر صفر، استفاده می‌شود. المان‌های مرزی که از آن‌ها در محاسبه‌ی گشتاورهای عکس‌العمل، یا تعیین میزان چرخش استفاده می‌شود، همانند المان‌های تیرآهنی عمل می‌نمایند که دارای سختی دورانی غیر صفری بوده که حول محوری خاص تعریف می‌شوند.

از المان‌های مرزی الاستیک به منظور مدل‌سازی تکیه‌گاه‌های انعطاف‌پذیر و محاسبه‌ی عکس‌العمل‌ها، در تکیه‌گاه‌های شیب‌دار یا اریب، استفاده می‌شود. به منظور توضیح بیش‌تر در زمینه‌ی استفاده از المان‌های مرزی به مرجع [۹] مراجعه شود.

۳-۱۰ روش انرژی پتانسیل در استخراج معادلات المان میله‌ای شکل

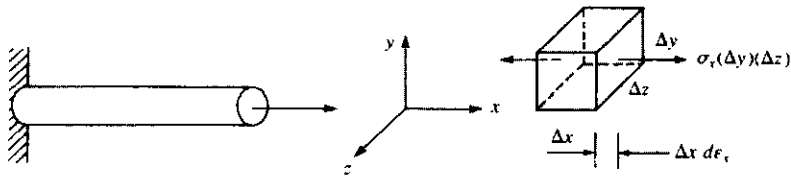
حال اصل مینیمم انرژی پتانسیل را به منظور استخراج معادلات المان میله‌ای شکل معرفی می‌کنیم. یاد آوری می‌شود که بر اساس بخش ۲-۶، انرژی پتانسیل کل، π_p ، برابر بود با جمع انرژی کرنشی داخلی U و انرژی پتانسیل نیروهای خارجی Ω :

$$\pi_p = U + \Omega \quad (۳-۱۰-۱)$$

به منظور تعیین انرژی کرنشی یک میله، فقط کار نیروهای داخلی را در خلال تغییر طول آن در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که میله‌ی مورد نظر یک بعدی است، لذا، بر اساس شکل ۳-۲۵، کار انجام شده توسط نیروی داخلی، ناشی از تنش عمودی σ_x ، برابر است با $\sigma_x(\Delta y)(\Delta z)$. جابه‌جایی سطح x المان برابر با $\Delta x(\epsilon_x)$ بوده؛

در حالی که جابه‌جایی سطح $(x + \Delta x)$ برابر با $\Delta x(\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_x)$ می‌باشد. لذا تغییرات در جابه‌جایی برابر $\Delta x d\varepsilon_x$ است، در جایی که $d\varepsilon_x$ معرف تغییرات دیفرانسیلی در انرژی حاصلی است که در امتداد طول Δx رخ می‌دهد. کار دیفرانسیلی داخلی (یا انرژی کرنشی) dU که برابر با حاصل ضرب نیروی داخلی در جابه‌جایی نیرو است، برابر می‌شود با:

$$dU = \sigma_x (\Delta y)(\Delta z)(\Delta x) d\varepsilon_x \quad (2-10-3)$$



شکل ۲۵-۳ نیروی داخلی در میله‌ی یک بعدی

ضمن آرایش مجدد عبارت فوق و این که حجم المان به سمت صفر میل نماید، از رابطه‌ی (۲-۱۰-۳) داریم:

$$dU = \sigma_x d\varepsilon_x dV \quad (3-10-3)$$

لذا برای کل میله داریم:

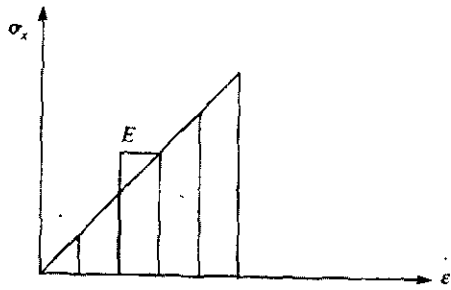
$$U = \iiint_V \left\{ \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \right\} dV \quad (4-10-3)$$

حال همان‌طور که در شکل ۲۶-۳ نشان داده شده، برای ماده‌ای از نوع الاستیک خطی (قانون هوک) ملاحظه می‌شود که $\sigma_x = E\varepsilon_x$. لذا از جای‌گزینی این رابطه در معادله‌ی (۳-۱۰-۳)، انتگرال‌گیری آن نسبت به ε_x ، و سپس جای‌گزینی σ_x برای $E\varepsilon_x$ ، عبارت انرژی کرنشی برای تنش یک بعدی به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$U = \frac{1}{V} \iiint_V \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (5-10-3)$$

انرژی پتانسیل نیروهای خارجی، که علامت آن به دلیل از بین رفتن کار انجام شده توسط نیروهای خارجی، خلاف عبارت کار نیروهای خارجی است، برابر است با:

$$\Omega = - \iiint_V \hat{x}_b \hat{u} dV - \iint_{S_1} \hat{T}_x \hat{u}_s dS - \sum_{i=1}^M \hat{f}_{ix} \hat{d}_{ix} \quad (6-10-3)$$



شکل ۳-۲۶ ماده‌ی الاستیک خطی (قانون هوک)

در جایی که اولین، دومین و سومین عبارت در سمت راست معادله‌ی (۳-۱۰-۶) معرف انرژی پتانسیل ناشی از موارد زیر است. (۱) نیروهای حجمی \hat{X}_b که عموماً از وزن میله ناشی شده (بر حسب نیرو بر واحد حجم) و مطابق با تابع \hat{u} جابه‌جا می‌شوند، و (۲) بار گذاری یا نیروهای کشش سطحی \hat{T}_x ، که عموماً از بارگذاری گسترده بر سطح المان (بر حسب نیرو بر واحد سطح) ناشی شده و بر اساس تابع \hat{u}_s جابه‌جا می‌شوند، \hat{u}_s جابه‌جایی‌های حاصل بر سطح S_1 است، و (۳) نیروهای گره‌ای \hat{f}_{ix} که بر اساس تغییر مکان گره‌ها به میزان \hat{d}_{ix} جابه‌جا می‌شوند. همان‌طور که در شکل ۳-۲۷ نشان داده شده، فرض می‌شود که نیروهای \hat{f}_{ix} ، \hat{T}_x و \hat{X}_b در مختصات محلی \hat{x} بر میله عمل می‌نمایند. در معادلات (۳-۱۰-۵) و (۳-۱۰-۶)، V

دلالت بر حجم جسم نموده و S_1 قسمتی از سطح S است که نیروها بر آن عمل می‌کنند. در المان میله‌ای شکلی با دو گره و یک درجه‌ی آزادی در هر گره، $M = 2$ است.

حال آماده‌ایم تا بر اساس اصل مینیمم انرژی پتانسیل معادلات اجزای محدود المان میله‌ای شکل را استخراج نماییم.

در فرآیند روش اجزای محدود، بر اساس قیدهای مرتبط با الگوی جابه‌جایی فرض شده در هر المان، انرژی پتانسیل می‌بایست مینیمم شود. هر چه تعداد درجه‌های آزادی در المان بیس‌تر باشد (عموماً، این به معنای افزایش تعداد گره‌ها است) جواب تقریبی به جواب واقعی نزدیک‌تر بوده و تعادل به صورت کامل تضمین می‌شود (مشروط بر آن که بتوان جابه‌جایی‌های واقعی را، در نهایت، حدس زد). حل تقریبی اجزای محدودی که از روش سختی حاصل می‌شود سبب می‌شود تا اندازه‌ی تقریبی انرژی پتانسیل پیوسته بیس‌تر یا برابر مقدار واقعی آن باشد. نتایج حاصل از این روش، رفتار سازه‌هایی را پیش‌بینی می‌کند که به طور فیزیکی سخت‌تر و یا حداقل دارای همان سختی سازه‌ی واقعی باشند. این امر را می‌توان بر اساس این واقعیت تشریح نمود که سازه‌ی مورد نظر، فقط می‌تواند بر اساس میدان جابه‌جایی مفروضی که در هر المان در نظر گرفته می‌شود جابه‌جا شود. شکل واقعی عموماً توسط میدان مفروض تقریب زده می‌شود، اگرچه شکل واقعی می‌تواند همان میدان مفروض باشد. میدان مفروض به‌طور مؤثری سازه را در مقابل تغییر شکل آن به صورت طبیعی خود مقید می‌سازد. تأثیر چنین قیدی رفتار پیش‌بینی شده سازه را قوت می‌بخشد.

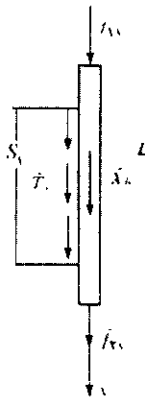
به منظور استخراج معادلات اجزای محدود با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل مراحل زیر اعمال می‌شوند.

۱. عبارتی برای انرژی پتانسیل کل نوشته می‌شود.

۲. فرض می‌شود که عبارت جابه‌جایی به پارامترهای مجهولی (در این جا، مجهولات جابه‌جایی‌های گره‌ای d_{ix} می‌باشند) که در عبارت انرژی پتانسیل جای‌گزین می‌شوند وابسته بوده و با آن‌ها تغییر می‌کند.

۳. از مینیمم نمودن انرژی پتانسیل کل نسبت به پارامترهای گره‌ای یاد شده، معادلات همزمانی حاصل می‌شود. معادلات به دست آمده معرف معادلات المان‌ها می‌باشند.

معادلات به دست آمده، معادلات تقریبی تعادل (یا احتمالاً واقعی) بوده که از حل آن‌ها پارامترهای مرتبط با گره‌ها به قسمی حاصل می‌شوند که اگر در عبارت انرژی پتانسیل جای‌گزین شوند مقدار آن مینیمم خواهد شد. حال از سه مرحله‌ای که گفته شد برای استخراج معادلات و ماتریس سختی المان میله‌ای شکل استفاده می‌شود.



شکل ۳-۲۷ نیروهای عمومی عمل‌کننده بر میله‌ای یک بعدی

المان میله‌ای شکلی به طول L و سطح مقطع یکنواخت A را مطابق شکل ۳-۲۷ در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادلات (۳-۱۰-۵) و (۳-۱۰-۶)، ملاحظه می‌شود که با توجه به ثابت بودن A و وابسته بودن متغیرهای σ_x و ϵ_x در نهایت به $\bar{\epsilon}_x$ ، انرژی پتانسیل کل، رابطه‌ی (۳-۱۰-۱)، برابر است با:

$$\pi_p = \frac{A}{\gamma} \int_V \sigma_x \varepsilon_x d\hat{x} - \hat{f}_{1x} \hat{d}_{1x} - \hat{f}_{rx} \hat{d}_{rx} - \iint_S \hat{u}_s \hat{T}_x dS - \iiint_V \hat{u} \hat{X}_b dV \quad (7-10-3)$$

با استفاده از روابط (۳-۱-۳) و (۴-۱-۳)، تابع جابه‌جایی محوری، بر حسب توابع شکل و جابه‌جایی گره‌ها، توسط رابطه‌ی زیر تشریح می‌شود.

$$\hat{u} = [N] \{\hat{d}\} \quad \hat{u}_s = [N_s] \{\hat{d}\} \quad (8-10-3)$$

در جایی که

$$[N] = \left[1 - \frac{\hat{x}}{L} \quad \frac{\hat{x}}{L} \right] \quad (9-10-3)$$

$[N_s]$ ، ماتریس تابع شکلی است که بر سطحی ارزیابی می‌شود که نیروی گسترده‌ی سطحی بر آن عمل نموده و

$$\{\hat{d}\} = \left\{ \begin{matrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{rx} \end{matrix} \right\} \quad (10-10-3)$$

سپس، با استفاده از رابطه کرنش - جابه‌جایی $\varepsilon_x = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}}$ ، می‌توان کرنش محوری را به صورت زیر نوشت:

$$\{\varepsilon_x\} = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \{\hat{d}\} \quad (11-10-3)$$

یا

$$\{\varepsilon_x\} = [B] \{\hat{d}\} \quad (12-10-3)$$

به قسمی که طبق تعریف

$$[B] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \quad (13-10-3)$$

رابطه‌ی تنش - کرنش محوری برابر است با:

$$\{\sigma_x\} = [D] \{\varepsilon_x\} \quad (14-10-3)$$

به قسمی که به ازای رابطه‌ی تنش - کرنش یک بعدی

$$[D]=[E] \quad (15-10-3)$$

و E مدول الاستیسیته است. حال با استفاده از رابطه‌ی (۳-۱۰-۱۲)، می‌توان معادله‌ی (۳-۱۰-۱۴) را به صورت زیر نوشت:

$$\{\sigma_x\} = [D][B]\{\hat{d}\} \quad (16-10-3)$$

از تشریح معادله‌ی (۳-۱۰-۷) به صورت ماتریسی، انرژی پتانسیل کل برابر است با:

$$\pi_p = \frac{A}{V} \int_V \{\sigma_x\}^T \{\varepsilon_x\} dx - \{\hat{d}\}^T \{P\} - \int_S \{\hat{u}_s\}^T \{\hat{T}_x\} ds - \iiint_V \{\hat{u}\}^T \{\hat{X}_b\} dV \quad (17-10-3)$$

در جایی که $\{P\}$ معرف بارهای گره‌ای متمرکز بوده و σ_x و ε_x عموماً ماتریس‌های ستونی می‌باشند. به منظور انجام صحیح ضرب ماتریس‌ها، باید از برگردان σ_x استفاده نمود. متشابهاً، $\{\hat{u}\}$ و $\{\hat{T}_x\}$ عموماً ماتریس‌های ستونی بوده به قسمی که به منظور انجام صحیح ضرب ماتریسی، باید از برگردان $\{\hat{u}\}$ در رابطه‌ی (۳-۱۰-۱۷) استفاده نمود.

از جای‌گزینی روابط (۳-۱۰-۸)، (۳-۱۰-۱۲) و (۳-۱۰-۱۶) در معادله‌ی (۳-۱۰-۱۷) می‌توان نوشت:

$$\pi_p = \frac{A}{V} \int_V \{\hat{d}\}^T [B]^T [D]^T [B] \{\hat{d}\} dx - \{\hat{d}\}^T \{P\} - \int_S \{\hat{d}\}^T [N_s]^T \{\hat{T}\} ds - \iiint_V \{\hat{d}\}^T [N]^T \{\hat{X}_b\} dV \quad (18-10-3)$$

در معادله‌ی (۳-۱۰-۱۸)، ملاحظه می‌شود که π_p تابعی از $\{\hat{d}\}$ است، به عبارتی دیگر، $\pi_p = \pi_p(\hat{d}_{1x}, \hat{d}_{2x})$. به هر حال، $[B]$ و $[D]$ ، روابط (۳-۱۰-۱۳) و (۳-۱۰-۱۰)

(۱۵). و درجه‌های آزادی گره‌های \hat{d}_{ix} و \hat{d}_{ix} ، تابعی از \hat{x} نیستند. لذا، از انتگرال‌گیری معادله‌ی (۳-۱۰-۱۸) نسبت به \hat{x} داریم:

$$\pi_p = \frac{AL^T}{\nu} \left\{ \hat{d} \right\}^T [B]^T [D]^T [B] \left\{ \hat{d} \right\} d\hat{x} - \left\{ \hat{d} \right\}^T \left\{ \hat{f} \right\} \quad (3-10-19)$$

در جایی که

$$\left\{ \hat{f} \right\} = \left\{ P \right\} + \iint_{S_i} [N_s]^T \left\{ \hat{r} \right\} ds + \iiint_V [N]^T \left\{ \hat{x}_b \right\} dV \quad (3-10-20)$$

در معادله‌ی (۳-۱۰-۲۰)، تأثیر سه نوع بارگذاری جداگانه که به ترتیب از نیروهای متمرکز در گره‌ها، نیروهای کشش سطحی، و نیروهای حجمی ناشی می‌شوند مشاهده می‌شود. ماتریس‌های ناشی از نیروهای حجمی و کششی سطحی را به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$\left\{ \hat{f}_v \right\} = \iint_{S_i} [N_s]^T \left\{ \hat{r}_v \right\} ds \quad (3-10-20a)$$

$$\left\{ \hat{f}_b \right\} = \iiint_V [N]^T \left\{ \hat{x}_b \right\} dV \quad (3-10-20b)$$

عبارتی که برای $\left\{ \hat{f} \right\}$ در رابطه‌ی (۳-۱۰-۲۰) آورده شده نشان می‌دهد که به چه صورت می‌توان نیروهای خاص را به بهترین وجه مورد نیاز تشریح نمود.

نیروهایی را که توسط روابط (۳-۱۰-۲۰a) و (۳-۱۰-۲۰b) محاسبه می‌شوند نامتناقض نامیده زیرا این معادلات بر اساس همان توابع شکلی $[N]$ استوارند که از آنها در محاسبه‌ی ماتریس سختی المان استفاده گردید. نیروهای محاسبه شده از روابط (۳-۱۰-۲۰a) و (۳-۱۰-۲۰b)، از لحاظ استاتیکی، معادل با بارگذاری اولیه

می‌باشند؛ به عبارتی دیگر، برآیند نیرو و گشتاور ناشی از $\{\hat{f}_s\}$ و $\{\hat{f}_b\}$ ، و بار گذاری‌های اولیه حول هر نقطه‌ی دلخواهی یکسان است.

مینیم نمودن π_p نسبت به جابه‌جایی هر گره مستلزم آن است که:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \hat{d}_{ix}} = 0, \quad \frac{\partial \pi_p}{\partial \hat{d}_{ix}} = 0 \quad (21-10-3)$$

حال به منظور اعمال رابطه‌ی (۲۱-۱۰-۳)، عبارت π_p را که در معادله‌ی (۳-۱۰-۱۰) داده شد تعیین می‌کنیم. به منظور راحتی کار، عبارت زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\{U^*\} = \{\hat{d}\}^T [B]^T [D]^T [B] \{\hat{d}\} \quad (22-10-3)$$

از جای‌گزینی روابط (۳-۱۰-۱۰)، (۳-۱۰-۱۳)، و (۳-۱۰-۱۵) در معادله‌ی (۳-۲۲-۱۰) داریم:

$$\{U^*\} = \begin{bmatrix} \hat{d}_{ix} & \hat{d}_{ix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{ix} \\ \hat{d}_{ix} \end{Bmatrix} \quad (23-10-3)$$

از ساده نمودن رابطه‌ی (۲۳-۱۰-۳) داریم:

$$U^* = \frac{E}{L^2} (\hat{d}_{ix}^2 - 2\hat{d}_{ix}\hat{d}_{ix} + \hat{d}_{ix}^2) \quad (24-10-3)$$

همچنین عبارت مربوطه برای $\{\hat{d}\}^T \{\hat{f}\}$ برابر است با:

$$\{\hat{d}\}^T \{\hat{f}\} = \hat{d}_{ix}\hat{f}_{ix} + \hat{d}_{ix}\hat{f}_{ix} \quad (25-10-3)$$

لذا، از جای‌گزینی روابط (۲۴-۱۰-۳) و (۲۵-۱۰-۳) در معادله‌ی (۳-۱۹-۱۰)، و نهایتاً اعمال روابط (۲۱-۱۰-۳) داریم:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \hat{d}_{ix}} = \frac{AL}{2} \left[\frac{E}{L} (2\hat{d}_{ix} - 2\hat{d}_{ix}) \right] - \hat{f}_{ix} = 0 \quad (26-10-3)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \hat{d}_{Tx}} = \frac{AL}{2} \left[\frac{E}{L'} (-2\hat{d}_{ix} + 2\hat{d}_{ix}) \right] - \hat{f}_{Tx} = 0$$

روابط (۳-۱۰-۲۶) را به صورت ماتریسی زیر تشریح می‌کنیم:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{\hat{d}\}} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{ix} \\ \hat{d}_{ix} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{f}_{ix} \\ \hat{f}_{ix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۳-۱۰-۲۷)$$

از آن جا که $\{\hat{f}\} = [\hat{k}]\{\hat{d}\}$ ، لذا از معادله‌ی (۳-۱۰-۲۷)، ماتریس سختی المان میله‌ای شکل برابر است با:

$$[\hat{k}] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳-۱۰-۲۸)$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت، معادله‌ی (۳-۱۰-۲۸) شبیه به ماتریس سختی ارائه شده در بخش (۳-۱) است.

نهایتاً، به‌جای فرآیند طاقت فرسای تعیین π_p ، می‌توان با مشتق‌گیری ماتریسی، مشابه با رابطه‌ی (۲-۶-۱۲)، و اعمال مستقیم آن به معادله‌ی (۳-۱۰-۱۹) نوشت:

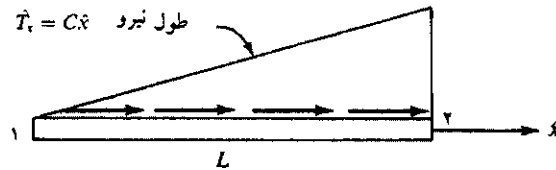
$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{\hat{d}\}} = AL[B]^T [D][B]\{\hat{d}\} - \{\hat{f}\} = 0 \quad (۳-۱۰-۲۹)$$

در جایی که به منظور ارائه‌ی معادله‌ی (۳-۱۰-۲۹)، از رابطه‌ی $[D]^T = [D]$ استفاده شده است. نتیجه‌ی ارزیابی عبارت $AL[B]^T [D][B]$ برابر با $[\hat{k}]$ مندرج در رابطه‌ی (۳-۱۰-۲۸) است. در این کتاب، از ایده‌ی مشتق‌گیری ترسیمی (به پیوست A رجوع شود) که به میزان قابل توجهی محاسبه‌ی $[\hat{k}]$ را آسان‌تر می‌سازد استفاده خواهد شد.

به منظور تشریح کاربرد معادله‌ی (۳-۱۰-۲۰۸) در تعیین نیروهای معادل گره‌ای در میله‌ای که تحت تأثیر بارگذاری سطحی \hat{T}_x قرار گرفته، مثال ۳-۱۲ را حل می‌کنیم.

مثال ۳-۱۲

میله‌ای به طول L ، تحت تأثیر نیرویی محوری که به صورت گسترده‌ی خطی از صفر در گره ۱، به ماکزیمم مقدار خود در گره ۲ تغییر می‌یابد قرار گرفته است. نیروهای گره‌ای معادلی را که منجر به همان انرژی می‌شوند، بیابید.



شکل ۳-۲۸ المان تحت تأثیر نیروی محوری گسترده‌ی خطی

با استفاده از معادله‌ی (۳-۱۰-۲۰) و توابع شکل مندرج در معادله‌ی (۳-۱۰-۱) (۹)، می‌توان نیروهای گره‌ای معادلی را که منجر به همان انرژی که از بار گسترده ناشی می‌شوند، به شرح زیر به دست آورد:

$$\{\hat{f}_o\} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_{1,x} \\ \hat{f}_{2,x} \end{Bmatrix} = \iint_S [N]^T \{\hat{T}_x\} dS = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \{C\hat{x}\} dx \quad (30-10-3)$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{C\hat{x}^2}{2} - \frac{C\hat{x}^3}{3L} \\ \frac{C\hat{x}^3}{3L} \end{Bmatrix}^L$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{CL}{6} \\ \frac{CL}{3} \end{Bmatrix} \quad (31-10-3)$$

از آن‌جا که \hat{T}_x نیرو بر واحد طول است، بنابراین انتگرال‌گیری در امتداد طول میله انجام گرفته است.

یاد آوری می‌شود که نیروی کل برابر با سطح زیر منحنی بار گسترده بوده و برابر است با:

$$F = \frac{1}{2}(L)(CL) = \frac{CL^2}{2} \quad (۳۲-۱۰-۳)$$

لذا از مقایسه‌ی روابط (۳۱-۱۰-۳) و (۳۲-۱۰-۳) ملاحظه می‌شود که به ازای بار خطی متغیر، نیروهای گره‌ای معادل برابرند با:

$$\hat{f}_{1x} = \frac{1}{3}F = \text{یک سوم کل بار} \quad (۳۳-۱۰-۳)$$

$$\hat{f}_{2x} = \frac{2}{3}F = \text{دو سوم کل بار}$$

به‌طور خلاصه، برای المان ساده‌ی میله‌ای شکلی با دو گره، که تحت تأثیر بار متغیر خطی قرار گرفته است (بار گذاری مثلثی شکل)، یک سوم کل بار در گره‌ای قرار می‌گیرد که بارگذاری از آن‌جا شروع شده (محل‌ی که اندازه‌ی بار صفر است) و دو سوم دیگر آن در گره‌ای قرار می‌گیرد که بار گسترده حداکثر مقدار را دارا است.

حال، حل کامل میله‌ای را بررسی می‌کنیم که تحت تأثیر نیروی کشش سطحی قرار گرفته است (مثال ۳-۱۳).

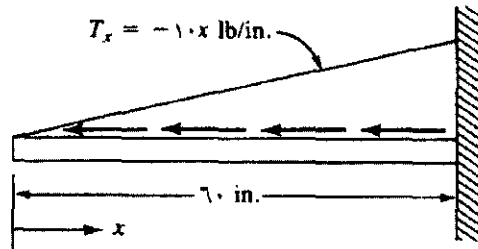
مثال ۳-۱۳

در میله‌ای که به صورت طولی مطابق شکل ۳-۲۹ بارگذاری شده جابه‌جایی محوری و تنش محوری را بیابید. فرض کنید $E = 3.0 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $A = 2 \text{ in}^2$ و $L = 60 \text{ in}$. در حل اجزای محدود از (a) یک المان و (b) دو المان استفاده کنید. (در بخش ۳-۱۱، نتایج ناشی از یک، دو، چهار و هشت المان، در حل رایانه‌ای از طریق برنامه‌ی Algor [۹]، آورده شده است.

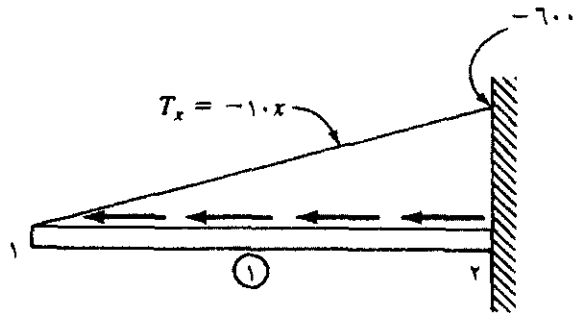
(a) حل مسأله با استفاده از یک المان (شکل ۳-۳۰)

با استفاده از معادله‌ی (۳-۱۰-۲۰a)، ماتریس بار گسترده به شرح زیر تعیین می‌شود:

$$\{F_o\} = \int_0^L [N]^T \{T_v\} dx \quad (3-10-34)$$



شکل ۳-۲۹ میله تحت تأثیر بار گسترده‌ی مثلثی



شکل ۳-۳۰ مدل یک المانی

در جایی که T_v باری خطی با واحد پوند بر اینچ بوده و به ازای $x = \hat{x}$ ، $\hat{f}_o = \underline{F}_o$ می‌باشد؛ بنابراین، ضمن جای‌گزینی $[N]$ از معادله‌ی (۳-۱۰-۲۰) در معادله‌ی (۳-۱۰-۳۰-۳)

داریم:

$$\{F_o\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \{-1.0x\} dx \quad (3-10-35)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-1 \cdot L^3}{2} + \frac{1 \cdot L^3}{3} \\ \frac{-1 \cdot L^3}{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-1 \cdot L^3}{6} \\ \frac{-1 \cdot L^3}{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-1 \cdot (60)^3}{6} \\ \frac{-1 \cdot (60)^3}{3} \end{Bmatrix} \quad \text{یا}$$

$$F_{1x} = -6000 \text{ lb} \quad F_{1y} = -12000 \text{ lb} \quad \text{یا} \quad (36-10-3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳۳-۱۰-۳)، می‌توان همین مقادیر را برای نیروها در گره‌های ۱ و ۲ به دست آورد. به عبارتی دیگر، یک سوم کل بار در گره ۱ و دو سوم آن در گره ۲.

با استفاده از معادله‌ی (۲۸-۱۰-۳) در می‌یابیم که ماتریس سختی برابر است با:

$$k^{(1)} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا معادلات المان‌ها برابر است با:

$$10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \\ R_{1y} - 12000 \end{Bmatrix} \quad (37-10-3)$$

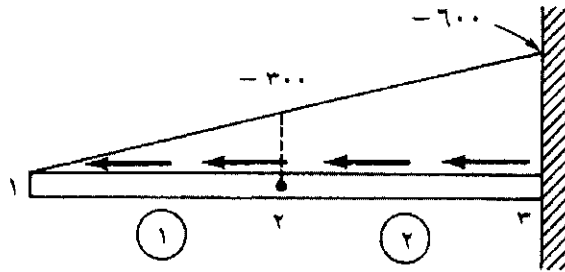
از حل اولین رابطه‌ی معادله‌ی (۳۷-۱۰-۳) داریم:

$$d_{1x} = -0.006 \text{ in.} \quad (38-10-3)$$

اندازه‌ی تنش از رابطه‌ی (۱۴-۱۰-۳) به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \{\sigma_v\} &= [D]\{\varepsilon_x\} \\ &= E[B]\{d\} \\ &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \end{Bmatrix} \\ &= E \left(\frac{d_{1y} - d_{1x}}{L} \right) \quad (39-10-3) \\ &= 30 \times 10^6 \left(\frac{0 + 0.006}{60} \right) \\ &= 3000 \text{ psi (T)} \end{aligned}$$

(b) حل مسأله با استفاده از ۲ المان (شکل ۳-۳۱)



شکل ۳-۳۱ مدل دو المانی

ابتدا نیرو در هر المان را محاسبه می‌کنیم. در المان ۲، بار را به دو قسمت یکنواخت و مثلثی شکل تقسیم می‌کنیم. در قسمت یکنواخت، نصف کل بار در گره‌های مرتبط با آن المان قرار داده می‌شود. لذا، کل بار یکنواخت برابر با

$$(30 \text{ in.})(-300 \text{ lb/in.}) = -9000 \text{ lb}$$

بوده در حالی که از اعمال رابطه‌ی (۳-۱۰-۳۳) به قسمت بار مثلثی شکل در المان ۲ داریم:

$$\begin{Bmatrix} f_{2x}^{(2)} \\ f_{2x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left[\frac{1}{2}(-9000) + \frac{1}{3}(-4500) \right] \\ -\left[\frac{1}{2}(-9000) + \frac{2}{3}(-4500) \right] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \text{ lb} \\ -7500 \text{ lb} \end{Bmatrix} \quad (40-10-33)$$

در المان ۱، کل بار فقط ناشی از نیروی گسترده‌ی مثلثی بوده و برابر است با:

$$\frac{1}{3}(30 \text{ in})(-300 \text{ lb/in}) = -4500 \text{ lb}$$

براساس معادله‌ی (۳-۱۰-۳۳)، بار یاد شده به شرح زیر به نیروهای گره‌ای تقسیم می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{2x}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(-4500) \\ \frac{2}{3}(-4500) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1500 \text{ lb} \\ -3000 \text{ lb} \end{Bmatrix} \quad (41-10-3)$$

بنابراین ماتریس نهایی نیروهای گره‌ای برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1500 \\ -6000 - 3000 \\ R_{2y} - 7500 \end{Bmatrix} \quad (42-10-3)$$

حال ماتریس سختی المان‌ها برابرند با:

$$\underline{k}^{(1)} = \underline{k}^{(2)} = \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (2 \times 10^7) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (43-10-3)$$

ماتریس سختی کل برابر است با:

$$\underline{K} = (2 \times 10^7) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (44-10-3)$$

بنابراین معادلات نهایی کل برابرند با:

$$(2 \times 10^7) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{2y} = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1500 \\ -9000 \\ R_{2y} - 7500 \end{Bmatrix} \quad (45-10-3)$$

در جایی که از شرط مرزی $d_{2y} = 0$ در رابطه‌ی (45-10-3) استفاده شده است. حال،

از حل روابط ۱ و ۲ معادله‌ی (45-10-3) داریم:

$$d_{1x} = -0.006 \text{ in.} \quad (46-10-3)$$

$$d_{2x} = -0.00525 \text{ in.}$$

تنش در هر المان برابر است با:

المان ۱

$$\sigma_x = E \left\{ -\frac{1}{30} \quad \frac{1}{30} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_{1x} = -0.006 \\ d_{2x} = -0.00525 \end{array} \right\} \quad (47-10-3)$$

$$= 750 \text{ psi (T)}$$

المان ۲

$$\sigma_x = E \left\{ -\frac{1}{30} \quad \frac{1}{30} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_{1x} = -0.00525 \\ d_{2x} = 0 \end{array} \right\} \quad (48-10-3)$$

$$= 5250 \text{ psi (T)}$$

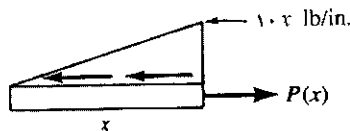
△

۱۱-۳ مقایسه‌ی حل اجزای محدود با حل مستقیم ریاضی یک میله

حال، حل مسأله ۳-۱۳ را که از روش اجزای محدود و به کمک یک، دو، چهار و هشت المان، در مدل سازی المان میله‌ای شکل حاصل شد، با روش مستقیم ریاضی مقایسه می‌کنیم. مقدار صحیح جابه‌جایی، از حل معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\delta = \frac{1}{AE} \int_0^L p(x) dx \quad (1-11-3)$$

در جایی که، با استفاده از نمودار جسم آزاد داریم:



$$p(x) = \frac{1}{x}(10x) = 10 \text{ lb} \quad (2-11-3)$$

بنابراین، از جای‌گزینی معادله‌ی (۳-۱۱-۳) در رابطه‌ی (۳-۱۱-۳) داریم:

$$\delta = \frac{1}{AE} \int_0^L \frac{1}{2} \omega x^r dx$$

$$= \frac{\omega x^r}{3AE} + C_1 \quad (3-11-3)$$

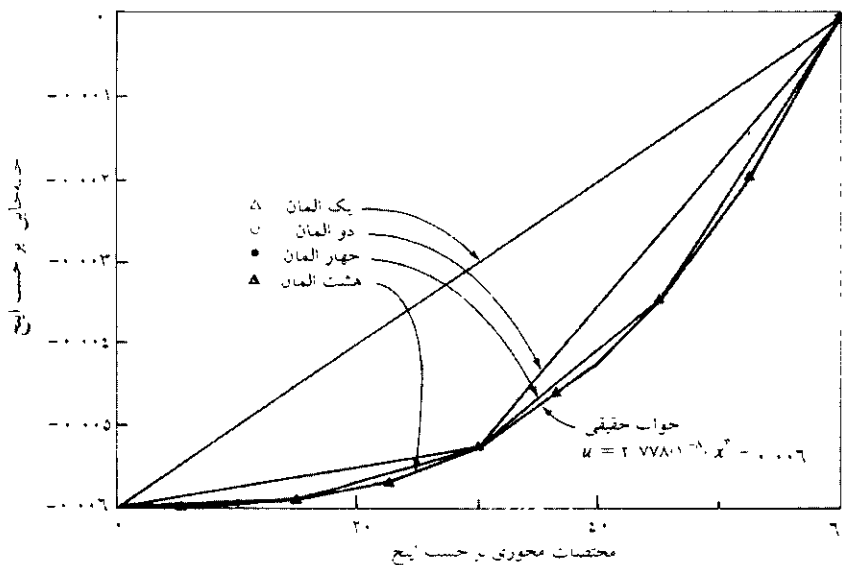
حال، با اعمال شرایط مرزی در $x=L$ داریم:

$$\delta(L) = 0 = \frac{\omega L}{3AE} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{\omega L^r}{3AE} \quad \text{یا} \quad (4-11-3)$$

از جای‌گزینی رابطه‌ی (۴-۱۱-۳) در معادله‌ی (۳-۱۱-۳)، عبارت نهایی خیز حاصل می‌شود.

$$\delta = \frac{\omega}{3AE} (x^r - L^r) \quad (5-11-3)$$



شکل ۳-۳۲ مقایسه‌ی مقادیر حقیقی و مقادیر به دست آمده از روش اجزای محدود برای جابه‌جایی‌های محوری (در امتداد طول میله)

ضمن جای‌گزینی $A = 2 \text{ in}^2$ ، $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ، و $L = 60 \text{ in}$. در معادله‌ی (۳-۱۱-۱۱) داریم:

$$u = 2/778 \times 10^{-8} x^2 - 0/006 \quad (6-11-3)$$

تنش محوری واقعی از حل رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma(x) = \frac{P(x)}{A} = \frac{5x^2}{2 \text{ in}^2} = 2/5 x^2 \text{ psi} \quad (7-11-3)$$

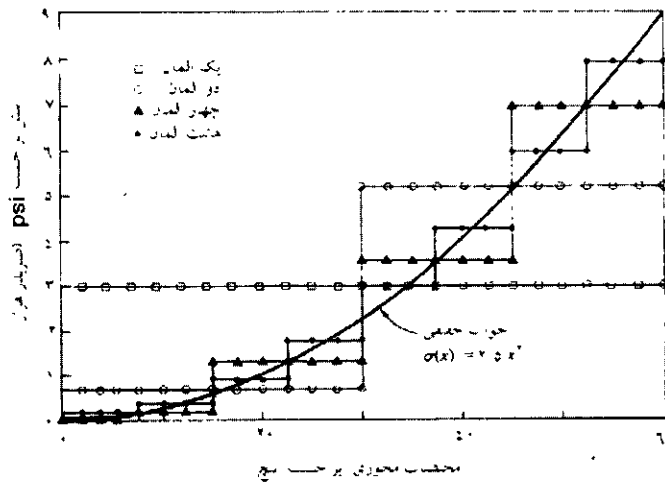
شکل ۳-۳۲ منحنی تغییرات معادله‌ی (۳-۱۱-۶) و نیز جواب‌های اجزای محدود آن را (که جزئی از آن در مثال ۳-۱۳ حاصل شد) نشان می‌دهد. از این مقادیر می‌توان نتایجی را به شرح زیر به دست آورد.

۱. جواب‌های ناشی از روش اجزای محدود با جواب‌های حاصل از حل ریاضی در گره‌ها با هم یکی است. دلیل صحیح بودن مقادیر گره‌ای آن است که نیروهای گره‌ای براساس جابه‌جایی فرض شده‌ی خطی در المان و نیز انرژی معادلی که با انرژی ناشی از بار گسترده حاصل شد محاسبه شده‌اند. (در تیرآهن‌ها و میله‌هایی با مقاطع ثابت، درجه‌های آزادی گره‌ها حقیقی می‌باشند. عموماً، درجه‌های آزادی محاسبه شده برای گره‌ها حقیقی نیستند.)

۲. اگر چه مقادیر جابه‌جایی در گره‌ها با مقادیر حقیقی یکی می‌باشند، ولی در صورت استفاده از چند المان (به نتایج ناشی از یک، و دو المان توجه شود)، به دلیل انتخاب تابعی خطی در قیاس با تابعی حقیقی از نوع درجه ۳ در المان، مطابق با معادله‌ی (۳-۱۱-۶)، نتایج بین گره‌ای ضعیفی حاصل می‌شود. به هر حال، با افزایش تعداد المان‌ها، نتایج ناشی از روش اجزای محدود به سمت نتایج حقیقی (به مقادیر به دست آمده برای چهار و هشت المان در شکل ۳-۳۲ توجه شود) همگرا می‌شوند.

۳. تنش از شیب منحنی جابه‌جایی و براساس رابطه‌ی $\sigma = E\varepsilon = E(du/dx)$ استخراج شده است. لذا، در روش اجزای محدود، از آن‌جا که u در هر المان به

صورت خطی فرض شده، لذا تنش در آن المان ثابت است؛ بنابراین لازم است تا در مدل سازی مشتق اول جابه‌جایی و یا معادل آن، تنش محوری، از المان‌های بیش‌تری استفاده شود. این مسأله در شکل ۳-۳۳، که در آن بهترین نتایج به ازای هشت المان حاصل شده نشان داده شده است.

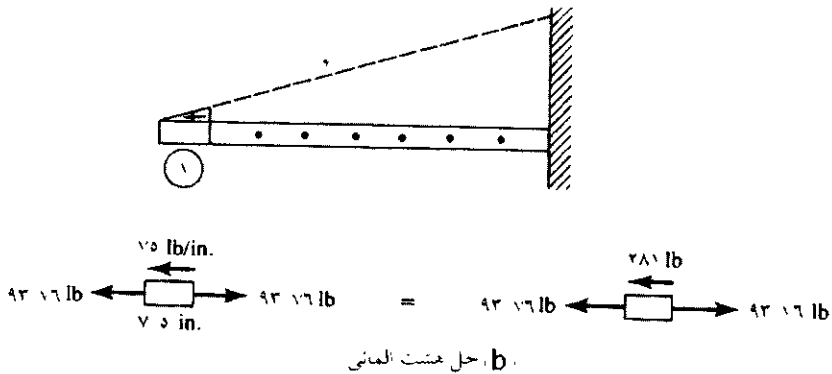
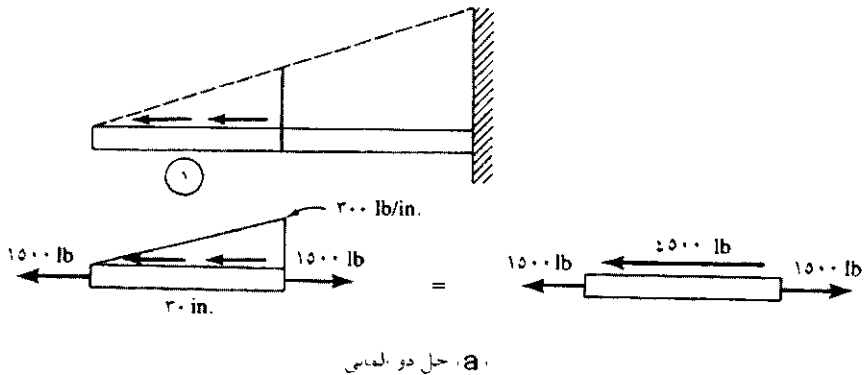


شکل ۳-۳۳ مقایسه‌ی تنش‌های محوری ناشی از حل‌های حقیقی و اجزای محدود (در امتداد میله)

۴. بهترین نتیجه برای تنش، در وسط المان و نه در گره‌ها (شکل ۳-۳۳)، حاصل می‌شود. این بدان دلیل است که مشتق جابه‌جایی در فاصله‌ی وسط بین دو گره، در مقایسه با مقادیر مشابه در گره‌ها، تقریب زده می‌شود.

۵. تنش در مرز مشترک المان‌ها پیوسته نیست؛ لذا در مرز دو المان تعادل ارضا نشده است. مضافاً، تعادل در هر المان، به‌طور کلی، ارضا نشده است. این مطلب در حل دو المانی مسأله، در المان ۱، و در حل هشت المانی مسأله در المان فوق، در شکل ۳-۳۴ نشان داده شده است [در حل هشت المانی مسأله نتایج از برنامه‌ی رایانه‌ای Algor [۹] استخراج شده‌اند]. با افزایش تعداد المان‌های مورد

استفاده، ناپیوستگی تنش در مرز المان‌ها کاهش یافته و وضعیت تقریباً زدن تعادل بهبود می‌یابد.



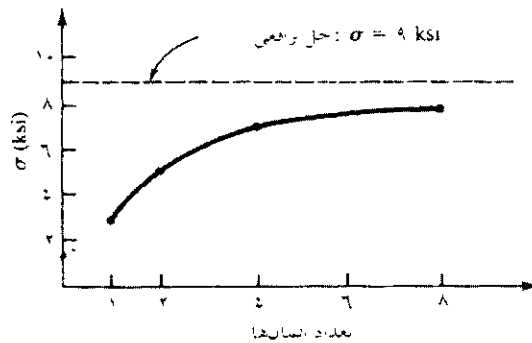
شکل ۳-۳۴ نمودار جسم آزاد المان ۱ در هر دو مدل دو و هشت المانی که در آن عدم برقراری تعادل نشان داده شده است.

نهایتاً، در شکل ۳-۳۵، همگرایی تنش محوری در انتهای ثابت ($x = L$)، با افزایش تعداد المان‌ها نشان داده شده است.

با این وصف، اگر مسأله از روش معمولی رایج فرمول بندی شود، همان‌طور که در فصل چهار برای تیر آهنی با بار گسترده به‌طور مفصل تشریح شد، می‌توان

گسرنش تنش واقعی در هر یک از مدل های مورد استفاده را تعیین نمود. به عبارتی دیگر، به فرض آن که $\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{k}\hat{d}} - \underline{\hat{f}}_o$ ، که در آن $\underline{\hat{f}}_o$ سیستم اولیه ی نیروی جای گزین در گره ها به جای بار گسترده است، سیستم نیروی جای گزین اولیه از نتایج ناشی از $\underline{\hat{k}\hat{d}}$ کسر می شوند. بدین ترتیب نیروهای گره ای حاصل می شوند. برای مثال، با در نظر گرفتن المان ۱ در مدل دو المانی، داریم [به معادلات (۳-۱۰-۱۰-۳۳) و (۳-۱۰-۱۰-۴۱) نیز توجه شود].

$$\underline{\hat{f}}_o = \begin{Bmatrix} -1500 \text{ lb} \\ -3000 \text{ lb} \end{Bmatrix}$$

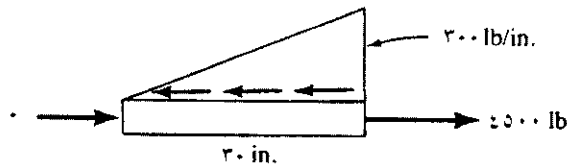


شکل ۳-۳۵ تنش محوری در انتهای ثابت ضمن افزایش تعداد المانها

با استفاده از رابطه ی $\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{k}\hat{d}} - \underline{\hat{f}}_o$ ، نیروهای واقعی در گره ها برابرند با:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{f}} &= \frac{2(30 \times 10^6)}{(30 \text{ in.})} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.006 \text{ in.} \\ -0.00525 \text{ in.} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -1500 \text{ lb} \\ -3000 \text{ lb} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -1500 + 1500 \\ 1500 + 3000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4500 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

از رسم نمودار جسم آزاد المان ۱ داریم:



$$\sum F_x = 0: -\frac{1}{2}(300 \text{ lb/in.})(20 \text{ in.}) + 4500 = 0$$

در دیگر المان‌ها (غیر از المان‌های تیر)، در عمل از این تعدیل صرف‌نظر می‌شود. اهمیت این تعدیل در المان‌های صفحه‌ای و صلب کم‌تر از المان‌های تیر آهن است. همچنین، در المان‌هایی با اشکال عمومی، فرمول بندی اعمال این تعدیلات (تنظیمات) سخت‌تر است.



۱۲-۳ روش پسماند گالرکین و کاربرد آن در استخراج معادلات المان میله‌ای

شکل یک بعدی

فرمول بندی کلی

معادلات اجزای محدود المان میله‌ای شکل از روش مستقیم سختی در بخش ۱-۳، و از روش انرژی پتانسیل (یکی از روش‌های تغییرات)، در بخش ۳-۱۰ استخراج گردید. در زمینه‌هایی غیر از مسائل سازه‌ای/ مکانیک جامدات، احتمال نامعلوم بودن و یا نبود روش تغییراتی شبیه به اصل مینیمم انرژی پتانسیل زیاد است. در مسائل مرتبط با جریان سیالات یا جرم، در مکانیک سیالات و انتقال جرم (فصل ۱۳)، فقط معادله‌ی دیفرانسیلی و شرایط مرزی موجودند. به هر حال، هنوز می‌توان روش اجزای محدود را به چنین مسائلی اعمال نمود.

از روش‌های پسماند وزنی و اعمال مستقیم آن به معادلات دیفرانسیلی، می‌توان معادلات اجزای محدود را استخراج نمود. در این بخش، روش پسماند گالرکین در کل تشریح شده و سپس به المان میله‌ای شکل اعمال می‌شود. این استخراج مبنایی برای کاربرد بعدی روش گالرکین در المان تیر آهن در فصل ۴، و

المان غیر سازه‌ای انتقال حرارت (به ویژه در المان مرتبط با مسائل یک بعدی ترکیبی هدایت، جابه‌جایی و انتقال جرم که در فصل ۱۳ تشریح شده) قرار خواهد گرفت. به دلیل پدیده‌ی انتقال جرم، فرمول بندی از روش تغییرات نامشخص بوده (یا صعب الوصول)، به قسمی که لزوماً از روش گالرکین به منظور استخراج روابط اجزای محدود استفاده می‌شود.

روش‌های پسماند دیگری نیز وجود دارد. از میان آن‌ها می‌توان روش‌های با هم گذاری، مربع‌های جزیی، / و زیر محدوده را که در بخش ۳-۱۳ تشریح شده‌اند نام برد. (به منظور کسب اطلاعات بیشتر در مورد این روش‌ها به مرجع [۵] مراجعه نمایید.)

(در روش‌های پسماند وزنی، از تابعی فرضی یا تقریبی به منظور تقریب زدن متغیر غیر وابسته، همانند جابه‌جایی یا دما، در مسأله‌ای که توسط معادله‌ای دیفرانسیلی تعریف شده، استفاده می‌شود) عموماً، چنین تابعی معادله‌ی دیفرانسیلی را ارضا نخواهد نمود؛ بنابراین جای‌گزینی این تابع در معادله‌ی دیفرانسیلی منجر به پسماندی در کل محدوده‌ی مسأله به شرح زیر می‌شود:

$$\iiint_V R dV = \text{حداقل} \quad (۱-۱۲-۳)$$

در روش پسماند، لازم است تا مقدار پسماند وزنی در کل محدوده حداقل باشد. توابع وزنی این امکان را فراهم می‌سازند که انتگرال پسماندهای وزنی به سمت صفر میل نمایند. اگر تابع وزنی توسط W تعریف شود، در آن صورت انتگرال پسماند وزنی دارای حالت کلی زیر است:

$$\iiint_V RW dV = 0 \quad (۲-۱۲-۳)$$

با استفاده از روش گالرکین، توابع میان‌یابی را شبیه به معادله‌ی (۳-۱-۳)، بر حسب توابع شکل N_1 برای متغیر غیر وابسته در معادله‌ی دیفرانسیلی انتخاب می‌کنیم. در کل، این نوع جای‌گزینی سبب می‌شود تا $R \neq 0$. بر اساس معیار

گالرکین، توابع شکل N_i نقش توابع وزنی W را ایفا می نمایند. لذا، برای هر یک از مقادیر i داریم:

$$\iiint_V RN_i dV = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3-12-3)$$

معادله‌ی (۳-۱۲-۳) منجر به n معادله می شود. معادله‌ی (۳-۱۲-۳) بدون توجه به شرایط مرزی از قبیل نیروها و جابه‌جایی‌های اعمال شده، به نقاط مرتبط با فضای درون جسم، قابل اعمال است. به منظور اعمال شرایط مرزی، انتگرال‌گیری جزء به جزء را به معادله‌ی (۳-۱۲-۳) اعمال نموده تا انتگرال‌های قابل اعمال به محیط مورد نظر و مرز آن حاصل شوند.

فرمول بندی المان میله‌ای شکل

حال کاربرد روش گالرکین را در استخراج معادلات سختی المان میله‌ای شکل نشان می دهیم. بدین منظور از معادله‌ی دیفرانسیلی اولیه، بدون بار گسترده، که در بخش ۱-۳ استخراج گردید شروع می کنیم

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (4-12-3)$$

معادله دیفرانسیلی اولیه

در جایی که A و E ثابت فرض شده‌اند. حال، معادله‌ی (۴-۱۲-۳) به عنوان پسماند R تعریف می شود. ضمن اعمال معیار گالرکین [معادلات (۳-۱۲-۳)] به معادله‌ی (۴-۱۲-۳)، داریم:

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) N_i dx = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (5-12-3)$$

اکنون انتگرال‌گیری جزء به جزء را به معادله‌ی (۵-۱۲-۳) اعمال می کنیم. به طور کل، انتگرال‌گیری جزء به جزء به شرح زیر است:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (6-12-3)$$

در جایی که در معادله کلی، u و v متغیرهای ساده ای هستند. چنانچه در معادله (۳-۱۲-۵) فرض شود که:

$$\begin{aligned} u &= N_i & du &= \frac{dN_i}{d\hat{x}} d\hat{x} \\ u &= N_i & du &= \frac{dN_i}{d\hat{x}} d\hat{x} \\ dv &= \frac{d}{d\hat{x}} \left(AE \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \right) d\hat{x} & v &= AE \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \end{aligned} \quad (7-12-3)$$

در معادله (۳-۱۲-۵)، پس از انتگرال گیری جزء به جزء بر اساس رابطه ی (۳-۱۲-۶)، در می یابیم که این معادله برابر است با:

$$\left(N_i AE \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \right) \Big|_0^L - \int_0^L AE \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \frac{dN_i}{d\hat{x}} d\hat{x} = 0 \quad (8-12-3)$$

به قسمی که در خلال انتگرال گیری جزء به جزء شرایط مرزی اعمال می شوند.

از آن جا که $\hat{u} = [N] \{ \hat{d} \}$ ، بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} = \frac{dN_i}{d\hat{x}} \hat{d}_{1,x} + \frac{dN_r}{d\hat{x}} \hat{d}_{1,x} \quad (9-12-3)$$

یا، چنانچه از روابط (۳-۱-۴) به جای $N_i = 1 - \hat{x}/L$ و $N_r = \hat{x}/L$ استفاده شود داریم:

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1,x} \\ \hat{d}_{1,x} \end{Bmatrix} \quad (10-12-3)$$

با استفاده از رابطه ی (۳-۱۲-۱۰) در معادله ی (۳-۱۲-۸)، می توان معادله ی (۳-۱۲-۱۱) را به صورت زیر نوشت:

$$AE \int_0^L \frac{dN_i}{d\hat{x}} \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] d\hat{x} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1,x} \\ \hat{d}_{1,x} \end{Bmatrix} = \left(N_i AE \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \right) \Big|_0^L \quad (i=1,2) \quad (11-12-3)$$

معادله ی (۳-۱۲-۱۱) در واقع دو معادله است (یکی برای $N_i = N_1$ و دیگری برای $N_r = N_2$). ابتدا با استفاده از تابع وزنی $N_i = N_1$ داریم:

$$AE \int_0^L \frac{dN_1}{d\hat{x}} \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] d\hat{x} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1v} \\ \hat{d}_{1x} \end{Bmatrix} = \left(N_1 AE \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \right) \Big|_0^L \quad (12-12-3)$$

ضمن جای‌گزینی به‌جای $dN_1/d\hat{x}$ داریم:

$$AE \int_0^L \left[-\frac{1}{L} \right] \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] d\hat{x} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1v} \\ \hat{d}_{1x} \end{Bmatrix} = \hat{f}_{1x} \quad (13-12-3)$$

در جایی که $\hat{f}_{1x} = AE(d\hat{u}/d\hat{x})$ زیرا در $x=0$ $N_1=1$ و در $x=L$ $N_1=0$ است. از ارزیابی معادله‌ی (۱۳-۱۲-۳) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{AE}{L} (\hat{d}_{1x} - \hat{d}_{1x}) = \hat{f}_{1x} \quad (14-12-3)$$

متشابهاً، با استفاده از رابطه‌ی $N_1 = N_2$ داریم:

$$AE \int_0^L \left[\frac{1}{L} \right] \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] d\hat{x} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{2x} \\ \hat{d}_{2v} \end{Bmatrix} = \left(N_2 AE \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \right) \Big|_0^L \quad (15-12-3)$$

پس از ساده کردن رابطه‌ی (۱۵-۱۲-۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{AE}{L} (\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{2v}) = \hat{f}_{2x} \quad (16-12-3)$$

در جایی که $\hat{f}_{2x} = AE(d\hat{u}/d\hat{x})$ زیرا در $x=L$ $N_2=1$ و در $x=0$ $N_2=0$ است. ملاحظه می‌شود که روابط (۱۴-۱۲-۳) و (۱۶-۱۲-۳) به ترتیب همان معادلات (۳-۱-۱۳) و (۳-۱۰-۲۷) می‌باشند که از روش مستقیم سختی استخراج گردیدند.

△

۳-۱۳ روش‌های دیگر پسماند و اعمال آن‌ها به مسائل مرتبط با المان میله‌ای

شکل

همان‌طور که در بخش ۳-۱۲ در خلال تشریح روش پسماند گالرکین ذکر شد، روش‌های پسماند وزنی بر این اساس استوارند که در مسأله‌ی مورد نظر، به منظور حل معادله‌ی دفرانسیلی مربوطه جوابی تقریبی در نظر گرفته می‌شود. جواب آزمایشی یا فرض شده، عموماً تابع تغییر مکان یا دمایی است که به اجبار باید

شرایط اولیه و مرزی را ارضا نماید. جواب آزمایشی یاد شده، عموماً معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم را ارضا نخواهد نمود؛ بنابراین، جای‌گزینی تابع آزمایشی در معادله‌ی دیفرانسیلی، منجر به خطای پسماندی می‌شود. در هر یک از روش‌های پسماند، خطا باید در بعضی از نقاط یا فواصل انتخاب شده برابر صفر شود. به منظور تشریح این مفهوم، مثال میله‌ای را که تحت تأثیر بار مثلثی شکلی مطابق با شکل ۳-۲۹ (به بخش ۳-۱۱ مراجعه شود) قرار گرفته و حل واقعی تغییر مکان محوری آن توسط رابطه‌ی (۳-۱۱-۵) در بخش ۳-۱۱ داده شده است، حل می‌کنیم. در این رابطه، چهار روش رایج پسماند وزنی که شامل با هم‌گذاری، زیر‌محدوده، مربع‌های جزئی، و روش گالرکین می‌باشد را تشریح می‌کنیم.

لازم به ذکر است که نیت اولیه در این بخش آن است تا اصول کلی روش‌های پسماند وزنی یاد شده را از طریق مثال ساده‌ای به شما معرفی کنیم. باید به خاطر داشت که بدین منظور تغییر مکانی را فرض خواهیم نمود که به‌طور کلی منجر به حل تقریبی (در مثال ذکر شده، تابع تغییر مکان فرض شده منجر به جوابی برابر با حل واقعی می‌شود) مسأله، در محدوده‌ی مورد نظر (مسأله‌ای که قبلاً در بخش ۱۳-۱۰ حل شد) خواهد شد. همان‌طور که قبلاً در المان‌های میله‌ای و فنری شکل مشاهده گردید، با افزایش تعداد المان‌ها در مدل سازی میله، جواب‌های تقریبی به دست آمده به سمت تغییر مکان‌های واقعی میل می‌نمایند.

به منظور وضوح بیشتر، شکل ۳-۳۶ (a) نمایانگر مسأله‌ای است که حل آن مد نظر بوده در حالی که نمودار جسم آزاد قسمتی از میله با نیروی دیفرانسیلی $p(x)$ ، در شکل ۳-۳۶ (b) نشان داده شده است.

معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم بر تغییر مکان محوری میله، u ، به شرح زیر است:

$$\left(AE \frac{du}{dx} \right) - p(x) = 0 \quad (3-13-3)$$

در جایی که نیروی داخلی برابر $p(x) = \alpha x^2$ است. شرط مرزی به صورت $u(x=L) = 0$ می باشد.

به منظور استفاده از روش پسماند وزنی، مجبوریم تا از تابعی تقریبی برای تغییر مکان استفاده کنیم. تابع تقریبی یاد شده باید شرایط مرزی مسأله را ارضا نماید. در این جا، تابع زیر فرض می شود:

$$u(x) = c_1(x-L) + c_2(x-L)^2 + c_3(x-L)^3 \quad (2-13-3)$$

در جاییکه c_1 ، c_2 و c_3 ضرایبی مجهولند. مضافاً، معادله‌ی (۲-۱۳-۳)، شرط مرزی $u(x=L) = 0$ را ارضا می کند. جای‌گزینی u از معادله‌ی (۲-۱۳-۳) در معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم، رابطه‌ی (۳-۱۳-۳)، منجر به تابع خطای R ، به شرح زیر می شود:

$$AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - \alpha x^2 = R \quad (3-13-3)$$

حال، نحوه‌ی حل معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم را از چهار روش پسماند وزنی یاد شده تشریح می کنیم.

روش با هم گذاری

بر اساس روش با هم گذاری، تابع پسماند یا خطا، R ، باید به اجبار در نقاطی که تعداد آن‌ها برابر تعداد ضرایب مجهول است برابر صفر شود. معادله‌ی (۳-۱۳-۳)، شامل سه ضریب مجهول است. لذا، تابع خطا باید در سه نقطه در امتداد میله برابر صفر شود. بدین منظور، تابع خطا را به شرح زیر در $x = 0$ ، $x = \frac{L}{3}$ و

$x = \frac{2L}{3}$ مجبور به صفرشدن می کنیم.

$$R(c, x=0) = 0 = AE[c_1 + 2c_2(-L) + 3c_3(-L)^2] = 0$$

$$R(c, x=L/3) = 0 = AE[c_1 + 2c_2(-2L/3) + 3c_3(-2L/3)^2] - \alpha(L/3)^2 = 0$$

$$R(c, x=2L/3) = 0 = AE[c_1 + 2c_2(-L/3) + 3c_3(-L/3)^2] - \alpha(2L/3)^2 = 0$$

(۴-۱۳-۳)

حال می‌توان سه رابطه‌ی خطی فوق را، معادله‌ی (۳-۱۳-۴)، به منظور تعیین مجهولات c_1 ، c_2 و c_3 حل نمود. نتیجه به شرح زیر است.

$$c_1 = 5L^3 / AE \quad c_2 = 5L / AE \quad c_3 = 5 / (3AE) \quad (5-13-3)$$

ضمن جای‌گزینی مقادیر عددی $A = 2$ ، $E = 30 \times 10^6$ و $L = 60$ در رابطه‌ی (۳-۱۳-۳)، مقادیر c برابرند با:

$$c_1 = 3 \times 10^{-4}, \quad c_2 = 5 \times 10^{-6}, \quad c_3 = 2 / 778 \times 10^{-6} \quad (6-13-3)$$

از جای‌گزینی مقادیر عددی ضرایب به دست آمده در رابطه‌ی (۳-۱۳-۶)، در معادله‌ی (۳-۱۳-۲)، عبارت نهایی تغییر مکان محوری به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$u(x) = 3 \times 10^{-4}(x-L) + 5 \times 10^{-6}(x-L)^2 + 2 / 778 \times 10^{-6}(x-L)^3 \quad (7-13-3)$$

از آن‌جا که تابع تغییر مکان، معادله‌ی (۳-۱۳-۲)، درجه سه انتخاب شده، و معادله‌ی واقعی تغییر مکان، رابطه‌ی (۳-۱۱-۶)، نیز درجه سه می‌باشد، لذا نتایج حاصل از روش با هم‌گذاری و حل واقعی یکی است. منحنی حاصل از نتایج به دست آمده، در شکل ۳-۳۲ صفحه‌ی ۱۹۶ نشان داده شده است.

روش زیر محدوده

در روش زیر محدوده، انتگرال خطا یا تابع پسماند باید بر روی فاصله‌ی منتخب خاصی برابر صفر شود. تعداد زیر فاصله‌های انتخاب شده، باید برابر تعداد ضرایب مجهول باشد. از آن‌جا که تعداد مجهولات در مثال قید شده‌ی میله سه عدد است، لذا باید تعداد زیر فاصله‌های یاد شده برابر سه عدد باشند؛ بنابراین، زیر فاصله‌ها را از ۰ تا $L/3$ ، از $L/3$ تا $2L/3$ ، و از $2L/3$ تا L انتخاب می‌کنیم.

$$\int_{L/3}^{L/3} R dx = 0 = \int_{L/3}^{L/3} \{AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - 5x^2\} dx$$

$$\int_{L/3}^{2L/3} R dx = 0 = \int_{L/3}^{2L/3} \{AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - 5x^2\} dx \quad (8-13-3)$$

$$\int_{L/3}^L R dx = 0 = \int_{L/3}^L \{AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - 5x^2\} dx$$

به قسمی که در معادله‌ی (۳-۱۳-۸)، از رابطه‌ی (۳-۱۳-۳) برای R استفاده شده است.

انتگرال‌گیری روابط (۳-۱۳-۸) منجر به سه معادله‌ی خطی همزمان می‌شود که از حل آن‌ها می‌توان ضرایب c_1 ، c_2 و c_3 را به دست آورد. با استفاده از مقادیر عددی داده شده برای A ، E و L ، مقادیر عددی ضرایب یاد شده مشابه با مقادیر به دست آمده در معادله‌ی (۳-۱۳-۶) است؛ بنابراین، تغییر مکان محوری، مشابه با رابطه‌ی (۳-۱۳-۷) می‌باشد.

روش جمع مربع‌ها

در روش جمع مربع‌ها، مربع انتگرال تابع باید بر اساس رابطه‌ی

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left(\int_0^L R^2 dx \right) = 0 \quad i=1,2,\dots,N \quad (\text{به ازای } N \text{ ضریب مجهول}) \quad (۳-۱۳-۹)$$

یا معادل آن

$$\int_0^L R \frac{\partial R}{\partial c_i} dx = 0 \quad (۳-۱۳-۱۰)$$

در امتداد طول میله، نسبت به هر یک از ضرایب مجهول در جواب فرض شده مینیمم شود.

از آن‌جا که تعداد ضرایب مجهول در حل تقریبی سه عدد است لذا، بر اساس رابطه‌ی (۳-۱۳-۱۰)، انتگرال‌گیری باید در سه نوبت انجام گرفته تا سه معادله به شرح زیر حاصل شود.

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - 5x^2\} AEdx = 0$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - 5x^2\} AE2(x-L)dx = 0$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + \alpha c_2(x-L) + \alpha c_3(x-L)^2] - \alpha x^2\} AE \alpha (x-L) dx = 0 \quad (11-13-3)$$

در اولین، دومین، و سومین رابطه از معادلات (۱۱-۱۳-۳)، به ترتیب از مشتقات جزئی استفاده شده است.

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = AE, \quad \frac{\partial R}{\partial c_2} = AE \alpha (x-L), \quad \frac{\partial R}{\partial c_3} = AE \alpha (x-L)^2 \quad (12-13-3)$$

انتگرال‌گیری معادلات (۱۱-۱۳-۳) منجر به سه معادله‌ی خطی می‌شود که از حل آن‌ها سه ضریب یاد شده حاصل می‌شوند. مجدداً، مقادیر عددی ضرایب یاد شده، برابر با مقادیر مندرج در رابطه‌ی (۶-۱۳-۳) می‌باشند؛ بنابراین، جواب به دست آمده شبیه به جواب حقیقی است.

روش گالرکین

در روش گالرکین، همان‌طور که قبلاً توسط رابطه‌ی (۲-۱۲-۳) ذکر شد، خطا باید عمود^۱ بر تابع وزنی W_i باشد. در مثال میله‌ای که ذکر شد، این انتگرال برابر است با:

$$\int_0^L RW_i dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13-13-3)$$

توابع وزنی، جزئی از حل تقریبی محسوب می‌شوند. از آن‌جا که تعداد مقادیر ثابت مجهول در حل تقریبی سه عدد است، لذا نیاز است تا سه معادله استخراج

^۱ کاربرد واژه‌ی عمود در این مضمون، نه دلیل مشابه بودن کاربرد آن در مقایسه با بردارها است در این‌جا، ضرب داخلی، با انتگرالی در رابطه‌ی (۳-۱۳-۳) جای‌گزين شده است در معادله‌ی (۳-۱۳-۳) اگر بخواهیم $\int_0^L u(x)v(x)dx = 0$ برابر صفر شود، توابع $u(x) = R$ و $v(x) = W_i$ باید در فاصله‌ی $0 \leq x \leq L$ عمود بر هم

شود. باید به خاطر داشت که تابع فرض شده‌ای که در رابطه‌ی (۳-۱۳-۲) داده شده، درجه سه بوده و لذا، توابع وزنی به قسم زیر انتخاب می‌شوند:

$$W_1 = (x-L) \quad W_2 = (x-L)^2 \quad W_3 = (x-L)^3 \quad (۳-۱۳-۱۴)$$

ضمن جای‌گزینی متوالی توابع وزنی از معادله‌ی (۳-۱۳-۱۴) در رابطه‌ی (۳-۱۳-۱۳)، سه معادله به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - 5x^3\}(x-L) dx = 0$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - 5x^3\}(x-L)^2 dx = 0 \quad (۳-۱۳-۱۵)$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x-L) + 3c_3(x-L)^2] - 5x^3\}(x-L)^3 dx = 0$$

انتگرال‌گیری معادلات (۳-۱۳-۱۵) منجر به سه معادله‌ی خطی می‌شود که می‌توان از حل آن‌ها ضرایب مجهول را به دست آورد. مقادیر عددی ضرایب یاد شده عیناً برابر مقادیر داده شده در رابطه‌ی (۳-۱۳-۱۶) می‌باشند؛ بنابراین، جواب به دست آمده مشابه با جواب واقعی است.

به عنوان نتیجه، از آن‌جا که حل تقریبی نسبت به x درجه سه فرض شده و جواب واقعی نیز نسبت به x درجه سه می‌باشد لذا جواب به دست آمده از کلیه‌ی روش‌های پسماند، مشابه با جواب واقعی است. با این وصف، هدف این بخش که همان دست‌یابی به جواب تقریبی (یا در این مثال، جواب واقعی) معادله‌ی دیفرانسیلی معلومی است، از چهار روش پسماند رایج نیز تحقق یافته است. جواب واقعی در معادله‌ی (۳-۱۱-۶)، و نیز در شکل ۳-۳۲، بخش ۳-۱۱، نشان داده شده است.



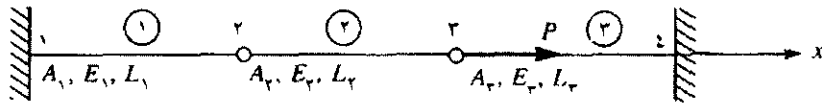
مراجع

- [1] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 9, Sept. 1956, pp. 805-824.
- [2] Martin, H. C., "Plane Elasticity Problems and the Direct Stiffness Method," *The Trend in Engineering*, Vol. 13, Jan. 1961, pp. 5-19.
- [3] Melosh, R. J., "Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 1, No. 7, July 1963, pp. 1631-1637.
- [4] Oden, J. T., and Ripperger, E. A., *Mechanics of Elastic Structures*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1981.
- [5] Finlayson, B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, 1972.
- [6] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
- [7] Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York, 1989.
- [8] Forray, M. J., *Variational Calculus in Science and Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [9] Linear Stress and Dynamics Reference Division, Docutech On-Line Documentation, Algor Interactive Systems, Pittsburgh, PA.



مسائل

۳-۱. ماتریس سختی کل، K ، مجموعه‌ی مندرج در شکل P-۱ را از به هم گذاری ماتریس سختی هر میله به دست آورید. به خاطر داشته باشید که K باید بر حسب $A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3, L_1, L_2, L_3$ باشد. در این جا، A, E, L علامات عامی هستند که به ترتیب برای سطح مقطع، مدول الاستیسیته، و طول به کار می‌روند.



شکل ۱-۳P

b. حال فرض کنید $E_1 = E_2 = E_3 = E$, $A_1 = A_2 = A_3 = A$ و اگر گره‌های ۱ و ۴ ثابت بوده و نیروی P بر گره ۳ در جهت مثبت x عمل نماید، عبارتی برای محاسبه‌ی جابه‌جایی گره‌های ۲ و ۳ بر حسب A , E , L و P بیابید.

c. اکنون فرض کنید $A = 1 \text{ in}^2$, $E = 10 \cdot 10^6 \text{ psi}$, $L = 10 \text{ in}$ و $P = 1000 \text{ lb}$

i. مقادیر عددی جابه‌جایی در گره‌های ۲ و ۳ را بیابید.

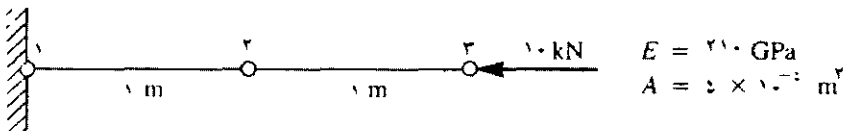
ii. مقادیر عددی عکس‌العمل‌ها در گره‌های ۱ و ۴ را بیابید.

iii. مقادیر تنش در المان‌های ۱ الی ۳ بیابید.

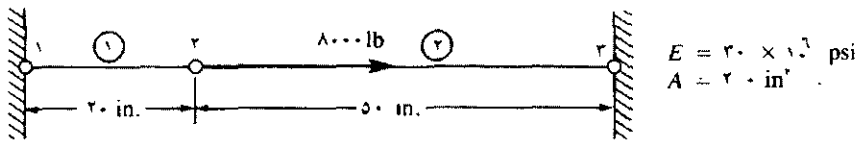
۲-۳ الی ۱۱-۳ در مجموعه میله‌های مندرج در شکل‌های ۲-۳P الی ۱۱-۳P،

مطلوبست تعیین جابه‌جایی گره‌ها، نیرو در هر المان، و عکس‌العمل‌ها. از

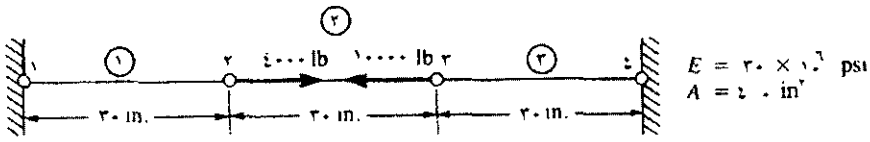
روش مستقیم سختی در این مسائل استفاده شود.



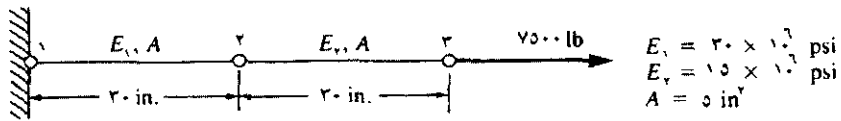
شکل ۲-۳P



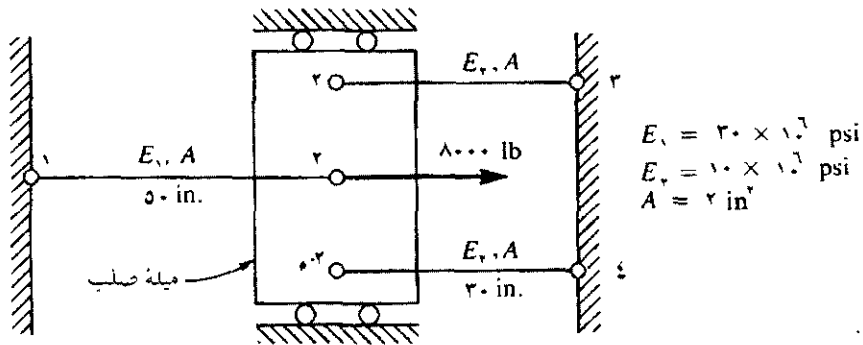
شکل ۳-۳P



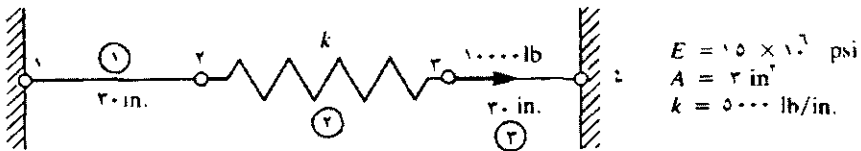
شکل ۴-۳P



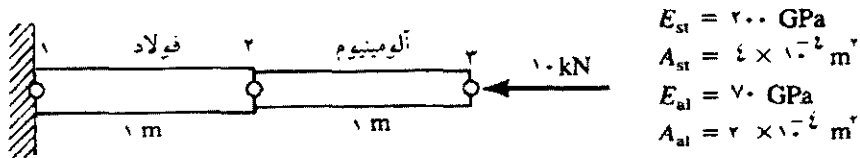
شکل ۵-۳P



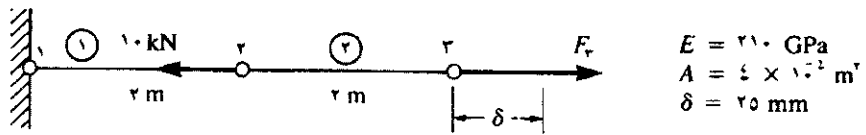
شکل ۶-۳P



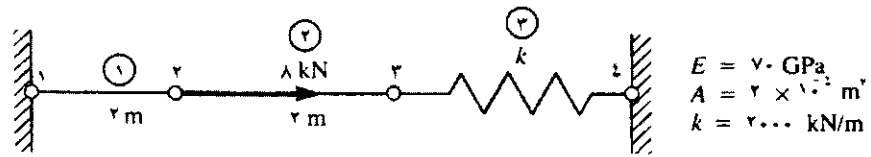
شکل ۷-۳P



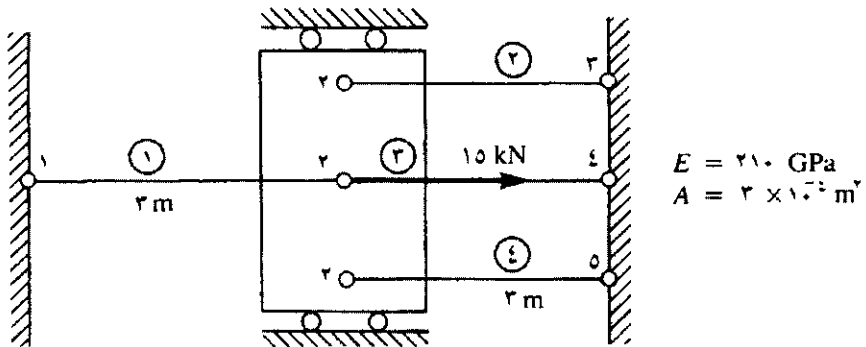
شکل ۸-۳P



شکل ۹-۳P

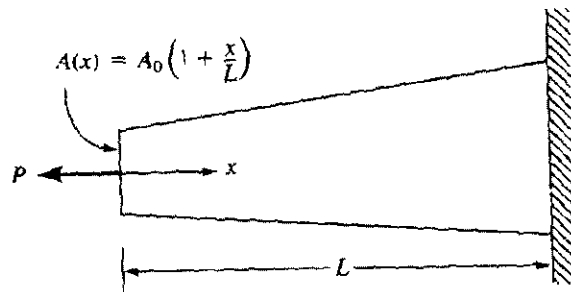


شکل ۱۰-۳P



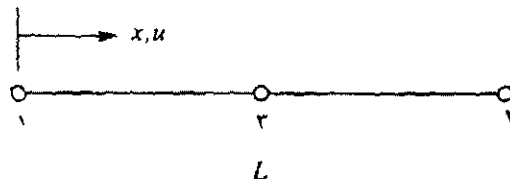
شکل ۱۱-۳P

۱۲-۳ مقادیر تنش و جابه‌جایی محوری در میله‌ی مخروطی شکل نمودار ۱۲-۳ را با استفاده از یک و سپس دو المان با سطح مقطع ثابت بیابید. مساحت سطح مقطع را در وسط طول هر المان محاسبه کنید. از این مساحت در هر المان استفاده نمایید. فرض کنید $A_0 = 2 \text{ in}^2$, $L = 20 \text{ in}$, $P = 1000 \text{ lb}$ و $E = 10 \times 10^6 \text{ psi}$. جواب‌های حاصل از روش اجزای محدود را با جواب‌های حقیقی مقایسه کنید.



شکل ۱۲-۳P

۱۳-۳ ماتریس سختی المان میله‌ای شکلی را با گره‌های ابتدایی، انتهایی و میانی مطابق شکل ۱۳-۳P بیابید. فرض کنید $u = a_1 + a_2x + a_3x^2$ معرف جابه‌جایی محوری است. (این المان دارای مرتبه‌ی بالاتری است به قسمی که کرنش به صورت خطی در امتداد المان عوض می‌شود.)



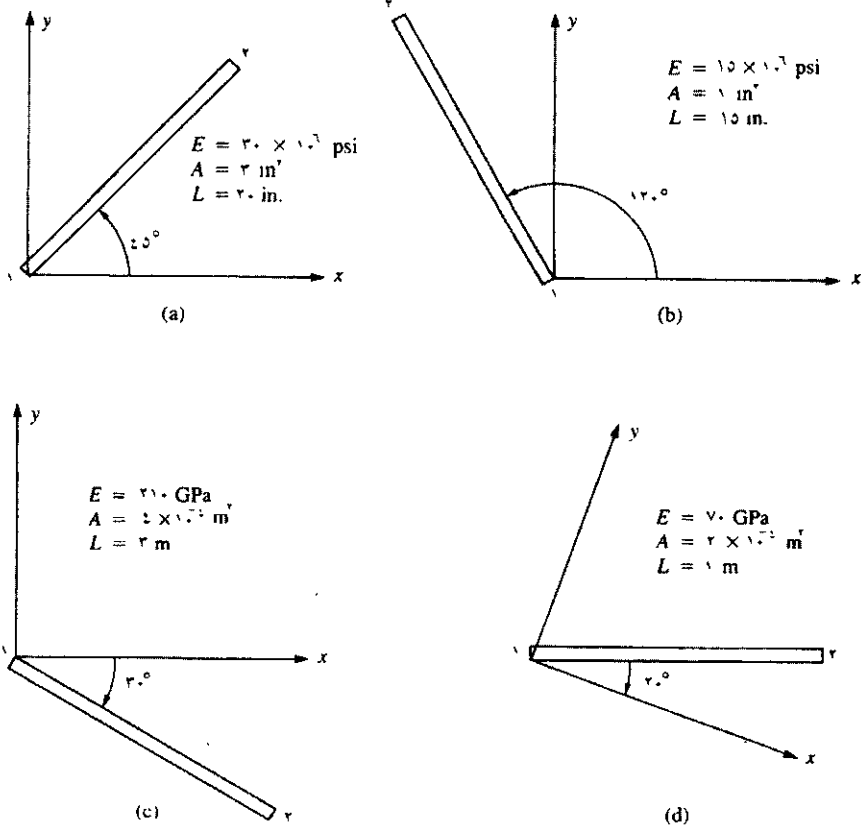
شکل ۱۳-۳P

۱۴-۳ تابع زیر را برای المان میله‌ای شکلی با دو گره در نظر بگیرید:

$$u = a + bx^2$$

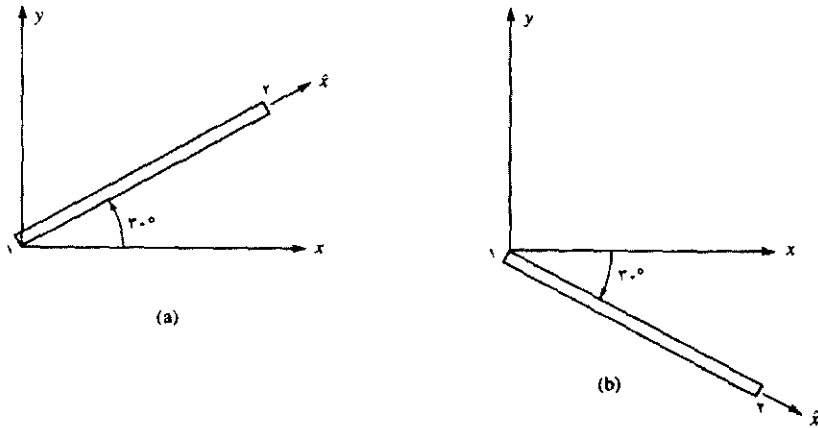
آیا این تابع درستی برای جابه‌جایی است؟ در مورد مثبت یا منفی بودن جواب بحث نمایید.

۱۵-۳ در هر یک از المان‌های میله‌ای شکل مندرج در شکل ۱۵-۳P، ماتریس سختی اصلی k^e را به دست آورید.



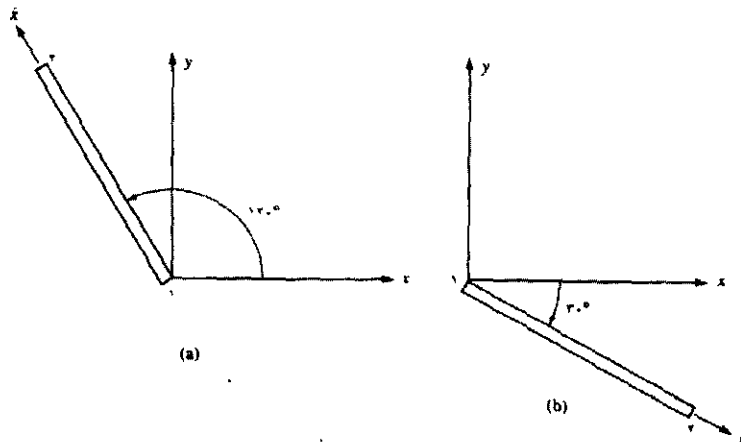
شکل ۱۵-۳P

۱۶-۳ در المان میله‌ای شکل مندرج در شکل ۱۶-۳P، مقادیر جابه‌جایی‌های اصلی برابرند با $d_{1x} = 0/5 \text{ in}$ ، $d_{1y} = 0/0$ ، $d_{2x} = 0/25 \text{ in}$ و $d_{2y} = 0/75 \text{ in}$ مؤلفه‌ی جابه‌جایی محلی \hat{x} در هر یک از دو انتهای هر میله را به دست آورید. در هر المان فرض کنید $E = 12 \times 10^7 \text{ psi}$ و $A = 0/5 \text{ in}^2$ و $L = 60 \text{ in}$



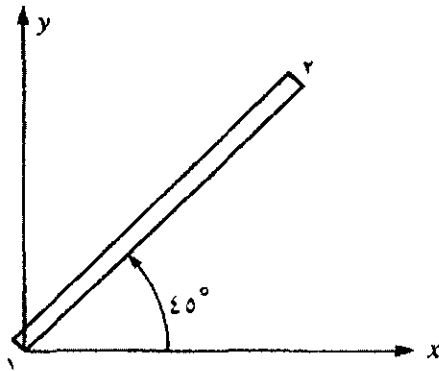
شکل ۱۶-۳P

۱۷-۳ در المان‌های مندرج در شکل ۱۷-۳، مقادیر جابه‌جایی‌های اصلی برابرند با $d_{1y} = ۲/۵ \text{ mm}$ ، $d_{1x} = ۰/۰ \text{ mm}$ ، $d_{2y} = ۳/۰ \text{ mm}$ و $d_{2x} = ۵/۰ \text{ mm}$ مؤلفه‌ی جابه‌جایی محلی \hat{x} در هر یک از دو انتهای هر میله را بیابید. در هر المان فرض کنید $E = ۲۱۰ \text{ Gpa}$ و $A = ۱۰ \times ۱۰^{-۲} \text{ m}^2$ و $L = ۳ \text{ m}$



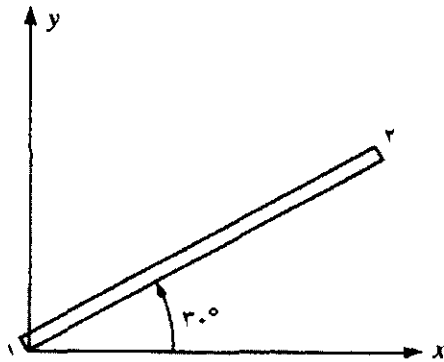
شکل ۱۷-۳P

۱۸-۳ با استفاده از روش بخش ۳-۵، تنش محوری در هر یک از المان‌های میله‌ای شکل مندرج در شکل ۱۸-۳P را بیابید.



$$\begin{aligned}
 E &= 20 \times 10^6 \text{ psi} \\
 A &= 2 \text{ in}^2 \\
 L &= 60 \text{ in.} \\
 d_{1,x} &= 0 & d_{1,y} &= 0 \\
 d_{2,x} &= 0.101 \text{ in.} & d_{2,y} &= 0.102 \text{ in.}
 \end{aligned}$$

(a)



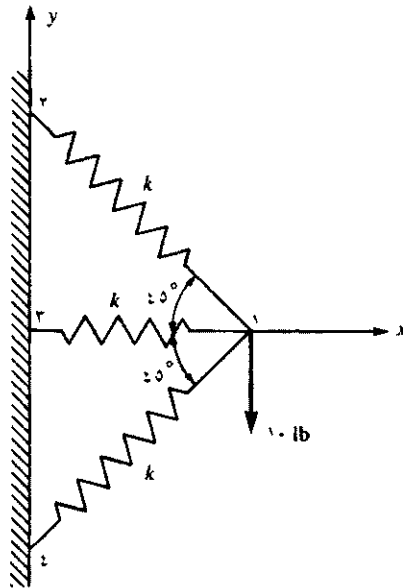
$$\begin{aligned}
 E &= 210 \text{ GPa} \\
 A &= 2 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \\
 L &= 2 \text{ m} \\
 d_{1,x} &= 0.25 \text{ mm} & d_{1,y} &= 0 \\
 d_{2,x} &= 1.00 \text{ mm} & d_{2,y} &= 0
 \end{aligned}$$

(b)

شکل ۳P-۱۸

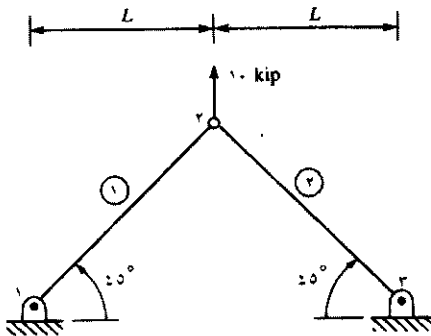
۳-۱۹. a. در مجموعه‌ای که در شکل ۳P-۱۹ نشان داده شده، ماتریس سختی کل را از انطباق ماتریس سختی هر فنر به دست آورید. در این جا k ماتریس سختی هر فنر است.

b. مؤلفه‌های x و y خیز در گره ۱ را بیابید.

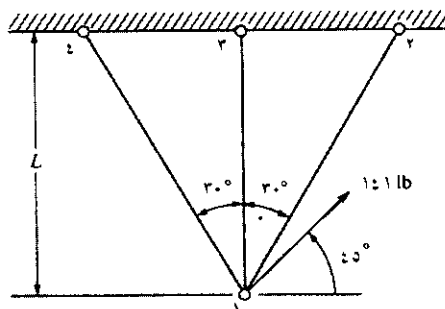


شکل ۱۹-۳P

۲۰-۳ در خریای دو بعدی مندرج در شکل ۲۰-۳، با استفاده از روش مستقیم سختی، جابه‌جایی گره ۲ را بیابید. همچنین، تنش در المان ۱ را محاسبه کنید. فرض کنید $A = 5 \text{ in}^2$ ، $E = 1 \times 10^7 \text{ psi}$ و $L = 100 \text{ in}$



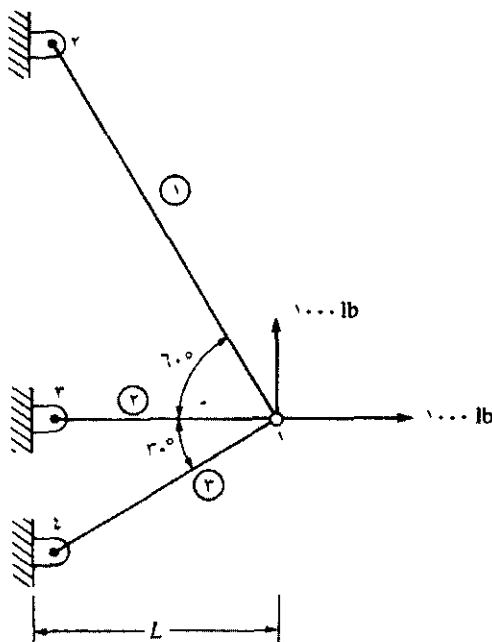
شکل ۲۰-۳P



شکل ۲۱-۳P

۲۱-۳ در خرابای مندرج در شکل ۲۱-۳P، مؤلفه‌های افقی و قائم جابه‌جایی در گره ۱ را بیابید. فرض کنید AE در کلیه‌ی المان‌ها یکسان است.

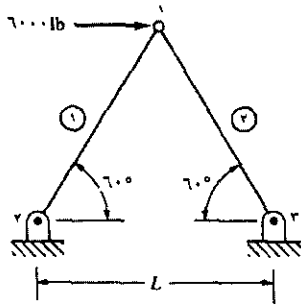
۲۲-۳ در خرابای مندرج در شکل ۲۲-۳P، مؤلفه‌های افقی و قائم جابه‌جایی در گره ۱ را یافته و تنش در هر المان را محاسبه کنید. همچنین، صحت تعادل نیروها را در گره ۱ ارزیابی کنید. در کلیه‌ی المان‌ها، $A_1 = 1 \text{ in}^2$ و $E = 10 \times 10^6 \text{ psi}$ فرض کنید $L = 100 \text{ in}$



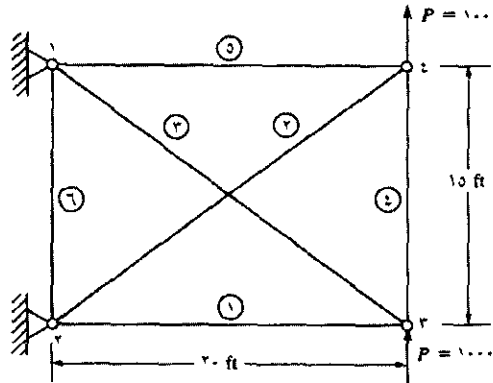
شکل ۲۲-۳P

۲۳-۳ در خرابای مندرج در شکل ۲۳-۳P، مؤلفه‌های افقی و قائم جابه‌جایی در گره ۱ را بیابید. همچنین، تنش در المان ۱ را محاسبه نمایید. فرض کنید

$$L = 100 \text{ in} \text{ و } E = 10 \times 10^6 \text{ psi} \text{ } A = 1 \text{ in}^2$$



شکل ۳۳-۳P



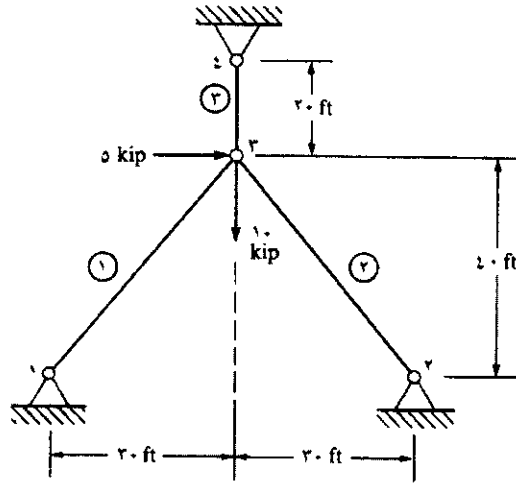
شکل ۳۴-۳P

۳-۲۴ در خرپای مندرج در شکل ۳۴-۳P، جابه‌جایی کلیه گره‌ها و نیرو در هر المان را بیابید. فرض کنید AE در کلیه المان‌ها یکسان است.

۳-۲۵ حال در شکل ۳۴-۳P، المان رابط بین گره‌های ۲ و ۴ را حذف نمایید. سپس جابه‌جایی کلیه گره‌ها و نیرو در هر المان را محاسبه کنید.

۳-۲۶ حال هر دو عضو ضربدری در خرپای مندرج در شکل ۳۴-۳P را بردارید. آیا می‌توان جابه‌جایی گره‌ها را محاسبه نمود؟ اگر نه، چرا؟

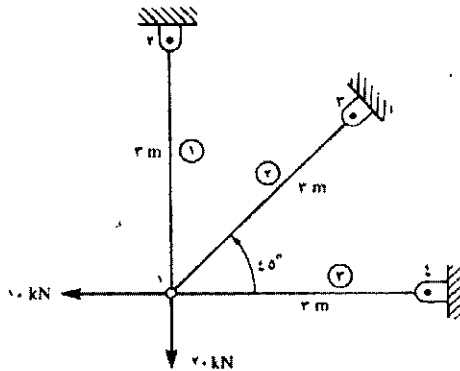
۳-۲۷ در خرپای دو بعدی مندرج در شکل ۳۷-۳P، مؤلفه‌های جابه‌جایی در گره ۳ و نیرو در هر المان را بیابید. فرض کنید در کلیه المان‌ها $A = 3 \text{ in}^2$ و $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ صحت تعادل نیروها در گره ۳ را بررسی کنید.



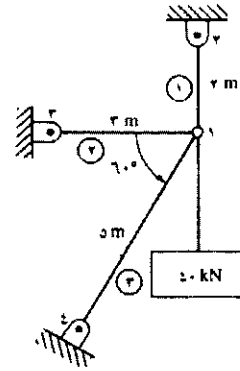
شکل ۲۷-۳۲

۲۸-۳ نشان دهید که برای ماتریس انتقال \underline{T} مندرج در معادله‌ی (۳-۴-۱۵)،
 $\underline{T}^T = \underline{T}^{-1}$ ، و لذا معادله‌ی (۳-۴-۲۱) حقیقتاً صحیح بوده و نتیجتاً نشان
 دهید که $\underline{k} = \underline{T}^T \underline{k} \underline{T}$ معرف ماتریس سختی هر المان است.

۲۹-۳ الی ۳۰-۳ در خراباهای دو بعدی مندرج در شکل های ۲۹-۳P و ۳۰-۳P،
 مؤلفه‌های افقی و قائم جابه‌جایی در گره ۱ را یافته و تنش در هر المان را
 محاسبه کنید. در کلیه‌ی المان‌ها $E = 210 \text{ GPa}$ و $A = 1/0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$



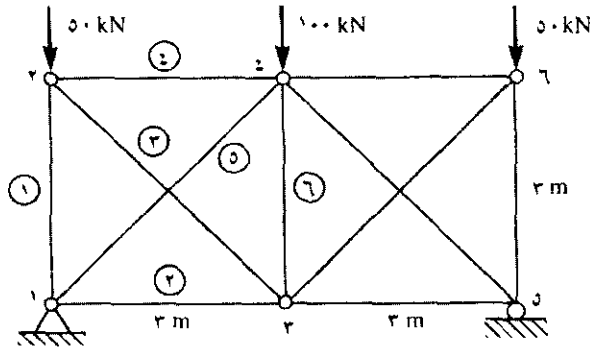
شکل ۲۹-۳P



شکل ۳۰-۳P

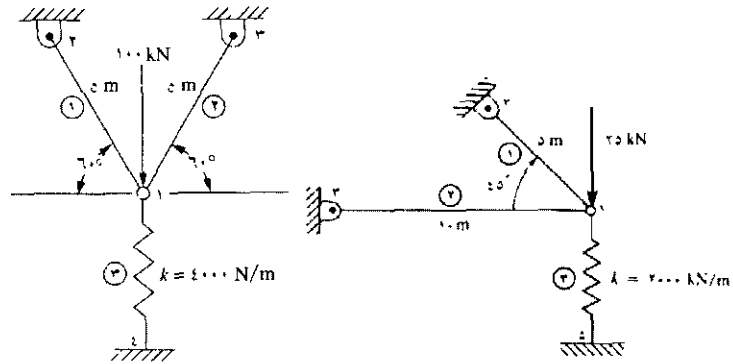
۳-۳۱ در شکل ۳۰-۳۱P، المان ۱ را حذف نموده و مسأله را حل نمایید. جابه‌جایی‌ها و تنش‌های به دست آمده را با مقادیر مشابهی که در مسأله‌ی ۳۰-۳ حاصل شد مقایسه کنید.

۳-۳۲ در خرابی دو بعدی مندرج در شکل ۳۲-۳۲P، جابه‌جایی گره‌ها، نیرو و تنش در هر المان، و عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را بیابید. در کلیه‌ی المان‌ها $E = 70 \text{ Gpa}$ و $A = 3/0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ صحت تعادل نیروها در گره‌های ۲ و ۴ را بررسی کنید. از تقارن در مدل خود استفاده نمایید.



شکل ۳۲-۳۲P

۳-۳۳ در خرابی دو بعدی مندرج در شکل ۳۳-۳۳P، که در آن گره ۱ بر روی فنری قرار دارد، جابه‌جایی گره‌ها و تنش در هر المان را محاسبه کنید. در هر دو عضو خراب فرض کنید $E = 210 \text{ Gpa}$ و $A = 5/0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$



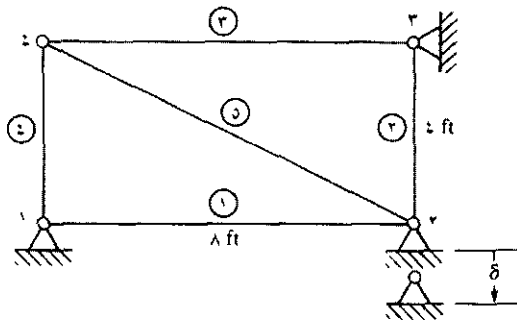
شکل ۳۳-۲ (b)

شکل ۳۳-۲ (a)

۳-۳۴ در خرابی دو بعدی مندرج در شکل ۳۴-۲، گره ۲ به میزان $\delta = 0.05$ in

نشست می‌کند. نیرو و تنش در هر المان را به دلیل این نشست بیابید. فرض

کنید در هر المان $E = 30 \times 10^6$ psi و $A = 2$ in²



شکل ۳۴-۳

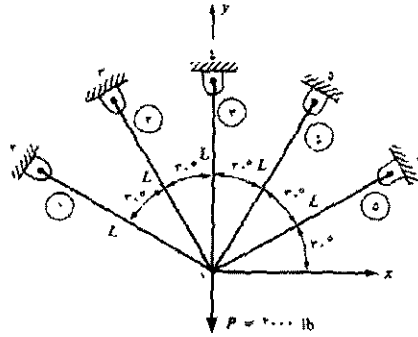
۳-۳۵ در خرابی دو بعدی مقارنی که در شکل ۳۵-۳ نشان داده شده مطلوب‌ست

(a) اندازه‌ی خیز در گره ۱ و (b) تنش در المان ۱. اندازه‌ی AE/L در المان ۳

دو برابر مقدار مشابه در المان‌های دیگر است. فرض کنید $AE/L = 10^6$

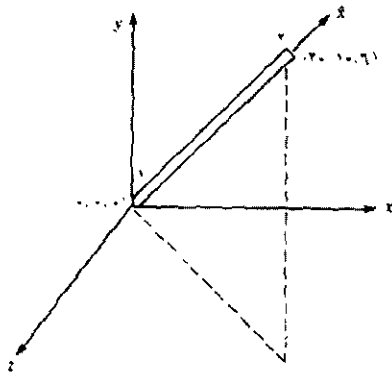
lb/in. سپس به منظور تعیین نتایج عددی فرض کنید $A = 1$ in² و $L = 10$ in

و $E = 10 \times 10^6$ psi

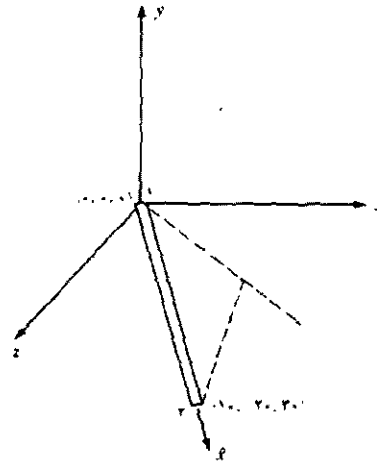


شکل ۳۵-۳۲

۳۶-۳ الی ۳۷-۳ در المان‌های خریایی سه بعدی که در شکل‌های ۳۶-۳۲ و ۳۷-۳۲ نشان داده شده، جابه‌جایی اصلی در گره ۱ برابر است با $d_{1x} = 0.1$ و $d_{1y} = 0.2$ in، $d_{1z} = 0.15$ in در المان‌های یاد شده جابه‌جایی در امتداد محور محلی \hat{x} در گره ۱ را بیابید. مختصات هر گره، بر حسب اینچ، بر روی هر شکل نشان داده شده است.



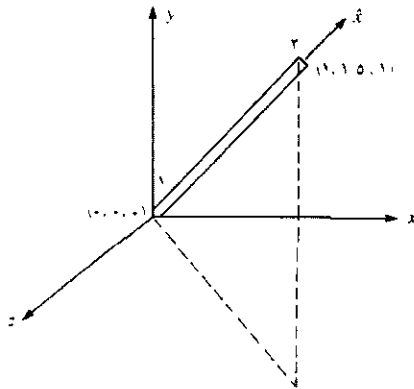
شکل ۳۶-۳۲



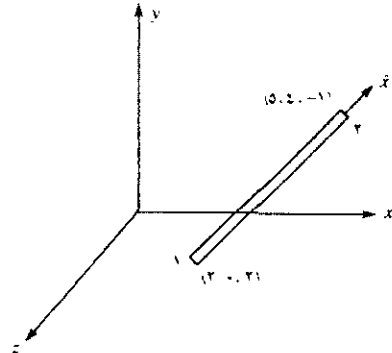
شکل ۳۷-۳۲

۳۸-۳ الی ۳۹-۳ در المان‌های خریایی سه بعدی که در شکل‌های ۳۸-۳۲ و ۳۹-۳۲ نشان داده شده، جابه‌جایی اصلی در گره ۲ برابر است با

جاب‌جایی در امتداد محور محلی \hat{x} در گره ۲ را بیابید. مختصات هر گره، بر حسب متر، بر روی هر شکل نشان داده شده‌اند.

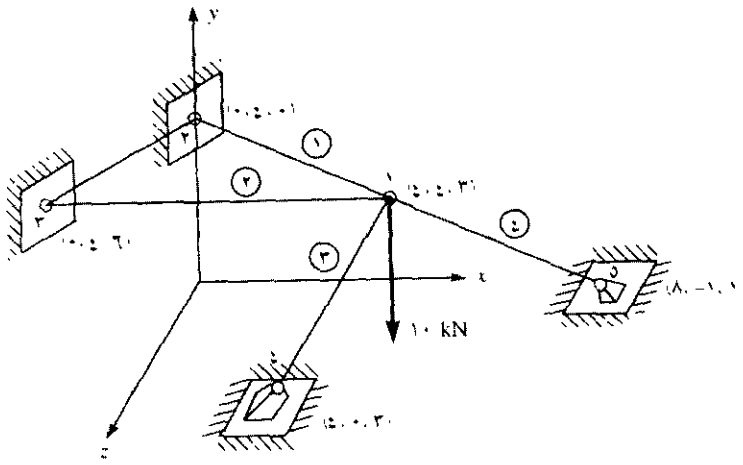


شکل ۳۸-۳P

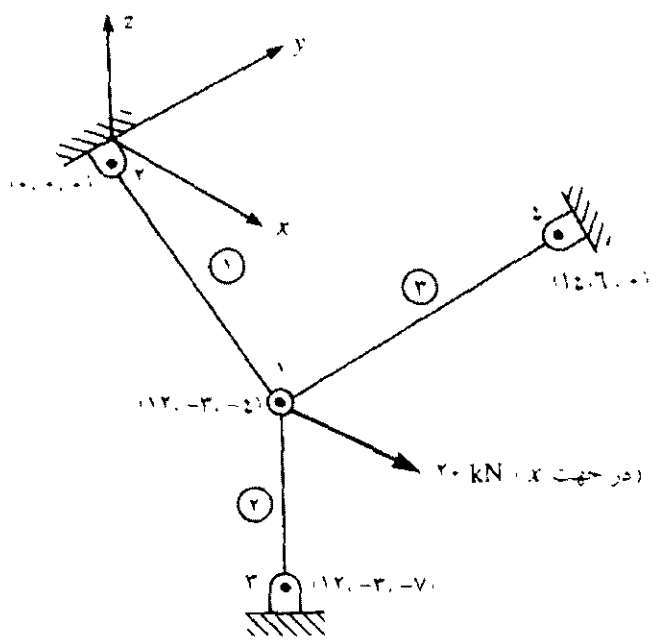


شکل ۳۹-۳P

۴۰-۳، ۴۱-۳ در خریاهای سه بعدی مندرج در شکل های ۴۰-۳P و ۴۱-۳P، جاب‌جایی در هر گره و تنش در هر المان را بیابید. در کلیه المان‌ها فرض کنید $E = 210 \text{ Gpa}$ و $A = 10 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. صحت تعادل نیروها در گره ۱ را ارزیابی کنید. مختصات هر گره، بر حسب متر، در شکل نشان داده شده‌اند. کلیه تکیه‌گاه‌ها از نوع لولایی سه بعدی می‌باشند.

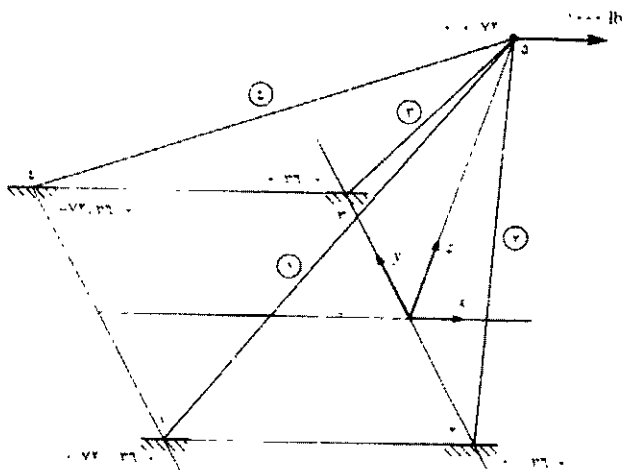


شکل ۳۰-۴۰



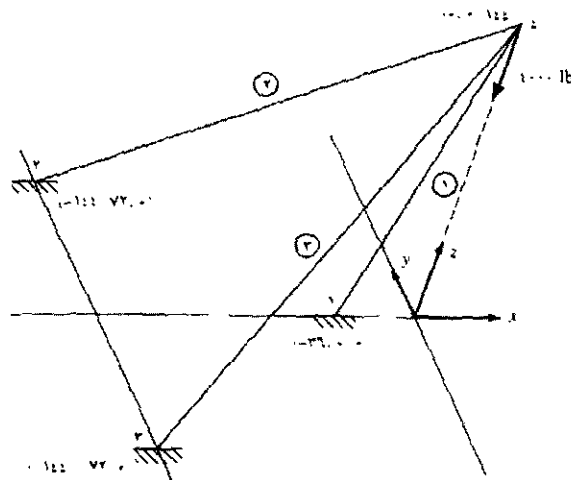
شکل ۳۰-۴۱

۴۲-۳ در خرابایی سه بعدی که مطابق با شکل ۴۲-۳P تحت تأثیر نیرویی برابر 1000 lb در جهت x قرار گرفته، جابه‌جایی گره ۵ را بیابید. همچنین تنش در هر المان را محاسبه کنید. فرض کنید در کلیه‌ی المان‌ها $A = 4 \text{ in}^2$ و $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ مختصات هر گره، بر حسب اینچ، در شکل نشان داده شده است. گره‌های ۱-۴ بر تکیه‌گاه‌های ثابت لولایی سه بعدی قرار دارند.



شکل ۴۲-۳P

۴۳-۳ در خرابایی سه بعدی که مطابق شکل ۴۳-۳P تحت تأثیر نیرویی برابر 4000 lb قرار گرفته، جابه‌جایی گره ۴ را بیابید. همچنین تنش در هر المان را محاسبه کنید. فرض کنید در کلیه‌ی المان‌ها $A = 6 \text{ in}^2$ و $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ مختصات هر گره، بر حسب اینچ، در شکل نشان داده شده است. گره‌های ۱-۳ بر تکیه‌گاه‌های ثابت لولایی سه بعدی قرار دارند.

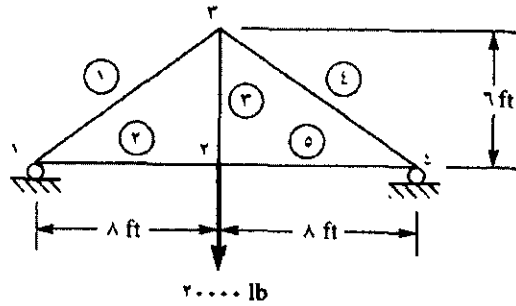


شکل ۳P-۴۳

۴۴-۳ معادله‌ی (۹-۷-۳) را برای k باز بینی نمایید. بدین منظور، ابتدا \underline{T}^* را به ماتریس مربعی 6×6 ، به همان صورت که در بخش ۳-۴ برای حالت دو بعدی گفته شد، بسط دهید. سپس k^* را با اضافه نمودن ستون‌ها و ردیف‌های صفر (برای عبارات \underline{d}_i)، تا سر حد معادله‌ی (۳-۴-۱۷)، به ماتریسی 6×6 بسط دهید. نهایتاً سه ماتریس $\underline{k} = \underline{T}^T \underline{k}^* \underline{T}$ را در هم ضرب نمایید.

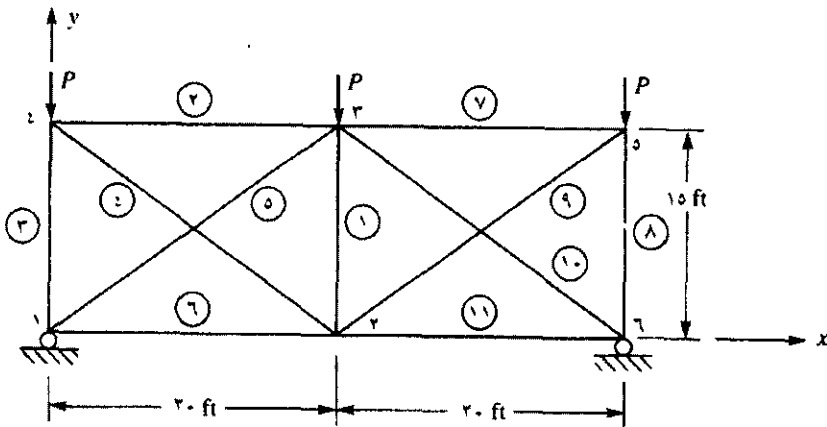
۴۵-۳ معادله‌ی (۲۱-۷-۳) را برای محاسبه‌ی تنش در یک خرپای سه بعدی، از همان روشی که به منظور دستیابی به رابطه‌ی (۳-۵-۶) برای محاسبه‌ی تنش در یک خرپای دو بعدی استفاده شد، استخراج نمایید.

۴۶-۳ در خرپای مندرج در شکل ۳P-۴۶، با استفاده از تقارن، جابه‌جایی گره‌ها و تنش در هر المان را محاسبه کنید. در کلیه‌ی المان‌ها، $E = 30 \times 10^7 \text{ psi}$ ، سطح مقطع المان‌های ۱، ۲، ۴، و ۵ برابر 10 in^2 ، A و برای المان ۳ برابر $A = 20 \text{ in}^2$ است.



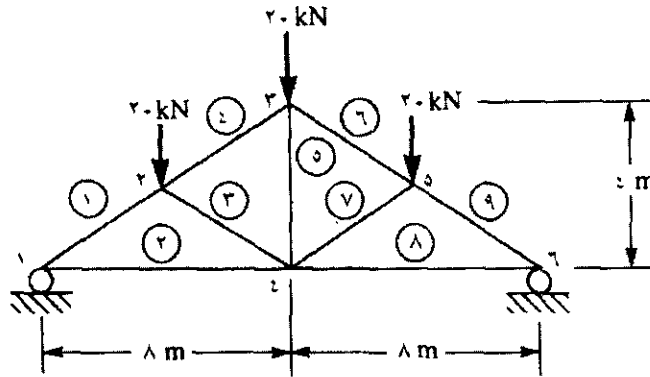
شکل ۳P-۴۶

۳-۴۷ کلیه المان‌های مندرج در شکل ۳P-۴۷ دارای AE یکسان است؛ به جز المان ۱ که در آن سختی محوری برابر $2AE$ است. با استفاده از تقارن، جابه‌جایی گره‌ها و تنش در المان‌های ۲ و ۳ را بیابید. تعادل در گره ۴ را ارزیابی کنید. در صورت دلخواه می‌توانید از نتایج حاصل از ماتریس سختی مسأله‌ی ۳-۲۴ استفاده کنید.



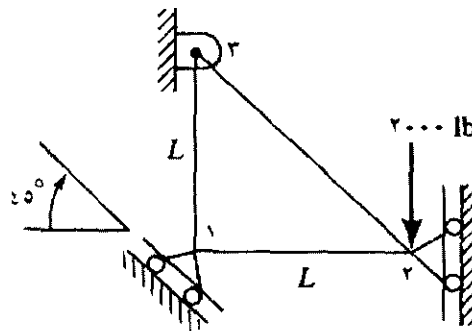
شکل ۳P-۴۷

۴۸-۳ در خرابایی سقفی مطابق شکل ۴۸-۳P، با استفاده از تقارن، جابه‌جایی گره‌ها و تنش در هر المان را محاسبه کنید. در کلیه‌ی المان‌ها $E = ۲۱۰ \text{ Gpa}$ و $A = ۱۰ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^۲$.

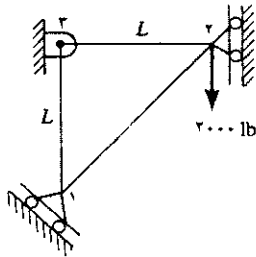


شکل ۴۸-۳P

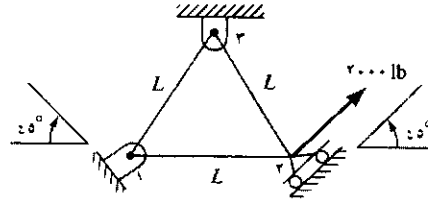
۴۹-۳ الی ۵۱-۳ در خراباهای دو بعدی با تکیه‌گاه‌های اریب که در شکل‌های ۴۹-۳P الی ۵۱-۳P نشان داده شده‌اند، جابه‌جایی گره‌ها و تنش در هر عضو را بیابید. در هر خرپا فرض کنید $A = ۲ \text{ in}^۲$ ، $E = ۳۰ \times ۱۰^۶ \text{ psi}$ ، و $L = ۳۰ \text{ in}$.



شکل ۴۹-۳P

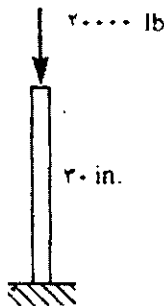


شکل ۳P-۵۱



شکل ۳P-۵۰

۳-۵۲ با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل که در بخش ۳-۱۰ استخراج گردید مسائل مندرج در شکل ۳P-۵۲ را حل کنید. انرژی پتانسیل کل را بر حسب تغییرات جابه‌جایی انتهای آزاد میله به منظور تعیین حداقل مقدار آن رسم کنید. ملاحظه نمایید که جابه‌جایی مرتبط با حداقل انرژی پتانسیل دلالت بر موقعیت تعادل استاتیکی می‌نماید. ضمن شروع از $\alpha = -0.400$ از افزایش مقادیر جزئی 0.002 برای جابه‌جایی استفاده نمایید. در هر یک از میله‌ها فرض کنید $E = 30 \times 10^6$ psi و $A = 2$ in².



(a)

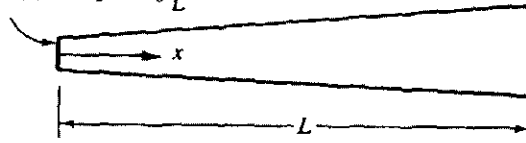


(b)

شکل ۳P-۵۲

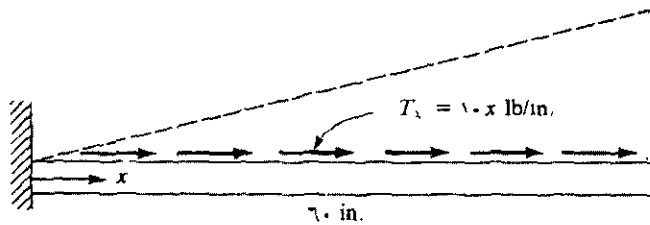
۵۳-۳ با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل، ماتریس سختی میله‌ی غیر منشوری مندرج در شکل ۵۳-۳P را بیابید. فرض کنید E ثابت است.

$$A(x) = A_0 + A_0 \frac{x}{L}$$



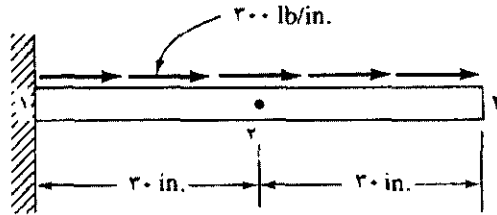
شکل ۵۳-۳P

۵۴-۳ در میله‌ای که تحت بار محوری متغیر خطی مطابق شکل ۵۴-۳P قرار گرفته جابه‌جایی گره‌ها و توزیع تنش محوری را با استفاده از (a) دو المان با طول یکسان و (b) چهار المان با طول یکسان، بیابید. فرض کنید $A = 2 \text{ in}^2$ و $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$. جواب‌های حاصل از روش اجزای محدود را با جواب‌های واقعی مقایسه نمایید.



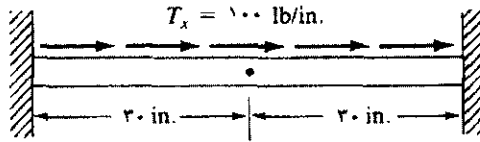
شکل ۵۴-۳P

۵۵-۳ در میله‌ای که تحت تأثیر بار خطی محوری یکنواختی مطابق شکل ۵۵-۳P قرار گرفته جابه‌جایی گره‌ها و توزیع تنش محوری را با استفاده از (a) دو المان با طول یکسان و (b) چهار المان با طول یکسان، بیابید. جواب‌های حاصل از روش اجزای محدود را با جواب‌های واقعی مقایسه نمایید. فرض کنید $A = 2 \text{ in}^2$ و $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$.



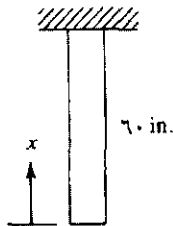
شکل ۳P-۵۵

۳-۵۶ میله‌ی دو سرگیرداری مطابق شکل ۳P-۵۴ تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواختی قرار گرفته است. تنش در میله و جابه‌جایی وسط آن را بیابید. فرض کنید $A = 2 \text{ in}^2$ و $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$.



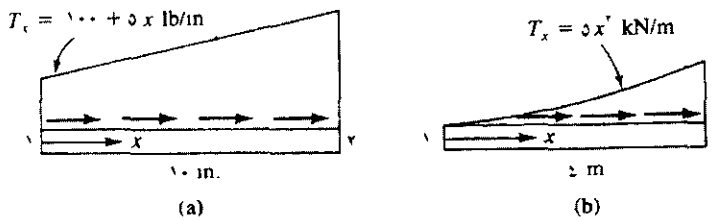
شکل ۳P-۵۶

۳-۵۷ در میله‌ای که مطابق شکل ۳P-۵۷ تحت تأثیر باری ناشی از وزن خود قرار گرفته جابه‌جایی گره‌ها و توزیع تنش محوری را با استفاده از (a) دو المان با طول یکسان و (b) چهار المان با طول یکسان، بیابید. فرض کنید $A = 2 \text{ in}^2$ ، $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ و $\rho_w = 0.283 \text{ lb/in}^3$ و چگالی وزنی $\rho_w = 0.283 \text{ lb/in}^3$ (راهنمایی: نیروی داخلی تابعی از x است. از روش انرژی پتانسیل استفاده نمایید).



شکل ۳P-۵۷

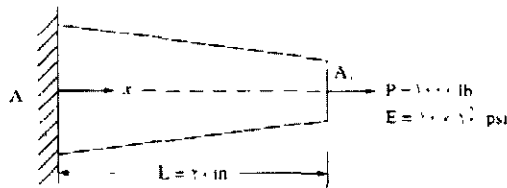
۵۸-۳ نیروهای گره‌ای معادلی را که انرژی پتانسیل حاصل از آن‌ها معادل انرژی پتانسیل ناشی از بار گسترده‌ی یکنواختی است که بر روی المان‌های مندرج در شکل ۵۸-۳P عمل می‌کند، بیابید.



شکل ۵۸-۳P

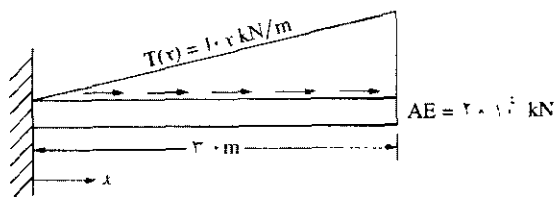
۵۹-۳ در مسأله‌ی ۵۵-۳، تغییر مکان محوری در میله را با استفاده از روش به هم گذاری، زیر محدوده، جمع مربع‌ها، و گالرکین بیابید. در هر روش، از چند جمله‌ای درجه دو $u(x) = c_1x + c_2x^2$ استفاده کنید. جواب‌های به دست آمده از روش‌های پسماند وزنی یاد شده را با جواب واقعی مقایسه کنید.

۶۰-۳ در میله‌ی مخروطی مندرج در شکل با سطح مقطع‌های $A_1 = 2 \text{ in.}^2$ و $A_2 = 1 \text{ in.}^2$ در هر انتها، تغییر مکان محوری در میله را با استفاده از روش‌های به هم گذاری، زیر محدوده، جمع مربع‌ها، و گالرکین بیابید. جواب‌های به دست آمده از روش‌های پسماند وزنی یاد شده را با جواب واقعی مقایسه کنید. از چند جمله‌ای درجه سه $u(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ استفاده کنید.



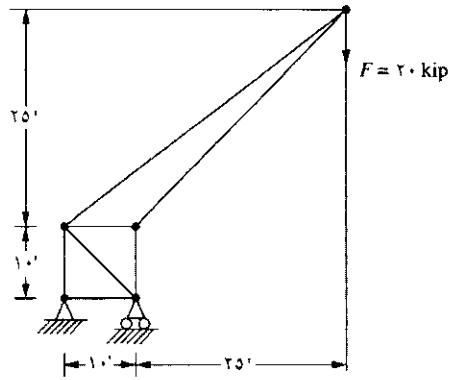
شکل ۶۰-۳P

۶۱-۳ در میله‌ای که مطابق شکل ۶۱-۳P تحت تأثیر بار محوری متغیری از نوع خطی قرار گرفته با استفاده از (a) یک و سپس دو المان اجزای محدود و (b) روش‌های به هم گذاری، زیر محدوده، جمع مربع‌ها، و گالرکین، به کمک چند جمله‌ای درجه سوم از نوع $u(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ تغییر مکان‌ها و تنش‌ها را محاسبه کنید.

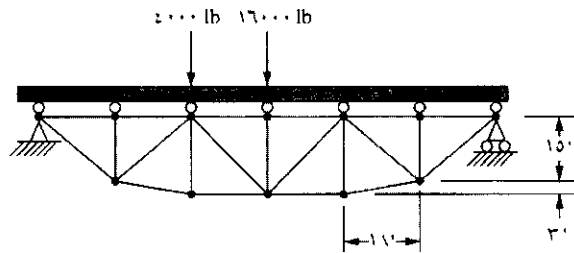


شکل ۶۱-۳P

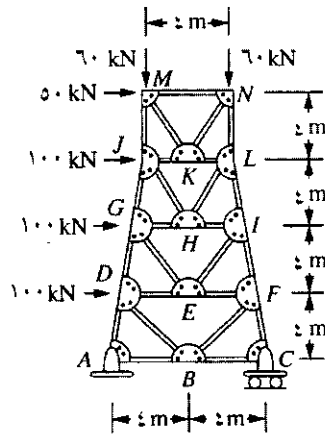
۶۲-۳ الی ۶۷-۳ از یک برنامه‌ی رایانه‌ای به منظور طراحی مسائل خردیایی که در شکل‌های ۶۲-۳P الی ۶۷-۳P نشان داده شده استفاده کنید. بحرانی‌ترین سطح مقطع را بر اساس تنش تسلیم مجاز یا مقاومت کمانشی (بر اساس فرمول اولر یا جانسون، هر یک مناسب باشد) و با استفاده از ضریب اطمینانی (FS) که در کنار هر خردیا ذکر شده، بیابید. شکل و اندازه‌ی سازه‌ی متعارفی را برای هر خردیا پیشنهاد کنید. سه عدد از بزرگ‌ترین تغییر مکان گره‌ها و محل آن‌ها را قید نمایید. همچنین، شکل تغییر مکان یافته‌ی خردیا و تنش اصلی را رسم کنید.



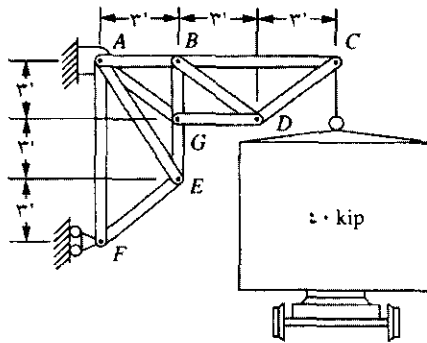
شکل ۶۲-۳P خرابای جرثقیلی (FS = ۴/۰)



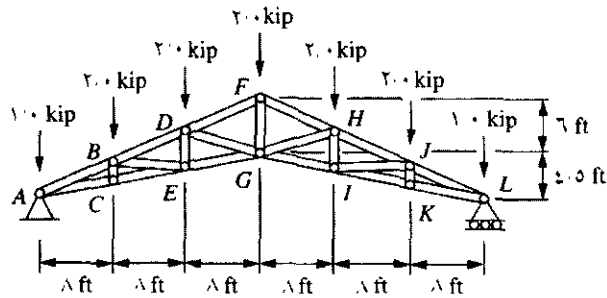
شکل ۶۳-۳P خرابای پلی (FS = ۳/۰)



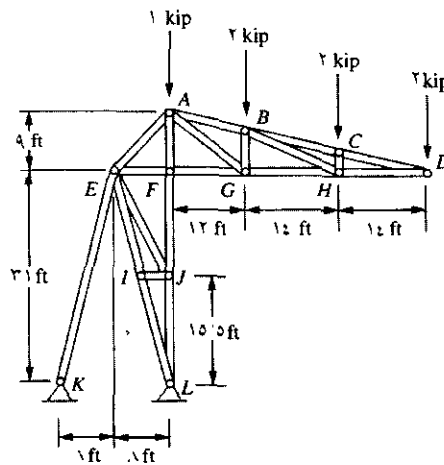
شکل ۶۴-۳P برج (FS = ۲/۰)



شکل ۲۲-۶۵ بالابر واگن باری (FS = ۳/۰)



شکل ۲۲-۶۶ خرابای سقفی مخروطی (FS = ۲/۰)



شکل ۲۲-۶۷ خرابای سقفی استادیومی (FS = ۳/۰)

فصل ۴

استخراج معادلات تیر

مقدمه

این فصل را ابتدا با نحوه‌ی تعیین ماتریس سختی برای خمش المان تیر که از اساسی‌ترین المان‌ها در ساختار ساختمان‌ها، پل‌ها، برج‌ها و بسیاری از سازه‌های دیگر محسوب می‌شود آغاز می‌کنیم. فرض بر آن است که المان مورد بحث مستقیم بوده و دارای سطح مقطعی ثابت است. ابتدا با استفاده از اصول تئوری تیر ساده ماتریس سختی المانی از یک تیر را استخراج می‌کنیم.

سپس با ارائه‌ی چند مثال ساده، نحوه‌ی جمع بندی ماتریس‌های سختی المان تیر و حل مسائل مربوطه را از طریق روش مستقیم سختی، که در فصل ۲ بیان گردید، ارائه می‌کنیم. بر اساس حل مسائل مربوطه در می‌یابیم که درجه آزادی هر گره، چرخش و جابه‌جایی در عرض تیر است. نیروی برشی در گره‌ها، گشتاورهای خمشی، و نمودارهای نیروهای برشی و لنگر خمشی حاصل از آن نیز به عنوان جزئی از حل ارائه خواهند شد.

در مرحله‌ی بعد نحوه‌ی به کارگیری بارهای گسترده بررسی خواهد شد چرا که تیرها و قاب‌ها اغلب تحت بارهای گسترده و متمرکز قرار می‌گیرند. سپس بحث را با حل تیرهایی که تحت بار گسترده قرار دارند ادامه داده و نتایج حاصل از روش اجزای محدود را با حل دقیق مسأله مقایسه خواهیم کرد.

سپس ماتریس سختی المان تیر را در تیرآهنی که دارای مفصل لولایی در گره است استخراج نموده و نحوه‌ی حل تیر را با مفصل لولایی داخلی نشان خواهیم داد.

برای آشنایی بیشتر شما با نحوه‌ی دست‌یابی به روابط و تعیین ماتریس سختی از روش انرژی پتانسیل، معادلات المان تیر تحت خمش را مجدداً با استفاده از روش یاد شده به دست خواهیم آورد. امید است تا به اعتماد شما به این روش افزوده شود. این روش در بسیاری از قسمت‌های این کتاب به منظور استخراج معادلات و ماتریس سختی المان‌های پیچیده از قبیل تنش دو بعدی (صفحه‌ای)، تنش سه بعدی، و مسائلی با تقارن محوری، به کار گرفته خواهد شد.

در پایان، از روش پسماند گالرکین برای دست‌یابی به معادلات المان تیر استفاده خواهد شد.

مفاهیم ارائه شده در این فصل پیش‌نیازی است که برای فهم مطالب مربوط به بررسی قاب‌ها که در فصل ۵ عنوان گردیده مورد نیاز است.

۴-۱ سختی تیر

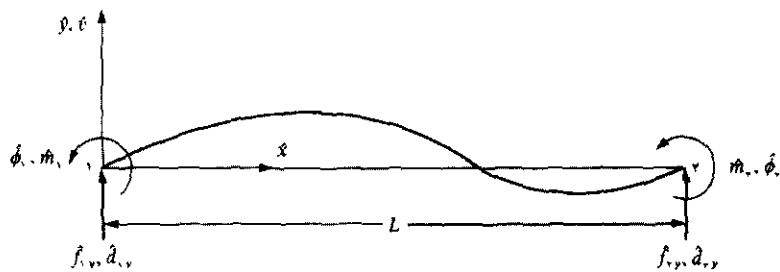
در این بخش ماتریس سختی یک المان تیر ساده را استخراج می‌کنیم. یک تیر، عضو سازه‌ای دراز و باریکی است که معمولاً تحت بارهای عرضی قرار داشته و اثرات خمشی حاصل در آن بیش از اثرات پیچشی یا محوری است. تغییر شکل خمشی به وجود آمده به صورت جابه‌جایی در عرض تیر و چرخش اندازه گرفته

می‌شود؛ بنابراین، درجه آزادی هر گره به صورت جابه‌جایی عرضی و یک چرخش است (بر خلاف آن چه که برای المان میله‌ای به صورت یک جابه‌جایی محوری در فصل ۳ آورده شد).

المان تیرآهنی را مطابق شکل ۴-۱ در نظر می‌گیریم. طول تیر برابر L بوده و مختصات محلی محوری و عرضی آن به ترتیب \hat{x} و \hat{y} می‌باشند. جابه‌جایی محلی گره‌ها در راستای عرضی با \hat{d}_{i1} ‌ها و چرخش‌ها با $\hat{\phi}_i$ ‌ها نشان داده شده‌اند. مطابق شکل، نیروهای گره‌ای محلی با \hat{f}_{i1} ، و گشتارهای خمشی با \hat{m}_i نشان داده شده‌اند. ابتدا از تمام اثرات محوری صرف نظر می‌کنیم.

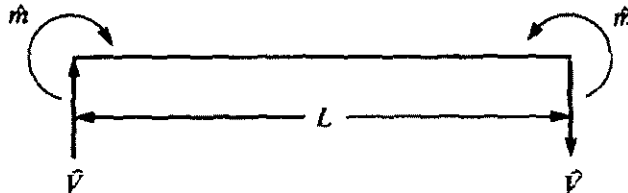
از علامت‌های قراردادی زیر در کلیه‌ی گره‌ها استفاده شده است.

- ۱- گشتاورهای پاد ساعت گرد مثبت در نظر گرفته شده‌اند.
- ۲- چرخش‌های خلاف گردش عقربه‌های ساعت مثبت در نظر گرفته شده‌اند.
- ۳- نیروها در جهت مثبت \hat{y} ، مثبت در نظر گرفته شده‌اند.
- ۴- جابه‌جایی‌ها در جهت مثبت \hat{y} ، مثبت در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۴-۱ المان تیرآهن با جابه‌جایی‌ها، چرخش‌ها، نیروها و گشتاورهای مثبت.

شکل ۴-۲ دلالت بر علامت قراردادی مثبتی می‌کند که در تئوری تیر ساده، برای نیروی برشی \hat{V} و گشتاور خمشی \hat{m} منظور شده است.



شکل ۴-۲ علامت قراردادی نیروی برشی و گشتاور خمشی در فرضیه‌ی تیرآهن‌ها

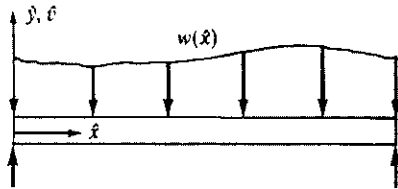
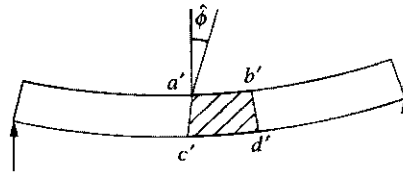
ماتریس سختی تیر بر اساس تئوری اولر-برنولی

(فقط با احتساب تغییر مکان خمشی)

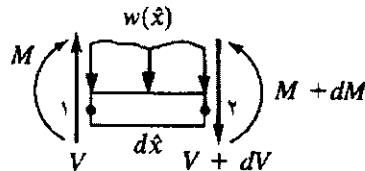
معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم بر رفتار الاستیک خطی تیر [۱] (به دلیل استخراج آن توسط اولر برنولی، تیرآهن اولر برنولی نامیده شد) بر این اساس استوار است که سطوح مسطح و عمود بر محور طولی تیر که از مرکز هر سطح می‌گذرد، قبل و بعد از خمش بر محور یاد شده عمود باقی می‌مانند. این امر در شکل ۴-۳ نشان داده شده است به قسمی که سطحی که از خط عمودی $a-c$ می‌گذرد (شکل ۴-۳(a))، قبل از خمش بر محور \hat{x} عمود بوده، در حالی که پس از خمش، از $a'-c'$ گذشته و بر محور یاد شده عمود باقی می‌ماند. (پس از دوران به میزان $\hat{\phi}$ ، مطابق شکل ۴-۳(b)). در عمل، این امر هنگامی رخ می‌دهد که تیرآهن تحت خمش خالص یا گشتاور ثابتی قرار داشته باشد. با این وصف، فرض یاد شده فرض معقولی بوده که در بسیاری از تیرآهن‌های کاربردی، رفتار دقیق آن‌ها را پیش بینی می‌کند.

معادله‌ی دیفرانسیلی مربوطه به شرح زیر استخراج می‌شود. تیرآهنی را که مطابق شکل ۴-۳ تحت تأثیر بار گسترده‌ی $w(\hat{x})$ (طول/نیرو) قرار گرفته در نظر

می‌گیریم. با توجه به معادلات تعادل نیروها و گشتاورها، در المانی دیفرانسیلی از آن، مطابق شکل ۴-۳(c)، داریم:

(a) تیر تحت بار گسترده $w(x)$ 

(b) تیر تغییر شکل یافته پس از بارگذری



(c) المان دیفرانسیلی تیر

شکل ۴-۳ تیر با بار گسترده

از معادلات تعادل گشتاور و نیرو در المان کوچکی از تیر خواهیم داشت:

$$\Sigma F_y = 0: V - (V + dV) - w(\hat{x})dx = 0 \quad (a-1-4)$$

از ساده سازی معادله‌ی (a-1-4) داریم:

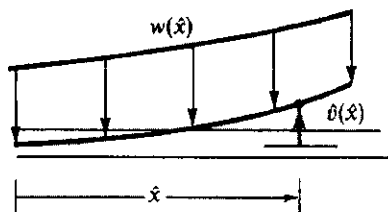
$$w d\hat{x} - dV = 0 \quad \text{یا} \quad w = -\frac{dV}{d\hat{x}} \quad (b-1-4)$$

$$\Sigma M_z = 0: -Vdx + dM + w(\hat{x})d\hat{x}\left(\frac{d\hat{x}}{2}\right) = 0 \quad \text{یا} \quad V = \frac{dM}{d\hat{x}} \quad (c-1-4)$$

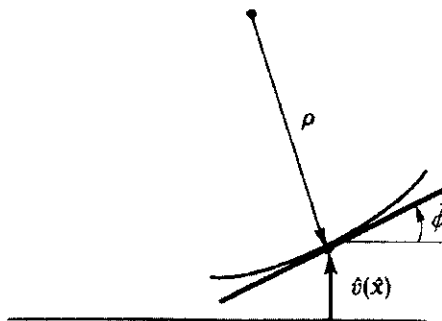
شکل نهایی معادله‌ی c-1-4 که ارتباط بین نیروی برشی و لنگر خمشی را برقرار می‌کند از تقسیم سمت چپ معادله به $d\hat{x}$ و تعیین حد آن، با میل نمودن $d\hat{x}$ به سمت صفر، حاصل می‌شود. بدین ترتیب $W(\hat{x})$ حذف خواهد شد. همچنین انحنای تیر یا K به شرح زیر با لنگر خمشی مرتبط است.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (d1-1-4)$$

در جایی که شعاع انحنای منحنی جابه‌جایی نشان داده شده در شکل ۴-۴b، \hat{v} تغییر مکان عرضی در جهت \hat{y} (شکل ۴-۴a ملاحظه شود)، E مدول الاستیسیته، و I ممان اینرسی اصلی حول محور \hat{z} که در شکل ۴-۴b نشان داده شده می‌باشد (محور \hat{z} بر محورهای \hat{x} و \hat{y} عمود است).



(a) قسمتی از منحنی خیز در تیر آهن



(b) شعاع منحنی خیز در $\hat{v}(x)$

شکل ۴-۴ منحنی خیز در تیر

به ازای شیب‌های کوچک $\hat{\phi} = \frac{d\hat{v}}{dx}$ ، مقدار انحنای برابر است با:

$$\kappa = \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} \quad (e1-1-4)$$

از جای‌گزینی رابطه‌ی (e۱-۱-۴) در معادله‌ی (d۱-۱-۴) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \hat{v}}{d\hat{x}^2} = \frac{M}{EI} \quad (f1-1-4)$$

از حل معادله‌ی فوق برای M و جای‌گزینی جواب به دست آمده در روابط (e۱-۱-۴) و (c۱) و (b۱-۱-۴) خواهیم داشت:

$$\frac{d^4}{d\hat{x}^4} \left(EI \frac{d^2 \hat{v}}{d\hat{x}^2} \right) = -w(\hat{x}) \quad (g1-1-4)$$

به ازای مقدار ثابت EI و بارگذاری در قالب نیرو و گشتاور گره‌ای، معادله‌ی (e۱-۱-۴) - (g۱-۱-۴) برابر است با:

$$EI \frac{d^4 \hat{v}}{d\hat{x}^4} = 0 \quad (h1-1-4)$$

حال مراحل عنوان شده در فصل ۱ را برای تعیین ماتریس سختی و معادلات المان تیر و سپس به منظور تعیین حل کامل آن دنبال می‌کنیم.

مرحله‌ی ۱ انتخاب نوع المان

تیر را با شماره گذاری گره‌ها در دو انتها و عموماً با شماره گذاری المان آن مشخص می‌کنیم (شکل ۱-۴).

مرحله‌ی ۲ انتخاب معادله‌ی جابه‌جایی

فرض می‌کنیم معادله‌ی تغییرات جابه‌جایی عرضی در امتداد طول المان به صورت زیر باشد:

$$\hat{v}(\hat{x}) = a_4 \hat{x}^3 + a_3 \hat{x}^2 + a_2 \hat{x} + a_1 \quad (2-1-4)$$

به دلیل حضور چهار درجه‌ی آزادی (یک جابه‌جایی عرضی \hat{d}_{iy} و یک چرخش کوچک $\hat{\phi}_i$ در هر گره)، انتخاب معادله‌ی جابه‌جایی کامل درجه سه‌ی فوق، رابطه‌ی (۲-۱-۴)، مناسب است. همچنین، تابع درجه ۳ فوق، معادله‌ی دیفرانسیلی تیر را

ارضای نموده که این امر انتخاب آن را توجیه می‌نماید. علاوه بر آن، تابع درجه سه، پیوستگی در جابه‌جایی و شیب در گره‌های دو المان مجاور را ارضا می‌کند. با استفاده از روشی که در بخش ۲-۲ توضیح داده شد، \hat{v} را بر حسب درجه‌های آزادی گره‌ها، $\hat{d}_{1,y}$ ، $\hat{d}_{2,y}$ ، $\hat{\phi}_1$ و $\hat{\phi}_2$ ، به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\hat{v}(0) &= \hat{d}_{1,y} = a_1 \\ \frac{d\hat{v}(0)}{d\hat{x}} &= \hat{\phi}_1 = a_2 \\ \hat{v}(L) &= \hat{d}_{2,y} = a_1 L^2 + a_2 L + a_3 \\ \frac{d\hat{v}(L)}{d\hat{x}} &= \hat{\phi}_2 = 2a_1 L + a_2\end{aligned}\quad (3-1-4)$$

در حالی که برای چرخش‌های فرضی کوچک $\hat{\phi}$ داریم $\hat{\phi} = \frac{d\hat{v}}{d\hat{x}}$. از حل معادلات (۳-۱-۴) برای a_1 الی a_4 بر حسب درجه‌های آزادی گره‌ها، و جای‌گذاری آن‌ها در معادله‌ی (۲-۱-۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\hat{v} &= \left[\frac{2}{L^2} (\hat{d}_{1,y} - \hat{d}_{2,y}) + \frac{1}{L} (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) \right] \hat{x}^2 \\ &+ \left[-\frac{3}{L^2} (\hat{d}_{1,y} - \hat{d}_{2,y}) - \frac{1}{L} (2\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) \right] \hat{x} + \hat{\phi}_1 \hat{x} + \hat{d}_{1,y}\end{aligned}\quad (4-1-4)$$

معادله‌ی فوق به صورت ماتریسی به شرح زیر بیان می‌شود:

$$\hat{v} = [N] \{\hat{d}\} \quad (5-1-4)$$

در جایی که:

$$\{\hat{d}\} = \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1v} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2v} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (a7-1-4)$$

و

$$[N] = [N_1 \quad N_v \quad N_r \quad N_i] \quad (b7-1-4)$$

و

$$N_1 = \frac{1}{L^r} (2\hat{x}^r - 3\hat{x}^r L + L^r) \quad N_v = \frac{1}{L^r} (\hat{x}^r L - 2\hat{x}^r L^r + \hat{x} L^r) \quad (v-1-4)$$

$$N_r = \frac{1}{L^r} (-2\hat{x}^r + 3\hat{x}^r L) \quad N_i = \frac{1}{L^r} (\hat{x}^r L - \hat{x}^r L^r)$$

N_1, N_v, N_r, N_i را توابع شکل المان تیر می نامند. توابع شکل (یا میان یاب) درجه سه ی یاد شده، توابع میان یاب درجه سه (یا کثیرالجمله‌ی درجه سه) هر میت نامیده می شوند. در المان یاد شده چنانچه N_1 در گره ۱ ارزیابی شود $N_1=1$ و چنانچه در گره ۲ ارزیابی شود $N_1=0$ است. به دلیل ارتباط N_v با $\hat{\phi}_1$ ، از دومین رابط در معادله‌ی (۷-۱-۴)، به ازای ارزیابی در گره ۱ داریم $(dN_v/d\hat{x})=1$. توابع شکل N_v و N_i در صورت ارزیابی در گره ۲ دارای نتایج مشابهی هستند.

مرحله‌ی ۳ تعریف روابط جابه‌جایی - کرنش و تنش - کرنش

فرض می کنیم که رابطه‌ی کرنش محوری - جابه‌جایی به قرار زیر باشد:

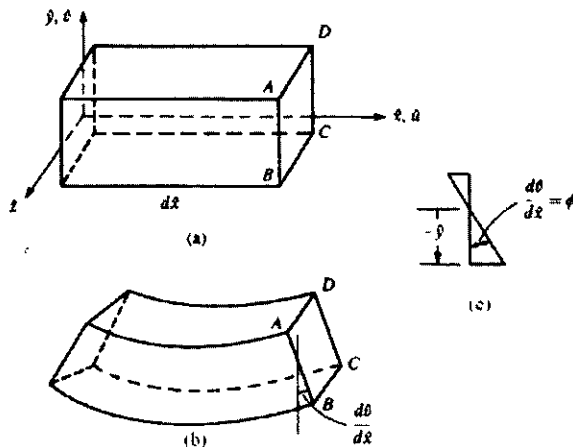
$$\varepsilon_r(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \quad (8-1-4)$$

در جایی که \hat{u} تابع جابه‌جایی محوری است. از شکل تغییر شکل یافته‌ی تیر که در شکل ۴-۵ نشان داده شده ارتباط جابه‌جایی محوری را با جابه‌جایی عرضی به شرح زیر برقرار می کنیم:

$$\hat{u} = -\hat{y} \frac{d\hat{v}}{d\hat{x}} \quad (9-1-4)$$

به قسمی که بر اساس اصول اولیه در تیر آهن‌ها یاد آوری می‌شود که سطح مقطع یک تیر (همانند ABCD) قبل و بعد از خمش مسطح باقی مانده و به طور کلی به میزان اندکی برابر با $\frac{d\hat{v}}{d\hat{x}}$ می‌چرخد. از جای‌گذاری معادله‌ی (۹-۱-۴) در رابطه‌ی (۸-۱-۴) خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x(\hat{x}, \hat{y}) = -\hat{y} \frac{d^2\hat{v}}{d\hat{x}^2} \quad (10-1-4)$$



شکل ۴-۵ جزئی از تیر آهن (a) قبل از خم شدن و (b) بعد از خم شدن؛ (c) زاویه‌ی دوران سطح مقطع ABCD

بر اساس تئوری مقدماتی تیر، لنگر خمشی و نیروی برشی با جابه‌جایی عرضی مرتبط می‌باشند. از آن‌جا که از این روابط در استخراج ماتریس سختی المان تیرها استفاده خواهد شد لذا آن‌ها را به شرح زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\hat{m}(\hat{x}) = EI \frac{d^2\hat{v}}{d\hat{x}^2} \quad \hat{V} = EI \frac{d^3\hat{v}}{d\hat{x}^3} \quad (11-1-4)$$

مرحله ۴ استخراج معادلات و ماتریس سختی المان

ابتدا باید با استفاده از روش مستقیم تعادل، معادلات و ماتریس سختی المان را استخراج می‌کنیم. نخست فرضیه‌ی تیرآهن‌ها و علائم قراردادی برای نیروهای برشی و لنگر خمشی‌ها (شکل‌های ۱-۴ و ۲-۴) را با روابط (۴-۱-۴) و (۴-۱-۱۱) مرتبط نموده تا معادلات زیر حاصل شوند.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1y} = \hat{V} &= EI \frac{d^r \hat{v}(0)}{dx^r} = \frac{EI}{L^r} (12\hat{d}_{1y} + 6L\hat{\phi}_1 - 12\hat{d}_{2y} + 6L\hat{\phi}_2) \\ \hat{m}_1 = -\hat{m} &= -EI \frac{d^r \hat{v}(0)}{dx^r} = \frac{EI}{L^r} (6L\hat{d}_{1y} + 4L^2\hat{\phi}_1 - 6L\hat{d}_{2y} + 2L^2\hat{\phi}_2) \\ \hat{f}_{2y} = -\hat{V} &= EI \frac{d^r \hat{v}(L)}{dx^r} = \frac{EI}{L^r} (-12\hat{d}_{1y} - 6L\hat{\phi}_1 + 12\hat{d}_{2y} - 6L\hat{\phi}_2) \\ \hat{m}_2 = \hat{m} &= EI \frac{d^r \hat{v}(L)}{dx^r} = \frac{EI}{L^r} (6L\hat{d}_{1y} + 2L^2\hat{\phi}_1 - 6L\hat{d}_{2y} + 4L^2\hat{\phi}_2) \end{aligned} \quad (12-1-4)$$

همان گونه که از مقایسه‌ی شکل‌های ۱-۴ و ۲-۴ ملاحظه می‌شود علامت منفی در روابط دوم و سوم در معادلات (۱۲-۱-۴) ناشی از مختلف‌الجهت بودن علامت قراردادی وضع شده برای لنگر خمشی و نیروی برشی در گره‌ها، و قرارداد وضع شده در فرضیه‌ی خمش در تیرآهن‌ها است که به گره‌های ۱ و ۲ اعمال شده است. معادلات (۱۲-۱-۴) ارتباط نیروهای گره‌ای را با جابه‌جایی‌های گره‌ای برقرار می‌سازند. معادلات (۱۲-۱-۴) به صورت ماتریسی برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^r} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (13-1-4)$$

در جایی که ماتریس سختی برابر است با:

$$\hat{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4-1-14)$$

معادله (۴-۱-۳) نشان می‌دهد که نیروهای قائم و لنگر خمشی‌ها از طریق \hat{k} با جابه‌جایی عرضی و چرخش‌ها ارتباط یافته‌اند، در حالی که از تأثیرات محوری صرف‌نظر شده است.

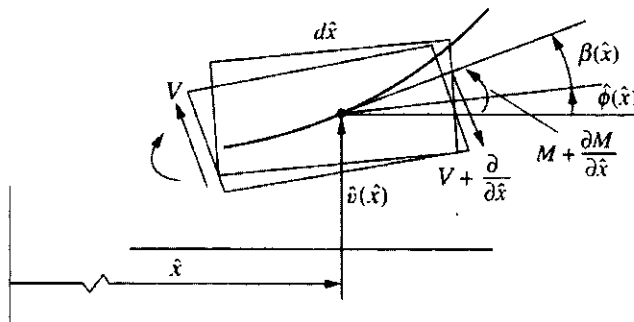
در ماتریس سختی المان تیری که در این بخش استخراج گردید (معادله‌ی (۴-۱-۱۴) فرض شده است که تیر آهن دراز و باریک است، به عبارتی دیگر، نسبت طول تیر، L ، به ارتفاع آن یعنی h زیاد است. تحت چنین شرایطی، خمشی که از خمش خالص و با استفاده از ماتریس سختی مندرج در رابطه‌ی (۴-۱-۱۴) حاصل شد کاملاً از صحت لازم برخوردار است. در هر حال، در تیر آهن‌های کوتاه با ارتفاع زیاد، خمشی حاصل از نیروی برشی عرضی قابل توجه بوده و می‌تواند تقریباً به همان اندازه بر خمشی کل در تیر آهن اثر گذار باشد. این نتیجه را می‌توان از عباراتی که برای خمشی ناشی از تغییر مکان‌های خمشی و برشی در تیر حاصل می‌شود رؤیت نمود در جایی که، اثر خمشی بر تیر دارای مرتبه‌ی $(L/h)^2$ و اثر برشی فقط دارای مرتبه‌ی (L/h) است. قاعده‌ی کلی در تیر آهن‌هایی که مقطع مستطیل شکل دارند آن است که اگر طول تیر حداقل هشت برابر ارتفاع آن باشد در آن صورت خمشی حاصل از نیروی برشی کم‌تر از پنج درصد خمشی ناشی از خمشی است [۴]. همان‌طور که در مرجع [۴] نشان داده شده، روش کاستیگ لیانو در تعیین خمشی حاصل در تیر آهن‌ها و قاب‌ها، روش مناسبی به منظور احتساب نیروی برشی عرضی است. استخراج ماتریس سختی در تیر آهنی که اثرات ناشی از نیروی برشی عرضی را در بر دارد، در مراجع متعددی آورده شده است [۵-۸]. احتساب نیروی برشی عرضی در فرضیه‌ی

تیرها، به هنگام کاربرد ارتعاشی آن‌ها، توسط تیموشنکو پایه ریزی گردیده و به عنوان تیر تیموشنکو شناخته شده است [۹-۱۰].

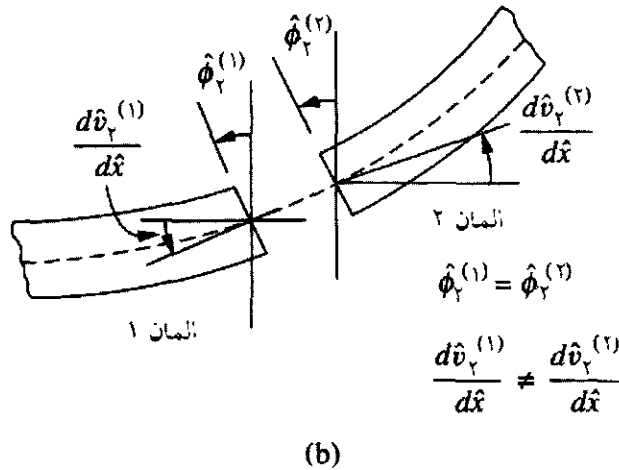
ماتریس سختی تیر بر اساس تئوری تیر تیموشنکو (با احتساب نیروی برشی عرضی)

تئوری تغییر مکان ناشی از نیروی برشی عرضی به شرح زیر استخراج می‌شود. همان‌طور که قبلاً در شکل ۴-۵ نشان داده شد، به‌جای این فرض که سطوح مسطح بعد از خمش نیز مسطح باقی می‌مانند، اکنون تغییر شکل ناشی از نیروی برشی (تغییر شکل به ازای نیروی برشی V) نیز منظور می‌شود. از مراجعه به شکل ۴-۶ مشاهده می‌شود قسمتی از یک تیر به طول دیفرانسیلی $d\hat{x}$ که سطح مقطع آن علی‌رغم مسطح بودن، به دلیل احتساب نیروی برشی، پس از خمش بر محور \hat{x} عمود باقی نمی‌ماند، منجر به عبارتی می‌شود که حاصل از دوران آن بوده و با β نشان داده می‌شود. حال، خیز کل در تیر و در نقطه‌ای همانند \hat{x} ، از دو قسمت تشکیل می‌شود، یکی ناشی از خمش و دیگری ناشی از نیروی برشی، به قسمی که شیب منحنی خیز در نقطه‌ای همانند \hat{x} برابر است با:

$$\frac{d\hat{v}}{d\hat{x}} = \hat{\phi}(\hat{x}) + \beta(\hat{x}) \quad (a) \quad (1-15)$$



(a)



شکل ۴-۶ (a) المانی از تیر تیموشنکو که در آن نیروی برشی عرضی نشان داده شده است. در این جا، دیگر سطح مقطع‌ها پس از خم شدن بر محور خنثی عمود نیستند (b) المان ۲ از تیر که در گره ۲ به هم می‌رسند.

در جایی که دوران‌های ناشی از خمش و نیروی برشی عرضی به ترتیب توسط $\hat{\phi}(\hat{x})$ و $\beta(\hat{x})$ نشان داده شده‌اند.

رابطه‌ی بین گشتاور خمشی و خیز حاصل از خمش (انحنای) برابر است با:

$$M(\hat{x}) = EI \frac{d\hat{\phi}(\hat{x})}{d\hat{x}} \quad (b15-1-4)$$

همچنین، رابطه‌ی بین نیروی برشی و خیز حاصل از برش (ناشی از نیروی برشی) (کرنش برشی) برابر است با:

$$V(\hat{x}) = k_s AG\beta(\hat{x}) \quad (c15-1-4)$$

تفاضل بین $d\hat{v}/d\hat{x}$ و $\hat{\phi}$ ، معرف کرنش برشی $\gamma_{xy}(=\beta)$ در تیر، به شرح زیر است.

$$\gamma_{xy} = \frac{d\hat{v}}{d\hat{x}} - \hat{\phi} \quad (d15-1-4)$$

حال المان دیفرانسیلی مندرج در شکل ۴-۳ را همراه با معادلات (۴-۱-۱) و (۴-۱-۲) که از جمع نیروهای عرضی و گشتاورها حاصل می‌شوند در نظر می‌گیریم. در این هنگام، در روابط (۴-۱-۱) و (۴-۱-۲)، به جای V از رابطه‌ی (۴-۱-۱۵) و به جای M از رابطه‌ی (۴-۱-۱۵)، و نیز به جای β از رابطه‌ی (۴-۱-۱۵) جای‌گزین نموده تا معادلات دیفرانسیلی زیر حاصل شوند.

$$\frac{d}{d\hat{x}} \left[k_s AG \left(\frac{d\hat{v}}{d\hat{x}} - \hat{\phi} \right) \right] = -w \quad (e15-1-4)$$

$$\frac{d}{d\hat{x}} \left(EI \frac{d\hat{\phi}}{d\hat{x}} \right) + k_s AG \left(\frac{d\hat{v}}{d\hat{x}} - \hat{\phi} \right) = 0 \quad (f15-1-4)$$

به منظور استخراج ماتریس سختی تیرآهنی که شامل نیروی برشی عرضی است، در معادله‌ی (۴-۱-۲)، فرض می‌شود تا تغییر مکان عرضی توسط رابطه‌ی درجه سومی داده شده باشد. به طریقی مشابه با [۸]، کرنش برشی γ را همسان با چند جمله‌ای درجه سه‌ی $V(\hat{x})$ به قسمی انتخاب می‌کنیم که γ برابر عدد ثابتی به شرح زیر باشد:

$$\gamma = c \quad (g15-1-4)$$

ضمن جای‌گزینی تابع درجه سوم تغییر مکان \hat{v} ، رابطه‌ی شیب داده شده در معادله‌ی (۴-۱-۱۵) و نیز کرنش برشی مندرج در معادله‌ی (۴-۱-۱۵)، همراه با رابط خمش-انحناء، معادله‌ی (۴-۱-۱۵)، و رابطه‌ی نیروی برشی-کرنش برشی معادله‌ی (۴-۱-۱۵)، در رابطه‌ی نیروی برشی-گشتاور خمشی داده شده در معادله‌ی (۴-۱-۱۵)، داریم:

$$\dot{c} = 6a_3 g \quad (15h-1-4)$$

در جایی که $g = EI / k_s AG$ و $k_s A$ سطح برش است. سطوح برش، A_1 ، با شکل $\frac{5}{6}$ سطح مقطع تغییر می‌یابند. برای مثال، در سطح مقطعی مستطیل شکل، A_3 ، $\frac{5}{6}$

سطح مقطع A ، در مقطع تو پر دایره‌ای شکل، 0.9 سطح مقطع، در سطح مقطع بال-پهن؛ برابر حاصل ضرب ضخامت جان و ارتفاع قسمت بال، و در مقاطع جداره نازک، از ضرب دو در حاصل ضرب ضخامت دیواره و ارتفاع سطح مقطع حاصل می‌شود.

با استفاده از معادلات (۴-۱-۲)، (۴-۱-۱۵)، (۴-۱-۱۰) و (۴-۱-۱۱)،

می‌توان ϕ را به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب \hat{x} به شرح زیر نوشت:

$$\hat{\phi} = a_r + 2a_s \hat{x} + (3\hat{x}^2 + 6g)a_t \quad (i15-1-4)$$

حال با استفاده از معادلات (۴-۱-۲) و (۴-۱-۱۱) به نحوی که قبلاً در استخراج معادله‌ی (۴-۱-۱۰) با حذف نیروی برشی انجام شد، می‌توان ضرایب a_t الی a_r را بر حسب جابه‌جایی گره‌های d_{1y} و d_{2y} و دوران‌های ϕ_1 و ϕ_2 در دو انتهای تیر، $x=0$ و $x=L$ تشریح نمود.

$$a_t = \frac{2\hat{d}_{1y} + L\hat{\phi}_1 - 2\hat{d}_{2y} + L\hat{\phi}_2}{L(L' + 12g)}$$

$$a_s = \frac{-3L\hat{d}_{1y} + (2L' + 6g)\hat{\phi}_1 + 3L\hat{d}_{2y} + (-L' + 6g)\hat{\phi}_2}{L(L' + 12g)} \quad (j15-1-4)$$

$$a_r = \frac{-12g\hat{d}_{1y} + (L' + 6gL)\hat{\phi}_1 + 12g\hat{d}_{2y} - 6gL\hat{\phi}_2}{L(L' + 12g)}$$

$$a_i = \hat{d}_{1y}$$

از جای‌گزینی مقادیر a در معادله‌ی (۴-۱-۲) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{v} = & \frac{2\hat{d}_{1y} + L\hat{\phi}_1 - 2\hat{d}_{2y} + L\hat{\phi}_2}{L(L' + 12g)} \hat{x}^2 \\ & + \frac{-3L\hat{d}_{1y} + (2L' + 6g)\hat{\phi}_1 + 3L\hat{d}_{2y} + (-L' + 6g)\hat{\phi}_2}{L(L' + 12g)} \hat{x}^3 \\ & + \frac{-12g\hat{d}_{1y} + (L' + 6gL)\hat{\phi}_1 + 12g\hat{d}_{2y} - 6gL\hat{\phi}_2}{L(L' + 12g)} \hat{x} + \hat{d}_{1y} \quad (k15-1-4) \end{aligned}$$

به طریقی مشابه با مرحله ی ۴ که از آن به منظور استخراج ماتریس سختی تیرآهنی بدون احتساب تغییر شکل برشی استفاده شد، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1,y} &= \hat{V}(0) = \gamma EI a_1 = \frac{EI(12\hat{d}_{1,y} + 6L\hat{\phi}_1 - 12\hat{d}_{2,y} + 6L\hat{\phi}_2)}{L(L^3 + 12g)} \\ \hat{m}_1 &= -\hat{m}(0) = -2EI a_1 = \frac{EI[6L\hat{d}_{1,y} + (\epsilon L^3 + 12g)\hat{\phi}_1 - 6L\hat{d}_{2,y} + (2L^3 - 12g)\hat{\phi}_2]}{L(L^3 + 12g)} \\ \hat{f}_{2,y} &= -\hat{V}(L) = \frac{EI(-12\hat{d}_{1,y} - 6L\hat{\phi}_1 + 12\hat{d}_{2,y} - 6L\hat{\phi}_2)}{L(L^3 + 12g)} \\ \hat{m}_2 &= \hat{m}(L) = \frac{EI[6L\hat{d}_{1,y} + (2L^3 - 12g)\hat{\phi}_1 - 6L\hat{d}_{2,y} + (\epsilon L^3 + 12g)\hat{\phi}_2]}{L(L^3 + 12g)}\end{aligned}\quad (115-1-4)$$

در جایی که، مجدداً، همان طور که از مقایسه ی شکل های ۴-۲ و ۴-۷ ملاحظه می شود، علامت منها در دومین و سومین عبارت از روابط (۴-۱-۱۱۵)، ناشی از مخالف بودن علامت قراردادی گشتاور مثبت در فرضیه ی تیرها و گره ها، در گره ۱، و مخالف بودن علامت قراردادی نیروهای برشی مثبت در فرضیه ی تیرها و گره ها، در گره ۲ است. روابط (۴-۱-۱۱۵) به صورت ماتریسی برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1,y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2,y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L(L^3 + 12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (\epsilon L^3 + 12g) & -6L & (2L^3 - 12g) \\ 12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^3 - 12g) & -6L & (\epsilon L^3 + 12g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1,y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2,y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}\quad (m15-1-4)$$

در جایی که ماتریس سختی که در آن تغییر مکان های خمشی و برشی لحاظ شده برابر است با:

$$\hat{k} = \frac{EI}{L(L^3 + 12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (\epsilon L^3 + 12g) & -6L & (2L^3 - 12g) \\ 12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^3 - 12g) & -6L & (\epsilon L^3 + 12g) \end{bmatrix}\quad (n15-1-14)$$

باید به خاطر داشت که در معادله‌ی (۴-۱-۱۵)، g معرف عبارت برش عرضی بوده و چنانچه برابر صفر قرار داده شود، معادله‌ی (۴-۱-۱۴) برای ماتریس سختی، که در آن از نیروی برشی صرف نظر شده حاصل می‌شود. به منظور رؤیت بهتر اثر ضریب اصلاح برش، عبارت بدون بُعد اصلاح برش را به صورت $\phi = 12EI / (k, AGL^2) = 12g / L^2$ نوشته و ماتریس سختی را به شرح زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\hat{k} = \frac{EI}{L^2(1+\phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\phi)L^2 & -6L & (2-\phi)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\phi)L^2 & -6L & (4+\phi)L^2 \end{bmatrix} \quad (015-1-14)$$

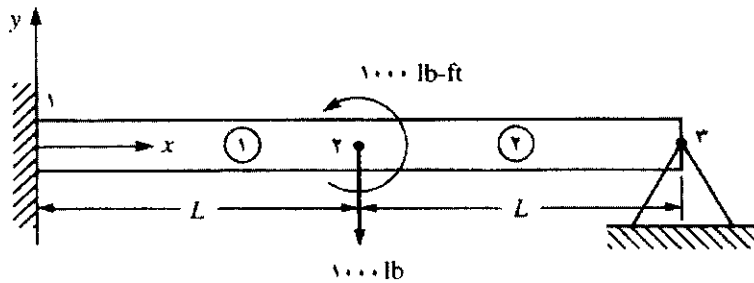
بیشتر برنامه‌های رایانه‌ای تجاری از قبیل [۱۱]، ضمن اجبار کاربرد به وارد نمودن سطح برش $A_s = k_s A$ ، اثر تغییر شکل برشی را منظور می‌نمایند.

۴-۲ مثالی در مورد جمع بندی ماتریس‌های سختی تیر Δ

مرحله‌ی ۵ به هم گذاری معادلات المان‌ها و دست‌یابی به معادلات کلی و شرایط مرزی

به عنوان یک مثال و به منظور تشریح روش جمع بندی، ماتریس سختی المان‌های تیر نشان داده شده در شکل ۴-۷ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم اندازه‌ی EI در امتداد تیر ثابت می‌باشد. نیرویی برابر 1000 lb و گستاوری برابر 1000 ft-lb در وسط تیر بر آن اعمال شده است. انتهای سمت چپ دارای تکیه‌گاهی گیردار و انتهای سمت راست به صورت تکیه‌گاه لولایی در نظر گرفته شده است.

ابتدا همان گونه که نشان داده شده تیر را به ۲ المان، شامل گره‌های یک الی سه تقسیم می‌کنیم. از آنجا که نیرو و گشتاور در وسط تیر اعمال می‌شوند، گره ۲ را در این محل انتخاب نموده به قسمی که بدین طریق کلیه بارگذاری‌ها فقط بر گره‌ها اعمال شده‌اند. (روش دیگری برای بررسی بارهای اعمال شده در المان‌ها در بخش ۴-۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت).



شکل ۴-۷ تیر آهنی با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار تحت تأثیر نیرو و یک گشتاور

با استفاده از معادله‌ی (۴-۱-۱۴) در می‌یابیم که ماتریس‌های سختی کل در هر

یک از المان‌های یک و دو برابرند با:

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} d_{1,y} & \phi_1 & d_{2,y} & \phi_2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1-2-4)$$

و

$$\underline{k}^{(2)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} d_{2,y} & \phi_2 & d_{3,y} & \phi_3 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2-2-4)$$

در جایی که درجه‌های آزادی هر یک از المان‌های تیر توسط علائم مشخصه‌ی بالای هر ستون در ماتریس سختی هر المان مشخص شده‌اند. در این‌جا محور مختصات محلی هر المان منطبق بر محور مختصات اصلی x و y کل تیر است. در نتیجه، ماتریس‌های سختی کلی و محلی یکسان بوده و به همین دلیل در معادلات (۴-۲-۱) و (۴-۲-۲) به علامت کلاهدک ($\hat{\quad}$) نیازی نمی‌باشد.

حال می‌توان با استفاده از روش مستقیم سختی ماتریس سختی کل را برای تیر به دست آورد. پس از تشکیل ماتریس سختی کل، نیروهای خارجی اعمال شده بر گره‌های اصلی با جابه‌جایی‌های اصلی در گره‌ها مرتبط می‌شوند. از جمع مستقیم اثرها و معادلات (۴-۲-۱) و (۴-۲-۲)، معادلات حاکم بر تیر به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EL}{L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^3 & -6L & 2L^3 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^3 & -6L+6L & 4L^3+4L^3 & -6L & 2L^3 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^3 & -6L & 4L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3y} \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (۴-۲-۳)$$

حال با در نظر گرفتن شرایط مرزی یا قیود در تکیه‌گاه گیردار گره ۱، و تکیه‌گاه لولایی گره ۳ خواهیم داشت:

$$\phi_1 = 0 \quad d_{1y} = 0 \quad d_{3y} = 0 \quad (۴-۲-۴)$$

با در نظر گرفتن روابط سوم، چهارم و ششم از معادلات (۴-۲-۳) که مرتبط با ردیف‌های نامعلوم درجه‌های آزادی می‌باشند و با استفاده از معادلات (۴-۲-۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} -1000 \\ 1000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^3 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{r1} \\ \phi_r \\ \phi_s \end{Bmatrix} \quad (5-2-4)$$

در جایی که مقادیر $M_r = 0$ و $F_{r1} = -1000 \text{ lb}$, $M_s = 1000 \text{ ft-lb}$ در روابط تقلیل یافته‌ی فوق جای‌گذاری شده‌اند. حال می‌توان معادله‌ی (۵-۲-۴) را به‌طور هم‌زمان به منظور تعیین جابه‌جایی d_{r1} و چرخش‌های مجهول ϕ_r و ϕ_s حل نمود. حل نهایی به عهده‌ی شما واگذار می‌شود. بخش ۴-۳ حاوی حل کامل مسائل تیر است.

Δ

Δ

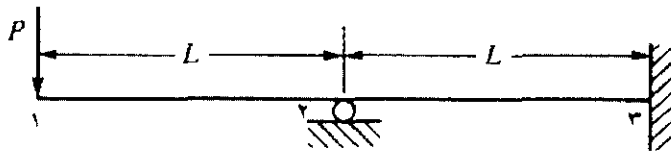
۳-۴ مثال‌هایی در مورد تجزیه و تحلیل یک تیر با استفاده از روش مستقیم

سختی

حال به منظور شناسایی نحوه‌ی استفاده از روابط حاصل شده در بخش ۴-۱، به حل کامل تیرهایی با تکیه‌گاه‌ها و بارهای مختلف می‌پردازیم.

مثال ۴-۱

با استفاده از روش مستقیم سختی، تیر مهار شده در شکل ۴-۸ را که تحت تأثیر بار P در انتها قرار گرفته حل نمایید. فرض کنید مقدار EI ثابت بوده و طول تیر برابر $2L$ است. تیر آهن در وسط بر تکیه‌گاه غلطکی و در انتهای سمت راست گیردار می‌باشد.



شکل ۴-۸ تیر آهن مهار شده

تیر را به قسمت های کوچکی تقسیم کرده و محور مختصات اصلی را همان طور که در شکل ۴-۸ نشان داده شده در نظر می گیریم. حال جابه جایی ها و چرخش در گره ها، عکس العمل ها، و نمودارهای کامل نیروی برشی و لنگر خمشی را تعیین خواهیم کرد.

با استفاده از معادله ی (۴-۱-۱۴) برای هر المان، و نیز با استفاده از جمع اثرها، ماتریس سختی کل سازه را به همان صورت که در بخش ۴-۲ برای تعیین ماتریس سختی قید شده در رابطه ی (۴-۲-۳) گفته شد، به دست می آوریم. \underline{K} برابر است با:

$$\underline{K} = \frac{EL}{L} \begin{bmatrix} d_{1y} & \phi & d_{2y} & \phi & d_{3y} & \phi \\ 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L' & -6L & 2L' & 0 & 0 \\ & & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ & & & 4L'+4L' & -6L & 2L' \\ & \text{مقارن} & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L' \end{bmatrix} \quad (4-3-1)$$

لذا معادلات حاکم در تیر برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EL}{L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L' & -6L & 2L' & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L' & -6L+6L & 4L'+4L' & -6L & 2L' \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L' & -6L & 4L' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ \phi \\ d_{2y} \\ \phi \\ d_{3y} \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (4-3-2)$$

از اعمال شرایط مرزی

$$d_{1y} = 0 \quad d_{2y} = 0 \quad \phi = 0 \quad (4-3-3)$$

و جداسازی معادلات مربوط به جابه‌جایی‌های مجهول [اولین، دومین و چهارمین معادله از روابط (۴-۳-۴)] از معادلات مربوط به جابه‌جایی‌های معلوم، طبق معمول، دستگاه معادله‌ی نهایی زیر را به منظور حل دستی آن به دست می‌آوریم.

$$\begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & 6L \\ 6L & 4L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (4-3-4)$$

در جایی که از $F_{1y} = -P$ ، $M_1 = 0$ و $M_2 = 0$ در معادله‌ی (۴-۳-۴) استفاده شده است. حال معادله‌ی (۴-۳-۴) را برای تعیین جابه‌جایی و شیب در گره‌ها حل می‌کنیم. جابه‌جایی عرضی در گره ۱ برابر است با:

$$d_{1y} = -\frac{\sqrt{3}PL^2}{12EI} \quad (5-3-4)$$

در جایی که علامت منفی معرف جابه‌جایی عرضی گره ۱ به سمت پایین است. شیب‌ها برابرند با:

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{3}PL^2}{4EI} \quad \phi_2 = \frac{PL^2}{4EI} \quad (6-3-4)$$

در جایی که علامت مثبت نشان دهنده‌ی چرخش گره‌های ۱ و ۲ در جهت خلاف عقرب‌های ساعت است.

حال نیروهای اصلی در گره‌ها را مشخص می‌کنیم. بدین منظور، چرخش‌ها و جابه‌جایی‌های معلوم در گره‌های اصلی را از معادلات (۴-۳-۴) و (۶-۳-۴)، در معادله‌ی (۲-۳-۴) جای‌گزین می‌کنیم. معادلات حاصل عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{r3} \\ M_r \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L+6L & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (7-3-4)$$

از ضرب ماتریس‌های سمت راست معادله‌ی (۴-۳-۷)، مقادیر نیروها و گشتاورهای اصلی را به دست می‌آوریم.

$$F_{1y} = -P \quad M_1 = 0 \quad F_{2y} = \frac{0}{2}P \quad (۴-۳-۸)$$

$$M_2 = 0 \quad F_{2y} = -\frac{3}{2}P \quad M_2 = \frac{1}{2}PL$$

نتایج حاصل از معادلات (۴-۳-۸) را می‌توان به شرحی که خواهد آمد تفسیر نمود: مقدار نیروی $F_{1y} = -P$ ، همان‌طور که انتظار می‌رود، نیروی اعمال شده بر گره ۱ است. مقادیر F_{2y} ، F_{2y} و M_2 عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها بر تیر می‌باشند. به دلیل عدم حضور گشتاور خارجی در گره‌های ۱ و ۲ و یا عکس‌العمل‌های مشابه مقادیر M_1 و M_2 برابر صفرند.

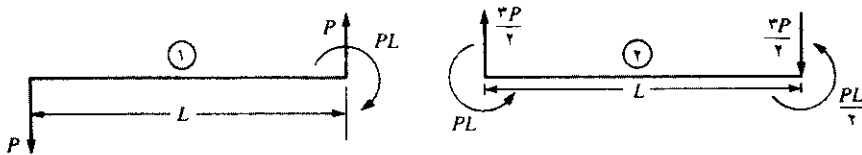
در سازه‌های بزرگ برای آن که بتوان مقدار تنش در کل سازه را به دست آورد عموماً نیاز است تا نیرو در گره‌های محلی هر المان را محاسبه نمود. لذا به منظور تشریح این ایده، نیروهای ایجاد شده در المان ۱ این مثال را در نظر می‌گیریم (متشابه‌اً می‌توان از المان ۲ نیز استفاده نمود). از جای‌گزینی روابط (۴-۳-۵) و (۴-۳-۶) در معادله‌ی $\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{k}}\underline{\hat{d}}$ مربوط به المان ۱ داریم [به معادله‌ی ۴-۱-۱۳ نیز توجه شود]:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{PL}}{12EI} \\ \frac{3PL}{4EI} \\ 0 \\ \frac{PL}{4EI} \end{Bmatrix} \quad (۴-۳-۹)$$

در جایی که مجدداً به دلیل انطباق محور مختصات محلی هر المان با محور مختصات اصلی کل تیر از روابط $\underline{k} = \hat{k}$ و $\underline{d} = \hat{d}$ استفاده شده است (به عبارتی دیگر، جابه‌جایی محلی گره‌ها همان جابه‌جایی‌های اصلی می‌باشند و الی آخر). از معادله‌ی (۹-۳-۴) داریم:

$$\hat{f}_{1,y} = -P \quad \hat{m}_1 = 0 \quad \hat{f}_{2,y} = P \quad \hat{m}_2 = -PL \quad (۱۰-۳-۴)$$

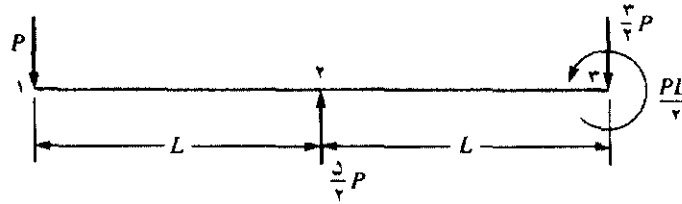
نمودار جسم آزاد المان ۱ که در شکل ۹-۴ (a) نشان داده شده به فهم نتایج حاصل از روابط (۱۰-۳-۴) کمک می‌کند. شکل مذکور، نیروی منفی قائم P را در گره ۱ و نیروی مثبت قائم P و گشتاور منفی PL را در گره ۲ نشان می‌دهد. این مقادیر همان مقادیر به دست آمده از معادله‌ی (۱۰-۳-۴) می‌باشند. برای تکمیل، نمودار جسم آزاد المان ۲ نیز در شکل ۹-۴ (b) نشان داده شده است. می‌توان به آسانی نیروهای گره‌ای المان را با نوشتن معادله‌ای شبیه به رابطه‌ی (۹-۳-۴) اثبات نمود.



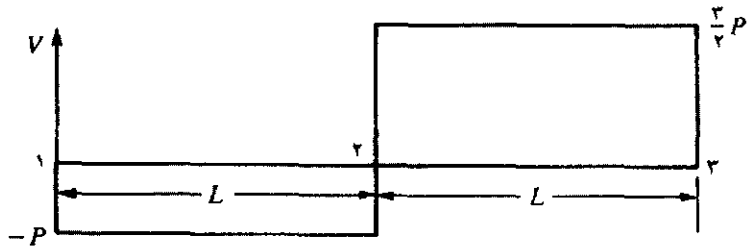
شکل ۹-۴ نمایش نیروها و گشتاورها در نمودار جسم آزاد، برای (a) المان ۱، و

(b) المان ۲

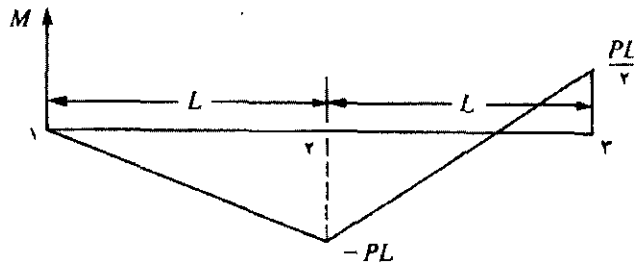
از نتایج حاصل از معادله‌ی (۸-۳-۴)، نیروها و گشتاورهای گره‌ای کل تیر، در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده‌اند. با استفاده از علائم قراردادی در تیر که در بخش ۱-۴ عنوان شد، نمودارهای نیروی برشی V و لنگر خمشی M در شکل‌های ۱۱-۴ و ۱۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۱۰ نیروها و گشتاورهای گره‌ای در تیر آهن



شکل ۴-۱۱ نمودار نیروی برشی تیر آهن مندرج در شکل ۴-۱۰



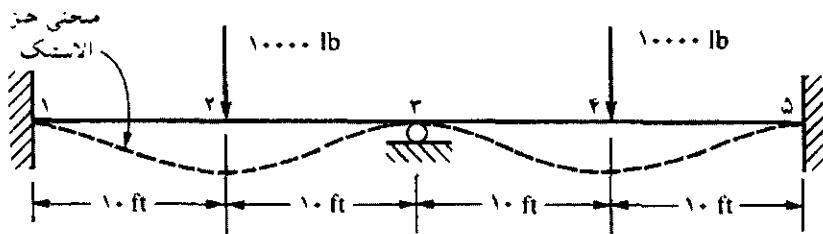
شکل ۴-۱۲ نمودار گشتاور خمشی تیر آهن مندرج در شکل ۴-۱۰

عموماً، در سازه‌های پیچیده‌ی متشکل از تیرها، از نیروهای محلی المان برای تعیین نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در هر المان استفاده می‌شود. لذا از

این مقادیر می‌توان در طراحی نیز استفاده نمود. فصل ۵ این موضوع را همان گونه که در کدهای رایانه ای استفاده می‌شود مورد بحث قرار خواهد داد.

مثال ۴-۲

جابه‌جایی‌ها و چرخش‌های گره‌ای، نیرو در گره‌های اصلی، و نیز نیروهای المانی را در تیر مندرج در شکل ۴-۱۳ به دست آورید. تیر یاد شده با شماره گذاری گره‌ها به المان‌های کوچک‌تر تقسیم شده است. تیر در گره‌های ۱ و ۵ گیردار بوده و در گره ۳ بر تکیه‌گاه غلطکی قرار دارد. نیروهای اعمال شده بر گره‌های ۲ و ۴ 10000 lb است. فرض کنید $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ و $I = 500 \text{ in}^4$ در امتداد تیر ثابت است.



شکل ۴-۱۳ مثال تیر آهن

ابتدا باید واحدهای موجود در مسأله را با یکدیگر هماهنگ نمود. بدین منظور، طول‌های ۱۰ ft در شکل ۴-۱۳ به 120 in تبدیل می‌شوند. با استفاده از معادله‌ی (۴-۱-۱۰) همراه با جمع اثرها، ماتریس سختی و معادلات اصلی را به همان صورت که در رابطه‌ی (۴-۳-۱۱) داده شده به دست می‌آوریم. در این‌جا طول المان‌ها با هم برابر فرض شده‌اند. بنابراین می‌توان از پارامتر L در ماتریس سختی فاکتورگیری نموده و آن را خارج نمود.

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^3 & -6L & 2L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L-6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 2L^3 & -6L-6L & 4L^3+4L^3 & -6L & 2L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6L & 2L^3 & -6L+6L & 4L^3+4L^3 & -6L & 2L^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^3 & -6L+6L & 4L^3+4L^3 & -6L & 2L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^3 & -6L & 4L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3y} \\ \phi_3 \\ d_{4y} \\ \phi_4 \\ d_{5y} \\ \phi_5 \end{Bmatrix} \quad (11-3-4)$$

به منظور حل دستی مسأله، معادله‌ی (۱۱-۳-۴) را به طریق معمول ضمن اعمال شرایط مرزی زیر کوچک‌تر می‌نماییم.

$$d_{1y} = \phi_1 = d_{2y} = d_{5y} = \phi_5 = 0$$

معادله‌ی حاصل برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L & 0 & 0 \\ 0 & 8L^3 & 2L^3 & 0 & 0 \\ 6L & 2L^3 & 8L^3 & -6L & 2L^3 \\ 0 & 0 & -6L & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^3 & 0 & 8L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2y} \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ d_{4y} \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \quad (12-3-4)$$

به دلیل تقارن در بارگذاری، شکل هندسی، و قرینه بودن خصوصیات مواد حول صفحه‌ای گذرا از گره ۳ و عمود بر تیر، چرخش‌ها (شیب‌ها) در گره‌های ۲ الی ۴ برابر صفرند. بنابراین، $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0$ بوده و در نتیجه معادله‌ی (۱۲-۳-۴) را می‌توان به صورت خلاصه‌تر زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} -10000 \\ -10000 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2y} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} \quad (13-3-4)$$

به منظور تعیین جابه‌جایی‌ها، بنا به کارگیری $L=120 \text{ in}$ ، $I=500 \text{ in}^4$ ، و $E=30 \times 10^6 \text{ psi}$ در معادله‌ی (۱۲-۳-۴) خواهیم داشت:

$$d_{1,y} = d_{2,y} = -0.048 \text{ in.} \quad (14-3-4)$$

همان گونه که به دلیل تقارن انتظار آن می‌رفت.

همان‌طور که از حل مسأله مشاهده می‌شود هر چه افزونگی استاتیکی (درجه‌ی نامعینی استاتیکی، یا تعداد نیروها و گشتاورهای مجهولی که تعیین آن‌ها توسط معادلات تعادل استاتیکی امکان پذیر نیست) افزایش یابد، افزونگی سینماتیکی (درجه‌های آزادی مجهول گره‌ها، از قبیل جابه‌جایی یا شیب‌ها)، کاهش می‌یابد؛ بنابراین، تعداد درجه‌های آزادی مجهولی که باید حل شوند کم‌تر خواهد بود. به‌علاوه، استفاده از تقارن (در صورت مجاز) تعداد درجه‌های آزادی مجهول را بیش از پیش کاهش می‌دهد. حال می‌توان نتایج حاصل از معادله‌ی (۱۴-۳-۴) را همراه با مقادیر عددی E ، I و L در معادله‌ی (۱۲-۳-۴) به منظور تعیین نیروهای اصلی در گره‌ها به شرح زیر جای‌گزین نمود:

$$\begin{aligned} F_{1,y} &= 5000 \text{ lb} & M_1 &= 25000 \text{ lb-ft} \\ F_{2,y} &= 10000 \text{ lb} & M_2 &= 0 \\ F_{3,y} &= 10000 \text{ lb} & M_3 &= 0 \\ F_{4,y} &= 10000 \text{ lb} & M_4 &= 0 \\ F_{5,y} &= 5000 \text{ lb} & M_5 &= -25000 \text{ lb-ft} \end{aligned} \quad (15-3-4)$$

مجدداً، می‌توان نیروهای (و گشتاورهای) اصلی در گره‌های تکیه‌گاهی (گره‌های ۱، ۳، و ۵) را به عنوان نیروهای عکس‌العمل، و نیروهای اصلی در گره‌های ۲ و ۴ را به عنوان نیروهای اعمال شده‌ی گره‌ای تفسیر نمود.

به هر حال، در سازه‌هایی بزرگ، باید نیروی برشی و لنگر خمشی محلی در المان را در گره‌های دو انتها به دست آورد، چرا که از این مقادیر در طراحی / تجزیه و تحلیل استفاده می‌شود. این اصل را مجدداً برای المان محصور شده بین گره‌های

۱ و ۲، مندرج در شکل ۴-۱۳ نشان می‌دهیم. با استفاده از معادلات محلی این المان، که در آن کلیه‌ی جابه‌جایی گره‌ها مشخص شده‌اند، داریم:

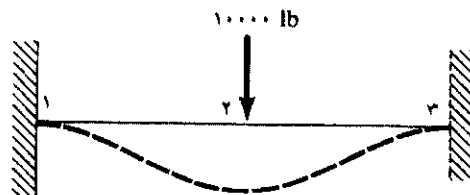
$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} = 0 \\ \hat{\phi}_1 = 0 \\ \hat{d}_{2y} = -0.048 \\ \hat{\phi}_2 = 0 \end{Bmatrix} \quad (16-3-4)$$

پس از ساده‌سازی معادله‌ی (۴-۳-۱۶) داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000 \text{ lb} \\ 25000 \text{ lb-ft} \\ -5000 \text{ lb} \\ 25000 \text{ lb-ft} \end{Bmatrix} \quad (17-3-4)$$

در صورت تمایل، می‌توان با رسم نمودار جسم آزاد، تعادل در المان را اثبات نمود. ■

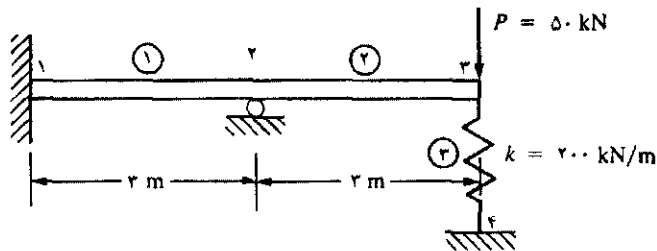
در خاتمه، باید توجه داشت که به دلیل تقارن آینه‌ای حول صفحه‌ای که از گره ۳ می‌گذرد، می‌توانستیم از ابتدا نصف تیر را در نظر گرفته و از مدل زیر استفاده کنیم. تکیه‌گاه گیرداری که در گره ۳ منظور شده به دلیل صفر بودن شیب در این محل، ناشی از تقارن در بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی است.



مثال ۴-۳

در تیرآهن مندرج در شکل ۴-۱۴، جابه‌جایی‌ها و چرخش‌های گره‌ای، و نیز نیروهای اصلی و المانی را به دست آورید. همان گونه که از شماره گذاری گره‌ها

مشهود است، تیر در گره ۱ گیردار، در گره ۲ دارای تکیه‌گاه غلطکی، و در گره ۳ بر تکیه‌گاه الاستیک فنری قرار دارد. نیروی قائم $P = 50 \text{ kN}$ به سمت پایین بر گره ۳ اعمال شده است. فرض کنید در امتداد تیر، $E = 210 \text{ GPa}$ و $I = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ بوده و $k = 200 \text{ kN/m}$ می‌باشد.



شکل ۴-۱۴ مثال تیر آهن

ضمن استفاده از معادله‌ی (۴-۱-۱۴) برای هر یک از المان‌های تیر و معادله‌ی (۲-۲-۱۸) برای المان فنر، همراه با روش سختی مستقیم سختی، ماتریس سختی کل سازه برابر است با:

$$\underline{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix}
 d_{1y} & \phi_1 & d_{2y} & \phi_2 & d_{3y} & \phi_3 & d_{4y} \\
 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\
 & 4L & -6L & 2L & 0 & 0 & 0 \\
 & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\
 & & & 8L & -6L & 2L & 0 \\
 & & & & 12 + \frac{KL}{EI} & -6L & -\frac{KL}{EI} \\
 & & & & & 4L & 0 \\
 & & & & & & \frac{KL}{EI}
 \end{bmatrix}$$

مقارن

(a) ۴-۱۸-۳

در جایی که ماتریس سختی فنر \underline{k}_s که توسط رابطه‌ی (۴-۳-۱۸b) تعریف شده مستقیماً به ماتریس سختی کل در مکان‌های مربوط به درجه‌های آزادی گره‌های ۳ و ۴ اضافه شده است.

$$\underline{k}_s = \begin{bmatrix} d_{r,v} & d_{t,v} \\ k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (b18-3-4)$$

راحت‌تر است تا مسأله را ابتدا به صورت پارامتری حل نموده و سپس مقادیر عددی را در روابط جابه‌جایی جای‌گزین نمود. معادلات حاکم در تیر به صورت زیرند.

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{r,y} \\ M_r \\ F_{r,y} \\ M_r \\ F_{t1} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^3 & -6L & 2L^3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^3 & -6L & 2L^3 & 0 \\ & & & & 12+k' & -6L & -k' \\ & & & & & 4L^3 & 0 \\ & & & & & & k' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1,y} \\ \phi_1 \\ d_{r,v} \\ \phi_r \\ d_{r,y} \\ \phi_r \\ d_{t,v} \end{Bmatrix}$$

مقارن

(19-3-4)

در جایی که از عبارت $k' = kL^3 / (EI)$ به منظور ساده‌سازی استفاده شده است. حال شرایط مرزی زیر را اعمال می‌نماییم.

$$d_{1,y} = 0 \quad \phi_1 = 0 \quad d_{r,v} = 0 \quad d_{t,v} = 0 \quad (20-3-4)$$

سه رابطه‌ی اول و هفتمین رابطه از معادلات (۴-۳-۱۹) (که مرتبط با شرایط مرزی قید شده در معادله‌ی (۴-۳-۲۰) می‌باشند) را حذف می‌کنیم. سه معادله‌ی باقی‌مانده عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^3 & -6L & 2L^3 \\ -6L & 12+k' & -6L \\ 2L^3 & -6L & 4L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_r \\ d_{r,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} \quad (21-3-4)$$

از حل همزمان معادلات (۲۱-۳-۴) برای جابه‌جایی در گره ۳ و چرخش در گره‌های ۲ و ۳ داریم:

$$d_{r_1} = -\frac{\nu PL^2}{EI} \left(\frac{1}{12 + \nu K'} \right) \quad \phi_r = -\frac{3PL^2}{EI} \left(\frac{1}{12 + \nu K'} \right) \quad (22-3-4)$$

$$\phi_c = -\frac{9PL^2}{EI} \left(\frac{1}{12 + \nu K'} \right)$$

تأثیر سختی فنر بر جابه‌جایی‌ها را می‌توان به راحتی از معادله‌ی (۲۲-۳-۴) مشاهده نمود. با استفاده از مقادیر $P = 50 \text{ kN}$ ، $L = 3 \text{ m}$ ، $I = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ، $E = 210 \text{ Gpa} (= 210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)$ و $k' = 0/129$ در معادله‌ی (۲۲-۳-۴) داریم:

$$d_{r_1} = \frac{-\nu(50 \text{ kN})(3 \text{ m})^2}{(210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(2 \times 10^{-4} \text{ m}^4)} \left(\frac{1}{12 + \nu(0/129)} \right) = -0/0174 \text{ m} \quad (23-3-4)$$

از جای‌گذاری‌های مشابه در معادله‌ی (۲۶-۳-۴) خواهیم داشت:

$$\phi_c = -0/00249 \text{ rad} \quad \phi_r = -0/00747 \text{ rad} \quad (24-3-4)$$

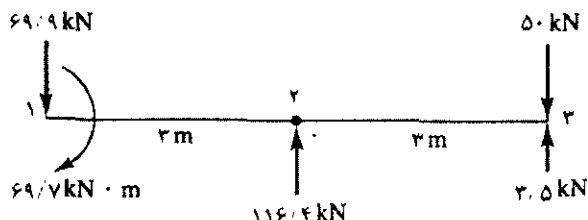
حال نتایج حاصل از معادلات (۲۳-۳-۴) و (۲۴-۳-۴) را همراه با مقادیر عددی P ، E ، I ، L و k' در معادله‌ی (۱۹-۳-۴) قرار داده و نیروهای اصلی در گره‌ها را به شرح زیر به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} F_{r_1} &= -69/9 \text{ kN} & M_1 &= -69/7 \text{ kN.m} \\ F_{r_2} &= 116/4 \text{ kN} & M_r &= 0/0 \text{ kN.m} \\ F_{r_3} &= -50/0 \text{ kN} & M_r &= 0/0 \text{ kN.m} \end{aligned} \quad (25-3-4)$$

در سازه‌ی تیر و فنر، نیروی اصلی دیگری برابر با F_{t_1} در پایه‌ی فنر به شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$F_{t_1} = -d_{r_1} k = (0/0174)200 = 3/5 \text{ kN} \quad (26-3-4)$$

این نیرو، نیروی اصلی دیگری را در راستای l برای حفظ تعادل کل سازه تأمین می‌نماید.

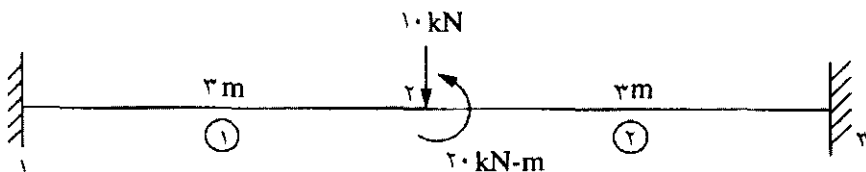


شکل ۴-۱۵ نمودار جسم آزاد تیر آهن مندرج در شکل ۴-۱۴

نمودار جسم آزادی که شامل نیروها و گشتاورهای حاصل از معادلات (۴-۳) و (۴-۲۵) و (۴-۲۶) بوده و بر تیر اعمال شده‌اند در شکل (۴-۱۴) نشان داده شده است. ■

مثال ۴-۴

تغییر مکان و دوران محل اعمال نیرو و گشتاوری را که در وسط تیر آهنی مطابق شکل ۴-۱۶ قرار دارد بیابید. تیر آهن مطابق شکل یاد شده به دو المان تقسیم شده است. تیر در هر یک از دو انتها گیردار است. نیرویی برابر 10 kN به سمت پایین و گشتاوری برابر $10 \text{ kN}\cdot\text{m}$ در مرکز تیر عمل می‌کند. فرض کنید در امتداد تیر، $E = 210 \text{ Gpa}$ و $I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4$



شکل ۴-۱۶ نیرو و گشتاور اعمال شده به تیر آهن دو سر گیردار

با استفاده از معادله‌ی (۴-۱-۴)، ماتریس سختی در هر یک از المان‌های تیر به طول $L = 3 \text{ m}$ به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^3 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{مقارن} & & & 4L^3 \end{bmatrix} \quad \underline{k}^{(2)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^3 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{مقارن} & & & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (27-3-4)$$

شرایط مرزی برابرند با:

$$d_{1,y} = \phi_1 = d_{2,y} = \phi_2 = 0 \quad (28-3-4)$$

نیروهای اصلی برابرند با $F_{2,y} = -10000 \text{ N}$ و $M_2 = 20000 \text{ N.m}$ و به هم ضمن اعمال نیروهای اصلی و شرایط مرزی، معادله‌ی (۴-۳-۲۸)، و به هم گذاری ماتریس سختی اصلی به کمک روش مستقیم سختی و معادلات (۴-۳-۲۷)، معادلات اصلی برابند با:

$$\begin{Bmatrix} -10000 \\ 20000 \end{Bmatrix} = \frac{(210 \times 10^9)(4 \times 10^{-4})}{3^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8(3^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2,y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (29-3-4)$$

از حل معادله‌ی (۴-۳-۲۹) برای دوران و جابه‌جایی داریم:

$$d_{2,y} = -1/3339 \times 10^{-2} \text{ m} \quad \text{و} \quad \phi_2 = 8/926 \times 10^{-5} \text{ rad} \quad (30-3-4)$$

با استفاده از معادلات محلی هر المان، نیروها و گشتاورهای محلی در آنها به

شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} f_{1,y}^{(1)} \\ m_1^{(1)} \\ f_{2,y}^{(1)} \\ m_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{(210 \times 10^9)(4 \times 10^{-4})}{3^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(3) & -12 & 6(3) \\ 6(3) & 4(3^2) & -6(3) & 2(3^2) \\ -12 & -6(3) & 12 & -6(3) \\ 6(3) & 2(3^2) & -6(3) & 4(3^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/3339 \times 10^{-2} \\ 8/926 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} \quad (31-3-4)$$

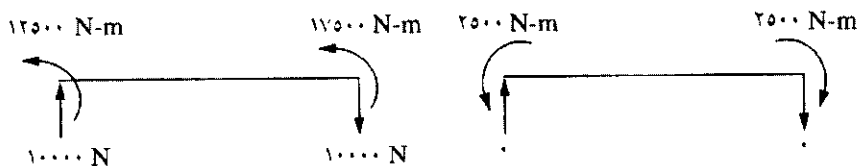
از ساده کردن معادله‌ی (۳۱-۳-۴) داریم:

$$f_{1y}^{(1)} = 10000 \text{ N}, \quad m_1^{(1)} = 12500 \text{ N.m} \quad f_{2y}^{(1)} = -10000 \text{ N}, \quad m_2^{(1)} = 17500 \text{ N.m} \quad (32-3-4)$$

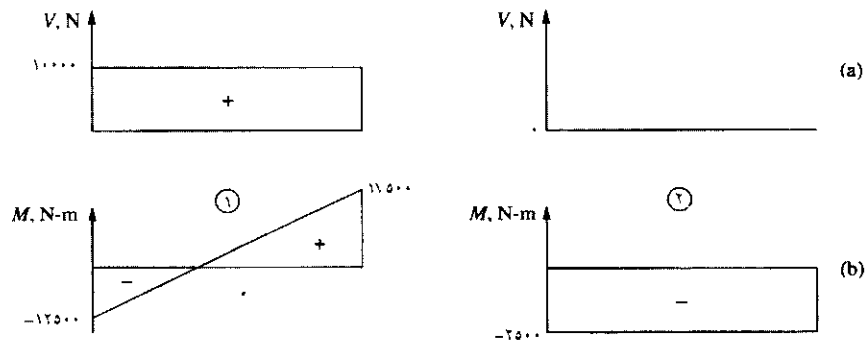
متشابهاً، در المان دو، نیروها و گشتاورها برابرند با:

$$f_{1y}^{(2)} = 0 \text{ N}, \quad m_1^{(2)} = 2500 \text{ N.m} \quad f_{2y}^{(2)} = 0 \text{ N}, \quad m_2^{(2)} = -2500 \text{ N.m} \quad (33-3-4)$$

با استفاده از نتایج به دست آمده از معادلات (۳۲-۳-۴) و (۳۳-۳-۴)، یا از شکل ۴-۱۷، نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی در هر المان، همان‌طور که در شکل ۴-۱۸ نشان داده شده، حاصل می‌شود.



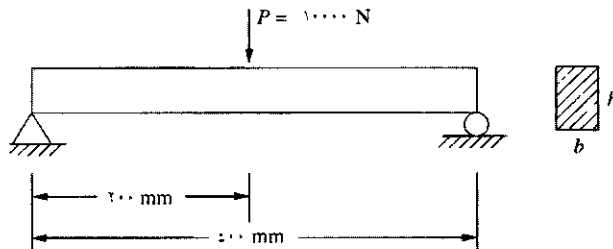
شکل ۴-۱۷ نیروها و گشتاورهای گره‌ای که بر هر المان شکل ۴-۱۵ عمل می‌کنند



شکل ۴-۱۸ نمودارهای نیروی برشی (a) و گشتاور خمشی (b) در هر المان

مثال ۴-۵

به منظور نشان دادن اثرات ناشی از تغییر شکل برشی همراه با تغییر شکل خمشی، تیر آهن ساده‌ای را که در شکل ۴-۱۹ نشان داده شده حل می‌کنیم. در اینجا از ماتریس سختی تیری که در رابطه‌ی (۴-۱-۱۵۰) داده شده و اثرات خمشی و برشی در صفحه‌ای همانند x - y از آن، لحاظ شده‌اند استفاده می‌کنیم. تیر آهن بر تکیه‌گاه ساده‌ای قرار داشته و نیرویی برابر با 10000 N در وسط آن اعمال می‌شود. فرض می‌شود تا مشخصات جنس تیر به صورت $E = 207 \text{ Gpa}$ و $G = 80 \text{ Gpa}$ باشد. عرض و ارتفاع تیر به ترتیب برابر $b = 25 \text{ mm}$ و $h = 50 \text{ mm}$ می‌باشند.

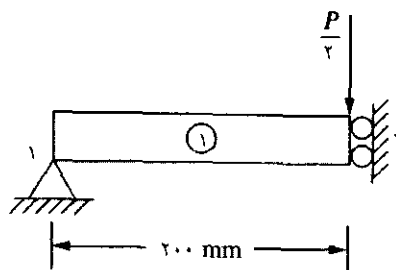


شکل ۴-۱۹ تیر آهن ساده‌ای که تحت تأثیر بار متمرکز در وسط قرار گرفته است

به منظور ساده کردن مسأله، از تقارن استفاده می‌شود؛ بنابراین، فقط نیمی از تیر را در نظر گرفته و شیب را در وسط آن به اجبار صفر می‌کنیم. مضافاً، فقط از نیمی از بار متمرکز استفاده می‌شود. مدلی که در آن از تقارن استفاده شده در شکل ۴-۲۰ نشان داده شده است.

مدل اجزای محدود فقط از یک المان تشکیل شده است. با استفاده از معادله‌ی (۴-۱-۵) برای ماتریس سختی المانی از تیر تیموشنکو، معادلات اصلی به شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\frac{EI}{L^3(1+\phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (\xi+\phi)L^3 & -6L & (2-\phi)L^3 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\phi)L^3 & -6L & (\xi+\phi)L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1y} = 0 \\ \phi_1 \\ d_{2y} \\ \phi_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ \cdot \\ -P/2 \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (4-3-34)$$



شکل ۴-۲۰ تیر پس از اعمال تقارن

باید به خاطر داشت که شرایط مرزی داده شده در قالب $d_{1y} = 0$ و $\phi_1 = 0$ به معادله‌ی (۴-۳-۳۴) اعمال شده‌اند.

با استفاده از دومین و سومین رابطه از معادله‌ی (۴-۳-۳۴) که با ردیف‌های

حاوی مجهولات ϕ_1 و d_{2y} مرتبط می‌باشند، می‌توان نوشت:

$$d_{2y} = \frac{-PL^3(\xi+\phi)}{24EI} \quad \text{و} \quad \phi_1 = \frac{-PL^3}{4EI} \quad (4-3-35)$$

با توجه به آنکه سطح مقطع تیر مستطیل شکل است، لذا ممان اینرسی آن برابر است با:

$$I = bh^3 / 12$$

پس از جای‌گزینی مقادیر b و h برابر است با:

$$I = 0.26 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

ضریب اصلاح برش برابر است با:

$$\phi = \frac{12EI}{k_s AGL^2}$$

در جایی که k_s در سطح مستطیل شکل برابر است با $k_s = \frac{5}{4}$.

از جای‌گزینی $P = 10000 \text{ N}$ ، $L = 0.2 \text{ m}$ و $\phi = 0.198$ در معادله‌ی (۳-۴-۳)

(۳۵)، تغییر مکان در وسط تیر برابر است با:

$$d_{r,y} = -2.097 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (۳۶-۳-۴)$$

اگر فرض کنیم l طول کل تیر باشد در آن صورت $l = 2L$ ، و در نتیجه می‌توان از

جای‌گزینی $L = \frac{l}{2}$ در معادله‌ی (۳۵-۳-۴)، تغییر مکان را بر حسب طول کل تیر به

شرح زیر به دست آورد.

$$d_{r,y} = \frac{-Pl^2(\xi + \phi)}{192EI} \quad (۳۷-۳-۴)$$

در تیرآهن‌های دراز و باریکی که l حدوداً ۱۰ و یا بیش از ده برابر ارتفاع آن، h باشد ضریب اصلاح برشی تیر کوچک بوده و لذا می‌توان از آن صرف نظر نمود؛ بنابراین، معادله‌ی (۳۷-۳-۴) برابر است با:

$$d_{r,y} = \frac{-Pl^2}{48EI} \quad (۳۸-۳-۴)$$

معادله‌ی (۳۸-۳-۴)، معادله‌ی کلاسیک خیز در تیرآهنی است که بر تکیه‌گاه ساده‌ای قرار داشته و تحت تأثیر بار متمرکزی در وسط قرار گرفته است.

با استفاده از معادله‌ی (۳۸-۳-۴)، خیز برابر است با:

$$d_{r,y} = 2.474 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (۳۹-۳-۴)$$

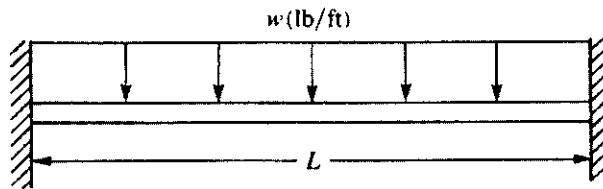
از مقایسه‌ی تغییر مکانی که با احتساب ضریب اصلاح برشی حاصل می‌شود با خیزی که فقط از اعمال خمش در تیر به دست می‌آید می‌توان نوشت:

$$\text{اختلاف } ۴/۹\% = \frac{۲/۵۹۷ - ۲/۴۷۴}{۲/۴۷۴} \times ۱۰۰ =$$

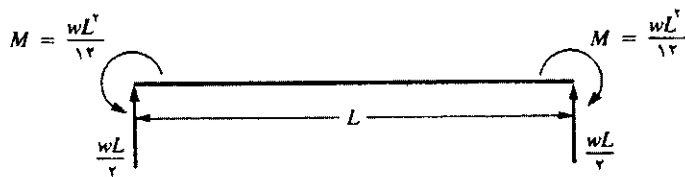
۴-۴ بارگذاری گسترده

تیرآهن‌ها می‌توانند بار گسترده و نیز بار متمرکز گره‌ای را تحمل کنند. لذا باید بتوان نحوه‌ی به کارگیری بار گسترده را فرا گرفت. تیرآهن دو سر گیرداری را که مطابق شکل ۴-۲۱ تحت تأثیر بار گسترده‌ی w قرار گرفته در نظر می‌گیریم. عکس‌العمل‌ها که بر اساس تئوری تجزیه و تحلیل سازه‌ها محاسبه شده‌اند [۲] در شکل ۴-۲۲ نشان داده شده‌اند. عکس‌العمل‌های یاد شده، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه گیردار نامیده می‌شوند. به طور کلی، عکس‌العمل‌های انتهای گیردار عکس‌العمل‌ها در دو انتهای المانی هستند که از دو سر گیردار فرض شده است. به عبارتی دیگر، از جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها جلوگیری شده باشد. (آن دسته از شما که با سازه‌های نامعین‌آشنایی ندارید باید این عکس‌العمل‌ها را داده شده فرض نموده و بقیه‌ی بحث را ادامه دهید: این نتایج را در روش کار معادلی که آورده خواهد شد استخراج خواهیم نمود.) بنابراین، با توجه به نتایج ناشی از تحلیل سازه با بار گذاری گسترده‌ی یکنواخت، بار یاد شده را با نیروها و گشتاورهای گره‌ای که همان اثر بار گسترده را بر تیرآهن دارند، جای‌گزین می‌کنیم. شکل ۴-۲۳ این ایده را در یک تیرآهن نشان می‌دهد. در این جا بار گسترده‌ی یکنواخت توسط سیستم نیروی معادلی که متشکل از یک نیرو و گشتاور در هر یک از دو انتهای عضو حامل بار گسترده است جای‌گزین شده است. به عبارتی دیگر، بار گسترده‌ی اولیه و نیرو و گشتاور استاتیکی معادلی که در گره‌ها قرار داده شده است، دارای یک نیرو و گشتاور برآیند حول هر نقطه‌ی دلخواه می‌باشند. جهت چنین نیروهای معادلی پیوسته خلاف جهت عکس‌العمل‌ها در هر یک از دو انتها است. چنان‌چه بخواهیم

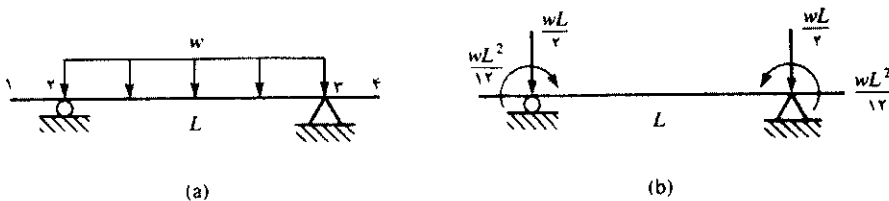
رفتار عضو ۲-۳ را با جزییات بیش‌تری تجزیه و تحلیل نماییم، می‌توان با معرفی گره‌ای در وسط، همان روشی را اتخاذ نمود که در مورد هر یک از دو المان معرف عضو افقی به کار گرفته شد. به عبارتی دیگر، به منظور تعیین ماکزیمم خیز و گشتاور در تیرآهن، به گره‌ای در وسط قسمت ۲-۳ نیاز داشته و همان‌طور که در شکل ۴-۳(c) نشان داده شده، نیروها و گشتاورهای کار معادل را به هر المان اعمال نمود (از گره ۲ تا ۵ و از گره ۵ تا ۳).

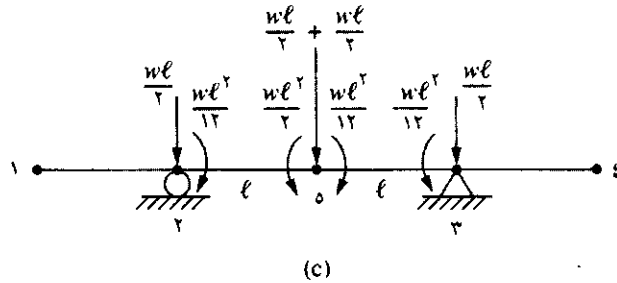


شکل ۴-۲۱ تیرآهن دو سر گیر دار تحت بار گسترده‌ی یکنواخت



شکل ۴-۲۲ عکس‌العمل‌های دو انتهای گیردار تیرآهن مندرج در شکل ۴-۲۰



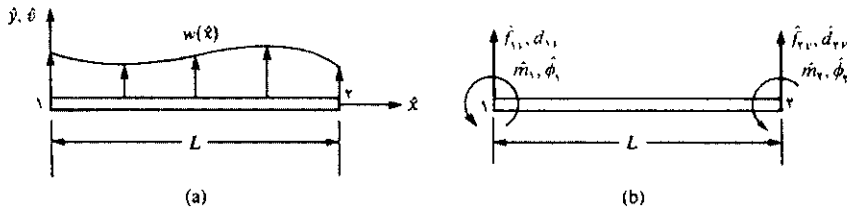


شکل ۴-۲۳ (a) تیر آهن با بار گسترده و (b) سیستم نیروی معادل گره‌ای، و (c) تیر بزرگ نما شده (به خاطر وضوح بیشتر) همراه با سیستم نیروی معادل، هنگامی که گره ۵ به وسط تیر اضافه شده است

روش کار معادل

با استفاده از روش کار معادل می‌توان بار گسترده را با مجموعه‌ای از بارهای مجزا جای‌گزین نمود. این روش بر این اصل استوار است که به ازای هر گونه جابه‌جایی دلخواه، کار انجام شده توسط بار گسترده‌ی $w(\hat{x})$ به ازای میدان جابه‌جایی $\hat{v}(\hat{x})$ برابر است با کار انجام شده توسط بارهای گره‌ای \hat{f}_{ij} و \hat{m}_i به ازای جابه‌جایی‌های گره‌ای \hat{d}_{ij} و $\hat{\phi}_i$. به منظور تشریح این روش، مثالی که در شکل ۴-۲۴ نشان داده شده است را در نظر می‌گیریم. کار انجام شده توسط بار گسترده برابر است با:

$$W_{\text{گسترده}} = \int w(\hat{x})\hat{v}(\hat{x}) d\hat{x} \quad (۴-۴-۱)$$



شکل ۴-۲۴ (a) المان تیر که در معرض بارگذاری کل قرار گرفته است (b) سیستم نیروی استاتیکی گره‌ای معادل

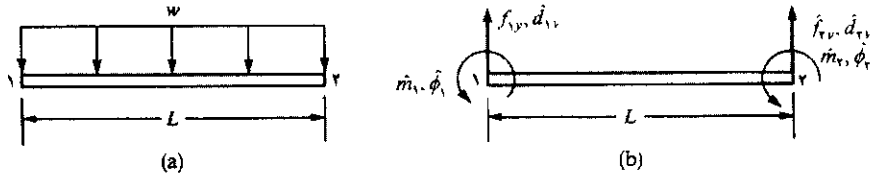
در جایی که $\hat{v}(\hat{x})$ جابه‌جایی عرضی بوده که در معادله‌ی (۴-۱-۴) داده شده است. کار انجام شده توسط نیروهای گره‌ای مجزا برابر است با:

$$W_{\text{مجزا}} = \hat{m}_1 \hat{\phi}_1 + \hat{m}_2 \hat{\phi}_2 + \hat{f}_{1y} \hat{d}_{1y} + \hat{f}_{2y} \hat{d}_{2y} \quad (۲-۴-۴)$$

حال می‌توان نیروها و گشتاورهای گره‌ای \hat{m}_1 ، \hat{m}_2 ، \hat{f}_{1y} و \hat{f}_{2y} را که به عنوان جای‌گزین بار گسترده محسوب می‌شوند از روش کار معادل به دست آورد- به عبارتی، با به کار گیری رابطه‌ی $W_{\text{مجزا}} = W_{\text{مکرره}}$ ، به ازای جابه‌جایی‌های دلخواه $\hat{\phi}_1$ ، $\hat{\phi}_2$ ، \hat{d}_{1y} و \hat{d}_{2y} .

مثالی در مورد جای‌گزینی بار

به منظور روشن شدن بیشتر مفهوم کار معادل، تیرآهنی را که در معرض بار گسترده مشخصی قرار دارد در نظر می‌گیریم. بدین منظور تیرآهن مندرج در شکل ۴-۲۵ (a) را با بار گسترده‌ی یکنواخت در نظر می‌گیریم. شرایط تکیه‌گاهی به آن دلیل نشان داده نشده‌اند که در جای‌گزینی بار معادل نقشی ندارند. با در نظر گرفتن $W_{\text{مکرره}} = W_{\text{مجزا}}$ و نیز با در نظر گرفتن $\hat{\phi}_1$ ، $\hat{\phi}_2$ ، \hat{d}_{1y} و \hat{d}_{2y} ، نیروهای گره‌ای معادل \hat{m}_1 ، \hat{m}_2 ، \hat{f}_{1y} و \hat{f}_{2y} را محاسبه خواهیم نمود. شکل ۴-۲۵ (b) جهت مثبت نیروها و گشتاورهای گره‌ای را بر اساس شکل ۴-۱ نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۵ (a) تیر آهن تحت بار گسترده‌ی یکنواخت و (b) نیروهای گره‌ای معادلی که باید محاسبه شوند.

از جای‌گزینی معادلات (۱-۴-۴) و (۲-۴-۴) در معادله $W_{مجزا} = W_{مسترد}$ داریم:

$$\int_0^L w(\hat{x})\hat{v}(\hat{x})d\hat{x} = \hat{m}_1\hat{\phi}_1 + \hat{m}_2\hat{\phi}_2 + \hat{f}_{1y}\hat{d}_{1y} + \hat{f}_{2y}\hat{d}_{2y} \quad (۳-۴-۴)$$

در جایی که $\hat{m}_1\hat{\phi}_1$ و $\hat{m}_2\hat{\phi}_2$ کار انجام شده توسط گشتاورهای متمرکز در خلال چرخش‌های گره‌ای مربوطه و $\hat{f}_{1y}\hat{d}_{1y}$ و $\hat{f}_{2y}\hat{d}_{2y}$ کار انجام شده توسط نیروهای گره‌ای در خلال جابه‌جایی‌های گره‌ای مربوطه می‌باشند. ضمن ارزیابی سمت چپ معادله‌ی (۳-۴-۴) و جای‌گزینی $w(\hat{x}) = -w$ و $\hat{v}(\hat{x})$ از معادله‌ی (۴-۱-۴)، کار انجام شده توسط بار گسترده را به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\int_0^L w(\hat{x})\hat{v}(\hat{x})d\hat{x} = -\frac{Lw}{۲}(\hat{d}_{1y} - \hat{d}_{2y}) - \frac{L^2w}{۴}(\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) - Lw(\hat{d}_{2y} - \hat{d}_{1y}) + \frac{L^2w}{۳}(۲\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) - \hat{\phi}_1\left(\frac{L^2w}{۲}\right) - \hat{d}_{1y}(wL) \quad (۴-۴-۴)$$

حال با استفاده از معادلات (۳-۴-۴) و (۴-۴-۴) برای جابه‌جایی‌های گره‌ای دلخواه، به فرض آن که $\hat{\phi}_1 = 1$ ، $\hat{\phi}_2 = 0$ ، $\hat{d}_{1y} = 0$ و $\hat{d}_{2y} = 0$ خواهیم داشت:

$$\hat{m}_1(1) = -\left(\frac{L^2w}{۴} - \frac{۲}{۳}L^2w + \frac{L^2}{۲}w\right) = -\frac{wL^2}{۱۲} \quad (۵-۴-۴)$$

متشابهاً با در نظر گرفتن $\hat{\phi}_1 = 0$ ، $\hat{\phi}_2 = 1$ ، $\hat{d}_{1y} = 0$ و $\hat{d}_{2y} = 0$ خواهیم داشت:

$$\hat{m}_{\nu}(1) = -\left(\frac{L'w}{\varepsilon} - \frac{L'w}{\nu}\right) = \frac{wL'}{12} \quad (6-4-4)$$

نهایتاً، چنانچه کلیه‌ی جابه‌جایی‌ها بجز $\hat{d}_{1\nu}$ و سپس $\hat{d}_{2\nu}$ برابر صفر قرار داده شوند در آن صورت:

$$\hat{f}_{1\nu}(1) = -\frac{Lw}{\nu} + Lw - Lw = -\frac{Lw}{\nu} \quad (7-4-4)$$

$$\hat{f}_{2\nu}(1) = \frac{Lw}{\nu} - Lw = -\frac{Lw}{\nu}$$

به‌طور کلی، می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر تابعی از بارگذاری $w(\hat{x})$ ، از ضرب آن تابع در $\hat{v}(\hat{x})$ و انتگرال‌گیری آن بر حسب رابطه‌ی (۳-۴-۴)، می‌توان نیروهای گره‌ای متمرکز (و یا گشتاورها) را که به عنوان جای‌گزین بار گسترده محسوب می‌شوند، به دست آورد. مضافاً، می‌توان با تکیه بر اصل عکس‌العمل‌های انتهای گیردار در تئوری تحلیل سازه‌ای، نیروهای جای‌گزین را تعیین نمود. جداول مختلفی برای عکس‌العمل‌های انتهای گیردار، به ازای حالات مختلفی از بارگذاری استخراج شده‌اند که در کتب مرتبط با تحلیل سازه‌ها از قبیل مرجع [۲] موجود می‌باشند. جدولی از نیروهای گره‌ای معادل در پیوست D این کتاب آورده شده به قسمی که جهت این نیروها خلاف جهت نیروهایی است که از روش کار معادل حاصل می‌شوند. بنابراین، اگر بار متمرکزی در نقطه‌ای غیر از محل تلاقی معمولی دو المان اعمال شود، می‌توان به‌جای ایجاد یک گره در محل بار اعمال شده، با استفاده از اصل نیروهای گره‌ای معادل، نیروی متمرکز را با مقادیر متمرکزی در دو انتهای تیرآهن جای‌گزین نمود. مثال‌هایی از این روش به منظور به‌کارگیری بار متمرکز در المان تیرآهن، مثال ۴-۷، و قاب صفحه‌ای، مثال ۵-۳، آورده خواهد شد.

فرمول بندی کلی

به‌طور کلی، به منظور احتساب اثر بارهای گسترده یا متمرکزی که بر المانی از یک تیر عمل می‌کنند می‌توان از فرمول بندی زیر در یک سازه کلی استفاده نمود.

$$\underline{F} = \underline{Kd} - \underline{F}_o \quad (۸-۴-۴)$$

در جایی که \underline{F}_o نیروهای گره‌ای معادلی نامیده می‌شوند که در این جا بر حسب مؤلفه های مختصات اصلی بیان شده، و دارای مقادیری هستند که جابه‌جایی ناشی از آنها در گره‌ها برابر جابه‌جایی ناشی از بار گسترده است. با استفاده از بارهای گره‌ای معادل \underline{f}_o ، مندرج در جدول پیوست D، که بر حسب مؤلفه های مختصات محلی تشریح شده‌اند، می‌توان \underline{F}_o را بر حسب مؤلفه‌های مختصات اصلی بیان نمود.

یادآوری می‌شود که در بخش ۳-۱۰، نحوه‌ی استخراج معادلات المان از روش اصل مینیم انرژی پتانسیل ارائه گردید. با شروع از معادلات (۳-۱۰-۱۹) و (۳-۱۰-۲۰)، مینیم نمودن انرژی پتانسیل کل منجر به معادلاتی گردید که قالبی شبیه به معادله‌ی (۸-۴-۴) داشته است؛ در حالی که اکنون \underline{F}_o معرف سیستم نیروی جای‌گزین کار معادلی است که توسط رابطه‌ی (۳-۱۰-۲۰) به منظور جای‌گزینی نیروهای کشش سطحی داده شد. همچنین، $\underline{F} = \underline{P}$ [P ناشی از معادله‌ی (۳-۱۰-۲۰)]، معرف نیروهای متمرکز اصلی در گره‌ها می‌باشد. با توجه به عدم حضور نیروهای گره‌ای متمرکز ($\underline{F} = 0$)، چرا که در این بخش تیرآهن‌هایی حل می‌شوند که تحت بار گسترده قرار گرفته‌اند، می‌توان معادله‌ی (۸-۴-۴) را به صورت زیر نوشت.

$$\underline{F}_o = \underline{Kd} \quad (۹-۴-۴)$$

پس از حل معادله‌ی (۹-۴-۴) برای تعیین \underline{d} ، و جای‌گزینی جابه‌جایی‌های اصلی به دست آمده‌ی \underline{d} و نیروهای معادل گره‌ای \underline{F}_o در رابطه‌ی (۸-۴-۴)، نیروهای اصلی واقعی در گره‌ها، \underline{F} ، حاصل می‌شوند. برای مثال با استفاده از تعریف \underline{f}_o و معادلات (۴-۵-۷) تا (۴-۷-۷)، (یا با استفاده بارگذاری بند ۴ پیوست D)، به ازای بار گسترده‌ی یکنواخت w که بر روی المانی از یک تیرآهن عمل می‌کند، داریم:

$$\underline{F}_o = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-wL}{2} \\ -wL^2 \\ \frac{12}{-wL} \\ \frac{2}{wL^2} \\ \frac{12}{12} \end{array} \right\} \quad (10-4-4)$$

به منظور تعیین نیروهای گره‌ای معادل \hat{f} در المان‌های یک سازه، می‌توان این مفهوم را از طریق اعمال محلی رابطه‌ی (۸-۴-۴)، به شرح زیر به انجام رساند.

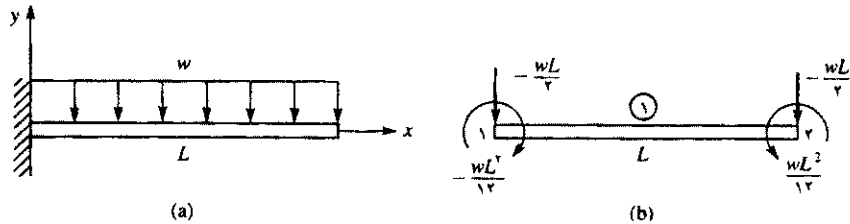
$$\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{K}}\underline{\hat{d}} - \underline{\hat{f}}_o \quad (11-4-4)$$

در جایی که $\underline{\hat{f}}_o$ نیروهای محلی معادل در گره‌ها می‌باشند.

مثال‌های ۶-۴ الی ۸-۴ نحوه‌ی کاربرد روش نیروهای گره‌ای معادل را در حل تیرآهن‌هایی که تحت بارهای گسترده و متمرکز قرار گرفته‌اند نشان می‌دهد. در مثال‌های ۶-۴ الی ۸-۴ از مختصات اصلی استفاده خواهد شد - تیرآهن به صورت یک سازه، و نه یک المان، منظور می‌شود.

مثال ۶-۴

در تیرآهن یک سر گیردار مندرج در شکل ۲۶-۴ که تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواخت w قرار گرفته است خیز و چرخش در انتهای سمت راست و سپس نیروهای گره‌ای را محاسبه کنید. فرض کنید مقدار EI در امتداد طول تیر ثابت است.



شکل ۴-۲۶ (a) تیر آهن یک سر گیردار تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواخت و (b) سیستم نیروهای گره‌ای کار معادل

ابتدا با تقسیم بندی تیر آهن شروع می‌کنیم. در این جا فقط از یک المان برای نمایش کل تیر استفاده خواهد شد. سپس همان‌طور که در شکل ۴-۲۶ (b) نشان داده شده بار گسترده با نیروهای گره‌ای کار معادل آن جای‌گزین شده است. نیروهای گره‌ای کار معادل نیروهایی هستند که از بار گسترده‌ی یکنواختی که بر روی کل تیر عمل می‌کند، بر اساس معادله‌ی (۴-۴-۱۰)، ناشی می‌شوند. (یا به حالت ۴ بارگذاری در پیوست D مراجعه شود.) با استفاده از رابطه‌ی (۴-۴-۹) و ماتریس سختی المان، ضمن مشاهده‌ی این که $\hat{k} = k$ ، به دلیل منطبق بودن محور محلی \hat{x} با محور اصلی x داریم:

$$\frac{EI}{L^3} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ \epsilon L^3 & -6L^2 & 2L^2 & \\ & 12 & -6L & \\ & & \epsilon L^3 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1,y} \\ \phi_1 \\ d_{2,y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,y} - \frac{wL}{2} \\ M_1 - \frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (12-4-4)$$

به قسمی که از نیروها و گشتاورهای گره‌ای کار معادلی که در شکل ۴-۲۶ (b) نشان داده شده استفاده شده است.

ضمن اعمال شرایط مرزی $d_{1y} = 0$ و $\phi_1 = 0$ به معادله‌ی (۴-۴-۱۲) و سپس

جدا سازی سومین و چهارمین رابطه از معادله‌ی (۴-۴-۱۲)، داریم:

$$\frac{EL}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -wL \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4-4-13)$$

از حل معادله‌ی (۴-۴-۱۳) برای جابه‌جایی‌ها، داریم:

$$\begin{Bmatrix} d_{2y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -wL \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4-4-14a)$$

از ساده سازی معادله‌ی (۴-۴-۱۴a) جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها به شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} d_{2y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-wL^3}{8EI} \\ \frac{-wL^2}{6EI} \end{Bmatrix} \quad (4-4-14b)$$

علامات منفی در پاسخ‌ها بیانگر آن است که d_{2y} به سمت پایین و ϕ_2 ساعت گرد است. در این حالت، جای‌گزینی بار گسترده با بارهای متمرکز مجزا، منجر به جواب‌های دقیقی برای جابه‌جایی و چرخش می‌شود که مشابه با جواب‌های حاصل از روش‌های کلاسیکی همانند انتگرال‌گیری دوگانه [۱] است. چنین نتایجی دور از انتظار نیست؛ چرا که روش کار معادل تضمین می‌نماید تا چرخش‌ها و جابه‌جایی‌های حاصل از روش اجزای محدود، با جواب‌های حاصل از حل مستقیم یکی باشند.

حال روشی را به منظور محاسبه‌ی نیروهای گره‌ای اصلی تشریح می‌کنیم. برای راحتی، ابتدا حاصل ضرب Kd را به صورت $\underline{F}^{(e)}$ تعریف می‌کنیم، در جایی که

$\underline{F}^{(e)}$ نیروهای گره‌ای اصلی مؤثر نامیده می‌شوند. با استفاده از معادله‌ی (۴-۴-۱۴) برای \underline{d} داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ F_{2y}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -wL^4 \\ \frac{8EI}{L^3} \\ -wL^2 \\ \frac{6EI}{L^3} \end{Bmatrix} \quad (10-4-4)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۴-۴-۱۵) داریم:

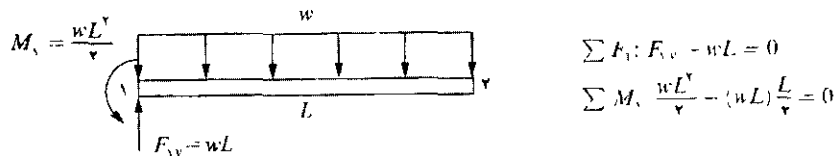
$$\begin{Bmatrix} F_{1y}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ F_{2y}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{wL}{2} \\ \frac{5wL^2}{12} \\ -wL \\ \frac{2}{12}wL^2 \end{Bmatrix} \quad (16-4-4)$$

سپس معادلات (۴-۴-۱۰) و (۴-۴-۱۶) را در رابطه‌ی (۴-۴-۱۸) ($\underline{F} = k\underline{d} - \underline{F}_n$) جای‌گزین نموده تا نیروهای گره‌ای اصلی صحیح به شرح زیر حاصل شوند.

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{wL}{2} \\ \frac{5wL^2}{12} \\ -wL \\ \frac{2}{12}wL^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{-wL}{2} \\ \frac{-wL^2}{12} \\ \frac{2}{12}wL^2 \\ \frac{-wL}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{wL}{2} \\ \frac{2}{12}wL^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17-4-4)$$

در معادله‌ی (۴-۴-۱۷)، F_{1y} ، نیروی عکس‌العمل قائم، و M_1 ، عکس‌العمل گشتاوری است که بر تکیه‌گاه گیردار، در گره ۱، اعمال می‌شود. نتایج حاصل از

معادلات (۴-۴-۱۴b) برای جابه‌جایی و (۴-۴-۱۷) برای نیروهای گره‌ای اصلی، برای تکمیل حل مسأله‌ی تیرآهن یک سر گیردار کافی است. نمودار جسم آزادی از تیر که در آن از عکس‌العمل‌های معادله‌ی (۴-۴-۱۷) استفاده شده نیروها و گشتاورهای ناشی از تعادلی را که در شکل ۴-۲۶(c) نشان داده شده به اثبات می‌رساند.



شکل ۴-۲۶(c) نمودار جسم آزاد و معادلات تعادل برای تیرآهن مندرج در شکل ۴-۲۶(a)

نیروها و گشتاورهای گره‌ای به دست آمده از معادله‌ی (۴-۴-۱۷) نمایانگر اهمیت کاربرد معادله‌ی (۴-۴-۸) در تعیین نیروها و گشتاورهای اصلی صحیح در گره‌ها می‌باشند. از تفاضل ماتریس نیروی کار معادل، \underline{F}_e ، از حاصل ضرب \underline{K} در \underline{d} ، می‌توان عکس‌العمل‌های صحیح در گره ۱ را به دست آورد. همان گونه که از اعمال روابط ساده‌ی تعادل استاتیکی این امر اثبات می‌شود. ارزیابی یاد شده، روش کلی فوق را به شرح زیر تأیید می‌کند.

۱. همان‌طور که در شکل ۴-۲۶(b) نشان داده شده، نیروی گسترده با نیروهای کار معادل جای‌گزین می‌شوند.

۲. ماتریس‌های سختی و نیروهای اصلی، و نیز معادلات اصلی را همان‌طور که در معادله‌ی (۴-۴-۱۲) نشان داده شد تشکیل می‌دهیم.

۳. به منظور کاهش تعداد معادلات، شرایط مرزی را همانند آن چه که در مثال قبل و نیز در معادله‌ی (۴-۴-۱۳) به منظور کاهش تعداد معادلات اولیه از چهار عدد به

دو عدد جهت حل آن‌ها و تعیین تغییر مکان‌ها و دوران‌های مجهول انجام شد. اعمال می‌کنیم.

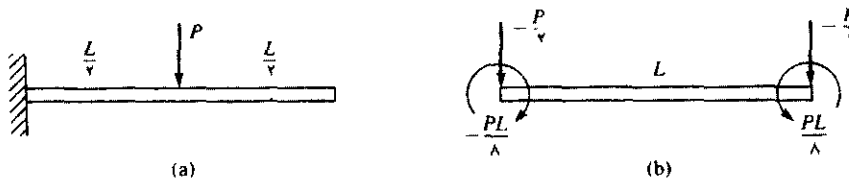
۴. تغییر مکان و دوران مجهول ذکر شده در روابط (۴-۴-۱) و (۴-۴-۲) را حل می‌کنیم.

۵. با استفاده از معادله‌ی (۴-۴-۸) که در قالب رابطه‌ی (۴-۴-۱۷) نوشته شد، نیروها و گشتاورهای اصلی را تعیین می‌کنیم. نیروها و گشتاورهای یاد شده در تکیه‌گاه‌ها، همانند انتهای سمت چپ تیر آهن یک سرگیردار مندرج در شکل ۴-۲۶ (a)، معرف عکس‌العمل‌ها هستند.

حال به منظور تشریح کاربرد نیروهای متمرکزی که در نقاطی غیر از گره‌ها بر المانی از تیر اعمال می‌شوند مثال زیر را حل می‌کنیم.

مثال ۴-۷

در تیر آهن یک سرگیردار مندرج در شکل ۴-۲۷ که تحت تأثیر بار متمرکز P قرار گرفته خیز عمودی و چرخش در انتهای سمت راست و نیروهای گره‌ای را که شامل عکس‌العمل‌ها است، از جای‌گزینی نیروی متمرکز با نیروهای گره‌ای معادل در هر یک از دو انتهای تیر بیابید. فرض کنید EI در سراسر تیر ثابت است.



شکل ۴-۲۷ (a) تیر آهن یک سرگیردار تحت تأثیر نیروی متمرکز و (b) سیستم نیروی گره‌ای معادل جای‌گزین

حل مسأله را با تقسیم بندی تیر شروع می‌کنیم. در این جا فقط از یک المان با گره‌هایی در هر یک از دو انتها استفاده شده است. سپس همان‌طور که در شکل ۴-۲۱(b) نشان داده شده بار متمرکز را با حالت ۱ بارگذاری در پیوست D جای‌گزین می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی (۴-۴-۹) و ماتریس سختی المان تیر، معادله‌ی (۴-۱-۱۴)، داریم:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 2 \\ PL \\ 8 \end{Bmatrix} \quad (4-4-18)$$

در جایی که از نیروهای گره‌ای مندرج در شکل ۴-۲۷(b) و شرایط مرزی $d_{1,y} = 0$ و $\phi_l = 0$ به منظور کاهش تعداد معادلات ماتریسی در حل دستی مسأله استفاده شده است. از حل معادله‌ی (۴-۴-۱۸) برای جابه‌جایی‌ها داریم:

$$\begin{Bmatrix} d_{2,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^3 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -P \\ 2 \\ PL \\ 8 \end{Bmatrix} \quad (4-4-19)$$

از ساده سازی معادله‌ی (۴-۴-۱۹) مقادیر جا به جایی و چرخش به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} d_{2,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-5PL^3}{48EI} \\ \frac{-PL^3}{8EI} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \curvearrowright \end{matrix} \quad (4-4-20)$$

به منظور تعیین نیروهای گره‌ای مجهول، ابتدا نیروهای گره‌ای معادل را در قالب رابطه‌ی $F^{(e)} = Kd$ به شرح زیر ارزیابی می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ F_{2y}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -\delta PL^3 \\ \frac{4\delta EI}{L^3} \\ -\frac{PL^3}{L^3} \\ \frac{\delta EI}{L^3} \end{Bmatrix} \quad (21-4-4)$$

از ساده سازی معادله‌ی (۲۱-۴-۴) داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ F_{2y}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{3PL}{8} \\ -P \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix} \quad (22-4-4)$$

سپس، از جای‌گزینی معادله‌ی (۲۲-۴-۴) و نیروهای گره‌ای معادل از شکل ۴-۲۷ (b) در معادله‌ی (۸-۴-۴)، نیروهای گره‌ای صحیح به شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{3PL}{8} \\ -P \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{-P}{2} \\ \frac{-PL}{8} \\ -P \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{2} \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (23-4-4)$$

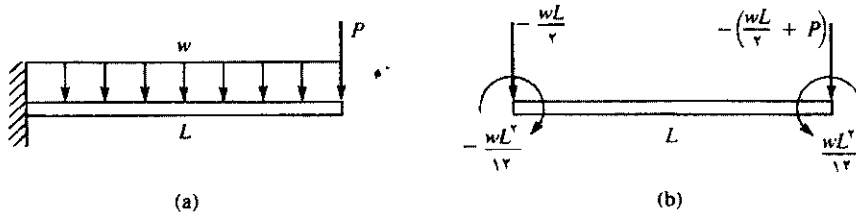
از معادله‌ی (۲۳-۴-۴) ملاحظه می‌شود که F_{1y} معادل نیروی عکس‌العمل عمودی و M_1 گشتاور عکس‌العملی است که در تکیه‌گاه گیردار، بر گره ۱ اعمال شده است. مجدداً، عکس‌العمل‌هایی که در معادله‌ی (۲۳-۴-۴) حاصل شد را می‌توان از کاربرد معادلات تعادل استاتیکی به دست آورده تا یک بار دیگر، صحت فرمول

بندی و مراحلی را که به‌طور خلاصه و طی مراحل قید شده بعد از مثال ۴-۶ آورده شد را به اثبات رساند.

به منظور تشریح روش کار با نیروهای گره‌ای متمرکز و بارهای گسترده ای که به‌طور همزمان بر المان‌های تیر اعمال می‌شوند مثال زیر را حل می‌کنیم.

مثال ۴-۸

در تیرآهن یک سر گیرداری که مطابق شکل ۴-۲۸ تحت تأثیر نیروی متمرکزی در انتها و بار گسترده‌ای در امتداد طول خود قرار گرفته است جابه‌جایی انتهای آزاد و نیروهای گره‌ای را بیابید.



شکل ۴-۲۸ (a) تیرآهن یک سر گیردار تحت تأثیر نیروی متمرکز و بار گسترده و (b) سیستم نیروی گره‌ای معادل

مجدداً، تیرآهن با یک المان و گره‌های ۱ و ۲ مدل‌سازی شده و همان‌طور که در شکل ۴-۲۸ (b) نشان داده شده، بار گسترده با حالت ۴ بارگذاری در پیوست D جای‌گزین شده است. با استفاده از معادله‌ی (۴-۴-۱۴) برای سختی المان تیر، داریم:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{vy} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-wL}{2} - P \\ \frac{wL^3}{12} \end{Bmatrix} \quad (24-4-4)$$

در جایی که از نیروهای گره‌ای مندرج در شکل ۴-۲۸ (b) و شرایط مرزی $d_{vy} = 0$ و $\phi_r = 0$ به منظور کاهش تعداد معادلات ماتریسی در حل دستی مسأله

استفاده شده است. از حل معادله‌ی (۲۴-۴-۴) برای جابه‌جایی‌ها داریم:

$$\begin{Bmatrix} d_{vy} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-wL^3}{8EI} - \frac{PL^3}{3EI} \\ \frac{-wL^3}{6EI} - \frac{PL^3}{2EI} \end{Bmatrix} \quad (25-4-4)$$

سپس، با استفاده از معادله‌ی $F^{(e)} = Kd$ ، نیروهای گره‌ای برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ F_{2y}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^3 & -6L & 2L^3 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^3 & -6L & 4L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-wL^3}{8EI} - \frac{PL^3}{3EI} \\ \frac{-wL^3}{6EI} - \frac{PL^3}{2EI} \end{Bmatrix} \quad (26-4-4)$$

از ساده نمودن معادله‌ی (۲۶-۴-۴) داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ F_{2y}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P + \frac{wL}{2} \\ PL + \frac{5wL^3}{12} \\ -P - \frac{wL}{2} \\ \frac{wL^3}{12} \end{Bmatrix} \quad (27-4-4)$$

نهایتاً، از تفاضل ماتریس نیروهای گره‌ای معادل [به معادله‌ی ۴-۲۷(b)] از ماتریس نیروهای معادل، رابطه‌ی (۴-۲۷-۴)، نیروهای گره‌ای صحیح برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P + \frac{wL}{2} \\ PL + \frac{5wL^2}{12} \\ -P - \frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{wL}{2} \\ -\frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P + \frac{wL}{2} \\ PL + \frac{wL^2}{2} \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-28)$$

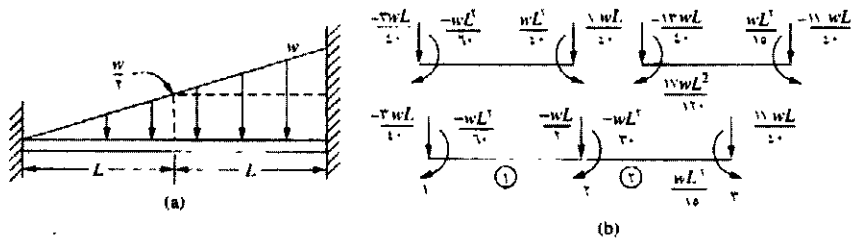
از معادله‌ی (۴-۲۸-۴) ملاحظه می‌شود که F_{1y} معادل نیروی عکس العمل عمودی، M_1 گشتاور عکس العمل در گره ۱، و F_{2y} برابر با نیروی اعمال شده‌ی P در گره ۲ به سمت پایین است. [به خاطر داشته باشید که فقط ماتریس نیروی گره‌ای معادل کسر شده است نه ماتریس بارگذاری متمرکز اولیه. این امر بر اساس فرمول بندی کلی، معادله‌ی (۴-۸-۴)، صورت گرفته است.] ■

به منظور عمومیت بخشی روش کار معادل، همان‌طور که در مثال ۴-۹ آورده شده، آن را به تیرآهنی با بیش از یک المان اعمال می‌کنیم.

مثال ۴-۹

در تیرآهن دو سرگیرداری که تحت تأثیر بار متغیری از نوع گسترده در امتداد طول، مطابق شکل ۴-۲۹(a) قرار گرفته تغییر مکان و دوران را در وسط تیر و نیز عکس‌العمل‌ها را بیابید.

در این حالت تیرآهن را با استفاده از دو المان و گره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، و جای‌گزینی بار گسترده با حالات بارگذاری ۴ و ۵ در پیوست D، مطابق شکل ۴-۲۹ (b)، مدل سازی می‌کنیم. باید توجه داشت که در المان یک، فقط از حالت ۵ استفاده شده چرا که بار گسترده بر این المان به صورت خطی عوض شده و حداکثر مقدار آن در انتها، همان‌طور که در شکل ۴-۲۹ (a) نشان داده شده است، برابر $w/2$ می‌باشد.



شکل ۴-۲۹ (a) تیرآهن دو سر گیرداری که تحت تأثیر بار متغیر خطی قرار گرفته و (b) سیستم بار معادل گره‌ای جای‌گزین شده

با استفاده از معادله (۴-۱-۱۴)، ماتریس سختی هر المان برابر است با:

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \underline{k}^{(2)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{a28-4-4})$$

شرایط مرزی به صورت $d_{1y} = 0$ ، $\phi_1 = 0$ ، $d_{2y} = 0$ و $\phi_2 = 0$ می‌باشند. پس از اعمال از روش مستقیم سختی به معادلات (۴-۲۸-۴) به منظور تشکیل ماتریس سختی اصلی، ضمن اعمال شرایط مرزی، داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{wL}{3} \\ \frac{wL^2}{6} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{2y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{29-4-4})$$

از حل معادله‌ی (۲۹-۴-۴) برای تغییر مکان و شیب، می‌توان نوشت:

$$d_{1y} = \frac{-wL^4}{48EI} \quad \phi_1 = \frac{-wL^3}{24 \cdot EI} \quad (30-4-4)$$

حال، با استفاده از معادله‌ی $F^{(e)} = \underline{K}d$ ، نیروی مؤثر گره‌ای را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{Bmatrix} F_{1y}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ F_{2y}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \\ F_{3y}^{(e)} \\ M_3^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{EL}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L+6L & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-wL^4}{48EI} \\ \frac{-wL^3}{24 \cdot EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31-4-4)$$

پس از محاسبه‌ی نیروهای مؤثر از معادله‌ی (۳۱-۴-۴)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} F_{1y}^{(e)} &= \frac{9wL}{40} & M_1^{(e)} &= \frac{7wL^2}{60} \\ F_{2y}^{(e)} &= \frac{-wL}{2} & M_2^{(e)} &= \frac{-wL^2}{30} \\ F_{3y}^{(e)} &= \frac{11wL}{40} & M_3^{(e)} &= \frac{-2wL^2}{60} \end{aligned} \quad (32-4-4)$$

نهایتاً، با استفاده از معادله‌ی (۸-۴-۴)، ماتریس نیروی معادلی را که بر اساس جای‌گزینی بار معادل مندرج در شکل ۴-۲۹ (b) حاصل شد، از ماتریس نیروی مؤثری که در نتایج مندرج در معادله‌ی (۳۲-۴-۴) ذکر شد کسر نموده تا نیروها و گشتاورهای صحیح در گره‌ها به شرحی که آورده شده حاصل شوند.

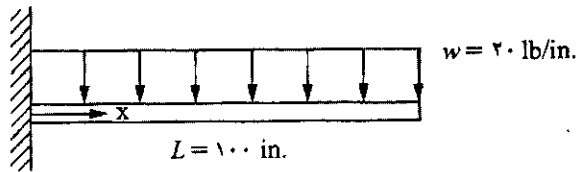
$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{9wL}{40} \\ \frac{7wL^2}{60} \\ -wL \\ 2 \\ -wL^2 \\ 30 \\ \frac{11wL}{40} \\ \frac{40}{15} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{3wL}{40} \\ -wL^2 \\ \frac{70}{60} \\ -wL \\ 2 \\ -wL^2 \\ 30 \\ -\frac{17wL}{40} \\ \frac{40}{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{12wL}{40} \\ \frac{8wL^2}{60} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{28wL}{40} \\ \frac{40}{15} \\ -\frac{3wL^2}{15} \end{Bmatrix} \quad (4-4-33)$$

در این مسأله از نماد L به منظور معرفی طول نیمی از تیر آهن استفاده شده است. اگر L را با طول واقعی $l = 2L$ جای‌گزین کنیم، می‌توان عکس‌العمل‌ها را برای حالت ۵ که در پیوست D آورده شده محاسبه نموده و لذا صحت نتایج را به اثبات رساند.

به‌طور خلاصه، در هر سازه‌ای که از بارهای گره‌ای معادل به عنوان جای‌گزین استفاده می‌شود، همان‌طور که در معادله‌ی (۴-۴-۸) ذکر شد، نیروهای گره‌ای واقعی عمل‌کننده بر سازه را ابتدا از محاسبه‌ی نیروهای گره‌ای مؤثر $\underline{F}^{(e)}$ و سپس از تفاضل نیروهای گره‌ای معادل \underline{F}_0 در آن سازه به دست می‌آوریم. متشابهاً، در هر المانی از سازه که در آن از نیروهای گره‌ای معادل به عنوان جای‌گزین استفاده شود، نیروهای گره‌ای عمل‌کننده بر المان، ابتدا از محاسبه‌ی نیروهای محلی در آن المان، $\underline{f}^{(e)}$ ، و سپس همان‌طور که در معادله‌ی (۴-۴-۱۱) نشان داده شد، از کسر نیروهای معادل محلی در گره‌هایی که فقط با آن المان مرتب‌بند، به دست آورد. مثال‌های دیگری از این روش در مبحث قاب‌های صفحه‌ای، مثال‌های ۵-۲، و ۵-۳، آورده خواهد شد.

۴-۵ مقایسه‌ی حل المان محدود با حل واقعی در یک تیر

حال می‌خواهیم حل المان محدود را با حل به دست آمده از روش تئوری کلاسیک تیر آهن‌ها در تیر آهن یک سر گیردار مندرج در شکل ۴-۳۰ که در معرض بار گسترده‌ی یکنواختی قرار دارد مقایسه کنیم. حل اجزای محدود یک و دو المانی تیر یاد شده را با حل واقعی که از روش انتگرال‌گیری مستقیم دوگانه حاصل می‌شود مقایسه خواهیم نمود. فرض کنید $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $I = 100 \text{ in}^4$ ، $L = 100 \text{ in}$ و بار یکنواخت $w = 20 \text{ lb/in}$ است.

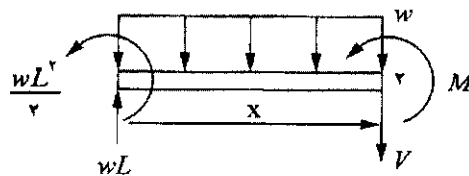


شکل ۴-۳۰ تیر آهن یک سر گیردار تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواخت

به منظور دستیابی به حل از روش تئوری کلاسیک تیرها، از روش انتگرال‌گیری دوگانه [۱] استفاده می‌کنیم. لذا، از عبارت گشتاور-انحنای شروع می‌کنیم.

$$y'''' = \frac{M(x)}{EI} \quad (1-5-4)$$

در جایی که بالانویس پریم دوگانه، معرف مشتق نسبت به x بوده و همان‌طور که نشان داده شده، با توجه به برشی از تیر، M به صورت تابعی از x بیان می‌شود.



$$\Sigma F_y = 0: V(x) = wL - wx$$

$$\Sigma M_x = 0: M(x) = \frac{-wLx^2}{2} + wLx - (wx)\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2-5-4)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۲-۵-۴) در رابطه‌ی (۱-۵-۴) داریم:

$$y'' = \frac{1}{EI} \left(\frac{-wLx^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2} \right) \quad (3-5-4)$$

پس از انتگرال‌گیری معادله‌ی (۳-۵-۴) نسبت به x معادله‌ی ای برای شیب در تیر آهن به شرح زیر به دست می‌آید.

$$y' = \frac{1}{EI} \left(\frac{-wLx^3}{6} + \frac{wLx^2}{2} - \frac{wx^3}{6} \right) + C_1 \quad (4-5-4)$$

از انتگرال‌گیری معادله‌ی (۴-۵-۴) نسبت به x عبارت خیز در تیر به شرح زیر به دست می‌آید.

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{-wLx^4}{24} + \frac{wLx^3}{6} - \frac{wx^4}{24} \right) + C_1x + C_2 \quad (5-5-4)$$

با اعمال شرایط مرزی $y = 0$ و $y' = 0$ در $x = 0$ داریم:

$$y'(0) = 0 = C_1 \quad y(0) = 0 = C_2 \quad (6-5-4)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۶-۵-۴) در روابط (۴-۵-۴) و (۵-۵-۴)، عبارت نهایی برای y و y' در تیر بر اساس فرضیه‌ی تیر آهن‌ها برابر است با:

$$y' = \frac{1}{EI} \left(\frac{-wx^3}{6} + \frac{wLx^2}{2} - \frac{wLx^3}{2} \right) \quad (7-5-4)$$

و

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{-wx^4}{24} + \frac{wLx^3}{6} - \frac{wLx^4}{4} \right) \quad (8-5-4)$$

حل اجزای محدود شیب و جابه‌جایی بر اساس یک المان، بر حسب متغیرها در معادلات (۴-۵-۱۴) داده شده است. با جای‌گزینی مقادیر عددی این مسأله در معادلات (۴-۵-۱۴)، مقادیر شیب و جابه‌جایی در انتهای آزاد (گره ۲) برابرند با:

$$\hat{\phi}_r = \frac{-wL^3}{6EI} = \frac{-(20 \text{ lb/in.})(100 \text{ in.})^3}{6(30 \times 10^6 \text{ psi})(100 \text{ in.}^4)} = -0.00111 \text{ rad} \quad (9-5-4)$$

$$\hat{d}_{vy} = \frac{-wL^4}{8EI} = \frac{-(20 \text{ lb/in.})(100 \text{ in.})^4}{8(30 \times 10^6 \text{ psi})(100 \text{ in.}^4)} = -0.0833 \text{ in.}$$

شیب و جابه‌جایی به دست آمده در معادله‌ی (۹-۵-۴)، دقیقاً با مقادیر مشابهی که بر اساس فرضیه‌ی تیرآهن‌ها حاصل می‌شود برابر است، چرا که ارزیابی روابط (۴-۷) و (۴-۸) در $x = L$ ، همان نتایجی را حاصل می‌نماید که از روش اجزای محدود بر اساس معادله‌ی (۴-۴-۱۴) بر حسب متغیرها حاصل شد. دلیل صحت مقادیر مربوطه در گره‌ها از روش المان محدود آن است که نیروهای گره‌ای المان‌ها بر اساس کار یا انرژی معادل با بار گسترده و بر اساس میدان درجه‌ی سوم از جابه‌جایی درون المان محاسبه شده‌اند.

در حل اجزای محدود، مقادیر جابه‌جایی و شیب در امتداد تیر را می‌توان با استفاده از معادله‌ی جابه‌جایی درجه سه [معادله‌ی (۴-۱-۴)] به شرح زیر به دست آورد.

$$\hat{v}(x) = \frac{1}{L^3}(-2x^3 + 3x^2L)\hat{d}_{vy} + \frac{1}{L^3}(x^3L - x^2L^2)\hat{\phi}_r \quad (10-5-4)$$

در جایی که از شرایط مرزی $\hat{d}_{vy} = \hat{\phi}_r = 0$ در رابطه‌ی (۱۰-۵-۴) استفاده شده است. با جای‌گزینی مقادیر عددی در رابطه‌ی (۱۰-۵-۴)، خیز در وسط تیرآهن برابر است با:

$$\begin{aligned} \hat{v}(x = 50 \text{ in.}) &= \frac{1}{(100 \text{ in.})^3}[-2(50 \text{ in.})^3 + 3(50 \text{ in.})^2(100 \text{ in.})](-0.0833 \text{ in.}) \\ &+ \frac{1}{(100 \text{ in.})^3}[(50 \text{ in.})^3(100 \text{ in.}) - (50 \text{ in.})^2(100 \text{ in.})^2] \\ &\times (-0.00111 \text{ rad}) = -0.0278 \text{ in.} \end{aligned} \quad (11-5-4)$$

با استفاده از فرضیه‌ی تیرآهن‌ها [معادله‌ی (۴-۸-۸)]، خیز برابر است با:

$$y(x = 50 \text{ in.}) = \frac{20 \text{ lb/in.}}{30 \times 10^6 \text{ psi}(100 \text{ in.}^4)} \times \left[\frac{-(50 \text{ in.})^4}{24} + \frac{(100 \text{ in.})(50 \text{ in.})^3}{6} - \frac{(100 \text{ in.})^2(50 \text{ in.})^2}{4} \right]$$

$$= -0.0295 \text{ in.} \quad (12-5-4)$$

بنابراین نتیجه می‌شود که جابه‌جایی وسط تیر آهن بر اساس فرضیه‌ی تیرها، $y = -0.0295 \text{ in.}$ بیش از جواب به دست آمده برای جابه‌جایی بر اساس حل اجزای محدود آن است. $\hat{v} = -0.0278 \text{ in.}$ به‌طور کلی، بجز مقادیر به دست آمده در گره‌ها، جابه‌جایی‌های محاسبه شده با استفاده از تابع درجه سه برای \hat{v} ، از روش المان محدود، کوچک‌تر از مقادیر به دست آمده از فرضیه‌ی تیرها است. این مطلب پیوسته در مورد تیر آهن‌هایی که تحت تأثیر نوعی بار گسترده قرار داشته و با استفاده از تابع درجه سه مدل‌سازی شده‌اند صحت دارد. استثنا در این مورد در گره‌ها رخ می‌دهد، در جایی که نتایج حاصل از روش اجزای محدود و فرضیه‌ی تیر آهن‌ها، به دلیل استفاده از اصل کار معادل در جای‌گزینی بار گسترده با بارهای متمرکز مجزا در گره‌ها، یکسان است.

بر اساس فرضیه‌ی تیرها، تیر آهنی که تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواختی قرار دارد عبارت از y به صورت یک چند جمله‌ای درجه چهار [معادله‌ی (۴-۵-۵)] تشریح می‌شود، در حالی که در روش اجزای محدود، $\hat{v}(x)$ در هر المان، تحت کلیه‌ی شرایط بارگذاری بر حسب تابع درجه سوم بیان می‌شود. لذا در حل اجزای محدود، سازه در مقایسه با حالت واقعی خود رفتار سر سخت‌تری نشان می‌دهد. این رفتار دور از انتظار نیست؛ چرا که در مدل اجزای محدود، عبارت y به اجبار به صورت مُدهای خاصی بیان شده که در نتیجه مدل حاصل رفتاری سخت‌تر از حالت واقعی خود نشان می‌دهد. به هر حال، با افزایش تعداد المان‌ها در مدل، جواب‌های به دست آمده از روش اجزای محدود به سمت جواب‌های منتج از فرضیه‌ی تیرها همگرا می‌شوند.

در حالت خاصی که در آن تیر فقط تحت تأثیر بارهای گره‌ای متمرکزی قرار دارد، از آن‌جا که عبارت گشتاور خمشی به صورت خطی عوض می‌شود، لذا پس از دو بار انتگرال‌گیری تابع درجه سوم حاصل می‌شود که بر اساس آن، فرضیه‌ی تیرها، رفتار درجه سوم را برای جابه‌جایی پیش‌بینی می‌کند. روش ساده‌تری که توسط آن درجه سه بودن تابع جابه‌جایی تأیید می‌شود آن است که عبارت خمیز در تیرآهن یک سر‌گیری که تحت تأثیر بار متمرکزی در انتها قرار گرفته محاسبه شود. در چنین حالتی، جواب‌های حاصل از روش اجزای محدود با جواب‌های به دست آمده از فرضیه‌ی تیرآهن‌ها در کلیه‌ی نقاط، در امتداد تیر یکسان است؛ چرا که هر دو تابع $v(x)$ و $\hat{v}(x)$ درجه سه می‌باشند.

همگرایی یکنواخت جواب‌های مسأله‌ای خاص در مرجع [۳] مورد بحث قرار گرفته، و اثبات این که توابع جابه‌جایی هم‌سازگار و کامل، (همان‌طور که در بخش ۲-۳ تشریح شد)، که در فرمول بندی جابه‌جایی در روش اجزای محدود به کار گرفته شده و منجر به ایجاد حد بالاتر سختی واقعی، و در نتیجه حد پایین‌تر جابه‌جایی در مسأله می‌شوند، در مرجع [۳] مورد بحث قرار گرفته است.

تحت بارگذاری گسترده‌ی یکنواخت، حل به دست آمده از فرضیه‌ی تیرها، گشتاور خمشی را به صورت درجه دو، و نیروی برشی را به صورت درجه یک در تیرآهن پیش‌بینی می‌کند. به هر حال، حل به دست آمده از روش اجزای محدود بر اساس تابع درجه سوم برای جابه‌جایی، گشتاور خمشی را به صورت خطی و نیروی برشی را به صورت ثابت در هر یک از المان‌های مدل پیش‌بینی می‌کند.

حال در این مسأله گشتاور خمشی و نیروی برشی را بر اساس روش اجزای محدود تعیین می‌کنیم. گشتاور خمشی از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$M = EIv'' = EI \frac{d^3(Nd)}{dx^3} = EI \frac{(d^3 N)}{dx^3} d \quad (13-5-4)$$

در جایی که d تابعی از x نیست. بر حسب ماتریس گرادینان B خواهیم داشت.

$$M = EI \underline{B} d \quad (14-5-4)$$

در جایی که

$$\underline{B} = \frac{d^T N}{dx^T} = \left[\left(-\frac{7}{L} + \frac{12x}{L^2} \right) \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \left(\frac{7}{L} - \frac{12x}{L^2} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \right] \quad (15-5-4)$$

از توابع شکل مندرج در معادله‌ی (۷-۱-۴)، به منظور تعیین معادله‌ی (۱۵-۵-۴) برای ماتریس \underline{B} استفاده می‌شود. در حل یک المانی، گشتاور خمشی، از جای‌گزینی معادله‌ی (۱۴-۵-۴) برای \underline{B} در رابطه‌ی (۱۴-۵-۴)، و حاصل ضرب \underline{B} در d به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$M = EI \left[\left(-\frac{7}{L} + \frac{12x}{L^2} \right) \hat{d}_{1x} + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \hat{\phi}_1 + \left(\frac{7}{L} - \frac{12x}{L^2} \right) \hat{d}_{2x} + \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \hat{\phi}_2 \right] \quad (16-5-4)$$

ضمن ارزیابی گشتاور در تکیه‌گاه (دیوار)، $x=0$ به ازای $\hat{d}_{1x} = \hat{\phi}_1 = 0$ و جای‌گزینی \hat{d}_{2x} و $\hat{\phi}_2$ از رابطه‌ی (۱۴-۴-۴) در معادله‌ی (۱۶-۵-۴)، داریم:

$$M(x=0) = -\frac{107wL^2}{24} = -83333 \text{ lb-in.} \quad (17-5-4)$$

به منظور ارزیابی گشتاور در $x = 50 \text{ in.}$ با استفاده از معادله‌ی (۱۶-۵-۴) می‌توان نوشت:

$$M(x=50 \text{ in.}) = -33333 \text{ lb-in.} \quad (18-5-4)$$

به منظور ارزیابی گشتاور در $x = 100 \text{ in.}$ مجدداً با استفاده از معادله‌ی (۱۶-۵-۴) می‌توان نوشت:

$$M(x=100 \text{ in.}) = -16667 \text{ lb-in.} \quad (19-5-4)$$

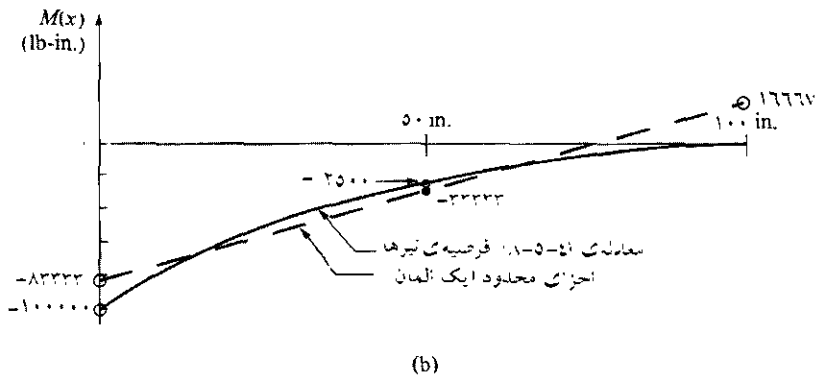
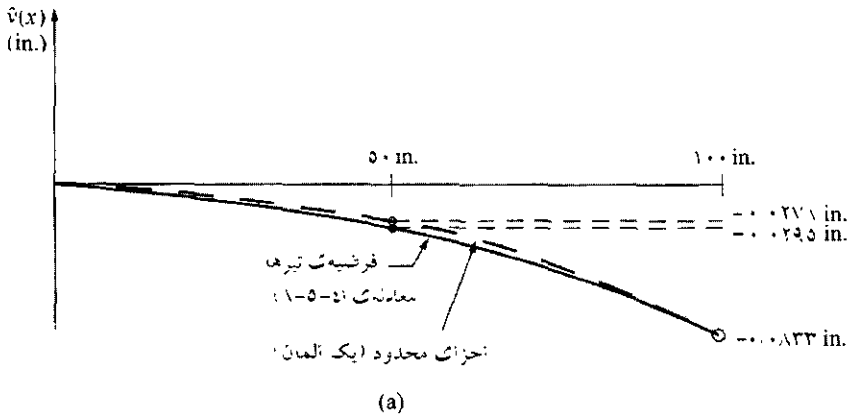
بر اساس فرضیه‌ی تیرآهن‌ها، با توجه به رابطه‌ی (۲-۵-۴)، داریم:

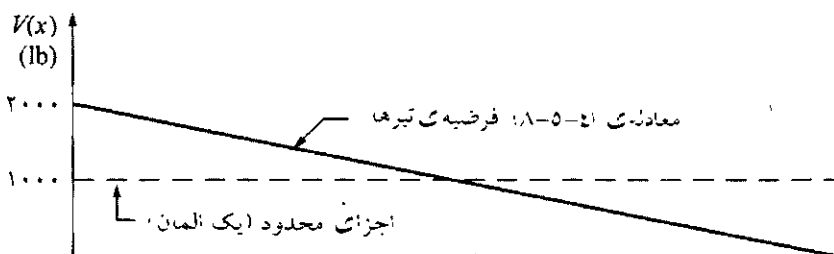
$$M(x=0) = -\frac{wL^2}{2} = -100000 \text{ lb-in.} \quad (20-5-4)$$

$$M(x=50 \text{ in.}) = -25000 \text{ lb-in.}$$

$$M(x=100 \text{ in.}) = 0$$

شکل ۴-۳۱ (a)-(c) معرف نمودار تغییرات جابه‌جایی، گشتاور خمشی و نیروی برشی در امتداد طول تیر بر اساس جواب به دست آمده از فرضیه‌ی تیرآهن‌ها و روش یک المانی اجزای محدود است. مجدداً، مقادیر جابه‌جایی از روش اجزای محدود با مقادیر مشابه از فرضیه‌ی تیرآهن‌ها در گره‌ها یکی بوده است؛ در حالی که در نقاط دیگری در امتداد طول تیر، روش اجزای محدود مقادیر کم‌تری را برای جابه‌جایی پیش‌بینی می‌کند.





(c)

شکل ۴-۳۱ مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش اجزای محدود و فرضیه‌ی تیرها در تیرآهن یک سر گیرداری که تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواختی قرار گرفته است: (a) نمودار تغییرات جابه‌جایی، (b) نمودار تغییرات گشتاور خمشی، و (c) نمودار تغییرات نیروی برشی

گشتاور خمشی از مشتق دوم تابع جابه‌جایی به دست می‌آید. لذا به منظور مدل سازی مشتق دوم تابع جابه‌جایی به المان‌های بیش‌تری نیاز است. بنابراین، روش اجزای محدود به همان خوبی جابه‌جایی، گشتاور خمشی را پیش‌بینی نمی‌کند. در تیرآهنی که تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواختی قرار گرفته، همان‌طور که در شکل ۴-۳۱ (b) نشان داده شده، روش اجزای محدود تغییرات گشتاور خمشی را به صورت خطی پیش‌بینی می‌کند. بهترین تخمین برای گشتاور خمشی در وسط المان رخ می‌دهد.

نیروی برشی از مشتق سوم تابع جابه‌جایی به دست می‌آید. در تیرآهنی که تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواختی قرار گرفته است، نیروی برشی مندرج در شکل ۴-۳۱ (c)، به صورت خطی در امتداد مدل یک المانی تغییر می‌کند. مجدداً، بهترین تخمین برای نیروی برشی در وسط المان رخ می‌دهد.

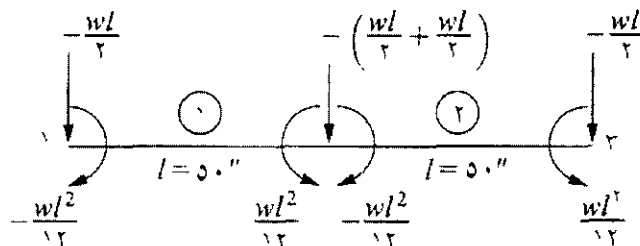
باید توجه داشت که اگر از معادله‌ی (۴-۱۱)، $f = kd - f_0$ ، استفاده شده و ماتریس f_0 از آن کسر شود، نیروها و گشتاورهای گره‌ای در هر المان به دست خواهند آمد. برای مثال، در حل اجزای محدود یک المانی، گشاور خمشی در گره ۱ برابر است با:

$$m_1^{(1)} = \frac{EI}{L^3} \left[-\gamma L \left(\frac{-wL^4}{8EI} \right) + \gamma L^3 \left(\frac{-wL^3}{6EI} \right) \right] - \left(\frac{-wL^3}{12} \right) = \frac{wL^3}{2}$$

$$m_4^{(1)} = 0$$

به منظور بهبود حل به دست آمده از روش اجزای محدود نیاز است تا از المان‌های بیش‌تری در مدل (ریز تر نمودن شبکه بندی) و یا از المان‌های مرتبه‌ی بالاتر، از قبیل تابع تقریبی درجه پنج برای جابه‌جایی، به صورت $\hat{v}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5$ ، با سه گره (با یک گره اضافی در وسط المان) استفاده شود.

حال، حل اجزای محدود دو المانی تیر آهن یک سر گیرداری را که تحت تأثیر بار گسترده‌ی یکنواختی قرار گرفته است ارائه می‌کنیم. شکل ۴-۳۲ نمایانگر تیر تقسیم شده به دو المان هم طول، همراه با بارهای جای‌گزین کار معادل در هر المان است. با استفاده از ماتریس سختی المان تیر [معادله‌ی (۴-۱۳-۱)]، ماتریس‌های سختی هر المان به شرح زیر حاصل می‌شوند.



شکل ۴-۳۲ تیر آهن تقسیم شده به دو المان همراه با بارهای جای‌گزین شده از بار کار معادل در هر گره

$$\underline{k}^{(1)} = \underline{k}^{(2)} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^3 & -6l & 2l^3 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^3 & -6l & 4l^3 \end{bmatrix} \quad (21-5-4)$$

در جایی که طول هر المان برابر $l = 50 \text{ in.}$ ، و شماره بالای ستون‌ها معرف درجه‌ی آزادی مرتبط با هر المان است.

ضمن اعمال شرایط مرزی $\hat{d}_{1,y} = 0$ و $\hat{\phi}_1 = 0$ ، به منظور کاهش تعداد معادلات در حل دستی مسأله، معادلات اصلی برای حل مسأله به شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 4l^3 & -6l & 2l^3 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^3 & -6l & 4l^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{2,y} \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{d}_{3,y} \\ \hat{\phi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -wL \\ 0 \\ -wL/2 \\ wL^3/12 \end{Bmatrix} \quad (22-5-4)$$

از حل معادله‌ی (۲۲-۵-۴) برای جابه‌جایی‌ها و شیب‌ها خواهیم داشت:

$$\hat{d}_{2,y} = \frac{-17wL^2}{24EI} \quad \hat{d}_{3,y} = \frac{-2wL^2}{EI} \quad \hat{\phi}_2 = \frac{-7wL^3}{6EI} \quad \hat{\phi}_3 = \frac{-4wL^3}{3EI} \quad (23-5-4)$$

از جای‌گزینی مقادیر عددی $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $L = 50 \text{ in.}$ ، $w = 20 \text{ lb/in.}$ و $I = 100 \text{ in}^4$ در معادله‌ی (۲۳-۵-۴) داریم:

$$\hat{d}_{2,y} = -0.02951 \quad \hat{d}_{3,y} = -0.0833 \quad \hat{\phi}_2 = -9.722 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ \hat{\phi}_3 = -11.11 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

حل دو المانی، منجر به مقادیری برای جابه‌جایی در گره‌ها می‌شود که با نتایج حاصل از فرضیه‌ی تیرها کاملاً یکسان است [به معادلات (۹-۵-۴) و (۱۲-۵-۴)] توجه شود. منجنی تغییرات جابه‌جایی در امتداد طول تیر، مبتنی بر معادله‌ی درجه سومی در هر المان است. در المان ۱، نمودار تغییرات جابه‌جایی از صفر در گره ۱

شروع شده و به $0/0295$ در گره ۲ ختم می‌شود. تابعی از نوع درجه سه، این دو مقدار را به هم مرتبط خواهد ساخت. متشابهاً، در المان ۲، منحنی تغییرات جابه‌جایی از عددی برابر $0/0295$ شروع شده و در گره ۲، [به شکل ۴-۳۱(a) توجه شود] به $0/0833$ ختم می‌شود. مجدداً، تابعی از نوع درجه سه این دو مقدار را به هم مرتبط خواهد ساخت.



۴-۶ المان تیر با گره لولایی

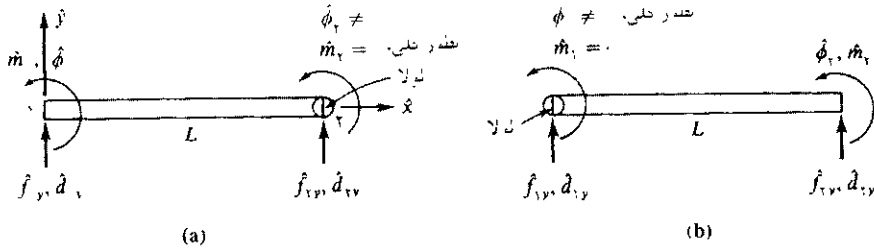


در برخی از تیرها ممکن است لولایی به صورت داخلی وجود داشته باشد. به‌طور کلی، چنین مفصلی باعث ناپیوستگی در منحنی خیز و شیب در محل لولا می‌شود.

همچنین، گشتاور خمشی در لولا صفر است. می‌توان اتصالات دیگری را در نظر گرفت که نتیجه‌ی آن نیروهای عمومی در هر انتها را صفر می‌کند؛ به عبارتی دیگر، اتصالات می‌توانند به قسمی باشند که نیروی برشی یا محوری در محل اتصال برابر صفر باشد. چنین حالات خاصی را می‌توان با شروع از ماتریس سختی خام المان تیر آهن [به معادله‌ی (۴-۱-۱۴) توجه شود]، و حذف نیروها و گشتاورهای صفر، حل نمود. این روش منجر به ماتریس سختی بهبود یافته‌ای با نیروها و گشتاورهای صفر می‌شود که جابه‌جایی یا شیب در آن حذف شده است.

حال، همان‌طور که در شکل ۴-۳۳ نشان داده شده، رایج‌ترین شکل المانی از یک تیر را که در آن مفصلی لولایی در انتهای سمت راست یا چپ وجود دارد در نظر می‌گیریم. در تیر آهنی با یک لولا در سمت راست، گشتاور \hat{m}_r برابر صفر بوده و لذا ماتریس سختی \hat{k} [معادله‌ی (۴-۱-۱۴)] به نحوی تقسیم بندی می‌شود که درجه‌ی آزادی $\hat{\phi}_r$ (که عموماً برابر صفر نیست) که با $\hat{m}_r = 0$ مرتبط است به شرح زیر حذف شود.

$$\hat{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^3 & -6L & 2L^3 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^3 & -6L & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (1-7-4)$$



شکل ۴-۳۳ المان تیر با (a) لولا در انتهای سمت راست و (b) لولا در انتهای سمت چپ

حال درجه آزادی $\hat{\phi}_1$ مرتبط با $\hat{m}_1 = 0$ را حذف می‌کنیم. تقسیم بندی ماتریس فوق این امکان را فراهم می‌کند تا بتوان درجه‌ی آزادی $\hat{\phi}_1$ مرتبط با $\hat{m}_1 = 0$ را حذف نمود. به عبارتی، معادله‌ی (۱-۷-۴) به شرح زیر تقسیم بندی می‌شود.

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (2-7-4)$$

سپس، ماتریس سختی خلاصه شده در رابطه‌ی $\hat{f} = \hat{k}\hat{d}$ به شرح زیر تقسیم بندی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{Bmatrix} \quad (3-7-4)$$

در جایی که

$$\underline{d}_1 = \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1v} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{1r} \end{Bmatrix} \quad \underline{d}_r = \{\hat{\phi}_r\} \quad (4-7-4)$$

معادلات (4-7-4) به صورت بسط یافته برابند با:

$$\underline{f}_1 = \underline{K}_{11} \underline{d}_1 + \underline{K}_{1r} \underline{d}_r \quad (5-7-4)$$

$$\underline{f}_r = \underline{K}_{r1} \underline{d}_1 + \underline{K}_{rr} \underline{d}_r$$

از حل دومین رابطه از معادلات (5-7-4) داریم:

$$\underline{d}_r = \underline{K}_{rr}^{-1} (\underline{f}_r - \underline{K}_{r1} \underline{d}_1) \quad (6-7-4)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (6-7-4) در اولین رابطه از معادلات (5-7-4) داریم:

$$\underline{f}_1 = (\underline{K}_{11} - \underline{K}_{1r} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{r1}) \underline{d}_1 + \underline{K}_{1r} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{f}_r \quad (7-7-4)$$

از ترکیب دومین عبارت در سمت راست معادله‌ی (7-7-4) با \underline{f}_1 خواهیم داشت:

$$\underline{f}_c = \underline{K}_c \underline{d}_1 \quad (8-7-4)$$

در جایی که ماتریس خلاصه شده‌ی سختی برابر است با:

$$\underline{K}_c = \underline{K}_{11} - \underline{K}_{1r} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{K}_{r1} \quad (9-7-4)$$

و ماتریس خلاصه شده‌ی نیرو برابر است با:

$$\underline{f}_c = \underline{f}_1 - \underline{K}_{1r} \underline{K}_{rr}^{-1} \underline{f}_r \quad (10-7-4)$$

از جای‌گزینی قسمت‌های جزء بندی شده‌ی ماتریس \underline{k} از رابطه‌ی (1-7-4)

در معادله‌ی (9-7-4)، ماتریس خلاصه شده‌ی سختی به شرح زیر به دست آمده

است:

$$\begin{aligned} \underline{K}_c &= [K_{11}] - [K_{1r}] [K_{rr}]^{-1} [K_{r1}] \\ &= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 \\ 6L & 4L & -6L \\ -12 & -6L & 12 \end{bmatrix} - \frac{EI}{L} \begin{Bmatrix} 6L \\ 2L \\ -6L \end{Bmatrix} \frac{1}{4L} [6L \quad 2L \quad -6L] \end{aligned}$$

$$= \frac{\nu EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 \\ L & L^2 & -L \\ -1 & -L & 1 \end{bmatrix} \quad (11-6-4)$$

معادلات المان (روابط نیرو / جابه‌جایی) با مفصلی در گره ۲ برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{\nu EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 \\ L & L^2 & -L \\ -1 & -L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2y} \end{Bmatrix} \quad (12-6-4)$$

با استفاده از این روش، چرخش عمومی $\hat{\phi}_1$ از روابط حذف شده و محاسبه نخواهد شد. به هر حال، $\hat{\phi}_1$ در حالت کلی صفر نیست. به منظور احتساب $\hat{\phi}_1$ ، می‌توان ضمن اضافه نمودن مقادیر صفر در ردیف و ستون چهارم ماتریس \hat{k} جهت حفظ $\hat{m}_1 = 0$ ، معادله‌ی (۱۲-۶-۴) را به شرح زیر بسط داد.

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_1 \end{Bmatrix} = \frac{\nu EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_1 \end{Bmatrix} \quad (13-6-4)$$

در المانی از تیر با لولایی در سمت چپ آن، گشتاور \hat{m}_1 برابر صفر بوده و لذا ماتریس \hat{k} [معادله‌ی (۱۴-۶-۴)] را به قسمی تقسیم بندی می‌کنیم تا گشتاور \hat{m}_1 و چرخش $\hat{\phi}_1$ مرتبط با آن، حذف شده و عبارت زیر حاصل شود.

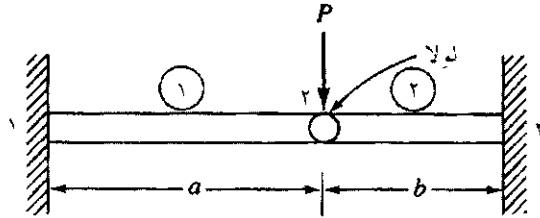
$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_1 \end{Bmatrix} = \frac{\nu EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & L \\ -1 & 1 & -L \\ L & -L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_1 \end{Bmatrix} \quad (14-6-4)$$

حالت بسط یافته‌ی معادله‌ی (۱۴-۶-۴) که شامل $\hat{\phi}_1$ است به شرح زیر است.

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{3EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -L \\ L & 0 & -L & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (15-7-4)$$

مثال ۴-۱۰

در تیر آهن یکنواختی که مطابق شکل ۴-۳۴، مفصلی داخلی در گره ۲ آن قرار دارد میزان جابه‌جایی و چرخش در گره ۲ و نیز نیرو در گره‌های هر المان را بیابید. فرض کنید EI ثابت است.



شکل ۴-۳۴ تیر با مفصلی داخلی

فرض می‌کنیم که لولا جزئی از المان ۱ است؛ بنابراین، با استفاده از معادله‌ی (۴-۶-۱۳)، ماتریس سختی المان ۱ برابر است با:

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{3EI}{a^3} \begin{Bmatrix} d_{1y} & \phi_1 & d_{2y} & \phi_2 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ a & a^2 & -a & 0 \\ -1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (16-7-4)$$

ماتریس سختی المان ۲ از رابطه‌ی (۴-۱-۱۴) به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{2EI}{b^3} \begin{Bmatrix} d_{xy} & \phi_r & d_{xy} & \phi_r \\ 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{Bmatrix} \quad (17-6-4)$$

از انطباق روابط (۱۶-۶-۴) و (۱۷-۶-۴) و اعمال شرایط مرزی،

$$d_{1y} = 0 \quad \phi_1 = 0 \quad d_{2xy} = 0 \quad \phi_2 = 0$$

ماتریس سختی کل و روابط کلی زیر حاصل می‌شوند.

$$EI \begin{bmatrix} \frac{3}{a^3} + \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} \\ \frac{6}{b^2} & \frac{4}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{xy} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18-6-4)$$

از حل معادلات (۱۸-۶-۴)، داریم:

$$d_{xy} = \frac{-a^3 b^3 p}{2(b^3 + a^3)EI} \quad (19-6-4)$$

$$\phi_r = \frac{-a^3 b^2 p}{2(b^3 + a^3)EI}$$

در جایی که $\hat{\phi}_r^{(1)}$ در واقع چرخش مرتبط با المان ۲ است - به عبارتی، در معادله‌ی (۱۹-۶-۴)، $\hat{\phi}_r^{(1)}$ برابر $\hat{\phi}_r^{(2)}$ است. به‌طور کلی، مقدار $\hat{\phi}_r^{(1)}$ در انتهای سمت راست المان ۱ ($\hat{\phi}_r^{(1)}$)، برابر $\hat{\phi}_r^{(2)}$ نیست. اگر فرض کرده بودیم که لولا جزیی از المان ۲ است، در آن صورت باید از معادله‌ی (۱۴-۱-۴) برای ماتریس سختی المان ۱ و رابطه‌ی (۱۵-۶-۴) برای ماتریس سختی المان ۲ استفاده می‌کردیم. بدین وسیله می‌توانستیم اندازه‌ی $\hat{\phi}_r^{(1)}$ را که با $\hat{\phi}_r^{(2)}$ متفاوت است بیابیم.

با استفاده از معادله‌ی (۱۲-۶-۴) برای المان ۱، نیرو در گره‌های هر المان

برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1v} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2v} \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{a^2} \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ a & a^2 & -a \\ -1 & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \frac{-a^2 b^2 p}{2(b^2 + a^2)EI} \end{Bmatrix} \quad (20-6-4)$$

پس از ساده سازی معادله‌ی (۲۰-۶-۴)، نیروها برابرند با:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1v} &= \frac{b^2 p}{b^2 + a^2} \\ \hat{m}_1 &= \frac{ab^2 p}{b^2 + a^2} \\ \hat{f}_{2v} &= \frac{b^2 p}{b^2 + a^2} \end{aligned} \quad (21-6-4)$$

با استفاده از معادله‌ی (۱۷-۶-۴) و نتایج حاصل از معادله‌ی (۱۹-۶-۴)، نیرو در گره‌های المان ۲ برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1v} \\ \hat{m}_2 \\ \hat{f}_{2v} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{b^2} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{a^2 b^2 p}{2(b^2 + a^2)EI} \\ \frac{a^2 b^2 p}{2(b^2 + a^2)EI} \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (22-6-4)$$

پس از ساده سازی معادله‌ی (۲۲-۶-۴)، نیروها برابرند با:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1v} &= \frac{a^2 p}{b^2 + a^2} \\ \hat{m}_2 &= 0 \\ \hat{f}_{2v} &= \frac{a^2 p}{b^2 + a^2} \\ \hat{m}_2 &= -\frac{ba^2 p}{b^2 + a^2} \end{aligned} \quad (23-6-4)$$

باید توجه داشت روش دیگری که بدان وسیله می‌توان مثال ۴-۱۰ را با گره‌ای لولایی حل نمود آن است که مفصلی را در انتهای سمت راست المان یک و مفصل دیگری را در انتهای سمت چپ المان دو منظور نمود؛ بنابراین، می‌توان از سه معادله‌ای که در رابطه‌ی (۴-۶-۱۲) برای ماتریس سختی حاصل شد، برای المان سمت چپ، و از سه معادله‌ای که در رابطه‌ی (۴-۶-۱۴) داده شد، برای ماتریس سختی المان سمت راست استفاده نمود. این عمل سبب می‌شود تا عکس‌العمل لولا از معادلات حذف شود. شما می‌توانید نشان دهید که تغییر مکان‌های به دست آمده دارای همانند مقادیری خواهند بود که در معادله‌ی (۴-۶-۱۹) حاصل شد. به هر حال، بعد از این مرحله، باید به معادله‌ی (۴-۶-۶) بازگشته و از آن به‌طور جداگانه در محاسبه‌ی دوران‌های هر گره، در هر المان، استفاده نمود. اثبات این مطلب به عهده‌ی شما واگذار می‌شود.

۴-۷ کاربرد انرژی پتانسیل در استخراج معادلات تیرآهن

حال با استفاده از روش اصل مینیمم انرژی پتانسیل معادلات تیرآهن‌ها را استخراج می‌کنیم. نحوه‌ی کار به همان صورتی است که در بخش ۳-۱۰ در مورد معادلات المان میله‌ای شکل توضیح داده شد. مجدداً، هدف اصلی از اعمال اصل مینیمم انرژی پتانسیل، بالابردن برداشت شما از این اصل است. از این روش به‌طور معمول در فصل‌های آینده به منظور استخراج معادلات سختی المان استفاده خواهد شد. در این‌جا از همان علامت قراردادی مندرج در بخش ۳-۱۰ استفاده خواهد شد.

انرژی پتانسیل در کل تیر برابر است با:

$$\pi_p = U + \Omega \quad (4-7-1)$$

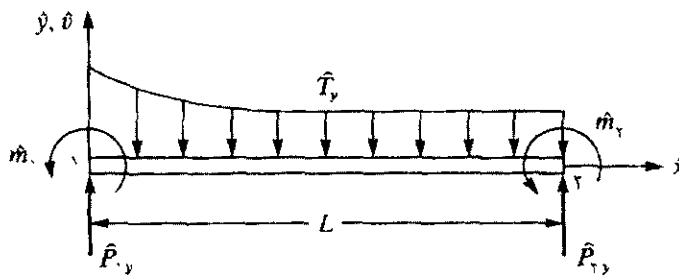
در جایی که حالت عمومی عبارت انرژی کرنشی یک بعدی U در تیر آهن برابر است با:

$$U = \int_V \int_V \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (۲-۷-۴)$$

در تیر آهنی که تحت تأثیر بارهای گسترده و متمرکز گره‌ای قرار دارد انرژی پتانسیل ناشی از نیروها برابر است با:

$$\Omega = - \int_{S_1} \hat{T}_v \hat{v} ds - \sum_{I=1}^r \hat{P}_{Iv} \hat{d}_{Iv} - \sum_{I=1}^r \hat{m}_I \hat{\phi}_I \quad (۳-۷-۴)$$

در جایی که از نیروهای جرمی صرف‌نظر شده است. عبارات مندرج در سمت راست معادله‌ی (۳-۷-۴)، معرف انرژی پتانسیل موارد زیر است (۱) بارهای عرضی سطحی \hat{T}_v (بر حسب نیرو بر واحد سطح، که بر سطح S_1 عمل نموده و به همان میزان جابه‌جا می‌شوند که در خلال آن \hat{T}_v عمل می‌کند)؛ (۲) نیروهای گره‌ای متمرکز \hat{P}_{Iv} که به میزان \hat{d}_{Iv} جابه‌جا می‌شوند؛ و (۳) گشتاورهای \hat{m}_I که به میزان چرخش‌های $\hat{\phi}_I$ جابه‌جا می‌شوند. مجدداً، همان‌طور که در شکل ۳۵-۴ نشان داده شده، \hat{v} تابع جابه‌جایی عرضی در المانی از تیر به طول L می‌باشد.



شکل ۳۵-۴ المانی از تیر تحت تأثیر بارگذاری سطحی و بارهای متمرکز گره‌ای

حال المانی از یک تیر را که دارای سطح مقطع یکنواخت A است در نظر می‌گیریم. المانی حجمی این تیر را می‌توان به صورت زیر تشریح نمود.

$$dV = dA \, d\hat{x} \quad (۴-۷-۴)$$

المان دیفرانسیلی سطحی که نیروی سطحی بر آن عمل می‌کند برابر است با:

$$dS = b \, d\hat{x} \quad (۵-۷-۴)$$

در جایی که b پهنای ثابت است. از جای‌گزینی معادلات (۴-۷-۴) و (۵-۷-۴) در معادلات (۱-۷-۴) - (۳-۷-۴)، انرژی پتانسیل کل برابر است با:

$$\pi_p = \int_{\hat{x}} \int_A \int_V \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \, dA \, d\hat{x} - \int_V b \hat{T}_y \hat{v} \, d\hat{x} - \sum_{i=1}^r (\hat{P}_i \hat{d}_i + \hat{m}_i \hat{\phi}_i) \quad (۶-۷-۴)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۴-۱-۴) برای \hat{v} در رابطه‌ی کرنش / جابه‌جایی معادله‌ی (۴-۱-۱۰)، که برای راحتی به شرح زیر تکرار می‌شود،

$$\varepsilon_x = -\hat{y} \frac{d^2 \hat{v}}{d\hat{x}^2} \quad (۷-۷-۴)$$

کرنش‌ها بر حسب جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها برابرند با:

$$\{\varepsilon_x\} = -\hat{y} \left[\frac{12\hat{x} - 6L}{L^3} \frac{6\hat{x}L - 4L^2}{L^3} - \frac{12\hat{x} + 6L}{L^3} \frac{6\hat{x}L - 2L^2}{L^3} \right] \{\hat{d}\} \quad (۸-۷-۴)$$

یا

$$\{\varepsilon_x\} = -\hat{y} [B] \{\hat{d}\} \quad (۹-۷-۴)$$

در جایی که طبق تعریف،

$$[B] = \left[\frac{12\hat{x} - 6L}{L^3} \frac{6\hat{x}L - 4L^2}{L^3} - \frac{12\hat{x} + 6L}{L^3} \frac{6\hat{x}L - 2L^2}{L^3} \right] \quad (۱۰-۷-۴)$$

رابطه‌ی تنش / کرنش به شرح زیر است.

$$\{\sigma_x\} = [D] \{\varepsilon_x\} \quad (۱۱-۷-۴)$$

در جایی که

$$[D] = [E] \quad (۱۲-۷-۴)$$

و E مدول الاستیسیته است. از جای‌گزینی معادله‌ی (۹-۷-۴) در رابطه‌ی (۷-۴-۷) داریم:

$$\{\sigma_x\} = -\hat{y}[D][B]\{\hat{d}\} \quad (۱۳-۷-۴)$$

سپس، انرژی پتانسیل کل، معادله‌ی (۶-۷-۴)، به صورت ماتریسی به شرح زیر تشریح می‌شود.

$$\pi_p = \int_{\hat{x}} \int_A \int_{\hat{y}} \{\sigma_x\}^T \{\varepsilon_x\} dA d\hat{x} - \int b \hat{T}_y [\hat{v}]^T d\hat{x} - \{\hat{d}\}^T \{\hat{P}\} \quad (۱۴-۷-۴)$$

با استفاده از معادلات (۵-۱-۴)، (۹-۷-۴)، (۱۲-۷-۴)، و (۱۳-۷-۴)، و تعریف $w = b \hat{T}_y$ به عنوان بار خطی (بار بر واحد طول) در جهت \hat{y} ، انرژی پتانسیل کل، معادله‌ی (۱۴-۷-۴)، به صورت ماتریسی زیر تشریح می‌شود.

$$\pi_p = \int_{\hat{x}} \frac{EI}{\hat{y}} \{\hat{d}\}^T \{B\}^T [B] \{\hat{d}\} d\hat{x} - \int w \{\hat{d}\}^T \{N\}^T d\hat{x} - \{\hat{d}\}^T \{\hat{P}\} \quad (۱۵-۷-۴)$$

در جایی که از تعریف ممان اینرسی در قالب

$$I = \int_A y^2 dA \quad (۱۶-۷-۴)$$

برای تعیین اولین عبارت در سمت راست معادله‌ی (۱۵-۷-۴) استفاده شده است. بدین ترتیب، در معادله‌ی (۱۵-۷-۴)، π_p به صورت تابعی از $\{\hat{d}\}$ تشریح شده است.

از مشتق‌گیری π_p در معادله‌ی (۱۵-۷-۴) نسبت به \hat{d}_{11} ، $\hat{\phi}_1$ ، \hat{d}_{2y} ، و $\hat{\phi}_2$ ، و برابر صفر قرار دادن آن‌ها به منظور مینیمم نمودن π_p ، چهار معادله برای المان حاصل می‌شود که در قالب ماتریسی برابری با:

$$EI \int [B]^T [B] d\hat{x} \{\hat{d}\} - \int [N]^T w d\hat{x} - \{\hat{P}\} = 0 \quad (۱۷-۷-۴)$$

نحوه‌ی استخراج چهار معادله‌ی یاد شده به عنوان تمرینی به شما واگذار می‌شود (به مسأله‌ی ۴-۴۵ توجه شود). با معرفی ماتریس نیروهای گره‌ای، که از حاصل جمع نیروهای گره‌ای ناشی از بارگذاری گسترده و متمرکز حاصل می‌شود، خواهیم داشت:

$$\{\hat{f}\} = \int^L [N]^T w d\hat{x} + \{\hat{p}\} \quad (18-7-4)$$

با استفاده از معادله‌ی (۴-۷-۱۸)، چهار معادله‌ی المان که صراحتاً از ارزیابی معادلات (۴-۷-۱۷) حاصل می‌شوند، شبیه به معادله‌ی (۴-۱-۱۳) می‌باشند. همچنین، انتگرال سمت راست معادله‌ی (۴-۷-۱۸)، معرف کار معادلی است که جای‌گزین بار گسترده و نیروی گره‌ای متمرکز است. برای مثال، به فرض آن که ثابت) $w(\hat{x}) = -w^*$ باشد، از جای‌گزینی توابع شکل از معادله‌ی (۴-۱-۷) در عبارت انتگرال و سپس انتگرال‌گیری آن، همان نیروهای گره‌ای معادلی حاصل می‌شوند که در روابط (۴-۴-۵) - (۴-۴-۷) داده شده‌اند.

از آنجا که $\{\hat{f}\} = [\hat{k}]\{\hat{d}\}$ ، از معادله‌ی (۴-۷-۱۷) داریم:

$$[\hat{k}] = EI \int^L [B]^T [B] d\hat{x} \quad (19-7-4)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۴-۷-۱۰) در رابطه‌ی (۴-۷-۱۹) و انتگرال‌گیری آن، $[\hat{k}]$ صراحتاً به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$[\hat{k}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (20-7-4)$$

متقارن

معادله‌ی (۴-۷-۲۰) معرف ماتریس سختی محلی المانی از تیر آهن است. همان‌طور که انتظار می‌رود، معادله‌ی (۴-۷-۲۰) مشابه با معادله‌ی (۴-۱-۱۴) است که قبلاً استخراج گردید.



۸-۴ روش گالرکین در استخراج معادلات المان تیر

حال روش گالرکین به منظور فرمول بندی ماتریس سختی تیر تشریح می‌شود. در این جا از رابطه‌ی دیفرانسیلی اولیه‌ی (۱-۴-۱) با احتساب بار عرضی w شروع می‌کنیم؛ به عبارتی،

$$EI \frac{d^4 \hat{v}}{d\hat{x}^4} + w = 0 \quad (1-8-4)$$

در این جا معادله‌ی (۱-۸-۴) به عنوان پسماند R تعریف می‌شود. ضمن اعمال معیار گالرکین [معادله‌ی (۳-۱۲-۳) به معادله‌ی (۱-۸-۴)]، داریم:

$$\int^L \left(EI \frac{d^4 \hat{v}}{d\hat{x}^4} + w \right) N_i d\hat{x} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2-8-4)$$

در جایی که توابع شکل N_i توسط روابط (۷-۱-۴) تشریح شده‌اند.

حال به اولین عبارت از معادله‌ی (۲-۸-۴)، انتگرال گیری جزء به جزء را دو بار اعمال نموده تا رابطه‌ی زیر حاصل شود.

$$\int^L EI (\hat{v}_{,iiii}) N_i d\hat{x} = \int^L EI (\hat{v}_{,iii}) (N_{i,iii}) d\hat{x} + EI [N_i (\hat{v}_{,iii}) - (N_{i,iii}) (\hat{v}_{,iii})]^L \quad (3-8-4)$$

در جایی که علامت کاما که به دنبال آن زیر نویس \hat{x} آمده معرف مشتق آن پارامتر نسبت به \hat{x} است. انتگرال گیری مجدد از روش جزء به جزء، شرایط مرزی را به دنبال دارد.

از آنجا که $\hat{v} = [N] \{\hat{d}\}$ ، همان‌طور که در معادله‌ی (۵-۱-۴) داده شد، داریم:

$$\hat{v}_{,iii} = \left[\frac{12\hat{x} - 6L}{L^3} \frac{6\hat{x}L - 4L^2}{L^3} \frac{-12\hat{x} + 6L}{L^3} \frac{6\hat{x}L - 2L^2}{L^3} \right] \{\hat{d}\} \quad (4-8-4)$$

یا با استفاده از معادله‌ی (۱۰-۷-۴)،

$$\hat{v}_{,iii} = [B] \{\hat{d}\} \quad (5-8-4)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۵-۸-۴) در رابطه‌ی (۳-۸-۴) و پس از آن جای‌گزینی (۴-۸-۳) در رابطه‌ی (۲-۸-۴)، داریم:

$$\int^L (N_{i,xx}) EI [B] d\hat{x} \{ \hat{d} \} + \int^L N_i w d\hat{x} + [N_i \hat{V} - (N_{i,x}) \hat{m}] \Big|_0^L = 0 \quad (i=1,2,3,4) \quad (6-8-4)$$

در جایی که از معادلات (۱۱-۱-۴) در عبارات مرزی استفاده شده است. معادله‌ی (۶-۸-۴) در واقع چهار معادله است (یک معادله به ازای هر یک از عبارات $N_1 = N_1, N_2, N_3$ و N_4). به جای ارزیابی معادله‌ی (۶-۸-۴) برای هر یک از مقادیر N_i مطابق بخش ۳-۱۲، چهار معادله‌ی رابطه‌ی (۶-۸-۴) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت.

$$\int^L [B]^T EI [B] d\hat{x} \{ \hat{d} \} = \int^L [N]^T w d\hat{x} + ([N]^T_{,x} \hat{m} - [N]^T \hat{V}) \Big|_0^L \quad (7-8-4)$$

در جایی که از عبارت $[N]_{,xx} = [B]$ در معادله‌ی (۷-۸-۴) استفاده شده است.

قابل ذکر است که عبارت انتگرال در سمت راست معادله‌ی (۷-۸-۴)، شبیه به ماتریس سختی مندرج در رابطه‌ی (۱۹-۷-۴) بوده و اولین عبارت در سمت راست این معادله معرف نیروهای گره‌ای معادل به ازای بار گسترده است [که در رابطه‌ی (۱۸-۷-۴) نیز داده شده است]. دو عبارت مندرج در پراکنجی که در سمت راست معادله‌ی (۷-۸-۴) قرار دارند شبیه به ماتریس نیروی متمرکز $\{ \hat{P} \}$ در معادله‌ی (۴-۷-۱۸) می‌باشند. این مسأله با ارزیابی $[N]_{,x}$ و $[N]$ در انتهای المان، که در آن $[N]$ توسط رابطه‌ی (۶-۱-۴) تعریف شده است، به شرح زیر قابل تشریح است:

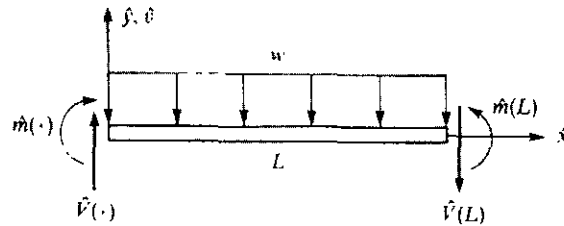
$$\begin{aligned} [N]_{,x}|_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [N]_{,x}|_L &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [N]|_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [N]|_L &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8-8-4)$$

پس از جای‌گزینی روابط (۸-۸-۴) در معادله‌ی (۷-۸-۴)، عبارات زیر حاصل می‌شوند.

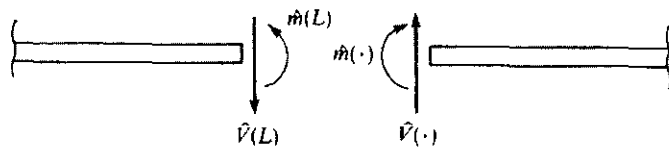
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \hat{m}(L) - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \hat{m}(0) - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \hat{V}(L) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \hat{V}(0) \quad (9-8-4)$$

گشتاورها و نیروهای برشی فوق در شکل ۴-۳۶ نشان داده شده‌اند.

باید توجه داشت که در هنگام تشکیل ماتریس سختی المان‌ها، همان‌طور که در شکل ۴-۳۷ نشان داده شده، دو نیروی برشی و دو گشتاور از المان‌های مجاور، بر نیرو و گشتاور متمرکز در گره مشترک تأثیر گذار می‌باشند. چنین نیروها $\hat{V}(0) - \hat{V}(L)$ و گشتاورهای $\hat{m}(L) - \hat{m}(0)$ متمرکزی، اغلب برابر صفرند؛ به عبارتی، $\hat{m}(L) = \hat{m}(0)$ و $\hat{V}(0) = \hat{V}(L)$ بوده مگر آن که در گره مورد نظر نیرو یا گشتاور گره‌ای متمرکزی وجود داشته باشد در محاسبات واقعی، عباراتی همانند آنچه که در رابطه‌ی (۴-۸-۹) داده شده، به صورت مقادیر گره‌ای متمرکزی که ماتریس $\{P\}$ را تشکیل می‌دهند، به کار گرفته می‌شوند.



شکل ۴-۳۶ المان تیر با نیروهای برشی، گشتاور خمشی، و بار گسترده



شکل ۴-۳۷ نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی عمل کننده بر المان‌های مجاور که در یک گره مشترک می‌باشند



- [1] Gere, J. M., *Mechanics of Materials*, 5th ed., Brooks/Cole Publishers, Pacific Grove, CA, 2001.
- [2] Hsieh, Y. Y., *Elementary Theory of Structures*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [3] Fraeijs de Veubeke, B., "Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis," Matrix Methods of Structural Analysis, AGAR Dograph 72, B. Fraeijs de Veubeke, ed., Macmillan, New York, 1964.
- [4] Juvinall, R. c., and Marshek, K. M., *Fundamentals of Machine Component Design*, 4th. ed., John Wiley & Sons, New York, 2006.
- [5] Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [6] McGuire, W., and Gallagher, R. H., *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [7] Severn, R. T., "Inclusion of Shear Deflection in the Stiffness Matrix for a Beam Element", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 5, No.4, 1970, pp. 239-241.
- [8] Narayanaswami, R., and Adelman, H. M., "Inclusion of Transverse Shear Deformation in Finite Element Displacement Formulations", *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 11, 1974, 1613-1614.
- [9] Timoshenko, S., *Vibration Problems in Engineering*, 3rd. ed., Van Nostrand Reinhold Company, 1955.
- [10] Clark, S. K., *Dynamics of Continous Elements*, Prentice Hall, 1972.
- [11] Algor Interactive Systems, 260 Alpha Dr., Pittsburgh, PA 15238.



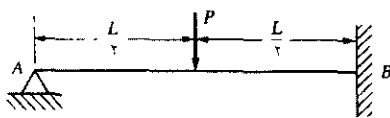
مسائل

۱-۴ با استفاده از معادلات (۷-۱-۴)، توابع N_1 و N_3 ، و مشتقات dN_i/dx و dN_i/dx را که معرف (تغییرات) شکل شیب‌های $\hat{\phi}_1$ و $\hat{\phi}_r$ در امتداد طول المان تیر می‌باشند، رسم کنید.

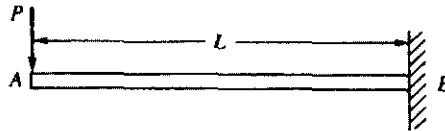
۲-۴ چنانچه درجه‌های آزادی چرخشی در المان تیر آهن مندرج در شکل ۱-۴، به‌جای پاد ساعت گرد به صورت ساعت گرد، مثبت در نظر گرفته شوند، ماتریس سختی را بیابید. هر دو علامت قراردادی را مقایسه و بحث نمایید. ماتریس سختی حاصل را با معادله‌ی (۱۴-۱-۴) مقایسه کنید.

کلیه‌ی مسائل زیر را با بکارگیری روش سختی در المان محدود حل کنید.

۳-۴ در تیر آهنی که در شکل ۳-۴P نشان داده شده، چرخش در تکیه‌گاه لولایی A و میزان چرخش و جابه‌جایی در محل اعمال بار P را بیابید. عکس‌العمل‌ها را نیز تعیین کنید. نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است.



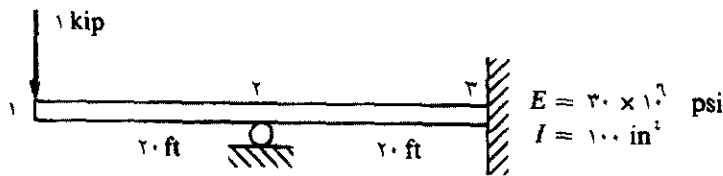
۳-۴P



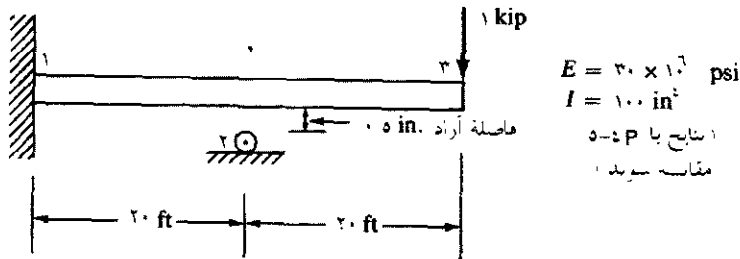
شکل ۴-۴P

۴-۴ در تیر آهن یک سر گیرداری که مطابق شکل ۴-۴P، انتهای آزاد آن تحت بار P قرار گرفته است ماکزیمم خیز و عکس‌العمل‌ها را بیابید. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است.

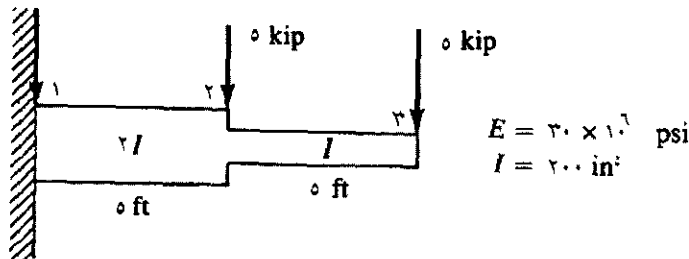
۴-۵ الی ۱۱ در تیر آهن‌های مندرج در شکل ۴-۵P الی ۱۱-۱۱، شیب و جابه‌جایی گره‌ها، و نیروها در هر المان و نیز عکس‌العمل‌ها را بیابید. همچنین، نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید.



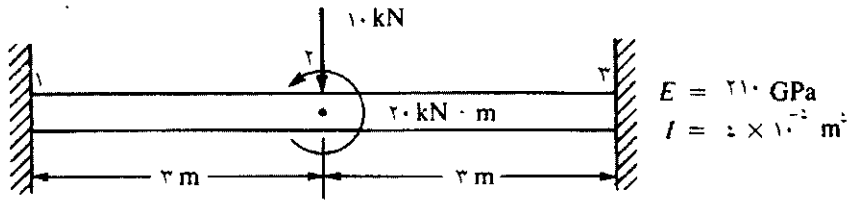
شکل ۴-۵P



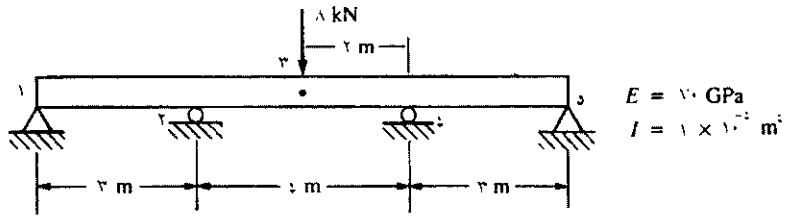
شکل ۴-۶P



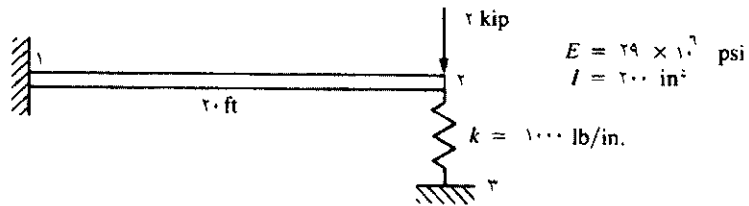
شکل ۴-۷P



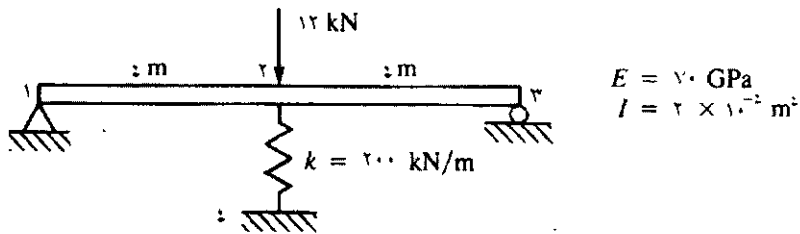
شکل ۸-۴P



شکل ۹-۴P



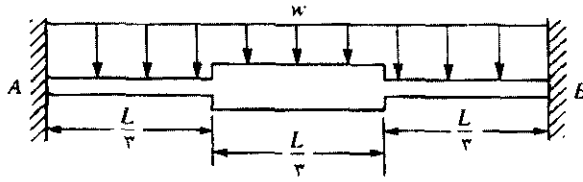
شکل ۱۰-۴P



شکل ۱۱-۴P

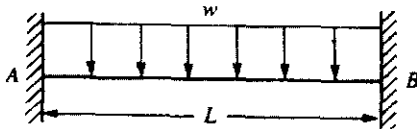
۱۲-۴ در تیر آهن دو سر گیردار مندرج در شکل ۱۲-۴P، که تحت تأثیر بار گسترده‌ی w قرار گرفته است، خیز در وسط تیر و عکس‌العمل‌ها را بیابید.

سختی خمشی قسمت میانی تیر برابر $2EI$ و سختی دیگر قسمت ها برابر EI است.

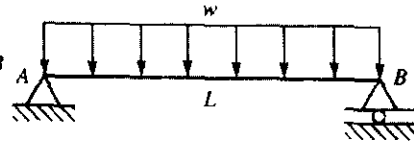


شکل ۴P-۱۲

۴-۱۳ در تیر آهن دو سر گیردار مندرج در شکل ۴P-۱۳ که تحت تأثیر بار گسترده‌ی w قرار گرفته است خیز در وسط تیر و عکس‌العمل‌ها را یافته و نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است. نتایج به دست آمده را با جواب‌های ناشی از حل کلاسیک مقایسه نمایید (به عبارتی، با جواب‌هایی که از نیروهای گره‌ای مناسب معادل در پیوست D حاصل می‌شوند).



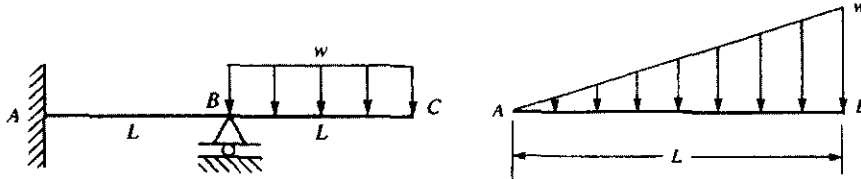
شکل ۴P-۱۳



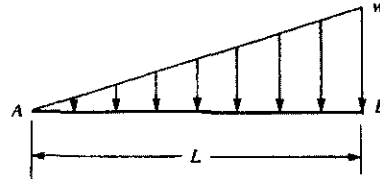
شکل ۴P-۱۴

۴-۱۴ در تیر آهنی که مطابق شکل ۴P-۱۴ بر تکیه‌گاه ساده‌ای قرار داشته و تحت تأثیر بار گسترده‌ی w قرار گرفته است خیز در وسط تیر و عکس‌العمل‌ها را یافته و نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است.

۱۵-۴ در تیرآهنی که مطابق شکل ۱۵-۴P بارگذاری شده است، خیز در انتهای آزاد و عکس‌العمل‌ها را یافته و نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید.



شکل ۱۵-۴P

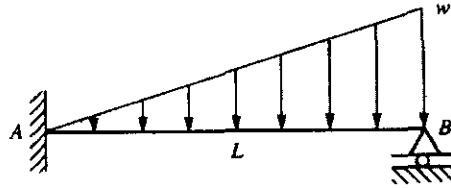


شکل ۱۶-۴P

۱۶-۴ با استفاده از مفهوم کار معادل، نیروها و گشتاورهای گره‌ای (ملقب به نیروهای گره‌ای معادل) را به منظور جای‌گزینی نیروی متغیر خطی که در شکل ۱۶-۴P نشان داده شده بیابید.

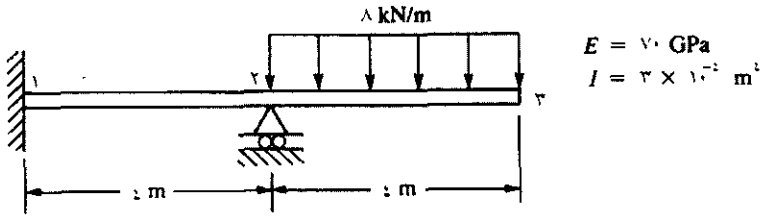
۱۷-۴ فرض کنید تیرآهن مندرج در شکل ۱۶-۴P در دو انتها گیردار باشد. مطلوبست تعیین عکس‌العمل‌ها و رسم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است. به منظور تقسیم بندی تیر از دو المان استفاده کنید. عکس‌العمل‌های به دست آمده را با نیروهای معادل مناسبی که در پیوست D داده شده مقایسه کنید.

۱۸-۴ در تیرآهنی که مطابق شکل ۱۸-۴P تحت تأثیر بار متغیر خطی w قرار گرفته میزان چرخش در انتهای سمت راست و عکس‌العمل‌ها را بیابید. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است.

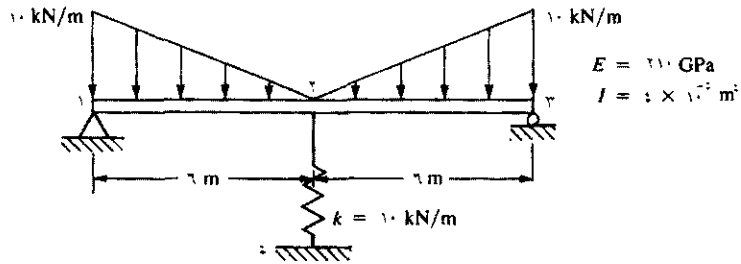


شکل ۱۸-۴P

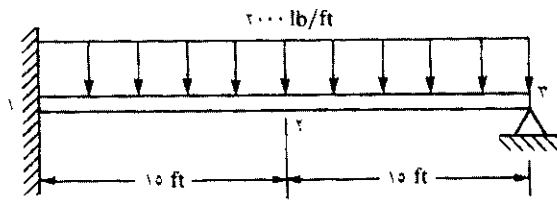
۱۹-۴ الی ۲۴-۴ در تیرآمن‌های مندرج در شکل های ۱۹-۴P الی ۲۴-۴P، شیب و جابه‌جایی در گره‌ها، نیروها در هر المان، و نیز عکس‌العمل‌ها را بیابید.



شکل ۱۹-۴P



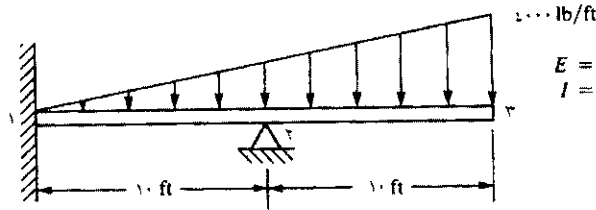
شکل ۲۰-۴P



$$E = 29 \times 10^3 \text{ psi}$$

$$I = 200 \text{ in}^4$$

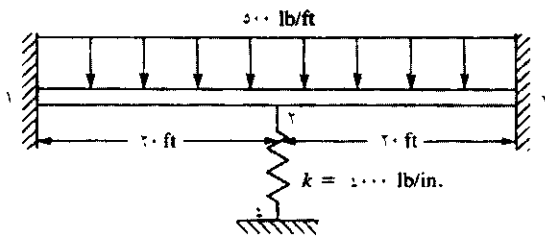
شکل ۲۱-۴P



$$E = 29 \times 10^3 \text{ psi}$$

$$I = 150 \text{ in}^4$$

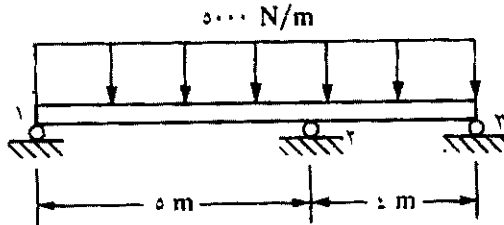
شکل ۲۲-۴P



$$E = 16 \times 10^3 \text{ psi}$$

$$I = 100 \text{ in}^4$$

شکل ۲۳-۴P

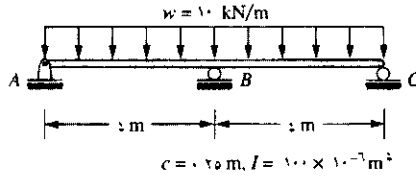


$$E = 110 \text{ GPa}$$

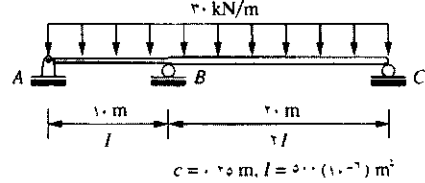
$$I = 2 \times 10^8 \text{ m}^4$$

شکل ۲۴-۴P

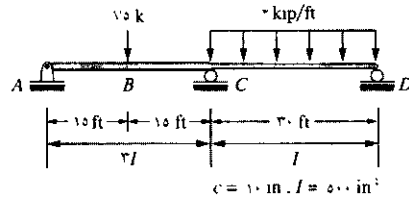
۲۵-۴ الی ۳۰-۴ در تیر آهن‌های مندرج در شکل‌های ۲۵-۴P الی ۳۰-۴P، حداکثر خمیز و ماکزیمم تنش خمشی در تیر را به دست آورید. در کلیه تیرها، با توجه به واحد قید شده در مسأله‌ی مورد نظر، E را برابر 200 GPa یا $30 \times 10^6 \text{ psi}$ فرض نمایید. فرض کنید c برابر با نصف ارتفاع تیر است.



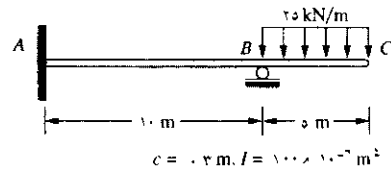
شکل ۲۵-۴P



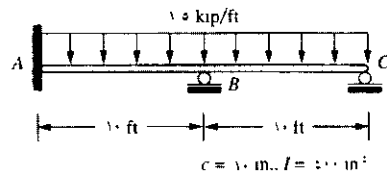
شکل ۲۶-۴P



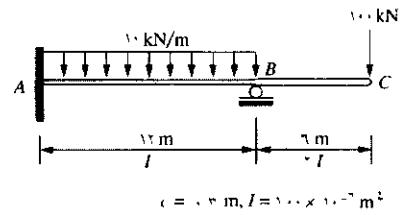
شکل ۲۷-۴P



شکل ۲۸-۴P

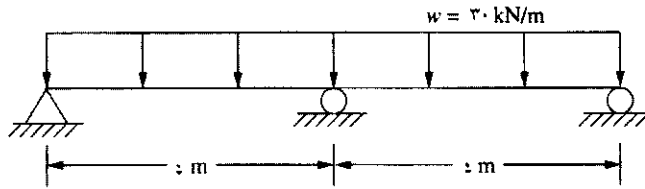


شکل ۲۹-۴P



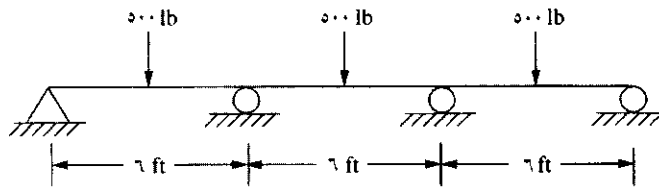
شکل ۳۰-۴P

۳۱-۴ تیری از جنس فولاد ASTM A36 را با تنش مجاز خمشی 160 MPa به قسمی طراحی کنید که بتواند بار مندرج در شکل ۳۱-۴P را تحمل نماید. تیری را از نوع بال-بهن که در بیوست F با هر منبع دیگری موجود است انتخاب کنید.



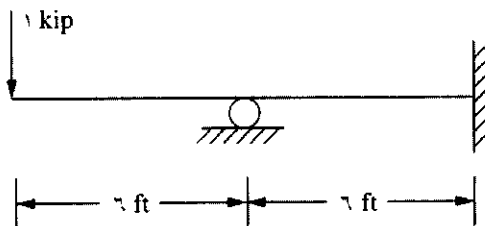
شکل ۳۱-۴P

۳۲-۴ لوله‌ی استاندارد شده‌ای را از جنس فولاد از پیوست F به قسمی انتخاب کنید که بتواند بار نشان داده شده‌ی زیر را تحمل کند. تنش مجاز نباید از ۲۴ ksi تجاوز نموده و حداکثر خیز نباید از $L/360$ فاصله‌ی هر دهانه بیش‌تر شود.



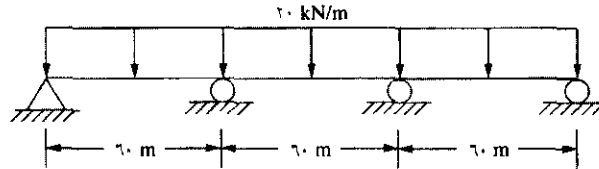
شکل ۳۲-۴P

۳۳-۴ از پیوست F قوطی مستطیل شکلی را از جنس فولاد به قسمی انتخاب کنید که بتواند بار اعمال شده بر نبرآهنی را که در شکل ۳۳-۴P نشان داده شده تحمل کند. حداکثر تنش خمشی مجاز باید از ۲۴ ksi تجاوز نماید.



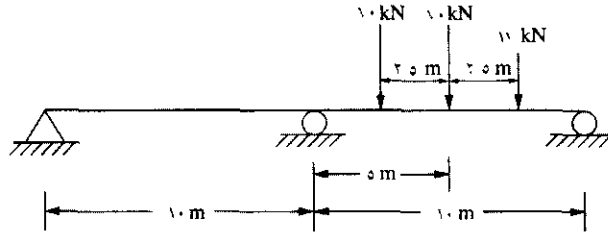
شکل ۳۳-۴P

۳۴-۴ از پیوست F یا هر منبع دیگری، تیرآهنی را از نوع بال-پهن (مقطع W) به قسمی انتخاب کنید که بتواند بار اعمال شده در شکل ۳۴-۴P را تحمل نماید. تنش خمشی نباید از 160 Mpa بیش تر شود.



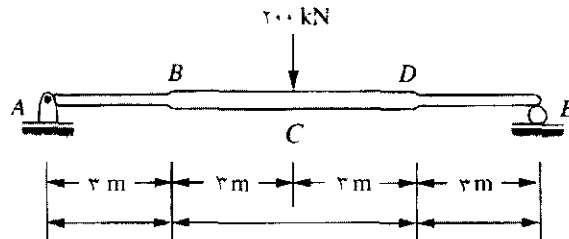
شکل ۳۴-۴P

۳۵-۴ در تیرآهن مندرج در شکل ۳۵-۴P، از پیوست F یا هر منبع مناسب دیگری، سطح مقطع مناسبی را از نوع W به قسمی انتخاب کنید که تنش مجاز در آن از 150 Mpa بیش تر نشده و حداکثر خیز از $L/360$ هر دهانه تجاوز ننماید.



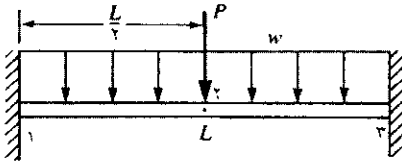
شکل ۳۵-۴P

۳۶-۴ در شافت پله ای مندرج در شکل ۳۶-۴P، سطح مقطع تو پر دایره ای شکلی را به قسمی انتخاب کنید که تنش خمشی مجاز از 160 Mpa بیش تر نشده و حداکثر خیز از $L/360$ فاصله ی دو تکیه گاه تجاوز ننماید.

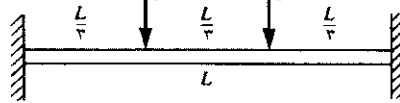


شکل ۳۶-۴P

۳۷-۴ در تیرآهنی که مطابق شکل ۳۷-۴P تحت تأثیر بار متمرکز P و بار گسترده‌ی خطی w قرار گرفته است جابه‌جایی در وسط تیر و عکس‌العمل‌ها را بیابید. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است.



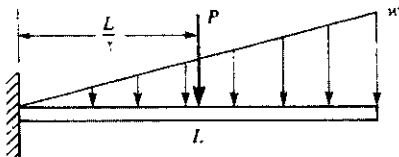
شکل ۳۷-۴P



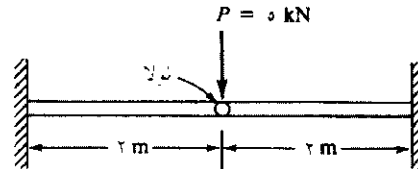
شکل ۳۸-۴P

۳۸-۴ در تیرآهن مندرج در شکل ۳۸-۴P که تحت تأثیر دو بار متمرکز P قرار گرفته است جابه‌جایی در وسط تیر را بیابید. از روش بار جای‌گزین معادل استفاده نمایید. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است.

۳۹-۴ در تیرآهنی که مطابق شکل ۳۹-۴P تحت تأثیر بار متمرکز P و بار گسترده‌ی خطی w قرار گرفته است جابه‌جایی و چرخش در انتهای آزاد و عکس‌العمل‌ها را بیابید. از روش بار جای‌گزین معادل استفاده نمایید. فرض کنید EI در امتداد تیر ثابت است.



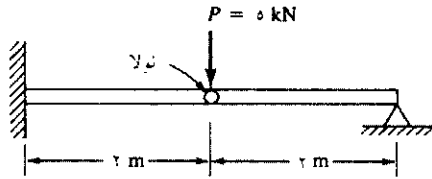
شکل ۳۹-۴P



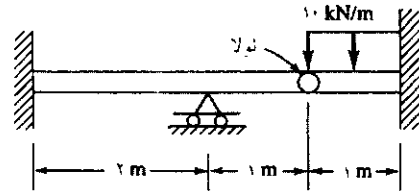
شکل ۴۰-۴P

۴۰-۴۱ الی ۴۲-۴۳ در تیر آهن‌هایی که در شکل‌های ۴۰-۴۱ الی ۴۲-۴۳ با لولایی داخلی نشان داده شده، خیز در محل لولا را بیابید. فرض کنید $E = 210 \text{ Gpa}$

$$I = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \text{ و}$$

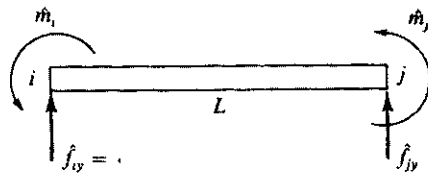


شکل ۴۱-۴۰P



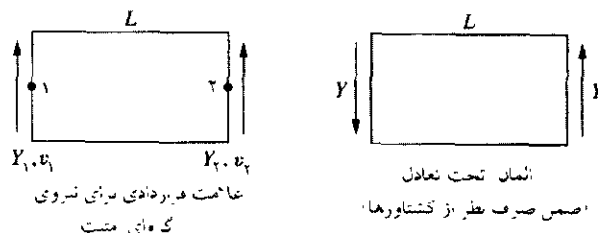
شکل ۴۲-۴۰P

۴۳-۴۴ ماتریس سختی المانی از تیر را با اتصال گره‌ای بیابید - به عبارتی، نیروی برشی در گره i برابر صفر بوده است؛ در حالی که نیروی برشی و گشتاور خمشی معمول در گره j وجود دارد (به شکل ۴۳-۴۰P توجه شود).



شکل ۴۳-۴۰P

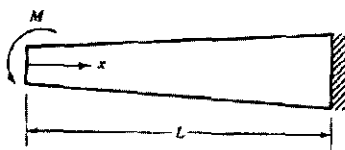
۴۴-۴۴ ماتریس سختی را در المان قابی فرضی [شکل ۴۴-۴۰P] که تحت برش خالص قرار دارد، بر حسب مدول برشی G ، سطح برش A_w و طول L بیابید. توجه داشته باشید که Y و v به ترتیب دلالت بر نیروی برشی و جابه‌جایی عرضی در هر گره می‌نمایند.



شکل ۴۴-۴P

۴۵-۴ عبارت π_p در معادله‌ی (۴-۷-۱۵) را صراحتاً ارزیابی نموده و سپس با مشتق‌گیری نسبت به \hat{d}_{1v} ، $\hat{\phi}$ ، \hat{d}_{2v} و $\hat{\phi}$ و برابر صفر قرار دادن آن‌ها (به عبارتی مینیمم نمودن π_p)، چهار معادله‌ی المان را بیابید. سپس روابط یاد شده را به صورت ماتریسی تشریح نمایید.

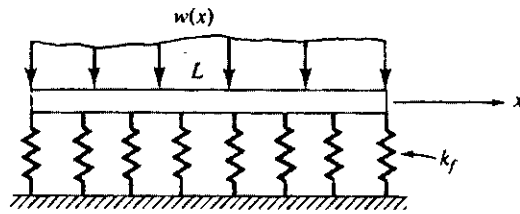
۴۶-۴ خیز در انتهای آزاد تیر آهن مخروطی شکل مندرج در شکل ۴۶-۴P را بیابید. در این جا $I(x) = I_0(1 + nx/L)$ ، در جایی که I_0 ممان اینرسی در $x = 0$ است. جواب به دست آمده از تئوری حقیقی تیر آهن را با جواب دو المانی اجزای محدود، به ازای $n = 2$ مقایسه کنید.



شکل ۴۶-۴P

۴۷-۴ با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل، معادلات المان تیر آهنی را که بر فوندانسیون الاستیکی (شکل ۴۷-۴P) قرار دارد بیابید. در این جا k_f ثابت فنر بر واحد طول است. انرژی پتانسیل تیر آهن برابر است با


$$\pi_p = \int_0^L \frac{1}{2} EI (v'')^2 dx + \int_0^L \frac{k_f v^2}{2} dx - \int_0^L wv dx$$




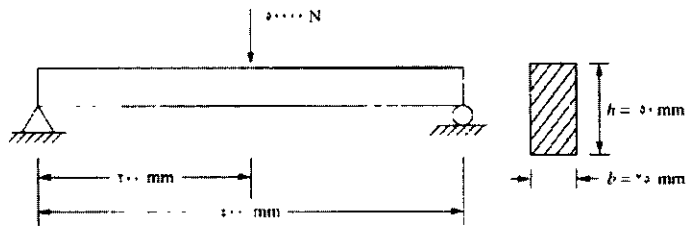
شکل ۴P-۴۷

۴۸-۴ با استفاده از روش گالرکین، معادلات المان تیرآهنی را که بر فوندانسیون الاستیکی (شکل ۴P-۴۸) قرار دارد بیابید. معادله‌ی اولیه‌ی تیری که بر فوندانسیون الاستیکی قرار دارد برابر است با:

$$(EIv''')'' = -w + k_f v$$

۴۹-۴ الی ۷۶ مسائل ۵-۴ الی ۱۱-۴، ۱۹-۴ الی ۳۶-۴، و ۴۰-۴ الی ۴۲-۴، را با استفاده از برنامه‌ی رایانه‌ای مناسب حل نمایید. 

۷۷-۴ در تیرآهنی که در شکل زیر نشان داده شده، به کمک چهار المان و برنامه‌ی رایانه‌ای، با صفر نمودن سطح برش و سپس برابر قرار دادن آن با $\frac{5}{4}$  اندازه‌ی سطح مقطع (b ضربدر h)، خیز در وسط تیر را بیابید. سپس، فاصله‌ی دهانه را به ۲۰۰ mm، ۱۰۰ mm، و ۵۰ mm کاهش داده و در هر حالت سطح برش را برابر صفر و سپس برابر $\frac{5}{4}$ اندازه‌ی سطح مقطع قرار دهید. نتایج به دست آمده را با هم مقایسه کنید. بر اساس نتایجی که از برنامه‌ی خود می‌گیرید، آیا می‌توان نتیجه گرفت که برنامه‌ی مورد نظر اثر تغییر شکل برشی را منظور نموده است یا خیر؟



شکل ۷۷-۴P

۷۸-۴ در تیرآهنی که در شکل ۷۷-۴P نشان داده شده، مسأله را به صورت دستی حل نمایید. نتایج حاصل از کاربرد ماتریس سختی تیر را، معادله‌ی (۴-۱-۱۴)، که در آن اثرات تغییر شکل برش عرضی صرف نظر شده، با نتایج حاصل از معادله‌ی (۴-۱-۱۵)، که در آن اثرات برش عرضی منظور شده‌اند، مقایسه کنید.

فصل ۵

معادلات قاب و شبکه

مقدمه

بسیاری از سازه‌ها، همانند ساختمان‌ها (شکل ۵-۱) و پل‌ها از قاب‌ها و (یا) شبکه‌ها تشکیل شده‌اند. این فصل، معادلات و روش‌هایی را برای حل قاب‌ها، و شبکه‌های صفحه‌ای ارائه می‌کند.

ابتدا ماتریس سختی را برای المانی از تیرآهن که در جهتی دلخواه در یک صفحه قرار دارد به دست می‌آوریم. سپس درجه‌ی آزادی تغییر مکان محوری هر گره را در ماتریس سختی المان، تیرآهن، همراه با مختصات محلی آن لحاظ خواهیم کرد. سپس این نتایج را ترکیب نموده تا ماتریس سختی المانی از تیر را با جهتی دلخواه و احتساب اثرات جابه‌جایی محوری، که تحلیل قاب‌ها را امکان پذیر می‌سازد، به دست آوریم.

مثال‌های خاصی از تحلیل قاب‌های صفحه‌ای در ادامه ارائه خواهند شد. سپس قاب‌ها را با تکیه‌گاه‌های کج یا مایل در نظر خواهیم گرفت.

متعاقب آن، ماتریس سختی المان شبکه را به دست خواهیم آورد. آن‌گاه حل سیستمی از یک شبکه را به منظور تشریح کاربرد معادلات شبکه ارائه خواهیم کرد. سپس ماتریس سختی المانی از تیر را که در جهت دلخواهی در فضا قرار دارد به دست می‌آوریم. همچنین مفهوم بررسی تحلیل زیر سازه‌ها را منظور خواهیم نمود.

۱-۵ المان تیر آهن دو بعدی با جهتی دلخواه

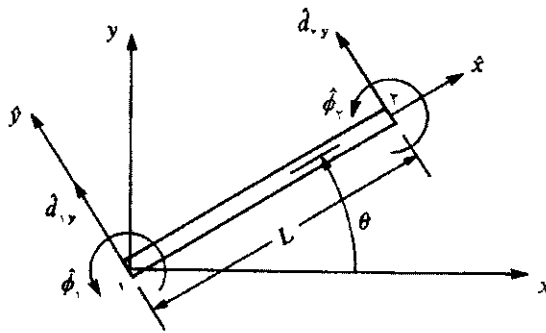
ماتریس سختی المانی از یک تیر را که در شکل ۲-۵ نشان داده شده و دارای جهتی دلخواه است می‌توان به همان صورتی که در فصل ۳ برای المان میله‌ای شکل گفته شد استخراج نمود. محور مختصات محلی \hat{x} و \hat{y} به ترتیب در امتداد المان تیر و عمود بر آن قرار گرفته و محورهای مختصات اصلی x و y مناسب با کل سازه انتخاب شده‌اند.

لازم به یادآوری است که می‌توان با استفاده از معادله‌ی (۳-۳-۱۶)، که برای راحتی مجدداً در این جا تکرار شده، جابه‌جایی‌های محلی را به جابه‌جایی‌های اصلی مرتبط ساخت.

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_x \\ \hat{d}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \quad (1-1-5)$$



شکل ۱-۵ استادیوم اصلی فوتبال (راگی) تحت ساخت آریزونا - قابی ساختمانی از نوع صلب (با تشکر از Ed Yack)



شکل ۲-۵ المان تیر با جهتی دلخواه

با استفاده از دومین رابطه از معادلات (۱-۱-۵) در المان تیر، درجه‌های آزادی محلی گره‌ها را به درجه‌های آزادی اصلی به شرح زیر مرتبط می‌سازیم.

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_{vy} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{ry} \\ \hat{\phi}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -S & C & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & -S & C & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{vx} \\ d_{vy} \\ \phi_1 \\ d_{rx} \\ d_{ry} \\ \phi_r \end{Bmatrix} \quad (2-1-5)$$

در جایی که برای المانی از یک تیر ماتریس انتقال به شرح زیر تعریف می‌شود.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} -S & C & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & -S & C & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (3-1-5)$$

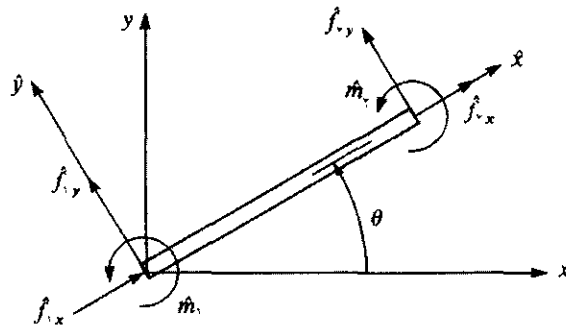
تا به این جا اثرات محوری منظور نشده‌اند. بر اساس رابطه‌ی (۲-۱-۵)، چرخش، مستقل از هر یک از دو محور مختصات است. برای مثال، $\hat{\phi}_1 = \phi_1$ و $\hat{m}_1 = m_1$ را می‌توان برداری در نظر گرفت که بر اساس قانون دست راست بر هر یک از صفحات $\hat{x}-\hat{y}$ یا $x-y$ عمود است. از هر یک از دو دیدگاه، گشتاور در جهت $\hat{z} = z$ است. لذا تغییر جهت المان در صفحه‌ی $x-y$ ، تأثیری بر گشتاور ندارد. از جای‌گزینی معادله‌ی (۵-۳-۱) برای \underline{T} و معادله‌ی (۴-۱-۱۴) برای \underline{k} در رابطه‌ی (۴-۳-۳۲)، $\underline{k} = \underline{T}^T \underline{K} \underline{T}$ ، ماتریس سختی اصلی المان به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & \phi_1 & d_{2x} & d_{2y} & \phi_2 \\ 12S^3 & -12SC & -6LS & -12S^3 & 12SC & -6LS \\ & 12C^3 & 6LC & 12SC & -12C^3 & 6LC \\ & & 4L^3 & 6LS & -6LC & 2L^3 \\ & & & 12S^3 & -12SC & 6LS \\ & & & & 12C^3 & -6LC \\ & & & & & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (5-1-0)$$

که باز هم $C = \cos \theta$ و $S = \sin \theta$ می‌باشد. در اینجا لازم نیست تا به منظور استفاده از معادله‌ی (۴-۴-۲۲)، ماتریس \underline{T} را که در معادله‌ی (۵-۱-۳) داده شده بسط داده و به صورت مربعی درآورد. از آنجا که معادله‌ی (۳-۴-۲۲) یک معادله‌ی کاربردی در حالت کلی است، لذا ماتریس‌های مورد استفاده صرفاً باید از درجه‌ی صحیحی در ضرب ماتریس‌ها برخوردار باشند (برای اطلاع بیشتر از ضرب ماتریس‌ها به پیوست A مراجعه شود). ماتریس سختی معادله‌ی (۴-۱-۵)، ماتریس سختی اصلی المانی از یک تیرآهن است که شامل مقاومت‌های برشی و خمشی است. اثرات محوری محلی تاکنون در نظر گرفته نشده‌اند. عموماً انتقال سختی محلی به سختی اصلی، از حاصل ضرب ماتریس‌ها گرفته شده است. همان‌طور که در معادله‌ی (۴-۱-۵) صورت گرفته است، توسط یک رایانه انجام می‌شود.

حال اثرات محوری را در المان، همان‌طور که در شکل ۵-۳ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. در این حالت المان دارای سه درجه‌ی آزادی $(\hat{d}_{1x}, \hat{d}_{2y}, \hat{\phi}_1)$ در هر گره است. به منظور احتساب اثرات محوری از معادله‌ی (۳-۱-۱۳) داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (5-1-0)$$



شکل ۳-۵ نیروهای محلی عمل کننده بر المان تیرآهن

از ترکیب اثرات محوری معادله‌ی (۵-۱-۵) با اثرات خمشی و برشی معادله‌ی (۴-۱-۱) (۱۳) در مختصات محلی داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdot & \cdot & C_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12C_r & 6C_r L & \cdot & -12C_r & 6C_r L \\ \cdot & 6C_r L & 4C_r L^2 & \cdot & -6C_r L & 2C_r L^2 \\ -C_1 & \cdot & \cdot & C_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -12C_r & -6C_r L & \cdot & 12C_r & -6C_r L \\ \cdot & 6C_r L & 2C_r L^2 & \cdot & -6C_r L & 4C_r L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2x} \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

(۶-۱-۵)

در جایی که

$$C_1 = \frac{EI}{L} \quad \text{و} \quad C_r = \frac{EI}{L^3} \quad (۷-۱-۵)$$

ولذا،

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdot & \cdot & C_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12C_r & 6C_r L & \cdot & -12C_r & 6C_r L \\ \cdot & 6C_r L & 4C_r L^2 & \cdot & -6C_r L & 2C_r L^2 \\ -C_1 & \cdot & \cdot & C_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -12C_r & -6C_r L & \cdot & 12C_r & -6C_r L \\ \cdot & 6C_r L & 2C_r L^2 & \cdot & -6C_r L & 4C_r L^2 \end{bmatrix} \quad (8-1-5)$$

در این جا، ماتریس \hat{k} در معادله‌ی (۸-۱-۵) دارای سه درجه آزادی در هر گره بوده و اثرات محوری (در جهت \hat{x}) و نیز اثرات برشی (در جهت \hat{y}) و اثرات خمشی (حول محور \hat{z}) در آن لحاظ شده‌اند. حال با استفاده از معادلات (۱-۱-۵) و (۲-۱-۵)، جابه‌جایی‌های محلی را به جابه‌جایی‌های اصلی مرتبط می‌سازیم.

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2x} \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -S & C & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C & S & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -S & C & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (9-1-5)$$

در جایی که به منظور احتساب اثرات محوری محلی \underline{T} به شرح زیر بسط داده شده است.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} C & S & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -S & C & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C & S & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -S & C & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-5)$$

ضمن جای‌گزینی \underline{I} از معادله‌ی (۱۰-۱-۵) و \underline{k} از معادله‌ی (۸-۱-۵)، در معادله‌ی (۳-۲۲-۴)، ماتریس سختی انتقال یافته‌ی اصلی را برای المانی از تیرآهن که شامل نیروی محوری، نیروی برشی و اثرات خمشی است به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\underline{K} = \frac{E}{L} \times \begin{bmatrix} AC' + \frac{12I}{L^3} S' & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S & -\left(AC' + \frac{12I}{L^3} S'\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S \\ & AS' + \frac{12I}{L^3} C' & \frac{6I}{L} C & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\left(AS' + \frac{12I}{L^3} C'\right) & \frac{6I}{L} C \\ & & 4I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 4I \\ & & & AC' + \frac{12I}{L^3} S' & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & \frac{6I}{L} S \\ \text{متقارن} & & & & AS' + \frac{12I}{L^3} C' & -\frac{6I}{L} C \\ & & & & & 4I \end{bmatrix} \quad (11-1-5)$$

تحلیل قاب صفحه‌ای صلب را می‌توان با استفاده از ماتریس سختی معادله‌ی (۱۱-۱-۵) به انجام رساند. طبق تعریف، قاب صفحه‌ای صلب مجموعه‌ای از المان‌های تیرآهنی است که به صورت صلب به یک‌دیگر متصل شده‌اند، به عبارتی، زاویه‌ی بین المان‌ها در نقاط اتصال بعد از تغییر شکلی که از بارگذاری یا جابه‌جایی ناشی می‌شود بدون تغییر باقی می‌ماند.

مضافاً، گشتاورها از یک المان به المان دیگر از نقاط اتصال انتقال می‌یابند. لذا پیوستگی در گشتاور در نقاط اتصال صلب وجود دارد. به‌علاوه، مرکز هر المان و نیز بارهای اعمال شده در یک صفحه‌ی مشترک (صفحه‌ی $x-y$) قرار دارند. از معادله‌ی (۵-۱۱-۱) مشاهده می‌شود که سختی المان‌های یک قاب، توابعی از E ، A ، I ، L و زاویه‌ی موقعیت المان، θ ، نسبت به محور مختصات اصلی است. لازم به یادآوری است

که برنامه‌های رایانه‌ای، اغلب المان تیر را به المان قاب ارجاع می‌دهند با علم به این مطلب که در برنامه‌های یاد شده از ماتریس سختی معادله‌ی (۵-۱-۱۱) در تحلیل قاب‌های صفحه‌ای استفاده می‌شود.

۵-۲ مثال‌هایی از قاب صفحه‌ای

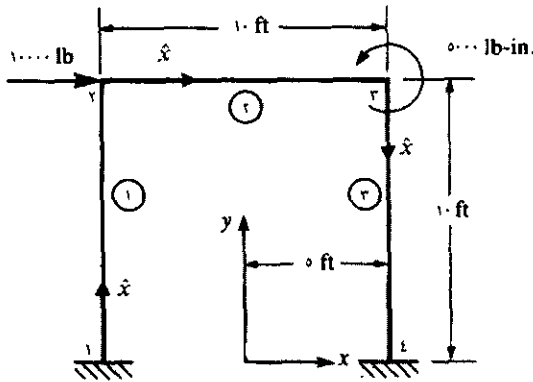
حال به منظور تشریح کاربرد معادلاتی که در بخش ۵-۱ استخراج گردید حل کاملی از قاب‌های صفحه‌ای را که در ادامه آمده است ارائه می‌کنیم.

مثال ۵-۱

به عنوان اولین مثال در تحلیل‌های قاب صفحه‌ای صلب، قاب ساده‌ی خم شده‌ی مندرج در شکل ۵-۴ را حل می‌کنیم.

این قاب در گره‌های ۱ و ۴ ثابت بوده و تحت تأثیر نیروی افقی مثبتی به بزرگی lb در ۱۰۰۰ در گره ۲ و گشتاور مثبتی به اندازه‌ی lb-in در ۵۰۰۰ در گره ۳ قرار گرفته است. محور مختصات اصلی و طول هر المان در شکل ۵-۴ نشان داده شده‌اند. در کلیه‌ی المان‌ها، $E = 30 \times 10^6$ psi و $A = 10$ in² بوده و فرض می‌شود که در المان‌های ۱ و ۳، $I = 200$ in⁴ و در المان ۲، $I = 100$ in⁴ می‌باشد.

با استفاده از معادله‌ی (۵-۱-۱۱) ماتریس‌های سختی اصلی را در هر المان به دست می‌آوریم.



شکل ۴-۵ قاب صفحه‌ای مورد استفاده در تحلیل، با معرفی محور محلی \hat{x} در هر المان

المان ۱

در المان ۱، زاویه‌ی بین محورهای اصلی x و محلی \hat{x} ، 90° است (پادساعتگرد)؛

زیرا فرض می‌شود که جهت \hat{x} از گره ۱ به سمت گره ۲ می‌باشد؛ بنابراین:

$$C = \cos 90^\circ = \frac{x_2 - x_1}{L^{(1)}} = \frac{-60 - (-60)}{120} = 0$$

$$S = \sin 90^\circ = \frac{y_2 - y_1}{L^{(1)}} = \frac{120 - 0}{120} = 1$$

همچنین،

$$\frac{12I}{L^3} = \frac{12(200)}{(10 \times 12)^3} = 0.167 \text{ in}^{-3} \quad (1-2-5)$$

$$\frac{6I}{L^3} = \frac{6(200)}{10 \times 12^3} = 0.10 \text{ in}^{-3}$$

$$\frac{E}{L} = \frac{30 \times 10^7}{10 \times 12} = 250,000 \text{ lb/in}^2$$

سپس، ضمن ارزیابی معادله‌ی (۵-۱-۱۱)، به کمک معادلات (۵-۲-۱)، ماتریس سختی اصلی المان را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\underline{k}^{(1)} = 250000 \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & \phi_1 & d_{2x} & d_{2y} & \phi_2 \\ 0/167 & 0 & -10 & -0/167 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 800 & 10 & 0 & 400 \\ -0/167 & 0 & 10 & 0/167 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 400 & 10 & 0 & 800 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}}$$

(۵-۲-۵)

در جایی که کلیه‌ی مؤلفه‌های قطری مثبت هستند.

المان ۲

در المان ۲، زاویه‌ی بین x و \hat{x} صفر است زیرا جهت \hat{x} از گره ۲ به سمت گره ۳

می‌باشد؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} C &= 1 & S &= 0 \\ \frac{12I}{L} &= \frac{12(200)}{120} = 0/0835 \text{ in}^2 & \text{همچنین} \\ \frac{6I}{L} &= \frac{6(100)}{120} = 0 \text{ in}^2 & (۵-۲-۳) \\ \frac{E}{L} &= 250000 \text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

با استفاده از مقادیر به دست آمده از روابط (۵-۲-۳) در ارزیابی معادله‌ی (۵-۱-۱۱)

برای المان ۲، داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = 250,000 \begin{bmatrix} d_{rx} & d_{ry} & \phi_r & d_{rx} & d_{ry} & \phi_r \\ 10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.835 & 0 & 0 & -0.835 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & -0 & 200 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -0.835 & -0 & 0 & 0.835 & -0 \\ 0 & 0 & 200 & 0 & -0 & 400 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (4-2-0)$$

المان ۳

در المان ۳، زاویه بین x و \hat{x} ، 27° (یا -90°) است زیرا جهت \hat{x} از گره ۳ به سمت گره ۴ است. بنابراین:

$$C = 0 \quad \text{و} \quad S = -1$$

لذا ضمن ارزیابی معادله‌ی (۵-۱-۱۱) برای المان ۳، داریم:

$$\underline{k}^{(3)} = 250,000 \begin{bmatrix} d_{rx} & d_{ry} & \phi_r & d_{ix} & d_{iy} & \phi_i \\ 0.167 & 0 & 10 & -0.167 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 800 & -10 & 0 & 400 \\ -0.167 & 0 & -10 & 0.167 & 0 & -10 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 400 & -10 & 0 & 800 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (5-2-0)$$

از انطباق معادلات (۵-۲-۵)، (۴-۲-۵) و (۵-۲-۵)، و اعمال شرایط مرزی $d_{ix} = d_{iy} = \phi_i = 0$ و $d_{rx} = d_{ry} = \phi_r = 0$ در گره‌های ۱ و ۴، معادلات خلاصه شده برای حل دستی، به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.0000 \end{Bmatrix} = 25.0000 \begin{bmatrix} 0/167 & 0 & 10 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10/0.835 & 0 & 0 & -0/0.835 & 0 \\ 10 & 0 & 1200 & 0 & -0 & 200 \\ -10 & 0 & 0 & 0/167 & 0 & 10 \\ 0 & -0/0.835 & -0 & 0 & 10/0.835 & -0 \\ 0 & 0 & 200 & 10 & -0 & 1200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{ry} \\ \phi_r \\ d_{rx} \\ d_{ry} \\ \phi_r \end{Bmatrix} \quad (6-2-5)$$

از حل معادله‌ی (۶-۲-۵) برای جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها داریم:

$$\begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{ry} \\ \phi_r \\ d_{rx} \\ d_{ry} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0/211 \text{ in.} \\ 0/00148 \text{ in.} \\ -0/00153 \text{ rad} \\ 0/209 \text{ in.} \\ -0/00148 \text{ in.} \\ -0/00149 \text{ rad} \end{Bmatrix} \quad (7-2-5)$$

نتایج نشان می‌دهد که سر قاب در حالیکه اندکی در راستای قائم جابه‌جا شده و المان‌های مرتبط با گره‌های ۲ و ۳ اندکی چرخیده‌اند، جمعاً به سمت راست حرکت می‌نمایند.

حال با استفاده از رابطه‌ی $\underline{\hat{f}} = \underline{T}^T \underline{KT}$ ، به همان طریق که قبلاً در مورد مسائل خریا انجام شد، می‌توان نیرو در هر المان را محاسبه نمود. این روش را فقط از طریق المان ۱ تشریح می‌کنیم. در این المان، با استفاده از معادله‌ی (۱۰-۱-۵) برای \underline{T} و معادله‌ی (۵-۲-۷) برای جابه‌جایی در گره ۲، داریم:

$$\underline{Td} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} d_{1x} = 0 \\ d_{1y} = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ d_{2x} = 0/211 \\ d_{2y} = 0/00148 \\ \phi_2 = -0/00153 \end{array} \right\} \quad (8-2-0)$$

از ضرب ماتریس‌های معادله‌ی (۸-۲-۰) داریم:

$$\underline{Td} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0/00148 \\ -0/211 \\ -0/00153 \end{array} \right\} \quad (9-2-0)$$

لذا، ضمن استفاده از معادله‌ی (۸-۱-۰) برای \hat{k} ، نیروهای محلی در المان ۱ برابرند با:

$$\underline{\hat{f}} = \hat{k} \underline{Td} = 250000 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0/167 & 10 & 0 & -0/167 & 10 \\ 0 & 10 & 800 & 0 & -10 & 400 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -0/167 & -10 & 0 & 0/167 & -10 \\ 0 & 10 & 400 & 0 & -10 & 800 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0/00148 \\ -0/211 \\ -0/00153 \end{array} \right\}$$

(۱۰-۲-۰)

از ساده کردن معادله‌ی (۱۰-۲-۰)، نیروهای محلی که بر المان ۱ اثر می‌کنند به شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -3700 \text{ lb} \\ 4990 \text{ lb} \\ 376000 \text{ lb-in.} \\ 3700 \text{ lb} \\ -4990 \text{ lb} \\ 223000 \text{ lb-in.} \end{array} \right\} \quad (11-2-5)$$

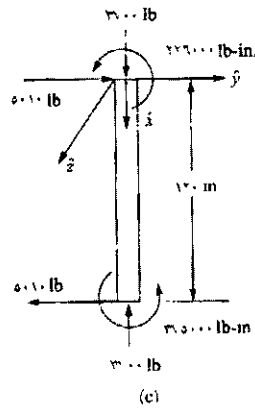
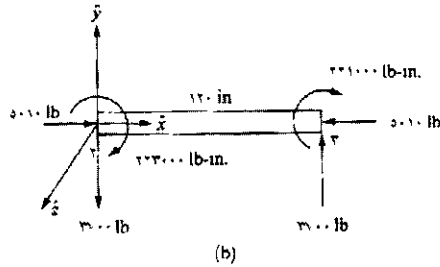
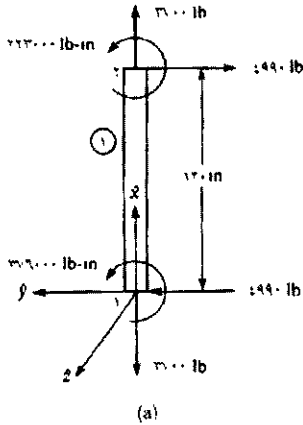
نمودار جسم آزاد هر المان در شکل ۵-۵، همراه با تأیید تعادل مربوطه نشان داده شده است. در این شکل جهت محور \hat{x} از گره ۱ به سمت گره ۲ می‌باشد - همساز با مرتبه‌ی درجه‌های آزادی گره‌ها که در استخراج ماتریس سختی هر المان از آن استفاده شد. از آن‌جا که صفحه‌ی $x-y$ در ابتدا بر اساس شکل ۵-۴ انتخاب شده بود لذا جهت محور z به سمت خارج است - نتیجتاً، محور \hat{z} نیز در همان جهت است (لازم به یادآوری است که $\hat{z} = z$)؛ بنابراین، محور \hat{y} به قسمی انتخاب می‌شود که اگر \hat{x} در \hat{y} ضرب برداری شود جهت \hat{z} حاصل خواهد شد. نیرو در المان‌های ۲ و ۳ را می‌توان به طریقی مشابه با آن چه که در مورد معادله‌ی (۱۱-۲-۵) به منظور استخراج نیروهای گره‌ای المان ۱ گفته شد به دست آورد. در این‌جا تنها فقط مقادیر نهایی نیروها در المان‌های ۲ و ۳ را ارائه نموده و انجام محاسبات جزئی آن را طبق صلاح دید، به عهده خودتان واگذار می‌کنیم. نیروهای هر المان (مندرج در شکل‌های ۵-۵ (b) و (c)) به شرحی که آورده شده می‌باشند:

المان ۲

$$\begin{array}{lll} \hat{f}_{2x} = 5010 \text{ lb} & \hat{f}_{2y} = -3700 \text{ lb} & \hat{m}_2 = -223000 \text{ lb-in.} \\ \hat{f}_{2x} = 5010 \text{ lb} & \hat{f}_{2y} = -3700 \text{ lb} & \hat{m}_2 = -221000 \text{ lb-in.} \end{array} \quad (a12-2-5)$$

المان ۳

$$\begin{aligned} \hat{f}_{rx} &= 3700 \text{ lb} & \hat{f}_{ry} &= 5010 \text{ lb} & \hat{m}_r &= 226000 \text{ lb-in} & (b) \quad (2-5) \\ \hat{f}_{lx} &= -3700 \text{ lb} & \hat{f}_{ly} &= -5010 \text{ lb} & \hat{m}_l &= 375000 \text{ lb-in.} \end{aligned}$$



شکل ۵-۵ نمودارهای جسم آزاد (a) المان ۱، (b) المان ۲، و (c) المان ۳

با در نظر گرفتن نمودار جسم آزاد المان ۱، معادلات تعادل برابرند با:

$$\begin{aligned} \sum F_x &: -4990 + 4990 = 0 \\ \sum F_y &: -3700 + 3700 = 0 \\ \sum M_r &: 376000 + 223000 - 4990 (120 \text{ in.}) \cong 0 \end{aligned}$$

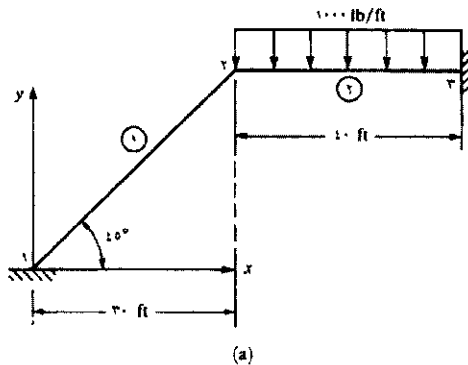
ضمن اعمال تعادل گشتاورها در گره ۲، از معادلات (a۱۲-۲-۵) و (b۱۲-۲-۵) ملاحظه می‌شود که در المان ۱، $\hat{m}_2 = 223000 \text{ lb-in}$ و مقدار عکس آن، 223000 in-lb ، در المان ۲ رخ می‌دهد. متشابهاً، با اضافه کردن \hat{m}_3 از المان‌های ۲ و ۳، به گشتاور اعمال شده‌ی 5000 lb-in در گره ۳، تعادل گشتاورها در این گره ارضا می‌شود. به عبارتی، از معادلات (a۱۲-۲-۵) و (b۱۲-۲-۵)، داریم:

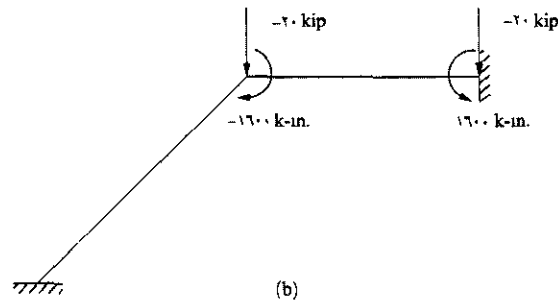
$$-221000 + 226000 = 5000 \text{ lb-in}$$

مثال ۲-۵

به منظور تشریح روشی در حل قاب‌هایی با بار گسترده، قاب صفحه‌ای صلب مندرج در شکل ۶-۵ را حل می‌کنیم. قاب یاد شده در گره‌های ۱ و ۳ ثابت بوده و تحت بار گسترده‌ی یکنواختی به بزرگی 1000 lb/ft ، به سمت پایین، بر المان ۲ قرار گرفته است. محور مختصات اصلی در گره ۱ قرار گرفته است. طول المان‌ها بر روی شکل نشان داده شده‌اند. در هر دو المان قاب فرض کنید، $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$

$$A = 100 \text{ in}^2 \text{ و } J = 1000 \text{ in}^4$$





شکل ۵-۶ (a) قاب مورد استفاده در تحلیل و (b) نیروهای گره‌ای معادل بر قاب ابتدا از جای‌گزینی بار گسترده در المان ۲، با نیروها و گشتاورهای گره‌ای معادل بر گره‌های ۲ و ۳ شروع می‌کنیم. با استفاده از معادلات (۴-۴-۵) الی (۴-۴-۷) (یا پیوست D)، نیروها و گشتاورهای گره‌ای معادل به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$f_{1y} = -\frac{wL}{2} = \frac{(1000)\xi_0}{2} = 20000 \text{ lb} = -20 \text{ kip} \quad (13-2-5)$$

$$m_1 = -\frac{wL^2}{12} = \frac{(1000)\xi_0^2}{12} = -133333 \text{ lb-ft} = -1600 \text{ k-in.}$$

$$f_{2y} = -\frac{wL}{2} = \frac{(1000)\xi_0}{2} = 20000 \text{ lb} = -20 \text{ kip}$$

$$m_2 = -\frac{wL^2}{12} = \frac{(1000)\xi_0^2}{12} = -133333 \text{ lb-ft} = -1600 \text{ k-in.}$$

سپس با استفاده از معادله‌ی (۵-۱-۱۱) ماتریس سختی هر المان به شرح زیر محاسبه می‌شود.

المان ۱

$$\theta^{(1)} = 45^\circ \quad C = 0.707 \quad S = 0.707, \quad L^{(1)} = 42/4 \text{ ft} = 5.9/0 \text{ in.}$$

$$\frac{E}{L} = \frac{30 \times 10^3}{50.9} = 58/93$$

$$\underline{k}^{(1)} = 58/93 \begin{bmatrix} 50/0.2 & 49/98 & 8/33 \\ 49/98 & 50/0.2 & -8/33 \\ 8/33 & -8/33 & 4000 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (14-2-5)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۱۴-۲-۵) داریم:

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} d_{rx} & d_{ry} & \phi_r \\ 2948 & 2945 & -491 \\ 2945 & 2948 & -491 \\ 491 & -491 & 235,700 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (15-2-5)$$

در جایی که تنها بخش‌هایی از ماتریس سختی مرتبط با درجه‌های آزادی در گره ۲ منظور شده‌اند چرا که گره ۱ ثابت است.

المان ۲

$$\theta^{(2)} = 0^\circ \quad C = 1 \quad S = 0 \quad L^{(2)} = 40 \text{ ft} = 480 \text{ in.}$$

$$\frac{E}{L} = \frac{30 \times 10^3}{480} = 62/50$$

$$\underline{k}^{(2)} = 62/50 \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 12/5 \\ 0 & 12/5 & 4000 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (16-2-5)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۱۶-۲-۵) داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{rx} & d_{ry} & \phi_r \\ 6250 & 0 & 0 \\ 0 & 3/25 & 781/25 \\ 0 & 781/25 & 250,000 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (17-2-5)$$

در جایی که مجدداً، تنها بخش‌هایی از ماتریس سختی مرتبط با درجه‌های آزادی در گره ۲ منظور شده‌اند؛ چرا که گره ۳ ثابت است. ضمن انطباق ماتریس سختی المان‌ها، با استفاده از معادلات (۱۵-۲-۵) و (۱۷-۲-۵)، و نیز معادله‌ی (۱۳-۲-۵) برای نیروها و گشتاورهای گره‌ای در گره ۲ (زیرا سازه در گره ۳ ثابت است)، داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{rx} = 0 \\ F_{ry} = -20 \\ M_r = -1600 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 9198 & 2945 & 491 \\ 2945 & 2901 & 290 \\ 491 & 290 & 485700 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{ry} \\ \phi_r \end{Bmatrix} \quad (18-2-5)$$

از حل معادله‌ی (۱۸-۲-۵) برای جابه‌جایی‌ها و چرخش در گره ۲ داریم:

$$\begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{ry} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0033 \text{ in.} \\ -0.0097 \text{ in.} \\ -0.0033 \text{ rad} \end{Bmatrix} \quad (19-2-5)$$

نتایج فوق نشان می‌دهند که گره ۲ به سمت راست ($d_{rx} = 0.0033 \text{ in}$) و پایین ($d_{ry} = -0.0097 \text{ in}$) حرکت نموده و چرخش آن ساعتگرد است ($\phi_r = -0.0033 \text{ rad}$).

حال می‌توان نیروهای محلی در هر المان را محاسبه نمود. بدین منظور باید روشی را که در مورد المان‌هایی با بار گسترده گفته شد، بر المان ۲ اعمال نمود. لازم به یادآوری است که نیروهای محلی از رابطه‌ی $\underline{\hat{f}} = \underline{T}^T \underline{KT}$ حاصل می‌شوند. لذا در المان ۱ داریم:

$$\underline{Td} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0033 \\ -0.0097 \\ -0.0033 \end{Bmatrix} \quad (20-2-5)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۲۰-۲-۵) داریم:

$$\underline{Td} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot / .00452 \\ \cdot / .0092 \\ \cdot / .0033 \end{Bmatrix} \quad (21-2-5)$$

با استفاده از معادله‌ی (۲۱-۲-۵) و (۱-۱-۵) برای \hat{k} داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 5893 & \cdot & \cdot & -5893 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2/730 & 794/8 & \cdot & -2/730 & 794/8 \\ \cdot & \cdot & 117900 & \cdot & -794/8 & 117900 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 5893 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2/730 & -794/8 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 235800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot / .00452 \\ \cdot / .0092 \\ \cdot / .0033 \end{Bmatrix} \quad (22-2-5)$$

مقارن

از ساده کردن معادله‌ی (۲۲-۲-۵)، نیروهای محلی در المان ۱ به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1x} &= 26/64 \text{ kip} & \hat{f}_{1y} &= -2/268 \text{ kip} & \hat{m}_1 &= -389/1 \text{ k-in.} \\ \hat{f}_{2x} &= -26/64 \text{ kip} & \hat{f}_{2y} &= 2/268 \text{ kip} & \hat{m}_2 &= -778/2 \text{ k-in.} \end{aligned} \quad (23-2-5)$$

در المان ۲، نیروهای محلی از رابطه‌ی (۴-۴-۱۱) محاسبه می‌شوند چرا که بار اعمال شده بر این المان از نوع گسترده است؛ لذا از معادلات (۱۰-۱-۵) و (۱۹-۲-۵) داریم:

$$\underline{Td} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0/0.33 \\ -0/0.97 \\ -0/0.33 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (24-2-0)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۲۴-۲-۰) داریم:

$$\begin{Bmatrix} 0/0.33 \\ -0/0.97 \\ -0/0.33 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (25-2-0)$$

با استفاده از معادله‌ی (۲۵-۲-۰) و (۱-۱-۰) برای \hat{k} داریم:

$$\hat{k}\hat{d} = \hat{k}Td = \begin{bmatrix} 6250 & 0 & 0 & -6250 & 0 & 0 \\ 3/25 & 781/1 & 0 & -3/25 & 781/1 & 0 \\ 0 & 250000 & 0 & -781/1 & 125000 & 0 \\ 0 & 0 & 6250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/25 & -781/1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 250000 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0/0.33 \\ -0/0.97 \\ -0/0.33 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (26-2-0)$$

مقارن

از ساده کردن معادله‌ی (۲۶-۲-۰) داریم:

$$\hat{k}\hat{d} = \begin{Bmatrix} 20/63 \\ -2/58 \\ -832/57 \\ -20/63 \\ 2/58 \\ -412/50 \end{Bmatrix} \quad (27-2-5)$$

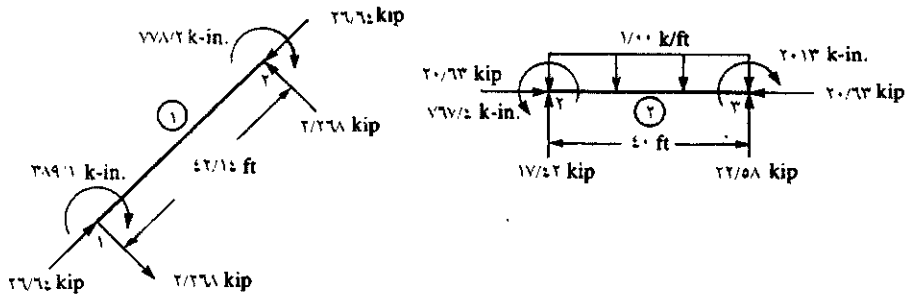
به منظور تعیین نیروهای گره‌ای محلی واقعی، از معادله‌ی (۴-۴-۱۱) استفاده می‌شود؛ به عبارتی، باید نیروهای گره‌ای معادل [معادلات (۵-۲-۱۳)]، از معادله‌ی (۵-۲-۲۷) کسر شده است تا نتایج زیر حاصل شوند.

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{rx} \\ \hat{f}_{ry} \\ \hat{m}_r \\ \hat{f}_{rx} \\ \hat{f}_{ry} \\ \hat{m}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20/63 \\ -2/58 \\ -832/57 \\ -20/63 \\ 2/58 \\ -412/50 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \\ -1600 \\ 0 \\ -20 \\ 1600 \end{Bmatrix} \quad (28-2-5)$$

از ساده سازی معادله‌ی (۵-۲-۲۸) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{rx} &= 20/63 \text{ kip} & \hat{f}_{ry} &= 17/42 \text{ kip} & \hat{m}_r &= 737/4 \text{ k-in.} \\ \hat{f}_{rx} &= -20/63 \text{ kip} & \hat{f}_{ry} &= 22/58 \text{ kip} & \hat{m}_r &= -2013 \text{ k-in.} \end{aligned} \quad (29-2-5)$$

با استفاده از معادلات (۵-۲-۲۳) و (۵-۲-۲۹) برای نیروهای محلی در هر المان، همان‌طور که در شکل ۷-۵ نشان داده شده، می‌توان نمودار جسم آزاد هر المان را رسم نمود. از نمودارهای جسم آزاد، می‌توان طبق دلخواه، تعادل هر المان، کل سازه، و گره ۲ را تأیید نمود.



شکل ۵-۷ نمودار جسم آزاد المان‌های ۱ و ۲

در مثال ۵-۳، روش نیروی گره‌ای معادل جای‌گزین را در قابی که تحت تأثیر بار متمرکز در المان، به جای بار اعمال شده در یکی از گره‌های سازه، قرار گرفته است تشریح خواهیم نمود. از آنجا که هیچ بار گسترده‌ای وجود ندارد، لذا محل اعمال بار متمرکز را می‌توان به صورت مفصل مازادی در تحلیل در نظر گرفته و مسأله را به همان صورت که در مثال ۵-۱ گفته شد حل نمود.

از معایب این روش افزایش تعداد گره‌ها و نیز اندازه‌ی ماتریس سختی K کل سازه است. در سازه‌های کوچکی که توسط رایانه حل می‌شوند این مسأله مشکلی را ایجاد نمی‌کند. در حالی که در سازه‌های خیلی بزرگ، این امر ممکن است منجر به کاهش حداکثر اندازه‌ی مجاز سازه‌ی تحت بررسی شود. یقیناً، گره یاد شده به میزان قابل توجهی زمان حل دستی سازه را افزایش می‌دهد؛ بنابراین، روش استاندارد شده‌ای را که بر پایه‌ی اصل نیروهای گره‌ای معادل استوار است در مورد نیروهای متمرکز تشریح می‌کنیم. در این جا مجدداً از پیوست D استفاده می‌شود.

مثال ۳-۵

قاب مندرج در شکل ۵-۸(a) را حل کنید. مطابق شکل، قاب از سه المان تشکیل شده و تحت تأثیر نیرویی افقی به بزرگی ۱۵-kip در وسط المان ۱ قرار گرفته است. گره‌های ۱، ۲ و ۳ ثابت بوده و ابعاد در شکل نشان داده شده‌اند. در کلیه‌ی المان‌ها فرض کنید $E = 3.0 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $I = 800 \text{ in}^4$ و $A = 8 \text{ in}^2$

۱- ابتدا بار اعمال شده را در مختصات محلی المان ۱ بیان می‌کنیم (در این‌جا جهت x از گره ۱ به گره ۴ است). این امر در شکل ۵-۸(b) نشان داده شده است.

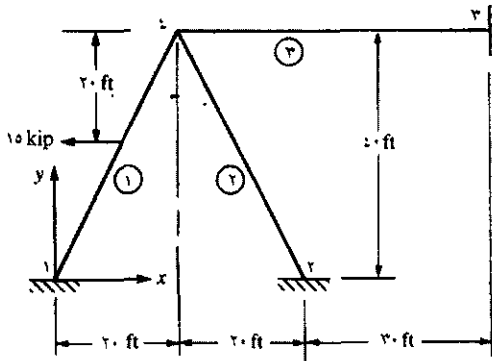
۲- سپس، با استفاده از جدول مندرج در پیوست D، نیروهای گره‌ای معادل را در دو سر المان ۱ مشخص می‌کنیم. (جهت این نیروها که عموماً در تئوری کلاسیک تحلیل سازه‌ها [۱] عکس‌العمل‌های گیردار نامیده می‌شوند، خلاف هم است. چنین نیروهای (و گشتاورهای) معادلی در شکل ۵-۸(c) نشان داده شده‌اند.

۳- سپس با استفاده از معادله‌ی $\underline{f} = \underline{T}^T \hat{\underline{f}}$ که در آن \underline{T} بر اساس رابطه‌ی (۵-۱-۱۰) تعریف شده است، نیروهای گره‌ای معادل را از مختصات محلی نیرو به مختصات اصلی نیرو انتقال می‌دهیم. نیروهای گره‌ای اصلی یاد شده در شکل ۵-۸(d) نشان داده شده‌اند.

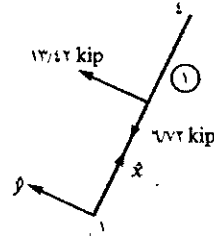
۴- متعاقباً، با استفاده از نیروهای گره‌ای معادل (به‌اضافه‌ی نیروهای واقعی، در صورت حضور) سازه‌ی مندرج در شکل ۵-۸(d) را طبق معمول محاسبه می‌کنیم.

۵- در هر المانی که تحت تأثیر بارگذاری قرار گرفته است (در این‌جا فقط المان ۱)، نیروهای داخلی نهایی در دو انتهای المان را می‌توان از تفریق نیروهای گره‌ای حاصل از بند ۲، از نیروهای مشابه از بند ۴ محاسبه نمود؛ به عبارتی، معادله‌ی (۴-۴)

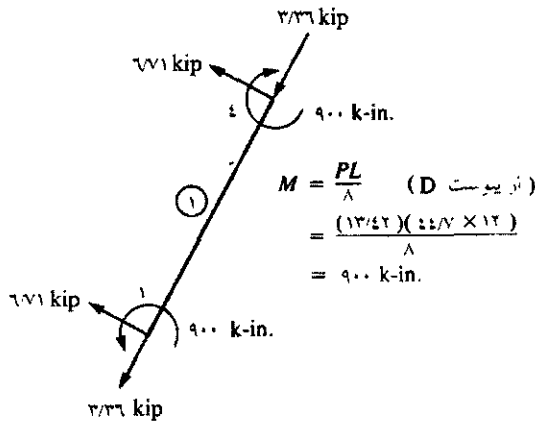
۴-۱۱) را به طور محلی به کلیه‌ی المان‌هایی که تحت بارگذاری قرار گرفته‌اند اعمال می‌کنیم.



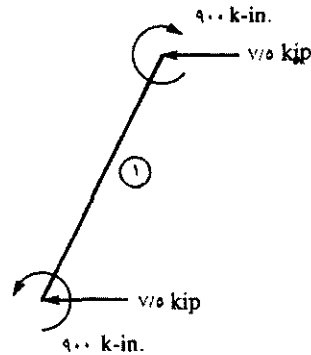
(a) قالب صلب



(b) بار اعمال شده در محور مختصات موضعی المان ۱



(c) نیروهای گره‌ای معادل در سیستم مختصات موضعی



(d) نیروهای گره‌ای بهایی معادل که در سیستم مختصات اصلی تشریح شده‌اند

شکل ۵-۸ قالب صلب با بار اعمال شده بر المان ۱

حال، حل سازه‌ی مندرج در شکل ۵-۸ (d) را ارائه می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی (۵-۱-۱۱)، ماتریس سختی اصلی هر المان را محاسبه می‌کنیم.

المان ۱

در المان ۱، زاویه‌ی بین محور اصلی x و محور محلی \hat{x} ، $63/43^\circ$ است زیرا فرض شده است که جهت \hat{x} از گره ۱ به سمت گره ۴ است؛ بنابراین:

$$C = \cos 63/43^\circ = \frac{x_2 - x_1}{L^{(1)}} = \frac{20 - 0}{44/7} = 0/447$$

$$S = \sin 63/43^\circ = \frac{y_2 - y_1}{L^{(1)}} = \frac{40 - 0}{44/7} = 0/895$$

$$\frac{12I}{L^3} = \frac{12(800)}{(44/7 \times 12)^3} = 0/0334 \quad \frac{6I}{L} = \frac{6(800)}{44/7 \times 12} = 8/95$$

$$\frac{E}{L} = \frac{30 \times 10^3}{44/7 \times 12} = 55/9$$

با استفاده از نتایج قبلی در معادله‌ی (۵-۱-۱۱) برای \underline{k} داریم:

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} d_{\hat{x}x} & d_{\hat{x}y} & \phi_{\hat{x}} \\ 90/9 & 178 & 448 \\ 178 & 359 & -224 \\ 448 & -224 & 179000 \end{bmatrix} \quad (5-2-30)$$

در جایی که تنها بخش‌هایی از ماتریس سختی مرتبط با درجه‌های آزادی گره ۴ آورده شده‌اند؛ زیرا گره ۱ ثابت بوده و در تعیین جابه‌جایی گره‌ها به آن‌ها نیازی نیست.

المان ۳

در المان ۳، زاویه‌ی بین محورهای x و \hat{x} صفر است؛ چرا که \hat{x} از گره ۴ به سمت گره ۳ نشانه می‌رود؛ بنابراین:

$$C = 1 \quad S = 0 \quad \frac{12I}{L^3} = \frac{12(800)}{(50 \times 12)^3} = 0.0267$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6(800)}{50 \times 12} = 8/00 \quad \frac{E}{L} = \frac{30 \times 10^3}{50 \times 12} = 50$$

از آنجا که گره ۳ ثابت است لذا با جای‌گذاری این نتایج در \underline{k} داریم:

$$\underline{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} d_{ix} & d_{iy} & \phi_i \\ 400 & 0 & 0 \\ 0 & 1/334 & 400 \\ 0 & 400 & 160000 \end{bmatrix} \quad (31-2-5)$$

المان ۲

در المان ۲، زاویه‌ی بین محورهای x و \hat{x} $116/57^\circ$ است؛ چرا که \hat{x} از گره ۲ به سمت گره ۴ نشانه می‌رود. از آنجا که المان ۲ دارای خصوصیتی شبیه به المان ۱ است؛ لذا:

$$C = \frac{20 - 40}{44/7} = -0.447 \quad S = \frac{40 - 0}{44/7} = 0.895$$

$$\frac{12I}{L^3} = 0.0334 \quad \frac{6I}{L} = 8/95 \quad \frac{E}{L} = 55/9$$

از آنجا که گره ۲ ثابت است لذا با جای‌گذاری این نتایج در \underline{k} داریم:

$$\underline{k}^{(r)} = \begin{bmatrix} d_{ix} & d_{iy} & \phi_i \\ 9.0/9 & -178 & 448 \\ -178 & 359 & 224 \\ 448 & 224 & 179000 \end{bmatrix} \quad (32-2-5)$$

از انطباق ماتریس سختی داده شده در معادلات (۳۰-۲-۵)، (۳۱-۲-۵) و (۳۲-۲-۵)، و فقط با استفاده از نیروهای گره‌ای داده شده در شکل ۵-۸ (d) در گره ۴، داریم:

$$\begin{Bmatrix} -7/50 \text{ kip} \\ \cdot \\ -9.00 \text{ k-in.} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 582 & 0 & 896 \\ 0 & 719 & 400 \\ 896 & 400 & 518000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ \phi_i \end{Bmatrix} \quad (33-2-5)$$

از حل همزمان سه رابطه‌ی مندرج در معادله‌ی (۳۳-۲-۵) داریم:

$$d_{ix} = -0.0103 \text{ in.}$$

$$d_{iy} = 0.000956 \text{ in.} \quad (34-2-5)$$

$$\phi_i = -0.00172 \text{ rad}$$

سپس، با استفاده از معادله‌ی $\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{k}}\underline{Td}$ ، نیروها در المان را محاسبه می‌کنیم. به طور کلی داریم:

$$\underline{Td} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ \phi_i \\ d_{jx} \\ d_{jy} \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

حال، از حاصل ضرب عبارات ماتریسی فوق داریم:

$$\underline{Td} = \begin{Bmatrix} Cd_{ix} + Sd_{iy} \\ -Sd_{ix} + Cd_{iy} \\ \phi_i \\ Cd_{jx} + Sd_{jy} \\ -Sd_{jx} + Cd_{jy} \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad (35-2-5)$$

المان ۱

$$\underline{Td} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (0/447)(-0/0103) + (0/895)(0/00956) \\ (-0/895)(-0/0103) + (0/447)(0/00956) \\ -0/0172 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -0/0374 \\ 0/0963 \\ -0/0172 \end{Bmatrix} \quad (36-2-5)$$

با استفاده از معادله‌ی (۸-۱-۵) برای \hat{k} و معادله‌ی (۳۶-۲-۵) داریم:

$$\hat{k}Td = \begin{bmatrix} 447 & \cdot & \cdot & -447 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/878 & 000/0 & \cdot & -1/878 & 000/0 \\ \cdot & 000/0 & 179000 & \cdot & -000/0 & 89490 \\ -447 & \cdot & \cdot & 447 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1/878 & -000/0 & \cdot & 1/878 & -000/0 \\ \cdot & 000/0 & 89490 & \cdot & -000/0 & 179000 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -0/0374 \\ 0/0963 \\ -0/0172 \end{Bmatrix} \quad (37-2-5)$$

این مقادیر، نیروهای گره‌ای مؤثر نامیده می‌شوند. از حاصل ضرب ماتریس‌های معادله‌ی (۳۷-۲-۵)، با استفاده از معادله‌ی (۴-۴-۱۱) به منظور تفریق نیروهای گره‌ای معادل در مختصات محلی المان مندرج در شکل ۵-۸(c)، نیروهای نهایی در المان ۱ به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\underline{\hat{f}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1/67 \\ -0/88 \\ -158 \\ -1/67 \\ 0/88 \\ -311 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -3/36 \\ 6/71 \\ 900 \\ -3/36 \\ 6/71 \\ -900 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5/03 \text{ kip} \\ -7/59 \text{ kip} \\ -1058 \text{ k-in.} \\ 1/68 \text{ kip} \\ -5/83 \text{ kip} \\ 589 \text{ k-in.} \end{Bmatrix} \quad (38-2-5)$$

مشابهاً، با استفاده از معادلات (۳۵-۲-۵) و (۸-۱-۵) برای المان‌های ۳ و ۲، می‌توان نیروهای گره‌ای محلی در این المان‌ها را محاسبه نمود. از آنجا که بار اعمال شده بر المان‌های یاد شده صفر است، لذا نیروهای گره‌ای نهایی در مختصات محلی، مرتبط با هر المان، از رابطه‌ی $\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{k}} \underline{T} \underline{d}$ حاصل می‌شوند. این نیروها به شرح زیر حاصل می‌شوند:

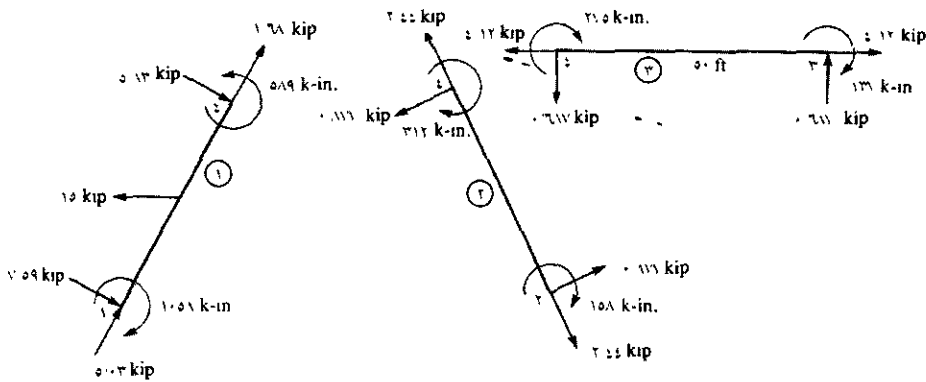
المان ۳

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1x} &= -4/12 \text{ kip} & \hat{f}_{1y} &= -0/687 \text{ kip} & \hat{m}_1 &= -275 \text{ k-in.} \\ \hat{f}_{2x} &= 4/12 \text{ kip} & \hat{f}_{2y} &= 0/687 \text{ kip} & \hat{m}_2 &= -137 \text{ k-in.} \end{aligned} \quad (39-2-5)$$

المان ۲

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1x} &= -2/44 \text{ kip} & \hat{f}_{1y} &= -0/877 \text{ kip} & \hat{m}_1 &= -158 \text{ k-in.} \\ \hat{f}_{2x} &= 2/44 \text{ kip} & \hat{f}_{2y} &= 0/877 \text{ kip} & \hat{m}_2 &= -312 \text{ k-in.} \end{aligned} \quad (40-2-5)$$

نمودار جسم آزاد کلیه‌ی المان‌ها در شکل ۹-۵ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که اغلب اتفاق می‌افتد، هر المان در حال تعادل است؛ حتی اگر اشتباهاتی در حل دستی رخ داده باشد. به هر حال، تعادل در گره ۴ و نیز در کل سازه ارضا شده است. برای مثال، با استفاده از معادلات (۳۸-۲-۵) الی (۴۰-۲-۵)، به منظور بازرینی تعادل در گره ۴، که به صورت ضمنی در فرمول بندی معادلات اصلی ظاهر می‌شود، داریم:



شکل ۹-۵ نمودار جسم آزاد کلیه‌ی المان‌های قاب مندرج در شکل ۸-۵ (a)

$$\sum M_i = 589 - 275 - 212 = 2 \text{ k-in.} \quad (\text{تقریباً صفر})$$

$$\sum F_x = 1/78(0/447) + 5/83(0/895) - 2/44(0/447) - 0/877(0/895) - 4/12 = -0/027 \text{ kip} \quad (\text{تقریباً صفر})$$

$$\sum F_y = 1/78(0/895) + 5/83(0/447) - 2/44(0/895) - 0/877(0/447) - 0/787 = 0/004 \text{ kip} \quad (\text{تقریباً صفر})$$

بنابراین، نتایج حاصل از حل دستی با تقریب خوبی صحیح به نظر می‌رسند.

به منظور تشریح حل مسأله‌ای که شامل المان‌های میله‌ای شکل و قاب است، مسأله‌ی بعدی را حل می‌کنیم.

مثال ۵-۴

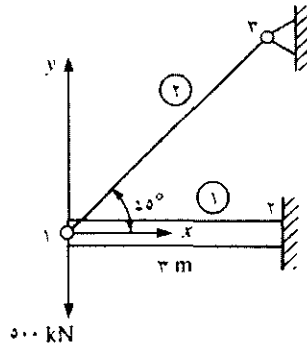
همان‌طور که در شکل ۵-۱۰ نشان داده شده، از میله‌ی ۲ به منظور استحکام تیر آهن یک سر گیر دار المان ۱ استفاده شده است. نیروها در هر المان و نیز تغییر مکان‌های گره ۱ را بیابید. در میله، فرض کنید $A = 1/0 \times 10^{-3} m^2$. در تیر، فرض کنید $A = 2 \times 10^{-3} m^2$ ، $I = 5 \times 10^{-4} m^4$ و $L = 3 m$ در هریک از المان‌های میله و تیر آهن، فرض کنید $E = 210 Gpa$. زاویه‌ی بین میله و تیر را 45° فرض نمایید. نیرویی به بزرگی $500 kN$ به سمت پایین بر گره ۱ اعمال می‌شود.

برای اختصار، به دلیل ثابت بودن گره‌های ۲ و ۳، قسمت‌هایی از ماتریس \underline{k} در هر المان حفظ می‌شوند که به منظور تعیین ماتریس اصلی \underline{K} و نهایتاً، تعیین درجه‌های آزادی گره‌ها، به آن‌ها نیاز است. با استفاده از معادله‌ی (۳-۴-۲۳)، ماتریس \underline{k} در المان میله‌ای شکل برابر است با:

$$\underline{k}^{(2)} = \frac{(1 \times 10^{-3})(210 \times 10^6)}{(3 / \cos 45^\circ)} \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix}$$

از ساده کردن عبارت فوق داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} d_{1,x} & d_{1,y} \\ 0/354 & 0/354 \\ 0/354 & 0/354 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (5-2-41)$$



شکل ۱۰-۵ تیرآهن یک سر گیردار متکی بر المان میله‌ای شکل

با استفاده از معادله‌ی (۱۱-۱-۵)، عبارت \underline{k} را به شرح زیر برای المان تیر (با احتساب اثرات محوری) به دست می‌آوریم:

$$\underline{k}^{(1)} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & \phi_1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (42-2-5)$$

در جایی که به منظور تعیین معادله‌ی (۴۲-۲-۵)، از $(E/L) \times 10^{-3}$ فاکتور گرفته شده است.

معادلات (۴۱-۲-۵) و (۴۲-۲-۵) را به طریق معمول بر هم منطبق نموده تا ماتریس

سختی اصلی به شرح زیر حاصل شود:

$$\underline{K} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} 2/354 & 0/354 & 0 \\ 0/354 & 0/421 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (43-2-5)$$

سپس، معادلات اصلی برای گره ۱ به شرح زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -500 \\ 0 \end{Bmatrix} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} 2/354 & 0/354 & 0 \\ 0/354 & 0/421 & 0/10 \\ 0 & 0/10 & 0/20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \phi_1 \end{Bmatrix} \quad (44-2-5)$$

از حل معادله‌ی (44-2-5) داریم:

$$d_{1x} = 0/00338 \text{ m} \quad d_{1y} = -0/0225 \text{ m} \quad \phi_1 = 0/0113 \text{ rad} \quad (45-2-5)$$

به طور کلی، نیروهای محلی در المان‌ها از رابطه‌ی $\hat{f} = kTd$ حاصل می‌شوند. لذا در المان میله‌ای شکل داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} \quad (46-2-5)$$

از حاصل ضرب سه گانه‌ی ماتریس معادله‌ی (46-2-5) (در قالب یک رابطه) داریم:

$$\hat{f}_{1x} = \frac{AE}{L} (Cd_{1x} + Sd_{1y}) \quad (47-2-5)$$

با جای‌گذاری مقادیر عددی در معادله‌ی (47-2-5) داریم:

$$\hat{f}_{1x} = \frac{(1 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(210 \times 10^3 \text{ kN/m}^2)}{4/24 \text{ m}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (0/00338 - 0/0225) \right] \quad (48-2-5)$$

از ساده کردن معادله‌ی (48-2-5)، نیروی محوری در المان میله‌ای شکل (المان ۲) به صورت زیر حاصل می‌شود.

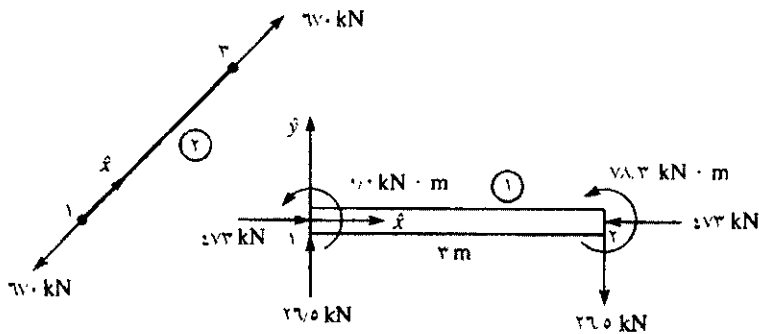
$$\hat{f}_{1x} = -770 \text{ kN} \quad (5-2-49)$$

در جایی که علامت منفی، دلالت بر مخالف بودن جهت \hat{f}_{1x} با جهت \hat{x} در المان ۲ می‌نماید. متشابهاً، داریم:

$$\hat{f}_{rx} = 770 \text{ kN} \quad (5-2-50)$$

این بدان معنی است که میله، مطابق شکل ۱۱-۵، تحت کشش است. از آنجا که محورهای محلی و اصلی در المان تیر بر هم منطبقند لذا داریم $\underline{\hat{f}} = \underline{f}$ و $\underline{\hat{d}} = \underline{d}$. بنابراین، با استفاده از معادله‌ی (۱۶-۱-۵)، در گره ۱ می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \phi_1 \end{Bmatrix} \quad (5-2-51)$$



شکل ۱۱-۵ نمودار جسم آزاد المان‌های میله‌ای شکل (المان ۲) و تیرآهن (المان ۱)، مندرج در شکل ۱۰-۵

در جایی که تنها بخش بالایی ماتریس سختی نیاز است؛ زیرا تغییر مکان‌های گره ۲ برابر با صفرند. از جای‌گذاری مقادیر عددی در معادله‌ی (۵۱-۲-۵) داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_1 \end{Bmatrix} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00338 \\ -0.0225 \\ 0.0113 \end{Bmatrix}$$

از حاصل ضرب ماتریس‌ها نتیجه می‌شود که:

$$\hat{f}_{1x} = 473 \text{ kN} \quad \hat{f}_{1y} = -26/5 \text{ kN} \quad \hat{m}_1 = 0.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (52-2-5)$$

متشابهاً، با استفاده از معادله‌ی (6-1-5)، در گره ۲ داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} = 70 \times 10^3 \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.67 & -0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00338 \\ -0.0225 \\ 0.0113 \end{Bmatrix}$$

از حاصل ضرب ماتریس‌ها نتیجه می‌شود که:

$$\hat{f}_{2x} = -473 \text{ kN} \quad \hat{f}_{2y} = 26/5 \text{ kN} \quad \hat{m}_2 = -78/3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (53-2-5)$$

به منظور کمک به تفسیر نتایج حاصل از معادلات (50-2-5)، (49-2-5)، (52-2-5) و (53-2-5)، نمودارهای جسم آزاد المان‌های میله‌ای شکل و تیر، در شکل ۵-۱۱ رسم شده‌اند. برای اثبات بیش‌تر نتایج، می‌توان ارضای تعادل در گره ۱ را بررسی نمود. همچنین، شما باید ارضای تعادل گشتاورها در المان تیر را اثبات کنید.

۳-۵ تکیه‌گاه‌های اریب - المان قاب

در المان قاب مندرج در شکل ۱۲-۵ با تکیه‌گاه اریبی در گره ۳، ماتریس انتقال \underline{T} ، که از آن به منظور انتقال جابه‌جایی گره‌ها از مختصات اصلی به محلی استفاده می‌شود، از رابطه‌ی (۱۰-۱-۵) محاسبه می‌شود.

در مثالی که در شکل ۱۲-۵ نشان داده شده، \underline{T} را به شرح زیر بر گره ۳ اعمال

می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix} d'_{r,x} \\ d'_{r,y} \\ \phi'_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{r,x} \\ d_{r,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix}$$

سپس مراحل مشابه با آن چه که در بخش ۳-۹ ارائه شد را برای قاب صفحه‌ای به کار می‌بریم. معادلات حاصل برای قاب صفحه‌ای مندرج در شکل ۱۲-۵ به شرح زیرند:

$$[T_r]\{f\} = [T_r][K][T_r]^T\{d\}$$

یا

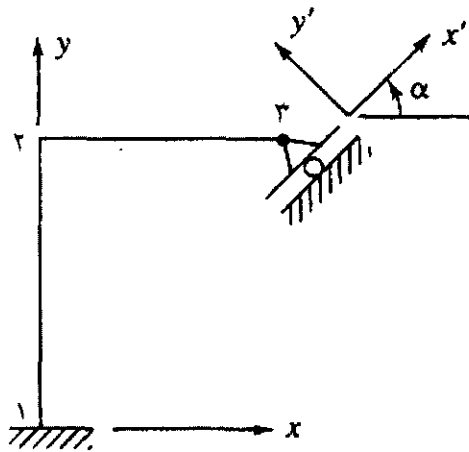
$$\begin{Bmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \\ M_1 \\ F_{r,x} \\ F_{r,y} \\ M_r \\ F'_{r,x} \\ F'_{r,y} \\ M_r \end{Bmatrix} = [T_r][K][T_r]^T \begin{Bmatrix} d_{1,x} = 0 \\ d_{1,y} = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ d_{r,x} \\ d_{r,y} \\ \phi_r \\ d'_{r,x} \\ d'_{r,y} = 0 \\ \phi'_r = \phi_r \end{Bmatrix}$$

در جایی که

$$[T_i] = \begin{bmatrix} [I] & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & [I] & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & [t_r] \end{bmatrix}$$

و

$$[t_r] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



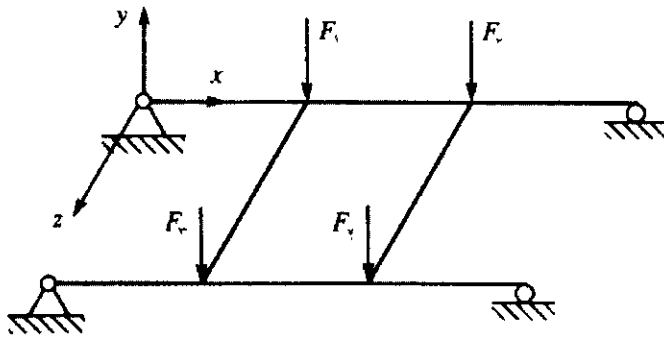
شکل ۵-۱۲ قاب با تکیه‌گاه اریب

۴-۵ معادلات شبکه

شبکه، سازه ای است که برخلاف قاب صفحه‌ای که در آن بارها در صفحه‌ی سازه قرار دارند، نیروها به طور عمود بر صفحه‌ی سازه اعمال می‌شوند. حال ماتریس سختی المان شبکه را استخراج می‌کنیم. فرض می‌شود که المان‌های یک شبکه به صورت صلب به یک‌دیگر متصل شده‌اند به قسمی که زوایای اولیه‌ی بین المان‌های متصل به هم

در یک گره، بدون تغییر باقی می‌مانند؛ بنابراین، در هر گره یک شبکه، پیوستگی در گشتاور خمشی و پیچشی وجود دارد. از مثال‌هایی در زمینه‌ی شبکه‌ها می‌توان از پیاد روها (کف‌ها) و سطح پل‌ها را نام برد. سازه‌ی شبکه‌ی نمونه‌ی ای که تحت بارهای F_1, F_2, F_3 قرار گرفته در شکل ۵-۱۳ نشان داده شده است.

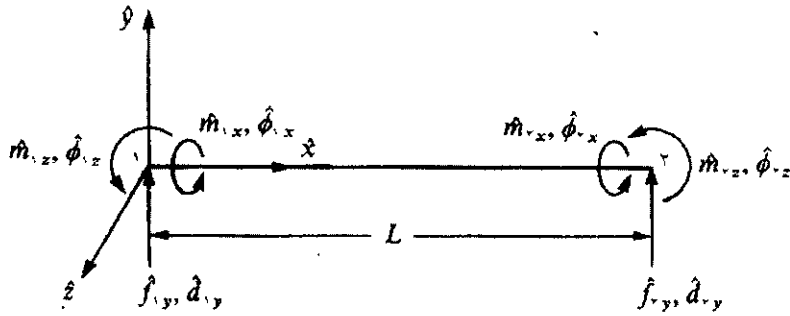
حال نحوه‌ی استخراج ماتریس سختی و معادله‌های المان را بررسی می‌کنیم. نمونه‌ای از یک شبکه‌ی با درجه‌های آزادی و نیروهای گره‌ای در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده است. در یک شبکه، درجه‌های آزادی در هر گره به صورت تغییر مکان عمودی \hat{d}_{iy} (عمود بر شبکه)، چرخش $\hat{\phi}_{ix}$ ناشی از پیچش حول محور \hat{x} ، و چرخش $\hat{\phi}_{iz}$ ناشی از خمش حول محور \hat{z} می‌باشند. از هر گونه جابه‌جایی محوری صرف‌نظر شده است؛ به عبارتی، $\hat{d}_{ix} = 0$. نیروهای گره‌ای شامل نیروی عرضی \hat{f}_{iy} ، گشتاور پیچشی \hat{m}_{ix} حول محور \hat{x} ، و گشتاور خمشی \hat{m}_{iz} حول محور \hat{z} است. المان‌های یک شبکه تاب تحمل بارهای محوری را ندارند؛ به عبارتی، $\hat{f}_{ix} = 0$.



شکل ۵-۱۳ نمونه‌ای از یک شبکه

به منظور استخراج ماتریس سختی محلی یک شبکه، نیاز است تا اثرات پیچشی در ماتریس سختی المان اولیه‌ی تیر در معادله‌ی (۴-۱-۱۴) لحاظ شود. لازم به یاد آوری است که اثرات خمشی و برشی در معادله‌ی یاد شده منظور شده‌اند.

ماتریس سختی پیچشی المان میله‌ای شکل را می‌توان به همان صورت که در فصل ۳ در مورد استخراج ماتریس سختی این المان با بار محوری گفته شد، استخراج نمود. در خلال استخراج، کافی است \hat{f}_{ix} را با \hat{m}_{ix} ، \hat{d}_{ix} را با $\hat{\phi}_{ix}$ ، E را با G (مدول پیچشی)، A را با J (ثابت پیچشی یا ضریب سختی)، σ را با τ (تنش برشی)، و ε را با γ (کرنش برشی) جای‌گزین نماییم.

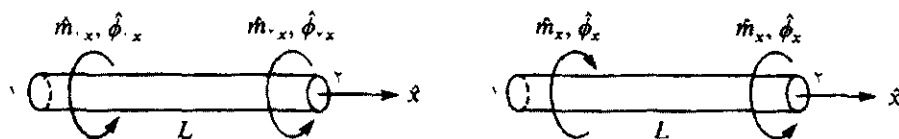


شکل ۵-۱۴ المانی از یک شبکه با درجه‌های آزادی و نیروهای گره‌ای

استخراج واقعی روابط، به طور خلاصه به شرح زیر ارائه می‌شود. در این جا، بدون از دست دادن اصول کلی، به منظور سادگی از سطح مقطع دایره‌ای شکلی به شعاع R استفاده می‌کنیم.

مرحله ۱

شکل ۵-۱۵ معرف علامت قراردادی برای گشتاورهای گره‌ای، زاویه‌ی پیچش و نیز گشتاور در المان است.



شکل ۵-۱۰ علامت قرار دادی برای گره‌ها و گشتاور پیچشی

مرحله ۲

تغییرات زاویه‌ی پیچش در امتداد محور \hat{x} را در امتداد میله به صورت خطی در نظر گرفته به قسمی که:

$$\hat{\phi} = a_1 + a_2 \hat{x} \quad (1-4-5)$$

با استفاده از روش معمول در تشریح a_1 و a_2 بر حسب زوایای پیچشی مجهول $\hat{\phi}_{1x}$ و $\hat{\phi}_{2x}$ در گره‌ها داریم:

$$\hat{\phi} = \left(\frac{\hat{\phi}_{2x} - \hat{\phi}_{1x}}{L} \right) \hat{x} + \hat{\phi}_{1x} \quad (2-4-5)$$

یا به صورت ماتریسی، معادله‌ی (۲-۴-۵) برابر است با:

$$\hat{\phi} = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_{1x} \\ \hat{\phi}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3-4-5)$$

در جایی که توابع شکل برابرند با:

$$N_1 = 1 - \frac{\hat{x}}{L} \quad N_2 = \frac{\hat{x}}{L} \quad (4-4-5)$$

مرحله ۳

حال رابطه‌ی بین کرنش برشی γ و زاویه‌ی پیچش ϕ را با توجه به تغییر مکان‌های پیچشی قسمتی از میله که در شکل ۵-۱۶ نشان داده شده است به دست می‌آوریم. به

فرض آنکه کلیه خطوط شعاعی، همانند OA ، در خلال پیچش یا تغییر شکل پیچشی مستقیم باقی می‌مانند، مشاهده می‌شود که طول کمان \widehat{AB} از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\widehat{AB} = \gamma_{\max} d\hat{x} = R d\hat{\phi}$$

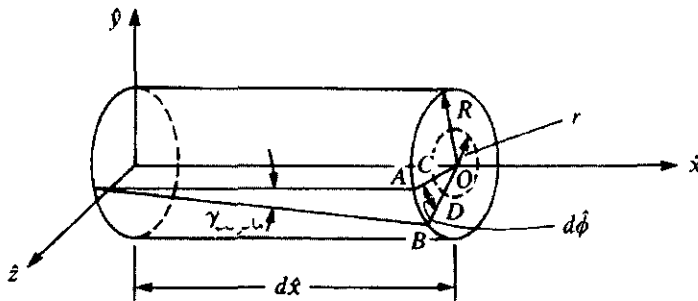
از رابطه‌ی فوق ماکزیمم کرنش برشی برابر است با:

$$\gamma_{\max} = \frac{R d\hat{\phi}}{d\hat{x}}$$

متشابهاً، به ازای هر یک از موقعیت‌های شعاعی r از تشابه مثلث‌هایی همانند OAB و OCD داریم:

$$\gamma = r \frac{d\hat{\phi}}{d\hat{x}} = \frac{r}{L} (\hat{\phi}_{r,x} - \hat{\phi}_{,x}) \quad (5-4-5)$$

در جایی که از معادله‌ی (۲-۴-۵) در استخراج رابطه‌ی نهایی مندرج در معادله‌ی (۵-۴-۵) استفاده شده است.



شکل ۵-۱۶ تغییر مکان پیچشی قسمتی از یک میله

رابطه‌ی بین تنش برشی τ و کرنش برشی γ در مواد همسانگرد الاستیک خطی از عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\tau = G \gamma \quad (6-4-5)$$

در جایی که G مدول برشی ماده است.

مرحله‌ی ۴

ماتریس سختی المان را به روش زیر استخراج می‌کنیم. بر اساس مکانیک پایه، رابطه‌ی بین تنش برشی و گشتاور اعمال شده به شرح زیر است:

$$\hat{m}_x = \frac{\tau J}{R} \quad (7-4-5)$$

در جایی که J ممان اینرسی قطبی برای سطح مقطع دایره‌ای شکل، یا به طور کلی، ثابت پیچشی برای سطوح غیر دایره‌ای شکل است. از جای‌گزینی معادلات (5-4-5) و (6-4-5) در رابطه‌ی (7-4-5)، داریم:

$$\hat{m}_x = \frac{GJ}{L} (\hat{\phi}_{1x} - \hat{\phi}_{2x}) \quad (8-4-5)$$

با توجه به علامت قراردادی مندرج در شکل 5-10 برای گشتاور گره‌ای:

$$\hat{m}_{1x} = -\hat{m}_x \quad (9-4-5)$$

یا با جای‌گزینی معادله‌ی (8-4-5) در رابطه‌ی (9-4-5)، داریم:

$$\hat{m}_{1x} = \frac{GJ}{L} (\hat{\phi}_{1x} - \hat{\phi}_{2x}) \quad (10-4-5)$$

متشابهاً،

$$\hat{m}_{2x} = \hat{m}_x \quad (11-4-5)$$

یا

$$\hat{m}_{rx} = \frac{GJ}{L} (\hat{\phi}_{rx} - \hat{\phi}_{ix}) \quad (12-4-5)$$

ضمن تشریح روابط (10-4-5) و (12-4-5) به صورت ماتریسی، ماتریس سختی میله‌ی تحت پیچش به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \hat{m}_{ix} \\ \hat{m}_{rx} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_{ix} \\ \hat{\phi}_{rx} \end{Bmatrix} \quad (13-4-5)$$

لذا ماتریس سختی در میله‌ی تحت پیچش برابر است با:

$$\hat{k} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14-4-5)$$

سطح مقطع بسیاری از سازه‌ها، همانند سطوح پل‌ها، اغلب دایره‌ای شکل نیست. به هر حال، معادلات (13-4-5) و (14-4-5) دارای حالت کلی بوده به قسمی که می‌توان آن‌ها را به سطح مقطع‌های دیگری نیز اعمال نمود. برای مثال، در سطح مقطع‌هایی به شکل مستطیل باریک، از قبیل ناودانی‌ها، نبشی‌ها، یا تیرآهن‌های پهن، J به شرح زیر تقریب زده می‌شود.

$$J = \sum \frac{1}{3} b_i t_i^3 \quad (15-4-5)$$

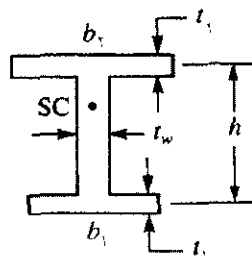
در جایی که b_i طول المان مرتبط با سطح مقطع مورد نظر، و t_i ضخامت المان مرتبط با همان سطح مقطع است. در جدول ۱-۵، مقادیر J برای سطح مقطع‌های متداول متعددی نشان داده شده‌اند. چهار سطح مقطع اول، سطح مقطع‌های باز نامیده می‌شوند. معادله‌ی (15-4-5) فقط در مورد سطح مقطع‌های باز صادق است. (برای اطلاعات بیشتر در مورد مبحث J ، به مراجع [۲] و [۳] رجوع نموده و برای دستیابی به جدول

گسترده‌تری از ثابت‌های پیچشی سطح مقطع‌های مختلف، به مرجع [۴] مراجعه نمایید. به منظور جلوگیری از پیچش سطح مقطع، فرض بر آن است که بارگذاری از مرکز برش سطح مقطع‌های باز عبور می‌کند. برای اطلاع بیشتر در مورد مرکز برش به مراجع [۲] و [۵] مراجعه نمایید.

جدول ۱-۵ ثابت‌های پیچشی J و مراکز برش (SC) سطح مقطع‌های مختلف

نام سطح	شکل سطح
	۱. نودانی
$J = \frac{t^3}{12}(h + 2b)$ $e = \frac{h^2 b + t}{12}$	
$J = \frac{1}{12}(b_1 t_1^3 + h_1 t_1^3)$	۲. نشی
$J = \frac{t^3}{12}(2b + h)$	۳. سطح Z

۵. نه آهن بهن با سول های سبر نوسان



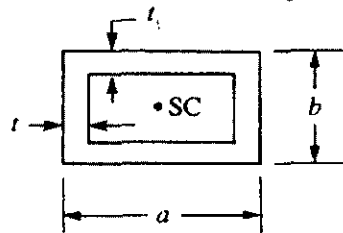
$$J = \frac{1}{3}(b_f t_f^3 + b_b t_b^3 + h t_w^3)$$

۶. سول سول نه سول



$$J = \frac{\pi}{2} r^4$$

۷. سطل سول نه سول



$$J = \frac{t t_f (a-t)^3 (b-t_f)^3}{at + b t_f - t^3 - t_f^3}$$

از ترکیب اثرات پیچشی معادله‌ی (۵-۴-۱۳) و اثرات برشی و خمشی معادله‌ی (۴-۳-۱)، معادله‌ی ماتریس سختی محلی را در المانی از یک شبکه به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_{1x} \\ \hat{m}_{1z} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_{2x} \\ \hat{m}_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \cdot & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \cdot & \frac{6EI}{L^2} \\ \cdot & \frac{GJ}{L} & \cdot & \cdot & -\frac{GJ}{L} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \cdot & \frac{2EI}{L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI}{L^3} & \cdot & -\frac{6EI}{L^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{GJ}{L} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_{1x} \\ \hat{\phi}_{1z} \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_{2x} \\ \hat{\phi}_{2z} \end{Bmatrix} \quad (16-4-5)$$

در جایی که از معادله‌ی (۱۶-۴-۵)، ماتریس سختی محلی برای المانی از یک شبکه برابر است با:

$$\hat{k}_G = \begin{matrix} \hat{d}_{1y} & \hat{\phi}_{1x} & \hat{\phi}_{1z} & \hat{d}_{2y} & \hat{\phi}_{2x} & \hat{\phi}_{2z} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \cdot & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \cdot & \frac{6EI}{L^2} \\ \cdot & \frac{GJ}{L} & \cdot & \cdot & -\frac{GJ}{L} & \cdot \\ \frac{6EI}{L^2} & \cdot & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \cdot & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \cdot & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \cdot & -\frac{6EI}{L^2} \\ \cdot & -\frac{GJ}{L} & \cdot & \cdot & \frac{GJ}{L} & \cdot \\ \frac{6EI}{L^2} & \cdot & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \cdot & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (17-4-5)$$

با توجه به علامات مندرج در بالای هر ستون در معادله‌ی (۱۷-۴-۵)، درجه‌های آزادی به ترتیب برابرند با (۱) تغییر مکان عمودی، (۲) چرخش پیچشی و (۳) چرخش خمشی.

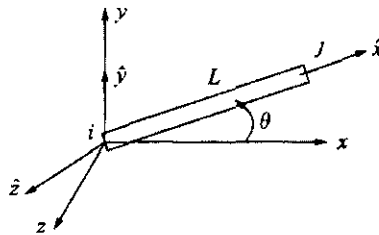
ماتریس انتقالی که درجه‌های آزادی محلی را به درجه‌های اصلی یک شبکه ربط می‌دهد از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\underline{T}_G = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & C & S & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -S & C & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C & S \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -S & C \end{bmatrix} \quad (18-4-5)$$

در جایی که θ ، که به صورت پاد ساعتگرد از x به سمت \hat{x} در صفحه‌ی $x-z$ اندازه گرفته می‌شود، مثبت است.

$$C = \cos \theta = \frac{x_j - x_i}{L} \quad S = \sin \theta = \frac{z_j - z_i}{L}$$

در جایی که L طول المان از گره i تا گره j است. بر اساس معادله‌ی (18-4-5)، در یک شبکه، تغییر مکان عمودی \hat{d}_y ربطی به انتقال محورها ندارد (به عبارتی، $y = \hat{y}$) (شکل ۵-۱۷).



شکل ۵-۱۷ المانی از یک شبکه با جهتی دلخواه در صفحه‌ی $x-z$

لذا، ماتریس سختی اصلی المانی از یک شبکه که تحت زاویه‌ی دلخواهی در صفحه‌ی $x-z$ قرار دارد با حای گزینی معادلات (۵-۴-۱۷) و (۵-۴-۱۸) در رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{k}_G = \underline{T}_G^T \hat{k}_G \underline{T}_G \quad (۵-۴-۱۹)$$

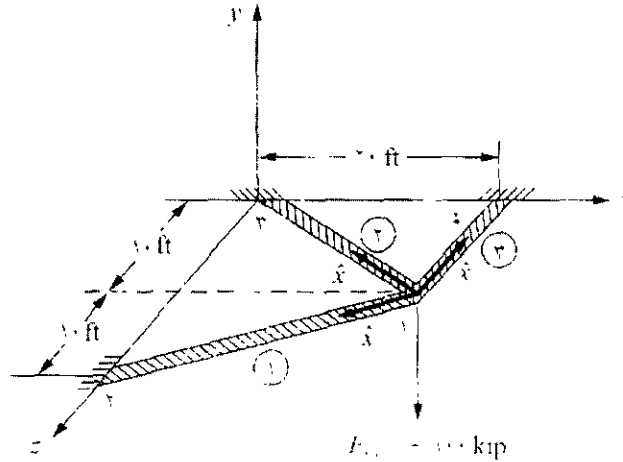
حال، پس از تعیین ماتریس سختی اصلی برای یک شبکه، نحوه‌ی حل مسأله به همان صورت که در مورد قاب صفحه‌ای گفته شد انجام می‌شود. در این جا به منظور تشریح کاربرد معادلات استخراج شده در بخش ۵-۴، ساره‌های شبکه‌ای شکل زیر را حل می‌کنیم.

مثال ۵-۵

شبکه‌ی مدرج در شکل ۵-۱۸ را تحلیل نمایید. این شبکه شامل سه المان بوده و در گره‌های ۳، ۲ و ۴ ثابت و تحت تأثیر بار عمودی 100 kips به سمت پایین (عمود بر صفحه‌ی $x-z$ که حامل المان‌ها است) قرار گرفته است. محور مختصات اصلی در گره ۳ قرار گرفته و طول المان‌ها در شکل نشان داده شده‌اند. در کلیه‌ی المان‌های شبکه فرض کنید: $E = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$ ، $G = 12 \times 10^3 \text{ ksi}$ ، $I = 400 \text{ in}^4$ و $J = 110 \text{ in}^4$ از جای‌گذاری معادله‌ی (۵-۴-۱۷) به جای ماتریس سختی موضعی، و معادله‌ی (۵-۴-۱۸) به جای ماتریس انتقال در معادله‌ی (۵-۴-۱۹)، ماتریس سختی اصلی هر المان حاصل می‌شود. برای تسریع در حل دستی، شرایط مرزی در گره‌های ۳، ۲ و ۴، به شرح ذیل

$$d_{r_1} = \phi_{r_1} = \phi_{r_2} = 0 \quad d_{r_3} = \phi_{r_3} = \phi_{r_4} = 0 \quad d_{r_5} = \phi_{r_5} = \phi_{r_6} = 0 \quad (۵-۴-۲۰)$$

این امکان را فراهم می‌کند تا فقط از بخش 3×3 بالای سمت چپ ماتریس‌های قسمت بندی شده‌ی سختی و انتقال، که با درجه آزادی گره ۱ مرتبط می‌باشند استفاده شود؛ بنابراین ماتریس‌های سختی اصلی در هر المان به شرح زیر حاصل می‌شوند:



شکل ۵-۱۸ شبکه‌ی مورد استفاده در تحلیل، همراه با نمایش محور محلی \bar{x} در هر المان

المان ۱

در المان ۱، به منظور تعیین ماتریس سختی المان فرض می‌کنیم که محور موضعی \bar{x} از گره ۱ به سمت گره ۲ ستانه می‌رود. به منظور ارزیابی ماتریس سختی المان، به عبارات زیر نیاز است.

$$C = \cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{L^{(1)}} = \frac{30 - 0}{36} = 0.833$$

$$S = \sin \theta = \frac{z_2 - z_1}{L^{(1)}} = \frac{0 - 0}{36} = 0$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(30 \times 10^6)(400)}{(36 \times 36 \times 36)^3} = 7/45$$

$$\frac{6EI}{L^3} = \frac{6(30 \times 10^3)(400)}{(22/36 \times 12)^3} = 1000$$

$$\frac{GJ}{L} = \frac{(12 \times 10^3)(110)}{(22/36 \times 12)} = 4920 \quad (21-4-5)$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(30 \times 10^3)(400)}{(22/36 \times 12)} = 179000$$

با توجه به شرایط مرزی مندرج در معادلات (20-4-5)، ضمن جای‌گزینی نتایج حاصل از معادلات (21-5-4) در معادله‌ی (17-4-5) برای \hat{k}_G ، و معادله‌ی (18-4-5) برای \underline{T}_G ، و سپس اعمال معادله‌ی (19-4-5)، بخش بالایی 3×3 سمت چپ ماتریس سختی اصلی در المان ۱ به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0/894 & -0/447 \\ 0 & 0/447 & -0/894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/45 & 0 & 1000 \\ 0 & 4920 & 0 \\ 1000 & 0 & 179000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0/894 & 0/447 \\ 0 & -0/447 & -0/894 \end{bmatrix}$$

از ضرب ماتریس‌های فوق، ماتریس سختی اصلی در المان شبکه برابر است با:

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} d_{1y} & \phi_1 & \phi_1 \\ 7/45 & -447 & -894 \\ -447 & 39/700 & 69/600 \\ -894 & 69/600 & 179000 \end{bmatrix} \frac{\text{kip}}{\text{in.}} \quad (22-4-5)$$

در جایی‌که علامات نزدیک به ستون‌ها معرف درجه‌های آزادی می‌باشند.

المان ۲

در المان ۲، به منظور تعیین ماتریس سختی المان فرض می‌کنیم که محور موضعی \hat{x} از گره ۱ به سمت گره ۳ نشانه می‌رود. به منظور ارزیابی ماتریس سختی المان، به عبارات زیر نیاز است.

$$C = \frac{x_7 - x_1}{L^{(7)}} = \frac{-20 - 0}{22/36} = -0.894 \quad (23-4-5)$$

$$S = \frac{z_7 - z_1}{L^{(7)}} = \frac{-10 - 0}{22/36} = -0.447$$

عبارات دیگری که از آن‌ها در معادله‌ی (۱۷-۴-۵) استفاده شده است، شبیه به روابط به‌کار گرفته شده در معادلات (۲۱-۴-۵)، برای المان ۱، می‌باشند؛ زیرا E, I, G, J و L تغییری ننموده‌اند. ضمن ارزیابی معادله‌ی (۱۹-۴-۵) برای ماتریس سختی المان ۲، داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.894 & 0.447 \\ 0 & 0.447 & -0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/45 & 0 & 1000 \\ 0 & 4920 & 0 \\ 1000 & 0 & 179000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.894 & -0.447 \\ 0 & 0.447 & -0.894 \end{bmatrix}$$

پس از ساده‌سازی داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{1y} & \phi_{1x} & \phi_{1z} \\ 7/45 & 447 & -894 \\ 447 & 39/700 & -69/600 \\ -894 & -69600 & 144000 \end{bmatrix} \frac{\text{kip}}{\text{in.}} \quad (24-4-5)$$

المان ۳

در المان ۳، به منظور تعیین ماتریس سختی المان فرض می‌کنیم که محور موضعی \bar{x} از گره ۱ به سمت گره ۴ نشانه می‌رود. به منظور ارزیابی ماتریس سختی المان، به عبارات زیر نیاز است.

$$C = \frac{x_4 - x_1}{L^{(3)}} = \frac{20 - 20}{10} = 0$$

$$S = \frac{z_4 - z_1}{L^{(3)}} = \frac{0 - 10}{10} = -1$$

$$\frac{12 EI}{L^3} = \frac{12 (30 \times 10^3) (400)}{(10 \times 12)^3} = 83 / 3 \quad (25-4-5)$$

$$\frac{6 EI}{L^2} = \frac{6 (30 \times 10^3) (400)}{(10 \times 12)^2} = 5000$$

$$\frac{GJ}{L} = \frac{(12 \times 10^3) (110)}{(10 \times 12)} = 11000$$

$$\frac{4 EI}{L} = \frac{4 (30 \times 10^3) (400)}{(10 \times 12)} = 40000$$

با استفاده از معادلات (25-4-5)، بخش فوقانی ماتریس سختی المان ۳ را می‌توان به شرح زیر به دست آورد:

$$\underline{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} d_{1r} & \phi_{1r} & \phi_{1z} \\ 83/3 & 5000 & 0 \\ 5000 & 40000 & 0 \\ 0 & 0 & 11000 \end{bmatrix} \frac{\text{kip}}{\text{in.}} \quad (26-4-5)$$

از انطباق ماتریس‌های سختی اصلی منتج از معادلات (22-4-5)، (24-4-5) و (5-4-5) - (26)، ماتریس سختی کل شبکه (با احساب شرایط مرزی) به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$\underline{K}_G = \begin{bmatrix} d_{1r} & \phi_{1r} & \phi_{1z} \\ 91/2 & 5000 & -1790 \\ 5000 & 27900 & 0 \\ -1790 & 0 & 29900 \end{bmatrix} \frac{\text{kip}}{\text{in.}} \quad (27-4-5)$$

لذا، معادلات ماتریسی شبکه برابرند با:

$$\begin{cases} F_{1y} = -100 \\ M_{1x} = 0 \\ M_{1z} = 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} 98/2 & 5000 & -1790 \\ 5000 & 479000 & 0 \\ -1790 & 0 & 299000 \end{bmatrix} \begin{cases} d_{1y} \\ \phi_x \\ \phi_z \end{cases} \quad (28-4-5)$$

نیروی F_{1y} منفی است؛ زیرا بار اعمال شده در جهت منفی y است. پس از تعیین جابه‌جایی و چرخش‌ها از معادله‌ی (۲۸-۴-۵) داریم:

$$d_{1y} = -2/83 \text{ in.}$$

$$\phi_x = 0/0295 \text{ rad} \quad (29-4-5)$$

$$\phi_z = -0/0169 \text{ rad}$$

نتایج نشان می‌دهند که تغییر مکان y در گره ۱، با توجه به علامت منفی، به سمت پایین، چرخش حول محور x مثبت و حول محور z منفی است. با توجه به جهت نیروی اعمال شده نسبت به تکیه‌گاه، انتظار چنین نتایجی می‌رفت.

پس از تعیین جابه‌جایی و چرخش‌های مجهول، می‌توان نیروهای محلی در هر المان را با فرمول بندی معادلات، به همان روشی که در مورد فرمول بندی تیر و قاب صفحه‌ای گفته شد، محاسبه نمود. نیروهای محلی (که در مرحله تحلیل و طراحی مورد نیاز هستند) از اعمال معادلات $\underline{f} = \underline{K}_G \underline{T}_G \underline{d}$ به هر المان به شرح زیر حاصل می‌شوند.

المان ۱

با استفاده از معادلات (۱۷-۴-۵) و (۱۸-۴-۵) برای \underline{T}_G و معادله‌ی (۲۹-۴-۵)،

داریم:

$$\underline{T}_G \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\cdot/۸۹۴ & \cdot/۴۴۷ & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\cdot/۴۴۷ & -\cdot/۸۹۴ & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\cdot/۸۹۴ & \cdot/۴۴۷ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\cdot/۴۴۷ & -\cdot/۸۹۴ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -۲/۸۳ \\ \cdot/۰.۲۹۵ \\ -\cdot/۰.۱۶۹ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

از ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\underline{T}_G \underline{d} = \begin{Bmatrix} -۲/۸۳ \\ -\cdot/۰.۳۳۹ \\ \cdot/۰.۰۱۹۲ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (۳۰-۴-۵)$$

بنابراین، معادله‌ی $\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{K}}_G \underline{T}_G \underline{d}$ برابر است با:

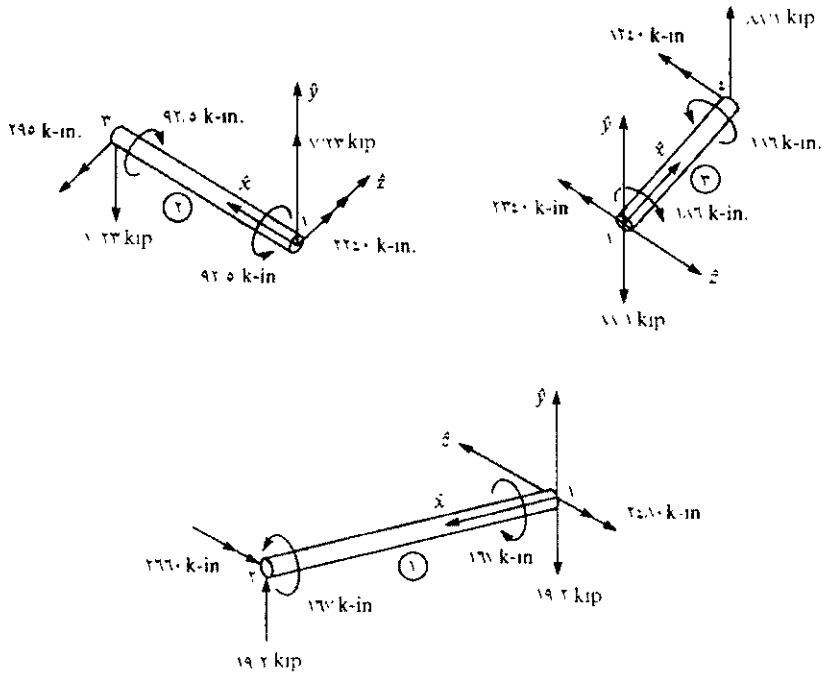
$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_{1x} \\ \hat{m}_{1z} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_{2x} \\ \hat{m}_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷/۴۵ & \cdot & ۱۰۰۰ & -۷/۴۵ & \cdot & ۱۰۰۰ \\ \cdot & ۴۹۲۰ & \cdot & \cdot & -۴۹۲۰ & \cdot \\ ۱۰۰۰ & \cdot & ۱۷۹۰۰۰ & -۱۰۰۰ & \cdot & ۸۹۵۰۰ \\ -۷/۴۵ & \cdot & -۱۰۰۰ & ۷/۴۵ & \cdot & -۱۰۰۰ \\ \cdot & -۴۹۲۰ & \cdot & \cdot & ۴۹۲۰ & \cdot \\ ۱۰۰۰ & \cdot & ۸۹۵۰۰ & -۱۰۰۰ & \cdot & ۱۷۹۰۰۰ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -۲/۸۳ \\ -\cdot/۰.۳۳۹ \\ \cdot/۰.۰۱۹۲ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

(۳۱-۴-۵)

از ضرب ماتریس‌ها در معادله‌ی (۳۱-۴-۵)، نیروهای محلی در المان برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_{1x} \\ \hat{m}_{1z} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_{2x} \\ \hat{m}_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19/2 \text{ kip} \\ -167 \text{ k-in.} \\ -2480 \text{ k-in.} \\ 19/2 \text{ kip} \\ 167 \text{ k-in.} \\ -2660 \text{ k-in.} \end{Bmatrix} \quad (32-4-5)$$

جهت نیروهای عمل کننده بر المان ۱ در نمودار جسم آزاد این المان، مطابق شکل ۵-۱۹، نشان داده شده است.



شکل ۵-۱۹ نمودار جسم آزاد المانهای مندرج در شکل ۵-۱۸ همراه با محور مختصات محلی هر المان

المان ۲

متشابهاً، با استفاده از رابطه‌ی $\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{K}}_G \underline{T}_G \underline{d}$ برای المان ۲ داریم:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_{1x} \\ \hat{m}_{1z} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_{2x} \\ \hat{m}_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/45 & 0 & 1000 & -7/45 & 0 & 1000 \\ 0 & 4920 & 0 & 0 & -4920 & 0 \\ 1000 & 0 & 179000 & -1000 & 0 & 89500 \\ -7/45 & 0 & -1000 & 7/45 & 0 & -1000 \\ 0 & -4920 & 0 & 0 & 4920 & 0 \\ 1000 & 0 & 89500 & -1000 & 0 & 179000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0/894 & -0/477 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0/477 & -0/894 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0/894 & -0/477 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0/477 & -0/894 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2/83 \\ 0/295 \\ -0/169 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(۳۳-۴-۵)

از ضرب ماتریس‌ها در معادله‌ی (۳۳-۴-۵)، نیروهای محلی در المان به شرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\hat{f}_{1y} = 7/32 \text{ kip}$$

$$\hat{m}_{1x} = -92/5 \text{ k-in.}$$

$$\hat{m}_{1z} = 2240 \text{ k-in.}$$

$$\hat{f}_{2y} = -7/23 \text{ kip}$$

$$\hat{m}_{2x} = 92/5 \text{ k-in.}$$

$$\hat{m}_{2z} = -295 \text{ k-in.}$$

(۳۴-۴-۵)

المان ۳

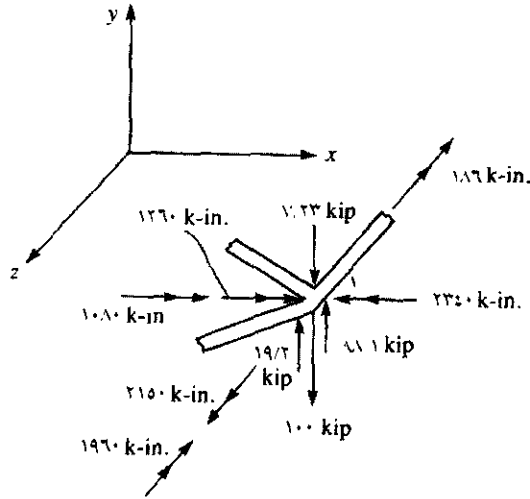
در نهایت با استفاده از کسینوس‌های هادی در روابط (۵-۴-۲۵)، نیروهای محلی در این المان به شرحی است که آورده شده است:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_{1x} \\ \hat{m}_{1z} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_{2x} \\ \hat{m}_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸۳/۳ & ۰ & ۵۰۰۰ & -۸۳/۳ & ۰ & ۵۰۰۰ \\ ۰ & ۱۱۰۰۰ & ۰ & ۰ & -۱۱۰۰۰ & ۰ \\ ۵۰۰۰ & ۰ & ۴۰۰۰۰ & -۵۰۰۰ & ۰ & ۲۰۰۰۰ \\ -۸۳/۳ & ۰ & -۵۰۰۰ & ۸۳/۳۳ & ۰ & -۵۰۰۰ \\ ۰ & -۱۱۰۰۰ & ۰ & ۰ & ۱۱۰۰۰ & ۰ \\ ۵۰۰۰ & ۰ & ۲۰۰۰۰ & -۵۰۰۰ & ۰ & ۴۰۰۰۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -۲/۸۳ \\ ۰/۰.۲۹۵ \\ -۰/۰.۱۶۹ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix} \quad (۳۵-۴-۵)$$

از ضرب ماتریس‌ها در معادله‌ی (۳۵-۴-۵)، نیروهای محلی در المان به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1y} &= -۸۸/۱ \text{ kip} \\ \hat{m}_{1x} &= ۱۸۶ \text{ k-in.} \\ \hat{m}_{1z} &= -۲۳۴۰ \text{ k-in.} \\ \hat{f}_{2y} &= ۸۸/۱ \text{ kip} \\ \hat{m}_{2x} &= -۱۸۶ \text{ k-in.} \\ \hat{m}_{2z} &= -۸۲۴۰ \text{ k-in.} \end{aligned} \quad (۳۶-۴-۵)$$

نمودار جسم آزاد کلیه‌ی المان‌ها در شکل ۱۹-۵ نشان داده شده است. هر المان در حال تعادل است. در هر المان، جهت محور \hat{x} از گره اول به سمت گره دوم، محور \hat{y} منطبق با محور اصلی y و محور \hat{z} عمود بر صفحه‌ی $x-y$ در جهتی همسو با قانون دست راست است.



شکل ۲۰-۵ نمودار جسم آزاد گره ۱ در شکل ۱۸-۵

همان‌طور که در شکل ۲۰-۵ نشان داده شده، به منظور بازیابی تعادل در گره ۱، نمودار جسم آزاد آن گره را همراه با کلیه‌ی نیروها و گشتاورهای ناشی از گره ۱ دیگر المان‌ها را رسم می‌کنیم. در شکل ۲۰-۵، نیروها و گشتاورهای محلی هر المان به مؤلفه‌های اصلی انتقال یافته و کلیه‌ی نیروهای گره‌ای نیز منظور شده‌اند. به منظور انجام این انتقال، لازم به یادآوری است که به طور کلی، $\underline{f} = \underline{T} \underline{\hat{f}}$ و در نتیجه، $\underline{f} = \underline{T}^T \underline{\hat{f}}$ ، زیرا $\underline{T}^T = \underline{T}^{-1}$ از آن‌جا که در حال انتقال نیروهای هر المان در گره ۱ می‌باشیم، لذا نیاز است تا فقط بخش 3×3 بالایی معادله‌ی (۱۸-۴-۵) بر \underline{T}_G اعمال شود. بنابراین از

پیش ضرب نیروها و گشتاورهای محلی هر المان در گره ۱، در برگردان ماتریس انتقال هر المان، نیروها و گشتاورهای گره‌ای اصلی به شرح زیر حاصل می‌شوند:

المان ۱

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_{1x} \\ m_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0/894 & -0/447 \\ 0 & 0/447 & -0/894 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -19/2 \\ -167 \\ -2480 \end{Bmatrix}$$

پس از ساده کردن، نیروها و گشتاورها در مختصات اصلی برابرند با:

$$f_{1y} = -19/2 \text{ kip} \quad m_{1x} = 1260 \text{ k-in.} \quad m_{1z} = 2150 \text{ k-in.} \quad (37-4-5)$$

در جایی که $f_{1y} = \hat{f}_{1y}$ ، زیرا $y = \hat{y}$.

المان ۲

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_{1x} \\ m_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0/894 & -0/447 \\ 0 & 0/447 & -0/894 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7/23 \\ -92/5 \\ 2240 \end{Bmatrix}$$

پس از ساده کردن، نیروها و گشتاورها در مختصات اصلی برابرند با:

$$f_{1y} = 7/23 \text{ kip} \quad m_{1x} = 1080 \text{ k-in.} \quad m_{1z} = -1960 \text{ k-in.} \quad (38-4-5)$$

المان ۳

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_{1x} \\ m_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -88/1 \\ 186 \\ -2340 \end{Bmatrix}$$

پس از ساده کردن، نیروها و گشتاورها در مختصات اصلی برابرند با:

$$f_{1y} = -88/1 \text{ kip} \quad m_{1x} = -2340 \text{ k-in.} \quad m_{1z} = -186 \text{ k-in.} \quad (5-4-39)$$

سپس نیروها و گشتاورهای هر المان که اندازه‌ی آنها با هم برابر و جهت آنها مخالف هم است بر گره ۱ اعمال می‌شوند. بر همین اساس، نمودار جسم آزاد گره ۱ در شکل ۵-۲۰ نشان داده شده است. تعادل نیروها و گشتاورها به شرح زیر بازمینی می‌شوند:

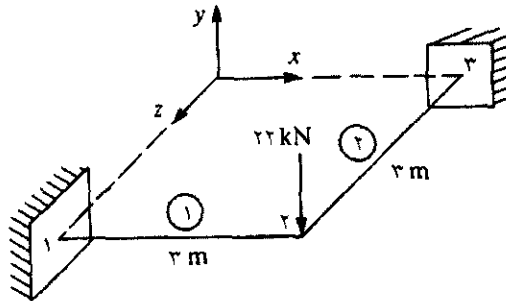
$$\begin{aligned} \sum F_{1y} &= -100 - 7/23 + 19/2 + 88/1 = 0/07 \text{ kip} && \text{نزدیک به صفر} \\ \sum M_{1x} &= -1260 - 1080 + 2340 = 0/0 \text{ k-in.} \\ \sum M_{1z} &= -2150 + 1960 + 186 = -4/00 \text{ k-in.} && \text{نزدیک به صفر} \end{aligned}$$

بنابراین نشان داده‌ایم که جواب‌های به دست آمده، با دقت قابل قبولی که از حل دستی انتظار می‌رود، صحیح می‌باشند.

مثال ۵-۶.

شبکه نشان داده شده در شکل ۵-۲۱ را تحلیل نمایید. این شبکه که از دو المان تشکیل شده، در گره‌های ۱ و ۳ ثابت، و در معرض باری برابر ۲۲ kN به سمت پایین قرار گرفته است. محور مختصات اصلی و طول المان‌ها در شکل نشان داده شده‌اند. فرض کنید: $E = 210 \text{ Gpa}$ ، $G = 84 \text{ Gpa}$ ، $I = 16/6 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ، و $J = 4/6 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ همانند مسأله‌ی ۵-۵، از شرایط مرزی استفاده نموده و فقط آن جزء از ماتریس سختی استفاده می‌شود که با گره ۲ مرتبط است. شرایط مرزی در گره‌های ۱ و ۳ به شرح زیرند:

$$d_{1y} = \phi_{1x} = \phi_{1z} = 0 \quad d_{2y} = \phi_{2x} = \phi_{2z} = 0 \quad (5-4-40)$$



شکل ۵-۲۱ شبکه‌ی مورد نظر

ماتریس سختی اصلی هر المان به شرح زیر حاصل می‌شود.

المان ۱

در المان ۱ محور محلی \hat{x} بر محور اصلی x منطبق است؛ بنابراین

داریم:

$$C = \frac{x_2 - x_1}{L^{(1)}} = \frac{3}{3} = 1 \quad S = \frac{z_2 - z_1}{L^{(1)}} = \frac{3 - 3}{3} = 0$$

دیگر روابط لازم برای محاسبه‌ی ماتریس سختی عبارتند از:

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(16/6 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(3 \text{ m})^3} = 1/50 \times 10^{-4}$$

$$\frac{6EI}{L^3} = \frac{6(210 \times 10^6)(16/6 \times 10^{-6})}{(3)^3} = 2/32 \times 10^{-4}$$

(۵-۳-۴۱)

$$\frac{GJ}{L} = \frac{(84 \times 10^6)(4/6 \times 10^{-6})}{3} = 1/28 \times 10^{-3}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(210 \times 10^6)(16/6 \times 10^{-6})}{3} = 4/75 \times 10^{-4}$$

با توجه به شرایط مرزی مندرج در معادلات (۴۰-۴-۵)، ضمن جای‌گزینی نتایج حاصل از معادلات (۴۱-۴-۵) در معادله‌ی (۱۷-۴-۵) برای \underline{k}_G ، و معادله‌ی (۱۸-۴-۵) برای \underline{T}_G ، و نهایتاً اعمال معادله‌ی (۱۹-۴-۵)، بخش تقلیل یافته‌ی ماتریس سختی اصلی مرتبط با درجه‌های آزادی گره ۲ برابر است با:

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/55 & 0 & -2/32 \\ 0 & 0/128 & 0 \\ -2/32 & 0 & 4/65 \end{bmatrix} (1,4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از آن‌جا که محورهای محلی المان ۱ با محورهای اصلی موازیند، لذا مشاهده می‌شود که \underline{T}_G صرفاً ماتریسی واحد است؛ بنابراین، $\underline{k}_G = \underline{k}_G$. از ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/55 & 0 & -2/32 \\ 0 & 0/128 & 0 \\ -2/32 & 0 & 4/65 \end{bmatrix} (1,4) \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (42-4-5)$$

المان ۲

در این المان، به منظور تعیین ماتریس \underline{k} ، فرض می‌شود جهت محور محلی \hat{x} از گره ۲ به سمت گره ۳ نشانه می‌رود؛ بنابراین،

$$C = \frac{x_3 - x_2}{L^{(2)}} = \frac{0 - 0}{3} = 0 \quad S = \frac{z_3 - z_2}{L^{(2)}} = \frac{0 - 3}{3} = -1 \quad (43-4-5)$$

دیگر عبارات قید شده در معادله‌ی (۱۷-۴-۵)، شبیه به آن‌هایی است که در معادله‌ی (۴۱-۴-۵) برای المان ۱ آورده شد. ضمن ارزیابی معادله‌ی (۱۹-۴-۵) برای ماتریس

سختی اصلی، داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/55 & 0 & 2/32 \\ 0 & 0/128 & 0 \\ 2/32 & 0 & 4/65 \end{bmatrix} (1,4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در جایی که بخش تقلیل یافته‌ی \underline{k} در المان ۲ با گره ۲ مرتبط است. مجدداً، از ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/55 & 2/32 & 0 \\ 2/32 & 4/65 & 0 \\ 0 & 0 & 0/128 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1.4 \\ \\ \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (44-4-5)$$

از انطباق ماتریس‌های سختی اصلی مندرج در معادلات (۴۲-۴-۵)، و (۴۴-۴-۵)، ماتریس سختی اصلی کل (با احتساب شرایط مرزی) به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$\underline{k}_G = \begin{bmatrix} 3/10 & 2/32 & -2/32 \\ 2/32 & 4/78 & 0 \\ -2/32 & 0 & 4/78 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1.4 \\ \\ \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (45-4-5)$$

معادلات ماتریسی شبکه برابرند با:

$$\begin{cases} F_{ry} = -22 \\ M_{rx} = 0 \\ M_{rz} = \end{cases} = \begin{bmatrix} 3/10 & 2/32 & -2/32 \\ 2/32 & 4/78 & 0 \\ -2/32 & 0 & 4/78 \end{bmatrix} \begin{cases} d_{ry} \\ \phi_{rx} \\ \phi_{rz} \end{cases} \begin{pmatrix} 1.4 \\ \\ \end{pmatrix} \quad (46-4-5)$$

پس از محاسبه‌ی جابه‌جایی و چرخش‌ها از معادله‌ی (۴۶-۴-۵) داریم:

$$d_{ry} = -0.259 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\phi_{rx} = 0.126 \times 10^{-2} \text{ rad} \quad (47-4-5)$$

$$\phi_{rz} = -0.126 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

حال نیروهای محلی در هر المان را از اعمال رابطه‌ی محلی $\underline{f} = \underline{k}_G \underline{I}_G \underline{d}$ به شرح زیر محاسبه می‌کنیم.

المان ۱

با استفاده از معادله‌ی (۱۷-۴-۵) برای \hat{k}_G ، معادله‌ی (۱۸-۴-۵) برای \underline{T}_G و روابط (۴۷-۴-۵)، داریم:

$$\underline{T}_G \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.259 \times 10^{-2} \\ 0.126 \times 10^{-2} \\ -0.126 \times 10^{-2} \end{Bmatrix}$$

از ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\underline{T}_G \underline{d} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.259 \times 10^{-2} \\ 0.126 \times 10^{-2} \\ -0.126 \times 10^{-2} \end{Bmatrix} \quad (48-4-5)$$

با استفاده از معادلات (۱۷-۴-۵)، (۴۱-۴-۵)، و (۴۸-۴-۵)، نیروهای محلی در المان به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1y} \\ \hat{m}_{1x} \\ \hat{m}_{1z} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{m}_{2x} \\ \hat{m}_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1/55 & 0 & 2/32 & -1/55 & 0 & 2/32 \\ 0/128 & 0 & 0 & -0/128 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/56 & -2/32 & 0 & 2/32 \\ 0 & 0 & 1/55 & 0 & -2/32 & 0 \\ متقارن & 0 & 0/128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/56 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.259 \times 10^{-2} \\ 0.126 \times 10^{-2} \\ -0.126 \times 10^{-2} \end{Bmatrix} \quad (49-4-5)$$

از ضرب ماتریس‌ها در معادله‌ی (۴۹-۴-۵) داریم:

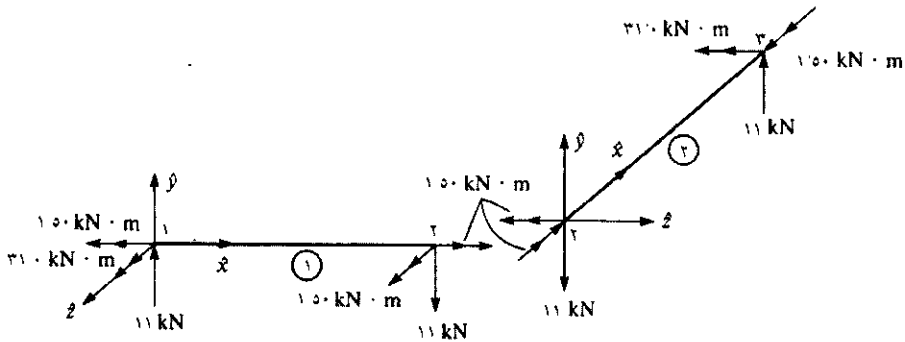
$$\begin{aligned} \hat{f}_{1y} &= 11/0 \text{ kN} & \hat{m}_{1x} &= -1/50 \text{ kN} \cdot \text{m} & \hat{m}_{1z} &= 31/0 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ \hat{f}_{2y} &= -11/0 \text{ kN} & \hat{m}_{2x} &= 1/50 \text{ kN} \cdot \text{m} & \hat{m}_{2z} &= 1/50 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (50-4-5)$$

المان ۲

به طریقی مشابه، می‌توان نیروهای محلی در المان ۲ را به دست آورد. از آن‌جا که روش محاسبات شبیه به روش اتخاذ شده در محاسبه‌ی نیروهای محلی در المان ۱ است؛ لذا از بیان جزئیات خود داری کرده و فقط به ذکر نتایج نهایی بسنده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{2y} &= -11/0 \text{ kN} & \hat{m}_{2x} &= 1/50 \text{ kN} \cdot \text{m} & \hat{m}_{2z} &= -1/50 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ \hat{f}_{2y} &= 11/0 \text{ kN} & \hat{m}_{2x} &= -1/50 \text{ kN} \cdot \text{m} & \hat{m}_{2z} &= -31/0 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (51-4-5)$$

نمودارهای جسم آزادی که در آن‌ها نیروهای محلی هر المان نشان داده شده‌اند در شکل ۲۲-۵ آورده شده‌اند.

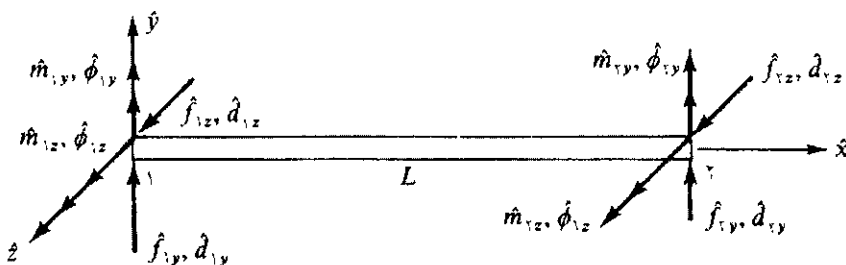


شکل ۲۲-۵ نمودار جسم آزاد المان‌های مندرج در شکل ۲۱-۵

۵-۵ المان تیر با جهتی دلخواه در فضا

در این بخش ماتریس سختی المان تیرآهنی را که دارای جهتی دلخواه در فضایی سه بعدی است استخراج می‌کنیم. از این المان می‌توان بعداً در تحلیل قاب‌ها در فضایی سه بعدی استفاده نمود.

ابتدا، همان‌طور که در شکل ۵-۲۳ نشان داده شده، خمش حول دو محور را نظر می‌گیریم.



شکل ۵-۲۳ خمش حول محورهای \hat{y} و \hat{z}

برای محورها، علامت قراردادی زیر را پایه ریزی می‌کنیم. بدین منظور محور مثبت \hat{x} را از گره ۱ به سمت گره ۲ انتخاب می‌کنیم. سپس، محور \hat{y} را به عنوان محور اصلی، که ممان اینرسی I_y حول آن مینیمم است، انتخاب می‌کنیم. با استفاده از قانون دست راست محور \hat{z} را مشخص نموده و حداکثر ممان اینرسی را با I_z نشان می‌دهیم.

خمش در صفحه $\hat{x}-\hat{z}$

ابتدا خمش در صفحه $\hat{x}-\hat{z}$ را که از \hat{m}_y ناشی می‌شود در نظر می‌گیریم. در این حالت چرخش ساعتگرد $\hat{\phi}_y$ در همان جهت که برای خمش ساده منظور شد

انتخاب می‌شود. تحت چنین شرایطی، ماتریس سختی به ازای خمش در صفحه‌ی $\hat{x}-\hat{z}$ به شرح زیر است:

$$\hat{k}_y = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12L & -6L^2 & -12L & -6L^2 \\ 6L^2 & 6L^2 & 6L^2 & 6L^2 \\ 12L & 6L^2 & 12L & 6L^2 \\ \text{متقارن} & & & 6L^2 \end{bmatrix} \quad (1-5-5)$$

در جایی که I_y ممان اینرسی سطح مقطع حول محور اصلی \hat{y} ، یا محور مرتبط با اندازه‌ی کوچک‌تر است. به عبارتی، $I_y < I_z$.

خمش در صفحه $\hat{z}-\hat{y}$

حال خمش در صفحه‌ی $\hat{x}-\hat{y}$ را که از \hat{m}_z ناشی می‌شود در نظر می‌گیریم. در این جا چرخش مثبت $\hat{\phi}_z$ به جای ساعتگرد، پاد ساعتگرد است؛ بنابراین، بعضی از علامات در ماتریس سختی سختی به ازای خمش در صفحه‌ی $\hat{x}-\hat{y}$ عوض می‌شوند. نتیجتاً، ماتریس سختی برابر است با:

$$\hat{k}_z = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12L & 6L^2 & -12L & 6L^2 \\ 6L^2 & -6L^2 & 6L^2 & 6L^2 \\ 12L & 6L^2 & 12L & 6L^2 \\ \text{متقارن} & & & 6L^2 \end{bmatrix} \quad (2-5-5)$$

از انطباق مستقیم معادلات (1-5-5) و (2-5-5) با ماتریس سختی محوری معادله‌ی (3-1-14) و ماتریس سختی پیچشی معادله‌ی (5-4-14)، ماتریس سختی المانی از یک تیر یا قاب در فضایی سه بعدی به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{12EI_z}{L^3} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{6EI_z}{L^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{12EI_y}{L^3} & \cdot & \cdot & \frac{6EI_y}{L^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{GJ}{L} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI_x}{L^3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{6EI_y}{L^2} & \cdot & \cdot & \frac{AE}{L} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{GJ}{L} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI_x}{L^3} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI_y}{L^3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI_z}{L^3} \end{bmatrix}$$

(۳-۰-۰)

انتقال از محور مختصات محلی به مختصات اصلی به شرح زیر انجام می شود.

$$\underline{k} = \underline{T}^T \hat{k} \underline{T} \tag{۴-۰-۰}$$

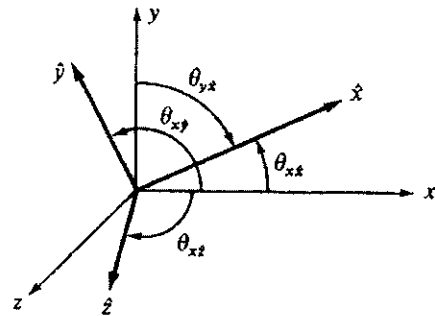
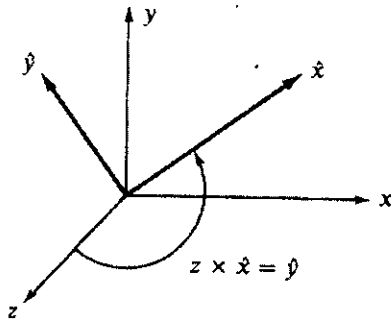
در جایی که \hat{k} توسط رابطه (۳-۰-۰) و \underline{T} از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{\lambda}_{rxr} & & & \\ & \underline{\lambda}_{ryr} & & \\ & & \underline{\lambda}_{rzr} & \\ & & & \underline{\lambda}_{rxr} \end{bmatrix} \tag{۵-۰-۰}$$

در جایی که

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} C_{x\hat{x}} & C_{y\hat{x}} & C_{z\hat{x}} \\ C_{x\hat{y}} & C_{y\hat{y}} & C_{z\hat{y}} \\ C_{x\hat{z}} & C_{y\hat{z}} & C_{z\hat{z}} \end{bmatrix} \quad (7-0-0)$$

در این جا $C_{y\hat{x}}$ و $C_{z\hat{x}}$ لزوماً با هم برابر نیستند. تعدادی از کسینوس های هادی در شکل ۲۴-۵ نشان داده شده اند.



شکل ۲۵-۵ نمایش نحوه ی انتخاب

شکل ۲۴-۵ کسینوس های هادی محور x

محور محلی \hat{y}

لازم به یادآوری است که کسینوس های هادی عضو منطبق با محور \hat{x} برابرند با:

$$\hat{x} = \cos \theta_{x\hat{x}} \bar{i} + \cos \theta_{y\hat{x}} \bar{j} + \cos \theta_{z\hat{x}} \bar{k} \quad (7-0-0)$$

در جایی که

$$\cos \theta_{x\hat{x}} = \frac{x_2 - x_1}{L} = l$$

$$\cos \theta_{y\hat{x}} = \frac{y_2 - y_1}{L} = m \quad (8-0-0)$$

$$\cos \theta_{z\hat{x}} = \frac{z_2 - z_1}{L} = n$$

همان‌طور که در شکل ۲۵-۵ نشان داده شده، محور \hat{x} به نحوی عمود بر \hat{x} و \hat{z} انتخاب شده است که از حاصل ضرب برداری محور اصلی z در \hat{x} ، حاصل می‌شود. بنابراین،

$$z \times \hat{x} = \hat{y} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l & m & n \end{vmatrix} \quad (9-5-5)$$

$$\hat{y} = -\frac{m}{D} \bar{i} + \frac{l}{D} \bar{j} \quad (10-5-5)$$

$$D = (l^2 + m^2)^{1/2} \quad \text{و}$$

محور \hat{z} با توجه به شرط تعامد $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$ ، به شرح زیر، مشخص خواهد شد:

$$\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l & m & n \\ -m & l & \cdot \end{vmatrix} \quad (11-5-5)$$

یا

$$\hat{z} = -\frac{ln}{D} \bar{i} - \frac{mn}{D} \bar{j} + D \bar{k} \quad (12-5-5)$$

از ترکیب معادلات (۷-۵-۵)، (۱۰-۵-۵) و (۱۲-۵-۵)، ماتریس 3×3 انتقال برابر است با:

$$\underline{\lambda}_{T \times T} = \begin{bmatrix} l & m & n \\ -\frac{m}{D} & \frac{l}{D} & \cdot \\ -\frac{ln}{D} & -\frac{mn}{D} & D \end{bmatrix} \quad (13-5-5)$$

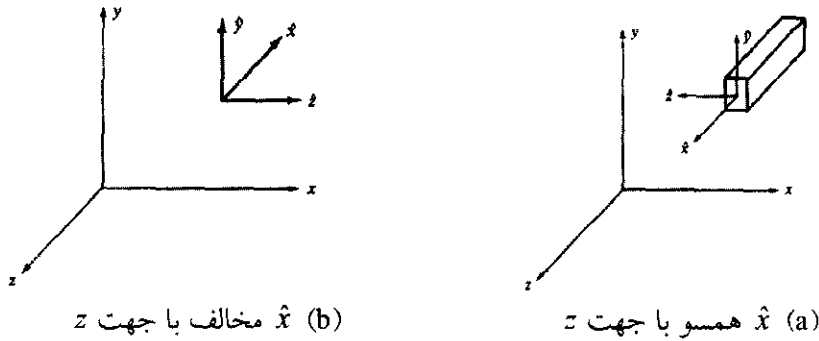
از طریق $\underline{\lambda}$ ، می‌توان هر برداری را از محور مختصات محلی به مختصات اصلی انتقال داد. $\underline{\lambda}$ همان برداری است که در ماتریس \underline{T} از آن استفاده شد. به طور خلاصه، داریم:

$$\begin{aligned}\cos \theta_{x\hat{x}} &= \frac{-m}{D} \\ \cos \theta_{y\hat{y}} &= \frac{l}{D} \\ \cos \theta_{z\hat{y}} &= 0 \\ \cos \theta_{x\hat{z}} &= -\frac{\ln}{D} \\ \cos \theta_{y\hat{z}} &= -\frac{mn}{D} \\ \cos \theta_{z\hat{z}} &= D\end{aligned}\quad (14-0-0)$$

چنانچه محور مختصات اصلی و محلی در دو حالت خاص نسبت به یکدیگر قرار گیرند، دو استثنا به وجود می‌آید. اگر مطابق شکل ۵-۲۶(a) محور محلی \hat{x} بر محور اصلی z منطبق شود، در آن صورت عضو با محور اصلی z موازی بوده و محور \hat{y} دلخواه است. تحت چنین شرایطی محور \hat{y} همسو با محور y در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین، به ازای حالتی که در آن محور مثبت \hat{x} با محور z موازی است $\underline{\lambda}$ برابر است با:

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (15-0-0)$$

چنانچه محور مثبت \hat{x} موازی در خلاف محور اصلی z باشد [شکل ۵-۲۶(b)]، در آن صورت $\underline{\lambda}$ برابر است با:



شکل ۵-۲۶ حالات خاص ماتریس‌های انتقال

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16-0-0)$$

مثال ۵-۷

در المان تیرآهنی با مختصات گره‌های انتهایی $1 (0, 0, 0)$ و $2 (3, 4, 12)$ ، که در فضایی سه بعدی مطابق شکل ۵-۲۷ قرار گرفته، کسینوس‌های هادی و ماتریس دوران را در مختصات محلی \hat{x} ، \hat{y} ، و \hat{z} نسبت به مختصات اصلی x ، y ، و z بیابید.

ابتدا طول المان را به شرح زیر تعیین می‌کنیم.

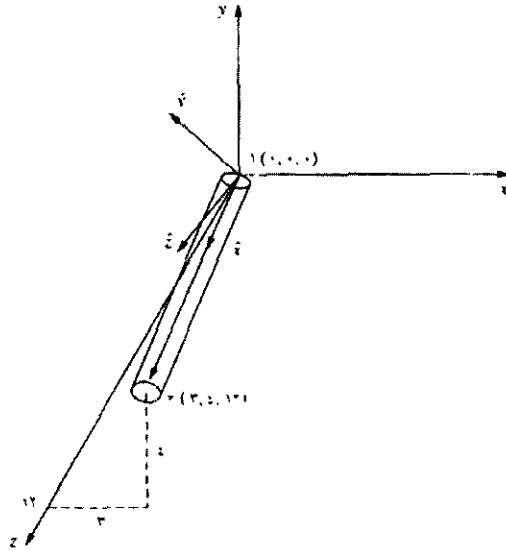
$$L = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

حال با استفاده از معادله‌ی (۵-۵-۸)، کسینوس‌های هادی محور \hat{x} را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$l_x = \frac{x_2 - x_1}{L} = \frac{3 - 0}{13} = \frac{3}{13}$$

$$l_y = \frac{y_2 - y_1}{L} = \frac{4 - 0}{13} = \frac{4}{13} \quad (17-5-5)$$

$$l_z = \frac{z_2 - z_1}{L} = \frac{12 - 0}{13} = \frac{12}{13}$$



شکل ۵-۲۷ المان تیر در فضایی سه بعدی

با توجه به روابط (۱۰-۵-۵) یا (۱۴-۵-۵)، کسینوس‌های هادی محور \hat{l} به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$D = (l^2 + m^2) = \left[\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{13} \quad (18-5-5)$$

کسینوس‌های هادی محور \hat{l} را در قالب l_y ، m_y ، و n_y به قسمی تعیین می‌کنیم که:

$$l_y = -\frac{m}{D} = -\frac{4}{3}$$

$$m_y = \frac{l}{D} = \frac{3}{5} \quad (19-0-0)$$

$$n_y = 0$$

در محور \hat{z} ، کسینوس‌های هادی را به صورت l_z ، m_z و n_z تعریف نموده و مجدداً، از معادله‌ی (۱۲-۰-۰) یا (۱۴-۰-۰) به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$l_z = -\frac{ln}{D} = \frac{\left(-\frac{3}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)}{\frac{5}{13}} = -\frac{36}{65}$$

$$m_z = -\frac{mn}{D} = \frac{\left(-\frac{4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)}{\frac{5}{13}} = -\frac{48}{65} \quad (20-0-0)$$

$$n_z = D = \frac{5}{13}$$

حال بررسی می‌کنیم که آیا رابطه‌ی $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ برقرار است یا خیر.

$$\frac{3^2 + 4^2 + 12^2}{13^2} = 1 \quad \text{برای } \hat{x}$$

$$\frac{(-4)^2 + 3^2}{5^2} = 1 \quad \text{برای } \hat{y} \quad (21-0-0)$$

$$\left(-\frac{36}{65}\right)^2 + \left(-\frac{48}{65}\right)^2 + \left(\frac{25}{65}\right)^2 = 1 \quad \text{برای } \hat{z}$$

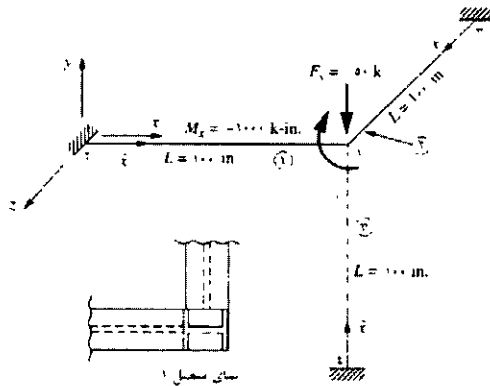
با توجه به معادله‌ی (۱۳-۰-۰)، ماتریس دوران برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 17 \\ 13 & 13 & 13 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ -36 & -48 & 5 \\ 65 & 65 & 13 \end{bmatrix} \quad (22-5-5)$$

با توجه به کسینوس‌های هادی به دست آمده در روابط (۱۷-۵-۵)، (۱۹-۵-۵) و (۲۰-۵-۵)، مختصات محلی در شکل ۲۷-۵ نشان داده شده‌اند.

مثال ۵-۸

در المان قابی که در فضایی سه بعدی مطابق شکل ۲۸-۵ قرار گرفته، تغییر مکان‌ها و دوران‌ها در گره آزاد (گره ۱) و نیز نیروها و گشتاورهای محلی در هر المان را بیابید. همچنین، صحت تعادل در گره ۱ را ارزیابی کنید. فرض کنید در هر سه المان تیر، $E = 30000 \text{ ksi}$ ، $G = 10000 \text{ ksi}$ ، $J = 50 \text{ in}^4$ ، $J_y = 100 \text{ in}^4$ ، $J_z = 100 \text{ in}^4$ و $A = 10 \text{ in}^2$ ، $L = 100 \text{ in}$.



شکل ۲۸-۵ قاب سه بعدی در تحلیل مورد نظر

از معادله‌ی (۴-۵-۵) به منظور تعیین ماتریس سختی اصلی هر المان استفاده می‌کنیم. این امر مستلزم آن است تا ابتدا با استفاده از معادله‌ی (۳-۵-۵)، ماتریس سختی محلی هر المان، و به کمک معادله‌ی (۵-۵-۵)، ماتریس انتقال هر المان، و نیز با استفاده از معادلات (۶-۵-۵) و (۱۴-۵-۵) ماتریس کسینوس‌های هادی هر المان را محاسبه می‌کنیم.

المان ۱

همان‌طور که در شکل ۲۸-۵ نشان داده شده محور محلی \hat{x} را به قسمی انتخاب می‌کنیم که از گره ۲ به سمت گره ۱ نشانه رود. بنابراین؛ با استفاده از معادله‌ی (۵-۵-۵)، کسینوس‌های هادی محور \hat{x} را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0 \quad (23-5-5)$$

همچنین،

$$D = (l^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} = 1$$

ضمن استفاده از معادلات (۱۰-۵-۵) و (۱۴-۵-۵)، کسینوس‌های هادی محور \hat{y} را به شرح زیر تعیین می‌کنیم:

$$l_y = -\frac{m}{D} = 0, \quad m_y = \frac{l}{D} = 1, \quad n_y = 0 \quad (24-5-5)$$

با استفاده از معادلات (۱۲-۵-۵) و (۱۴-۵-۵)، کسینوس‌های هادی محور \hat{z} را به شرح زیر تعیین می‌کنیم:

$$l_z = -\frac{ln}{D} = 0, \quad m_z = -\frac{mn}{D} = 1, \quad n_z = D = 1 \quad (25-5-5)$$

با استفاده از معادلات (۲۳-۵-۵) الی (۲۵-۵-۵) در معادلات (۱۳-۵-۵)، داریم:

نهایتاً، با استفاده از معادله‌ی (۴-۵-۵)، ماتریس سختی المان ۱ در مختصات اصلی برابر است با:

$$\underline{k}^{(1)} = \underline{I}^T \underline{k}^{(1)} \underline{I} = \begin{bmatrix} d_1 & d_{12} & d_{13} & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & d_4 & d_{42} & d_{43} & \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \\ 3 \times 10^7 & . & . & . & . & . & -3 \times 10^7 & . & . & . & . & . \\ . & 3 & . & . & . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & -3 & . & . & . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 \\ . & . & 3 & . & -1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & . & . & -3 & . & -1/\sqrt{2} \times 10^7 & . \\ . & . & . & 0 \times 10^7 & . & . & . & . & . & -0 \times 10^7 & . & . \\ . & . & -1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & 1/2 \times 10^7 & . & . & . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & 3 \times 10^7 & . \\ . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & . & . & 1/2 \times 10^7 & . & -1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & . & . & 3 \times 10^7 \\ -3 \times 10^7 & . & . & . & . & . & 3 \times 10^7 & . & . & . & . & . \\ . & -3 & . & . & . & -1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & 3 & . & . & . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 \\ . & . & -3 & . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & . & . & 3 & . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 & . \\ . & . & . & -0 \times 10^7 & . & . & . & . & . & 0 \times 10^7 & . & . \\ . & . & -1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & 3 \times 10^7 & . & . & . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & 1/2 \times 10^7 & . \\ . & 1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & . & . & 3 \times 10^7 & . & -1/\sqrt{2} \times 10^7 & . & . & . & 1/2 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

(۲۹-۵-۵)

المان ۲

همان‌طور که در شکل ۲۰-۵ نشان داده شده محور محلی \hat{x} را به قسمی انتخاب می‌کنیم که از گره ۳ به سمت گره ۱ نشانه رود. ملاحظه می‌شود که محور مختصات محلی \hat{x} با محور مختصات اصلی Z منطبق می‌شود؛ بنابراین، با استفاده از معادله‌ی (۱۵-۵-۵).

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۰-۵-۵)$$

از آن‌جا که کلیه‌ی خصوصیات این المان همانند المان یک می‌باشند، لذا ماتریس سختی محلی شبیه به معادله‌ی داده شده در رابطه‌ی (۲۷-۵-۵) است. به هر حال، باید به خاطر داشت که درجه‌های آزادی ابتدا مرتبط با گره ۳ و سپس مرتبط با گره ۱ می‌باشند. ضمن جای‌گزینی معادله‌ی (۳۰-۵-۵) در رابطه‌ی (۵-۵-۵)، ماتریس انتقال را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم.

$$l = \frac{0-0}{100} = 0 \quad m = \frac{0-(100)}{100} = -1 \quad n = \frac{0-0}{100} = 0 \quad (33-0-0)$$

همچنین، $D = 1$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۴-۵-۵)، کسینوس‌های هادی دیگر را به شرح زیر محاسبه

می‌کنیم.

$$l_y = -\frac{m}{D} = 1 \quad m_y = \frac{L}{D} = 0 \quad n_y = 0 \quad (34-0-0)$$

و

$$l_z = -\frac{ln}{D} = 0 \quad m_z = -\frac{mn}{D} = 0 \quad n_z = D = 1 \quad (35-0-0)$$

ضمن استفاده از معادلات (۳۳-۵-۵) الی (۳۵-۵-۵)، داریم:

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36-0-0)$$

در این حالت، با استفاده از معادله‌ی (۵-۵-۵)، ماتریس انتقال در المان سه به شرح زیر

حاصل می‌شود:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37-0-0)$$

خصوصیات المان سه مشابه با خصوصیات المان یک است لذا ماتریس سختی محلی مشابه با معادله ای است که در رابطه ی (۲۷-۵-۵) داده شد. باید به خاطر داشت که در این هنگام، درجه های آزادی به ترتیب مرتبط با گره ۴ و سپس گره ۱ می باشند. ضمن جایگزینی معادله ی (۳۷-۵-۵) در رابطه ی (۴-۵-۵)، ماتریس سختی برای

المان سه، در مختصات اصلی، برابر است با:

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{11} & d_{13} & \phi_{12} & \phi_{11} & \phi_{13} & d_{22} & d_{21} & d_{23} & \phi_{22} & \phi_{21} & \phi_{23} \\ \pi & . & . & . & . & -\sqrt{\lambda x_1}^2 & -\pi & . & . & . & . & \sqrt{\lambda x_1}^2 \\ . & 3x_1^2 & . & . & . & . & . & -3x_1^2 & . & . & . & . \\ . & . & \pi & \sqrt{\lambda x_1}^2 & . & . & . & . & -\pi & \sqrt{\lambda x_1}^2 & . & . \\ . & . & \sqrt{\lambda x_1}^2 & \sqrt{2x_1}^2 & . & . & . & . & -\sqrt{\lambda x_1}^2 & 3x_1^2 & . & . \\ . & . & . & . & 0x_1^2 & . & . & . & . & . & -0x_1^2 & . \\ -\sqrt{\lambda x_1}^2 & . & . & . & . & \sqrt{2x_1}^2 & \sqrt{\lambda x_1}^2 & . & . & . & . & 3x_1^2 \\ -\pi & . & . & . & . & \sqrt{\lambda x_1}^2 & \pi & . & . & . & . & \sqrt{\lambda x_1}^2 \\ . & -3x_1^2 & . & . & . & . & . & 3x_1^2 & . & . & . & . \\ . & . & -\pi & -\sqrt{\lambda x_1}^2 & . & . & . & . & \pi & -\sqrt{\lambda x_1}^2 & . & . \\ . & . & \sqrt{\lambda x_1}^2 & 3x_1^2 & . & . & . & . & -\sqrt{\lambda x_1}^2 & \sqrt{2x_1}^2 & . & . \\ . & . & . & . & -0x_1^2 & . & . & . & . & . & 0x_1^2 & . \\ -\sqrt{\lambda x_1}^2 & . & . & . & . & 3x_1^2 & \sqrt{\lambda x_1}^2 & . & . & . & . & \sqrt{2x_1}^2 \end{bmatrix} \quad (38-0-0)$$

ضمن اعمال شرایط مرزی در قالب صفر بودن جابه‌جایی در گره‌های دو، سه، و چهار، در جهت‌های x ، y ، و z ، و نیز صفر بودن دوران همین گره‌ها حول محورهای یاد شده، ماتریس سختی تقلیل یافته حاصل می‌شود. همچنین، نیروی اعمال شده بر گره یک، در مختصات اصلی، در جهت y - عمل نموده و برابر است با $F_{1y} = -50$ kips در حالی که گشتاور اعمال شده بر این گره حول محور اصلی x برابر با $M_{1x} = -1000$ k-in. می‌باشد. با در نظر گرفتن موارد فوق، معادلات اصلی نهایی به شرح زیرند.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/0.72 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & -1/8 \times 10^3 & 1/8 \times 10^3 \\ 0 & 3/0.72 \times 10^3 & 0 & 1/8 \times 10^3 & 0 & -1/8 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 3/0.72 \times 10^3 & -1/8 \times 10^3 & 1/8 \times 10^3 & 0 \\ 0 & -1/8 \times 10^3 & -1/8 \times 10^3 & 2/45 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -1/8 \times 10^3 & 0 & 1/8 \times 10^3 & 0 & 2/45 \times 10^6 & 0 \\ 1/8 \times 10^3 & 1/8 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & 2/45 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ \phi_{1y} \\ \phi_{1z} \\ \phi_{1z} \end{Bmatrix} \quad (39-5-5)$$

نهایتاً، از حل همزمان تغییر مکان‌ها و دوران‌ها در گره یک، داریم:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 7/0.98 \times 10^{-6} \text{ in.} \\ -0/0.14 \text{ m.} \\ -2/352 \times 10^{-3} \text{ in.} \\ -3/996 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ 1/78 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ -1/0.33 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{bmatrix} \quad (40-5-5)$$

حال، با استفاده از معادله‌ی $\underline{f} = \underline{kTd}$ ، همان‌طور که قبلاً در مورد هر یک از المان‌های قاب و خرپای صفحه‌ای انجام شد، نیرو و گشتاور در هر المان را محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که در این‌جا بحث در مورد قاب سه بعدی است، نیروها و گشتاورهای

محلّی در هر المان، در قالب یک نیروی عمودی، دو نیروی برشی، یک کوپل پیچشی، و دو گشتاور خمشی در هر یک از دو انتهای المان خود را نشان می‌دهند.

المان ۱

با استفاده از معادله‌ی (۲۷-۵-۵) برای ماتریس سختی محلّی، معادله‌ی (۲۸-۵-۵) برای ماتریس انتقال \underline{T} ، و معادله‌ی (۴۰-۵-۵) برای تغییر مکان‌ها، نیروها و گشتاورهای محلّی در هر المان به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\underline{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} -۰/۲۱۳ \text{ Kip} \\ ۰/۳۱۶ \text{ Kip} \\ ۰/۰۵۳ \text{ Kip} \\ ۱۹/۹۸ \text{ Kip.in.} \\ -۳/۱۶۵ \text{ Kip.in.} \\ ۱۸/۹۹۱ \text{ Kip.in.} \\ ۰/۲۱۳ \text{ Kip} \\ -۰/۳۱۸ \text{ Kip} \\ -۰/۰۵۳ \text{ Kip} \\ -۱۹/۹۸ \text{ Kip.in.} \\ -۲/۰۹۷ \text{ Kip.in.} \\ ۱۲/۷۹ \text{ Kip.in.} \end{bmatrix} \quad (۴۱-۵-۵)$$

المان ۲

با استفاده از معادله‌ی (۲۷-۵-۵) برای ماتریس سختی محلّی، معادله‌ی (۲۸-۵-۵) برای ماتریس انتقال \underline{T} ، و معادله‌ی (۴۰-۵-۵) برای تغییر مکان‌ها، نیروها و گشتاورهای محلّی در هر المان به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\underline{\hat{f}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 7/0.56 \text{ Kip} \\ 7/697 \text{ Kip} \\ -0/0.29 \text{ Kip} \\ 0/517 \text{ Kip.in.} \\ 0/94 \text{ Kip.in.} \\ 264/957 \text{ Kip.in.} \\ -7/0.56 \text{ Kip} \\ -7/697 \text{ Kip} \\ 0/0.29 \text{ Kip} \\ -0/517 \text{ Kip.in.} \\ 2/0.8 \text{ Kip.in.} \\ 50.4/722 \text{ Kip.in.} \end{bmatrix} \quad (42-0-0)$$

المان ۳

متشابهاً، ضمن استفاده از معادلات (۲۷-۰-۰)، (۲۸-۰-۰)، و (۴۰-۰-۰) نیروها و

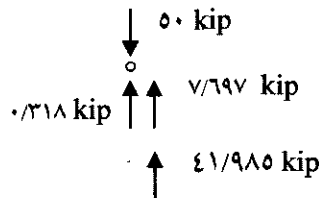
گشتاورهای محلی در هر المان به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\underline{\hat{f}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 41/985 \text{ Kip} \\ -0/183 \text{ Kip} \\ -7/108 \text{ Kip} \\ -0/0.89 \text{ Kip.in.} \\ 235/532 \text{ Kip.in.} \\ -7/0.73 \text{ Kip.in.} \\ -41/985 \text{ Kip} \\ 0/183 \text{ Kip} \\ 7/108 \text{ Kip} \\ 0/0.89 \text{ Kip.in.} \\ 475/297 \text{ Kip.in.} \\ -12/273 \text{ Kip.in.} \end{bmatrix} \quad (43-0-0)$$

حال می‌توان ضمن در نظر گرفتن نیروها و گشتاورهایی که از دیگر المان‌ها بر گره یک اعمال می‌شود تعادل در این گره را ارزیابی نمود. به منظور انتقال نیروها و گشتاورهای صحیح به گره ۱، از نتایج معادلات (۵-۵-۴۱)، (۵-۵-۴۲)، و (۵-۵-۴۳) استفاده می‌کنیم. (باید به خاطر داشت که بر اساس قانون سوم نیوتن، از هر یک از المان‌ها، نیروها و گشتاورهای مخالفی با مقادیر فوق، به گره یاد شده منتقل می‌شوند.) برای مثال، از جمع نیروها در محور اصلی λ مشاهده می‌شود که (در نموداری که متعاقباً آورده شده نشان داده شده است):

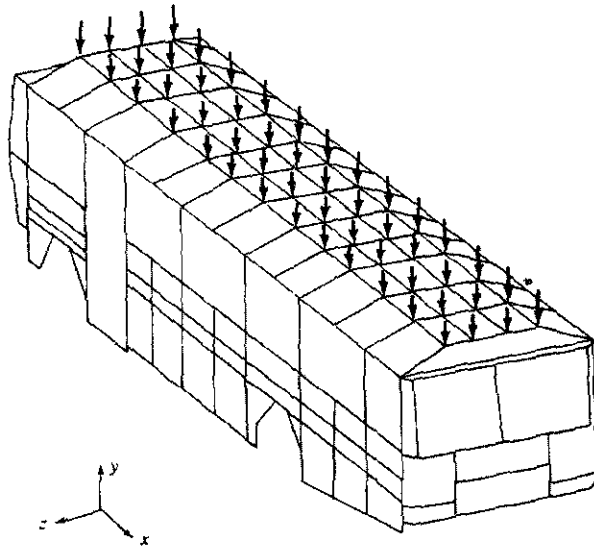
$$0.318 \text{ kip} + 7/697 \text{ kip} + 41/985 \text{ kip} - 50 \text{ kip} = 0 \quad (5-5-44)$$

در معادله‌ی (۵-۵-۴۴)، 0.318 kip ناشی از مؤلفه‌ی $\hat{\lambda}$ نیروی محلی در المان یک است که با جهت اصلی λ منطبق شده؛ $7/697 \text{ kip}$ ناشی از مؤلفه‌ی $\hat{\lambda}$ نیروی محلی در المان دو است که با جهت اصلی λ منطبق شده؛ در حالی که، $41/985 \text{ kip}$ ناشی از مؤلفه‌ی \hat{x} نیروی محلی در المان سه بوده که با جهت اصلی λ منطبق شده است. این سه محور در شکل ۵-۲۸ نشان داده شده‌اند. ارزیابی دیگر معادلات تعادل، به صلاح دید خودتان، به عهده شما واگذار می‌شوند.

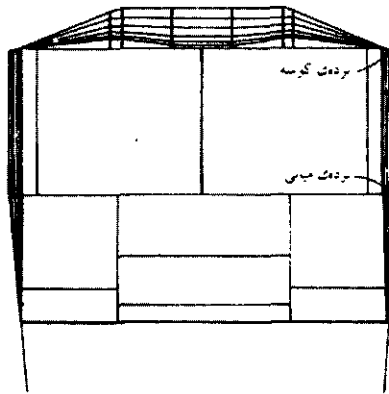


تعادل در راستای محور اصلی λ

مثالی که در آن از المان قاب در فضایی سه بعدی استفاده شده در شکل ۵-۲۹ نشان داده شده است. در این شکل، بدنه‌ی اتوبوسی که تحت تأثیر نیروی استاتیکی مترامی در سقف قرار گرفته تحلیل شده است. در این مدل از المان قاب و ۳۵۷ گره استفاده شده است. باری به بزرگی 100 kN به طور یکنواخت بر ۵۶ گره در قسمت سقف قاب تقسیم شده بود. شکل ۵-۳۰ نمایانگر قسمت پشتی قاب و شکل تغییر مکان یافته‌ی آن است. از قاب‌های مشابهی در شبیه‌سازی بارگذاری ناشی از معلق زدن و تصادف از سمت جلویی آن، در مرجع [۶] استفاده شده است.



شکل ۵-۲۹ مدل اجزای محدود اتوبوسی با بارگذاری سقفی

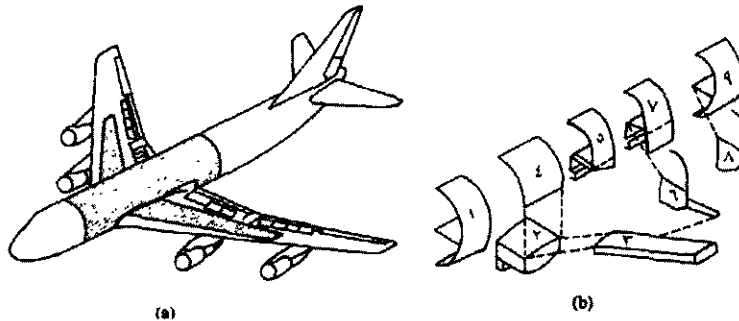


شکل ۵-۳۰ نمایی از قاب تغییر مکان یافته‌ی شکل ۵-۲۹ که از قسمت‌های چهار گوش تشکیل شده است

۵-۶ ایده‌ی تحلیل زیر سازه

در بسیاری از موارد، مشکل تکمیل شدن ظرفیت حافظه در رایانه‌های امروزه به میزان قابل توجهی کاهش یافته است. به هر حال، در سازه‌های بسار بزرگی که تحلیل آن‌ها به صورت یک سیستم جداگانه یا مجزا مشکل است؛ به عبارتی دیگر، ماتریس سختی نهایی و معادلات مورد نیاز برای حل مسأله مازاد بر حافظه‌ی موجود در رایانه است، می‌توان از ایده‌ی زیر سازه استفاده نمود. در این روش، به منظور غلبه بر این مشکل، کل سازه، به واحدهای کوچک‌تری تحت عنوان زیر سازه تقسیم می‌شود. برای مثال همان‌طور که در شکل ۵-۳۱ (a) نشان داده شده، به منظور مدل‌سازی و تشریح پاسخ کل سازه‌ی قاب فضایی یک هواپیما، ممکن است به هزاران گره و المان نیاز باشد. اگر هواپیما به زیر ساختارهایی از قبیل قطعات مختلف بدنه یا پوسته، قسمت‌های

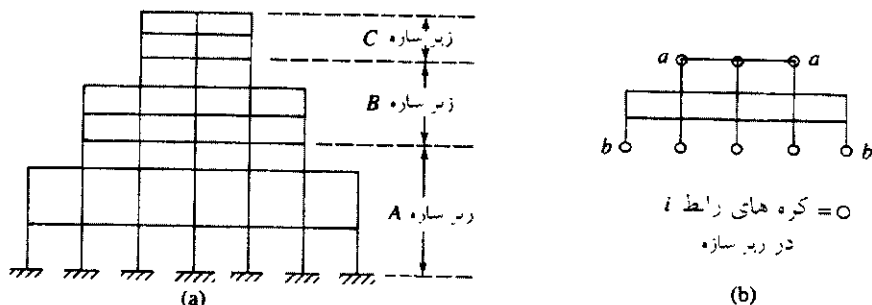
بال و غیره، مطابق شکل ۵-۳۱ (b) تقسیم شود در آن صورت می‌توان مسأله را راحت‌تر توسط رایانه‌هایی که دارای حافظه‌ی محدودی می‌باشند حل نمود.



شکل ۵-۳۱ قاب هواپیما همراه با زیر سازه‌ی آن (a) هواپیمای بویینگ ۷۴۷ (سطوح هاشور زده دلالت بر قسمت‌هایی از بدنه می‌نمایند که از روش اجزای محدود تحلیل شده‌اند). (b) زیر سازه‌های قسمت‌های هاشور زده شده در تحلیل اجزای محدود.

تحلیل سازه‌ی هواپیما با در نظر گرفتن هر یک از زیر سازه‌ها به طور جداگانه و با اعمال هم سازگاری در نیرو و تغییر مکان در محل اتصال هر یک از قسمت‌های تفکیک شده صورت گرفته است.

به منظور تشریح روش زیر سازه، قاب صلبی را مطابق شکل ۵-۳۲ در نظر می‌گیریم (اگرچه کل این قاب را می‌توان یک جا تحلیل نمود). ابتدا هر یک از زیر سازه‌ها را مشخص می‌کنیم. معمولاً، زیر سازه‌های یاد شده را به یک اندازه انتخاب نموده و به منظور کاهش محاسبات تعداد آن‌ها را حداقل انتخاب می‌کنیم. سپس قاب را به سه قسمت جداگانه‌ی A ، B ، و C تقسیم می‌کنیم.



شکل ۵-۳۲ (a) قاب صلب به کار رفته در تحلیل زیر سازه و (b) زیر سازه B

حال به عنوان نمونه، زیر سازه B را، که در شکل ۵-۳۲ (b) نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. این زیر سازه شامل تیرآهن‌های بالایی $a-a$ است؛ در حالی که تیرآهن‌های قسمت زیرین $b-b$ در زیر سازه A نشان داده شده‌اند، اگرچه تیرآهن‌های قسمت بالایی را می‌توان در زیر سازه C و تیرآهن‌های قسمت پایینی را در زیر سازه B منظور نمود.

معادلات نیرو-جاب‌جایی در زیر سازه B با جدا سازی نیروها و جاب‌جایی‌های

سطح مشترک از مقادیر مشابه درونی به شرح زیر تقسیم بندی می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} F_{-i}^B \\ F_e^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^B & K_{ie}^B \\ K_{ei}^B & K_{ee}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{-i}^B \\ d_e^B \end{Bmatrix} \quad (1-6-5)$$

در جایی که بالانویس B دلالت بر زیر سازه B ، زیر نویس i دلالت بر نیروها و جاب‌جایی‌های گره‌ای سطح مشترک، و بالانویس e دلالت بر نیروها و جاب‌جایی‌هایی می‌نماید که باید پس از خلاصه سازی استاتیکی حذف شوند. پس از خلاصه سازی استاتیکی، معادله‌ی (۱-۶-۵) برابر است با:

$$\underline{F}_i^B = \underline{K}_{ii}^B \underline{d}_i^B + \underline{K}_{ie}^B \underline{d}_e^B \quad (2-6-5)$$

$$\underline{F}_e^B = \underline{K}_{ei}^B \underline{d}_i^B + \underline{K}_{ee}^B \underline{d}_e^B \quad (3-6-5)$$

از حل معادله‌ی (۳-۶-۵) برای \underline{d}_e^B ، جابه‌جایی‌های داخلی به شرح زیر حذف می‌شوند.

$$\underline{d}_e^B = [\underline{K}_{ee}^B]^{-1} [\underline{F}_e^B - \underline{K}_{ei}^B \underline{d}_i^B] \quad (4-6-5)$$

سپس، از جای‌گزینی معادله‌ی (۴-۶-۵) برای \underline{d}_e^B در معادله‌ی (۲-۶-۵) داریم:

$$\underline{F}_i^B - \underline{K}_{ie}^B [\underline{K}_{ee}^B]^{-1} \underline{F}_e^B = (\underline{K}_{ii}^B - \underline{K}_{ie}^B [\underline{K}_{ee}^B]^{-1} \underline{K}_{ei}^B) \underline{d}_i^B \quad (5-6-5)$$

طبق تعریف،

$$\overline{\underline{F}}_i^B = \underline{K}_{ie}^B [\underline{K}_{ee}^B]^{-1} \underline{F}_e^B \quad \text{و} \quad \overline{\underline{K}}_{ii}^B = \underline{K}_{ii}^B - \underline{K}_{ie}^B [\underline{K}_{ee}^B]^{-1} \underline{K}_{ei}^B \quad (6-6-5)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۶-۵-۶) در (۵-۶-۵) داریم:

$$\underline{F}_i^B - \overline{\underline{F}}_i^B = \overline{\underline{K}}_{ii}^B \underline{d}_i^B \quad (7-6-5)$$

متشابهاً، می‌توان معادلات نیرو-جابه‌جایی را در زیر سازه‌های A و C نوشت. این معادلات را می‌توان همانند معادله‌ی (۱-۶-۵) تقسیم‌بندی نموده تا روابط زیر حاصل شوند:

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{F}_i^A \\ \underline{F}_e^A \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{K}_{ii}^A & \underline{K}_{ie}^A \\ \hline \underline{K}_{ei}^A & \underline{K}_{ee}^A \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{d}_i^A \\ \underline{d}_e^A \end{array} \right\} \quad (8-6-5)$$

از حذف \underline{d}_e^A داریم:

$$\underline{F}_i^A - \overline{\underline{F}}_i^A = \overline{\underline{K}}_{ii}^A \underline{d}_i^A \quad (9-6-5)$$

متشابهاً، در زیر سازه C داریم:

$$\underline{F}_i^C - \overline{\underline{F}}_i^C = \overline{\underline{K}}_{ii}^C \underline{d}_i^C \quad (10-6-5)$$

حال فرض می‌کنیم کل قاب از سوپر المان‌هایی همانند A ، B ، و C تشکیل شده است که در گره‌های سطح مشترک به یکدیگر متصل شده‌اند (هر یک از سوپر المان‌ها از مجموعه‌ای از المان‌های کوچک‌تر تشکیل شده‌اند). ضمن استفاده از هم‌سازگاری، داریم:

$$\underline{d}_{\text{تایپ}}^A = \underline{d}_{\text{تایپ}}^B \quad \text{و} \quad \underline{d}_{\text{تایپ}}^B = \underline{d}_{\text{تایپ}}^C \quad (11-6-5)$$

به عبارتی، جابه‌جایی‌ها در مقاطعی که برش خورده‌اند باید برابر باشند. حال پاسخ کل سازه را می‌توان از انطباق مستقیم معادلات (۷-۶-۵)، (۹-۶-۵)، و (۱۱-۶-۵) که در آن معادلات نهایی بر حسب جابه‌جایی سطوح مشترک فقط در هشت گره به طور مشترک تشریح شده‌اند به شرح زیر بیان نمود:

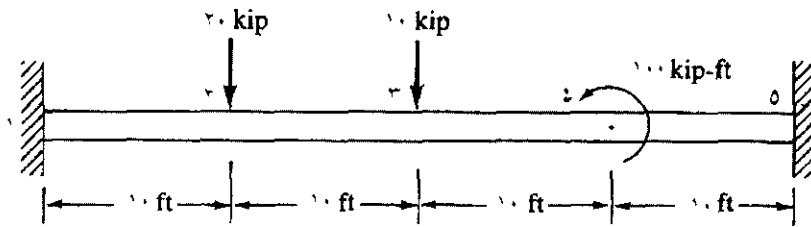
$$\underline{F}_i - \bar{\underline{F}}_i = \bar{\underline{K}}_{ii} \underline{d}_i \quad (12-6-5)$$

از حل معادله‌ی (۱۲-۶-۵)، جابه‌جایی‌های گره‌های مشترک حاصل می‌شوند. به منظور تعیین جابه‌جایی‌ها در هر زیر سازه، از معادلات نیرو-جابه‌جایی (۴-۶-۵) برای \underline{d}_e^B ، و معادلات مشابهی برای زیر سازه‌های A و C استفاده می‌شود. مثال ۵-۹، استفاده از ایده‌ی زیر سازه‌ها را تشریح می‌کند. به منظور حل دستی مسأله، از سازه‌ی نسبتاً ساده‌ای استفاده شده است.

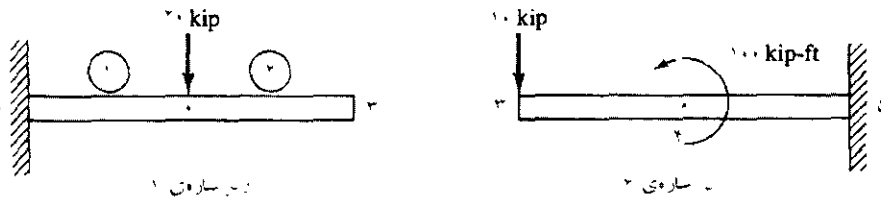
مثال ۵-۹

با استفاده از روش زیر سازه، مقادیر جابه‌جایی و چرخش در گره ۳ تیرآهن مندرج در شکل ۵-۲۳ را بیابید. فرض کنید $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$ و $I = 1000 \text{ in}^4$

به منظور تشریح ایده‌ی زیر سازه، تیرآهن را به دو زیر سازه به اسامی ۱ و ۲ در شکل ۳۴-۵ تقسیم می‌کنیم. بار 10 kip بر گره ۳ زیر سازه عمل می‌کند، اگرچه می‌توان آن را به هر یک از زیر سازه‌ها و یا جزیی از آن را به هر زیر سازه اختصاص نسبت داد.



شکل ۳۳-۵ تیرآهن تحت تحلیل از روش زیر سازه



۱- زیر سازه

۲- زیر سازه

شکل ۳۴-۵ تیرآهن مندرج در شکل ۳۳-۵ که به زیر سازه‌هایی تقسیم شده است

ماتریس سختی هر المان از معادله‌ی (۴-۱-۱۴) به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$\underline{k}^{(1)} = \underline{k}^{(2)} = \underline{k}^{(3)} = \underline{k}^{(4)} = \frac{29 \times 10^6}{(120)^2} \begin{bmatrix} 12 & 6(120) & -12 & 6(120) \\ 6(120) & 4(120)^2 & -6(120) & 2(120)^2 \\ -12 & -6(120) & 12 & -6(120) \\ 6(120) & 2(120)^2 & -6(120) & 4(120)^2 \end{bmatrix} \quad (13-6-5)$$

$$= 16/78 \begin{bmatrix} 12 & 720 & -12 & 720 \\ 720 & 57600 & -720 & 28800 \\ -12 & -720 & 12 & -720 \\ 720 & 28800 & -720 & 57600 \end{bmatrix} \quad (14-6-5)$$

در زیر سازه ۱، ماتریس‌های سختی المان‌های ۱ و ۲ را با هم جمع می‌کنیم. معادلات برابرند با:

$$16/78 \left[\begin{array}{cc|cc} 12+12 & -720+720 & -12 & 720 \\ -720+720 & 57600+57600 & -720 & 28800 \\ \hline -12 & -720 & 12 & -720 \\ 720 & 28800 & -720 & 28800 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ \phi \\ d_{2y} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15-6-5)$$

در جایی که از شرایط مرزی $d_{1y} = \phi = 0$ در کاهش معادلات استفاده شده است. از دوباره نویسی معادله‌ی (۱۵-۶-۵) در قالب جابه‌جایی‌های سطح مشترک این امکان فراهم می‌شود تا بتوان با استفاده از معادله‌ی (۶-۶-۵)، درجه‌های آزادی درونی d_{1y} و ϕ را حذف کرد و یا بیرون کشید.

$$\begin{aligned}
 16/78(12d_{r,y} - 72\phi_r - 12d_{r,y} - 72\phi_r) &= 0 \\
 16/78(-72d_{r,y} + 57,60\phi_r + 72d_{r,y} + 2880\phi_r) &= 0 \\
 16/78(-12d_{r,y} + 72\phi_r + 24d_{r,y} + \phi_r) &= -20 \quad (17-6-5) \\
 16/78(-72d_{r,y} - 72\phi_r + 0d_{r,y} + 11520\phi_r) &= 0
 \end{aligned}$$

با استفاده از معادله‌ی (6-6-5)، معادلات مرتبط با درجه‌های آزادی سطح مشترک به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 16/78 \left\{ \begin{bmatrix} 12 & -72 \\ -72 & 57,60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & -72 \\ 72 & 2880 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 11520 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -12 & 72 \\ -72 & 2880 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} d_{r,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} \\
 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & -72 \\ 72 & 2880 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 11520 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17-6-5)
 \end{aligned}$$

از ساده کردن معادله‌ی (17-6-5) داریم:

$$\begin{bmatrix} 25/17 & -30,2 \\ -30,2 & 483264 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{r,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 600 \end{Bmatrix} \quad (18-6-5)$$

در زیر سازه‌ی ۲، ماتریس سختی المان‌های ۳ و ۴ با را هم جمع می‌کنیم. روابط برابرند با:

$$16/78 \begin{bmatrix} 12 & 72 & -12 & 72 \\ 72 & 57,60 & -72 & 2880 \\ -12 & -72 & 12+12 & -72+72 \\ 72 & 2880 & -72+72 & 57,60+57,60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{r,y} \\ \phi_r \\ d_{i,y} \\ \phi_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 1200 \end{Bmatrix} \quad (19-6-5)$$

در جایی که از شرایط مرزی $d_{i,y} = \phi_i = 0$ در کاهش معادلات استفاده شده است.

با استفاده از خلاصه سازی استاتیکی، معادله‌ی (۶-۶-۵)، معادلات فقط بر حسب جابه‌جایی‌های $d_{r,y}$ و ϕ_r ، مرتبط با سطح مشترک، حاصل می‌شوند. این معادلات برابرند با:

$$16/78 \left\{ \begin{bmatrix} 12 & 720 \\ 720 & 57600 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & -720 \\ -720 & 28800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 115200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -720 \\ 720 & 28800 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} d_{r,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 720 \\ -720 & 28800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 115200 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1200 \end{Bmatrix} \quad (20-6-5)$$

پس از ساده کردن معادله‌ی (۲۰-۶-۵)، داریم:

$$\begin{bmatrix} 25/17 & 3020 \\ 3020 & 4832764 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{r,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17/5 \\ -300 \end{Bmatrix} \quad (21-6-5)$$

از جمع معادلات (۱۸-۶-۵) و (۲۱-۶-۵)، معادلات نهایی برای تعادل گره‌ها به ازای درجه‌های آزادی سطح مشترک برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 50/34 & 0 \\ 0 & 966528 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{r,y} \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -27/5 \\ 300 \end{Bmatrix} \quad (22-6-5)$$

حال به منظور محاسبه‌ی $d_{r,y}$ و ϕ_r می‌توان به معادله‌ی (۱۵-۶-۵) یا (۱۶-۶-۵)، و برای تعیین $d_{r,y}$ و ϕ_r به معادله‌ی (۱۹-۶-۵) مراجعه نمود.

در این جا تأکید می‌شود که از این مسأله به عنوان مثال ساده‌ای در زمینه‌ی به کار گیری روش زیر سازه استفاده شده و به هیچ وجه معرف حجم مسائلی که این روش عموماً بر آن‌ها اعمال می‌شود نیست. به طور کلی، روش زیر سازه در مواقعی استفاده

می شود که تعداد درجه های آزادی بالا باشد؛ همان طور که برای مثال ممکن است این امر در سازه های بسیار بزرگی همانند هواپیمای مندرج در شکل ۵-۳۱ رخ دهد.

مراجع

- [1] Kassimali, A., *Structural Analysis*, 2nd ed., Brooks/Cole Publishers, Pacific Grove, CA, 1999.
- [2] Budynas, R. G., *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999.
- [3] Allen, H. G., and Bulson, P. S., *Background to Buckling*, McGraw-Hill, London, 1980.
- [4] Roark, R. J., and Young, W. C., *Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill New York, 1989.
- [5] Gere, J. M., *Mechanics of Materials*, 5th ed., Brooks/Cole Publishers, Pacific Grove, CA, 2001.
- [6] Parakh, Z. K., *Finite Element Analysis of Bus Frames under Simulated Crash Loadings*, M.S. Thesis, Rose-Hulman Institute of Technology, Terre Haute, Indiana, May 1989.
- [7] Martin, H. C., *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [8] Juvinall, R. C., and Marshek, K. M., *Fundamentals of Machine Component Design*, 3rd ed., p. 200, Wiley, 2000.

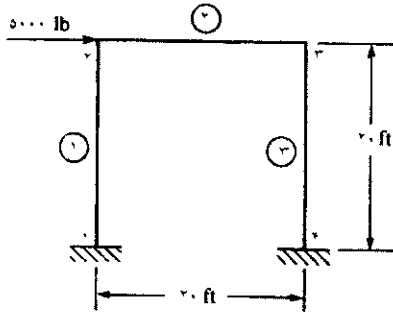
مسائل

با استفاده از روش سختی در اجزای محدود مسائل زیر را حل کنید.

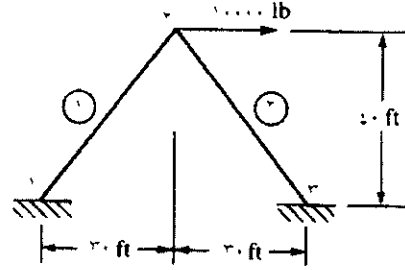
۱-۵ در قاب صلب نشان داده شده در شکل ۱-۵P مطلوبست (۱) مؤلفه های جابه جایی و چرخش در گره ۲، (۲) عکس العمل تکیه گاه ها، و (۳) نیروها در هر المان.

سپس تعادل در گره ۲ را بررسی کنید. در هر یک از المان‌ها فرض کنید

$$J = 500 \text{ in}^4, A = 10 \text{ in}^2, E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$



شکل ۲-۵P



شکل ۱-۵P

۲-۵ در قاب مندرج در شکل ۲-۵P، مطلوبست (۱) مؤلفه‌های جابه‌جایی و چرخش در گره‌ها، (۲) عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها، و (۳) نیرو در هر المان. در کلیه المان‌ها

$$J = 500 \text{ in}^4, A = 10 \text{ in}^2, E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

۳-۵ در قاب صلب پلکان مندرج در شکل ۳-۵P، مطلوبست (۱) جابه‌جایی‌ها در گره

۲، (۲) عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها، (۳) نیروهای گره‌ای موضعی عمل‌کننده در هر المان. نمودار لنگر خمشی در کل قاب را رسم کنید. به خاطر داشته باشید که

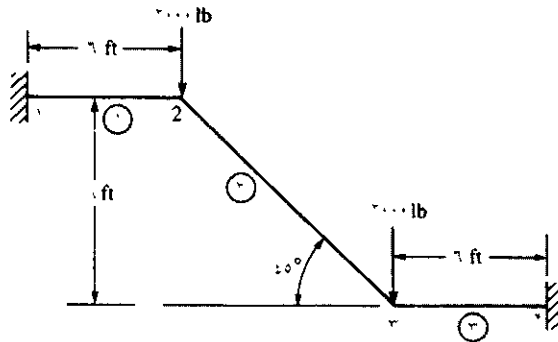
زاویه‌ی بین المان‌های ۱ و ۳، همانند زاویه‌ی بین المان‌های ۲ و ۳، قبل و بعد از

تغییر مکان ثابت باقی می‌مانند. مضافاً، به دلیل تقارن، $d_{2y} = d_{3y}$ ، $d_{2x} = -d_{3x}$ ،

و $\phi_2 = -\phi_3$. به چه اندازه‌ای از یک کانال فولادی از نوع A۳۶ نیاز است تا تنش

خمشی مجاز به دست آمده زیر دو سوم تنش تسلیم باشد؟ (در فولاد A۳۶ تنش

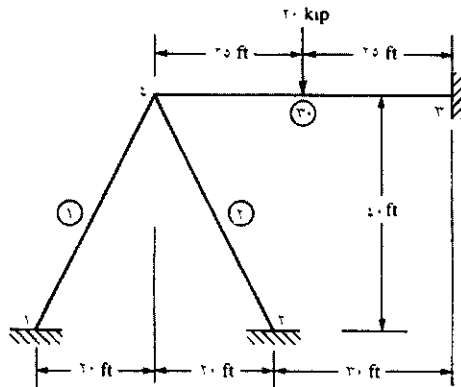
تسلیم برابر ۳۶۰۰۰ psi است).



شکل ۳-۵P

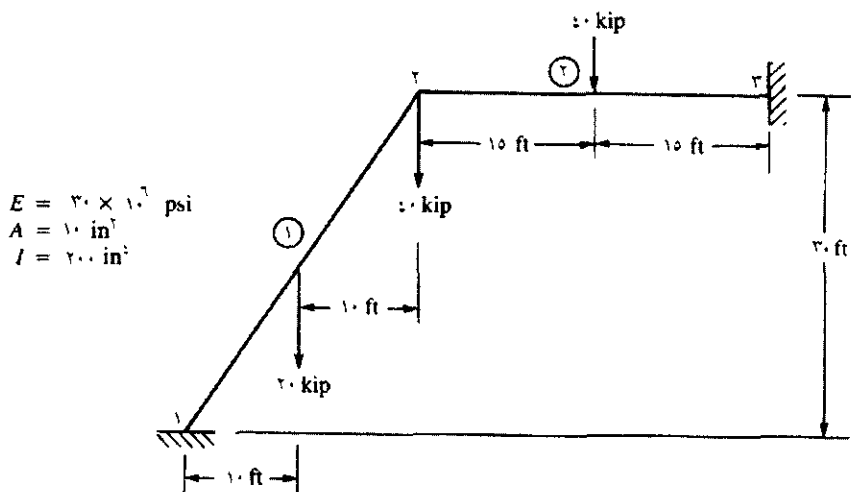
۴-۵ در قاب صلبی که در شکل ۴-۵P نشان داده شده مطلوبست (۱) جابه‌جایی‌ها و چرخش در گره ۴، (۲) عکس‌العمل‌ها، و (۳) نیرو در هر المان. سپس، تعادل در گره ۴ را ارزیابی کنید. نهایتاً، نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در هر المان را رسم کنید. در کلیه‌ی المان‌ها فرض کنید $E = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$ ، $A = 8 \text{ in}^2$ و

$$I = 800 \text{ in}^4$$

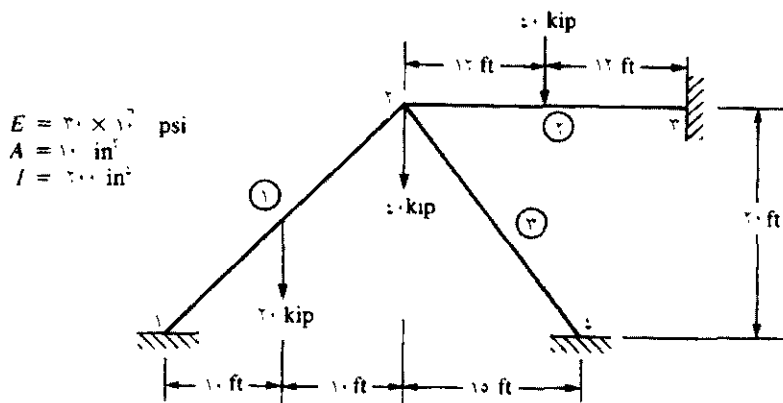


شکل ۴-۵P

۵-۵ الی ۱۵-۵ در قاب‌های مندرج در شکل‌های ۵-۵P الی ۱۵-۵، مطلوبست تعیین جابه‌جایی‌ها و چرخش در گره‌ها، نیرو در المان‌ها، و عکس‌العمل‌ها. مقادیر E ، A و I مورد نیاز در کنار هر شکل نشان داده شده‌اند.



شکل ۵-۵P

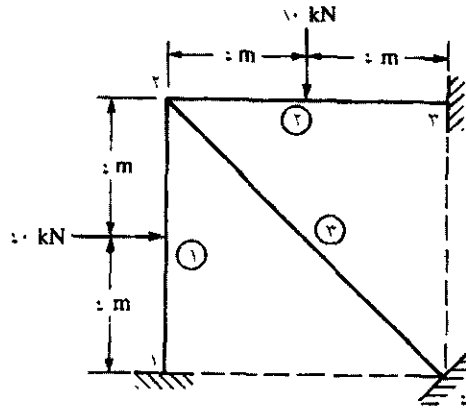


شکل ۶-۵P

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$A = 10 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I = 10 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

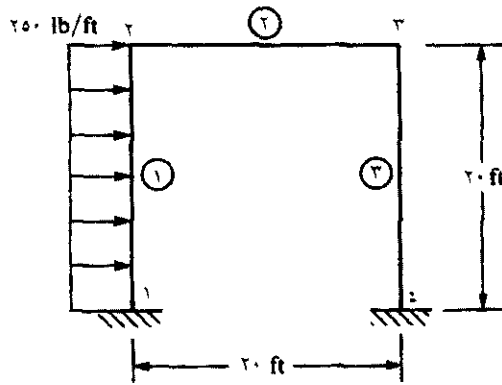


شکل ۷-۵P

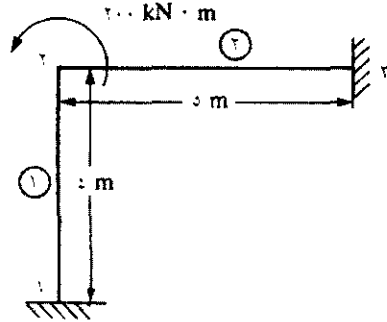
$$E = 30 \times 10^3 \text{ psi}$$

$$A = 10 \text{ in}^2$$

$$I = 250 \text{ in}^4$$



شکل ۸-۵P

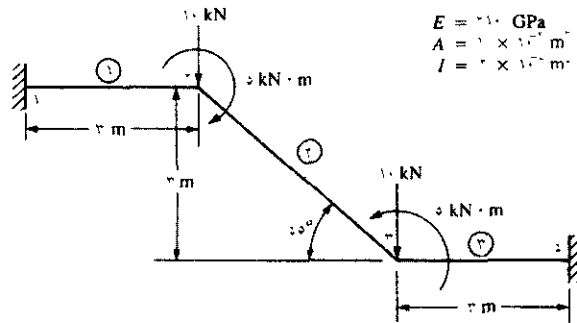


$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$A = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

شکل ۹-۵P

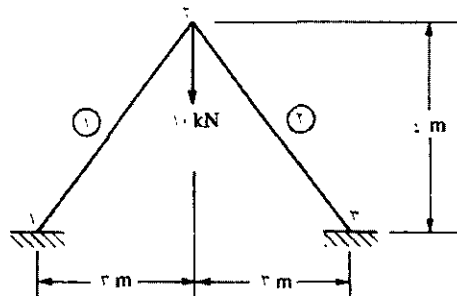


$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$A = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

شکل ۱۰-۵P

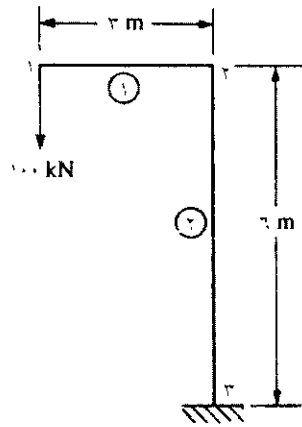


$$E = 10 \text{ GPa}$$

$$A = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

شکل ۱۱-۵P



$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$A = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = 12 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

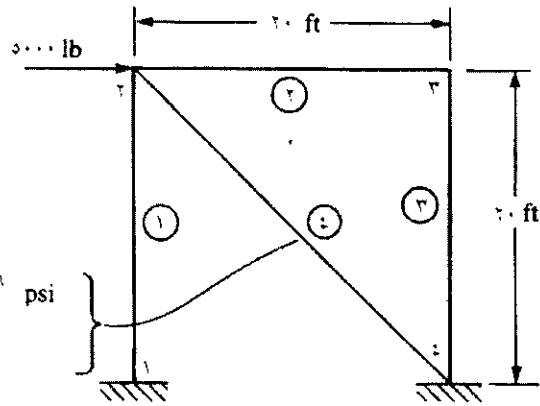
شکل ۱۲-۵P

$$E = 30 \times 10^3 \text{ psi}$$

$$A = 10 \text{ in}^2$$

$$I = 200 \text{ in}^4$$

(در المان‌های ۱ و ۲)

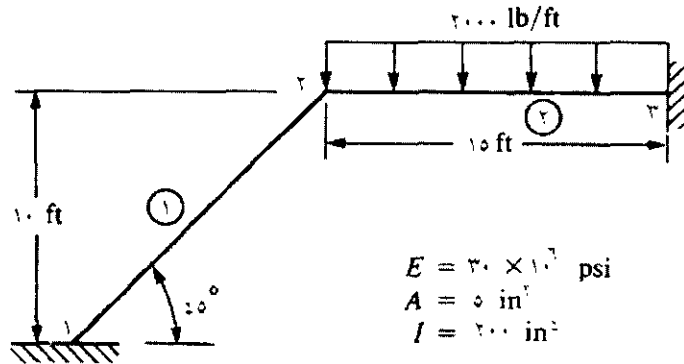


$$E = 30 \times 10^3 \text{ psi}$$

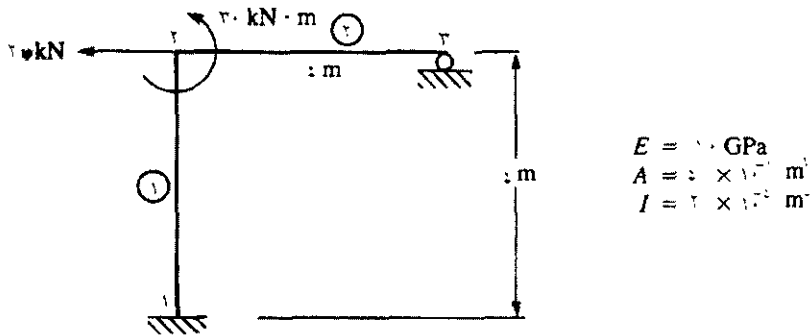
$$I = 1 \text{ in}^4$$

$$A = 2 \text{ in}^2$$

شکل ۱۳-۵P

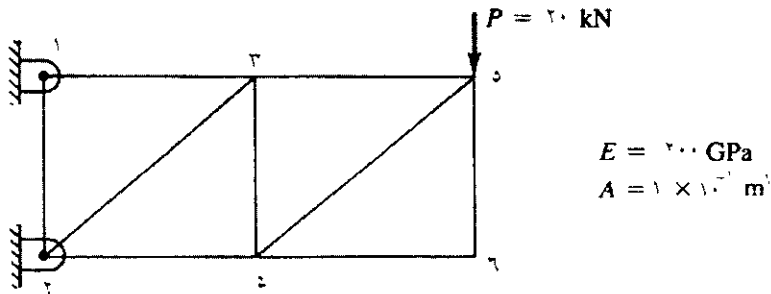


شکل ۱۴-۵P

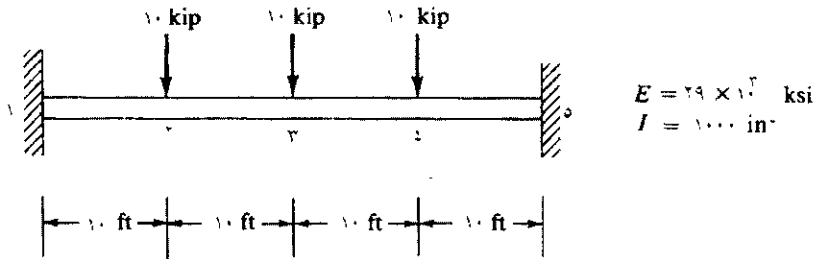


شکل ۱۵-۵P

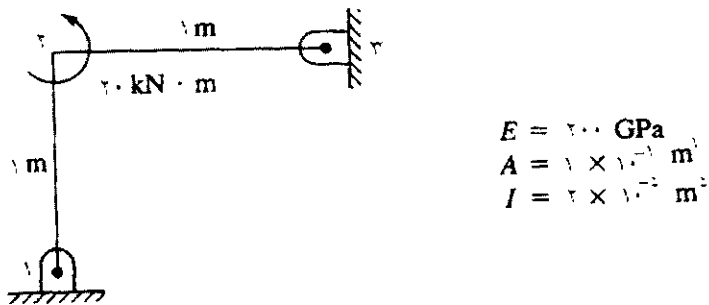
۱۶-۵ الی ۱۸-۵ سازه‌های مندرج در شکل‌های ۱۶-۵P الی ۱۸-۵P را از روش زیر سازه حل کنید.



شکل ۵P-۱۶ (خرپا را به دو زیر سازه در گره‌های ۳ و ۴ تقسیم کنید)

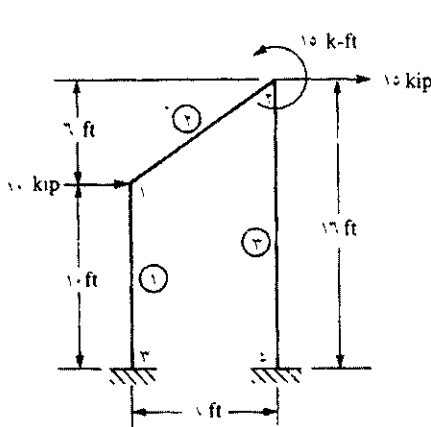


شکل ۵P-۱۷ (تیر را در گره ۳ به دو زیر سازه تقسیم کنید)

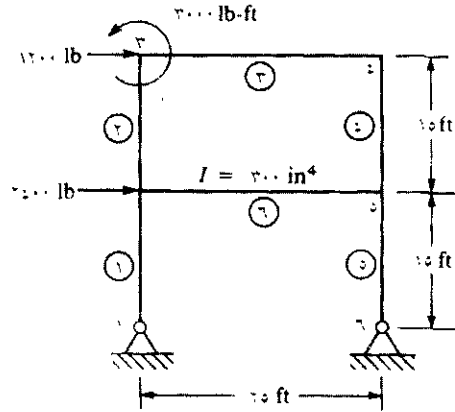


شکل ۵P-۱۸ (قاب را به دو زیر سازه در گره ۲ تقسیم کنید)

۱۹-۵ در قاب صلب مندرج در شکل ۱۹-۵P، مطلوبست (۱) مؤلفه‌های جابه‌جایی در گره‌ها و (۲) عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها. (۳) نمودارهای جسم آزاد نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید. در کلیه‌ی المان‌ها فرض کنید،
 $A = 10 \text{ in}^2$ ، $I = 200 \text{ in}^4$ ، $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$



شکل ۱۹-۵P



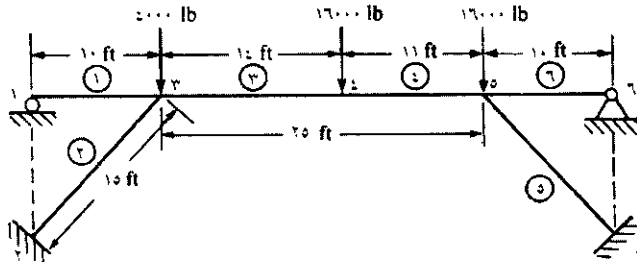
شکل ۲۰-۵P

۲۰-۵ در قاب صلب مندرج در شکل ۲۰-۵P، مطلوبست (۱) مؤلفه‌های جابه‌جایی در گره‌ها و (۲) عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها. (۳) نمودارهای جسم آزاد نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید. در کلیه‌ی المان‌ها، به‌جز آن‌هایی که در شکل قید

شده‌اند فرض کنید، $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $I = 200 \text{ in}^4$ ، و $A = 10 \text{ in}^2$.

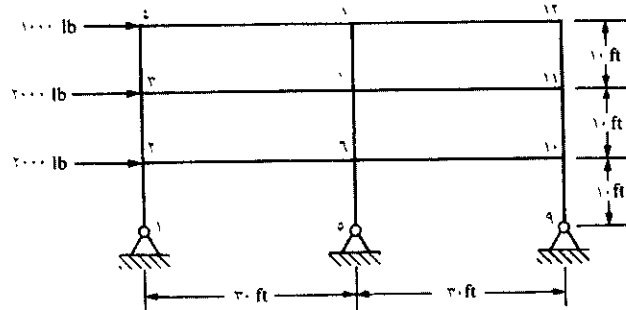
۲۱-۵ در قاب صلبی که مطابق شکل ۲۱-۵P دو عضو آن مایل است ابعاد سازه را به منظور دستیابی به حداقل وزن آن و بر اساس حداکثر تنش خمشی 20 ksi در المان تیر فوقانی و ماکزیمم تنش تراکمی 15 ksi در عضوهای مایل (ناشی از خمش و بار مستقیم محوری اعمال شده) بیابید. ابعاد هر دو عضو مایل و نیز

ابعاد المان‌های هر یک از دو قسمت افقی ۱۰ فوتی را یکسان فرض کنید. فرض شود از مقطع فولادی A36 استفاده شده است.



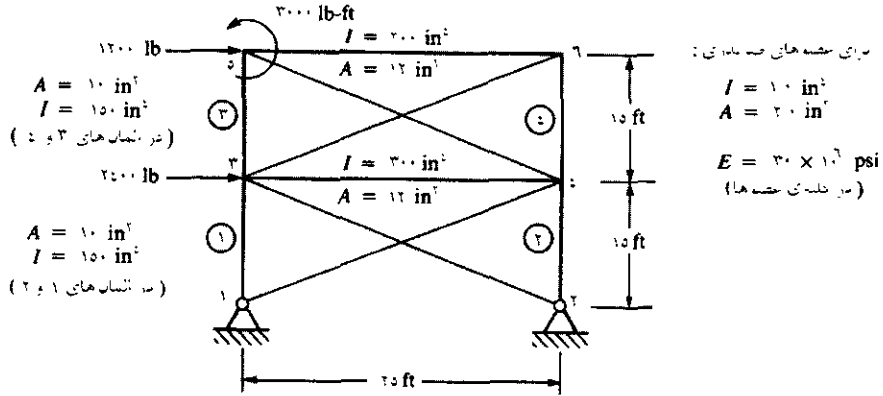
شکل ۲۱-۵P

۲۲-۵ در قاب ساختمانی صلب مندرج در شکل ۲۲-۵P، نیرو در هر المان را تعیین نموده و تنش‌های ناشی از خمش را محاسبه کنید. فرض کنید در کلیه المان‌های قائم، $A = 10 \text{ in}^2$ و $I = 100 \text{ in}^4$ و در کلیه المان‌های افقی $A = 15 \text{ in}^2$ و $I = 150 \text{ in}^4$. فرض کنید در المان‌ها $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ در المان‌های افقی $c = 5 \text{ in}$ و در المان‌های قائم $c = 6 \text{ in}$ است، در جایی که بر اساس رابطه‌ی تنش خمشی $\sigma = (Mc/I)$ ، c معرف فاصله‌ی تار خستی از بالا یا پایین سطح مقطع تیر است.

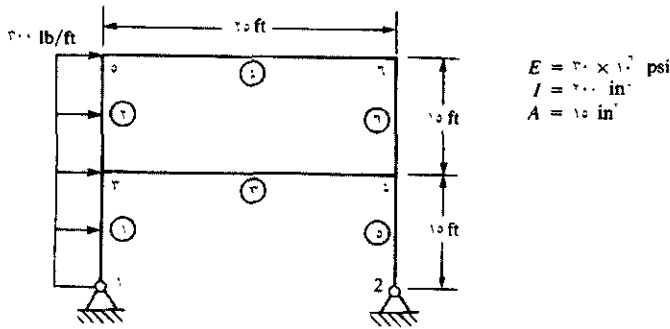


شکل ۲۲-۵P

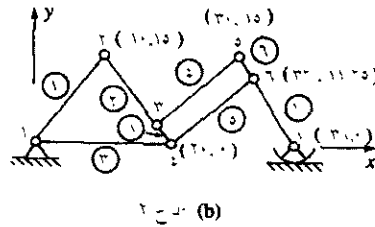
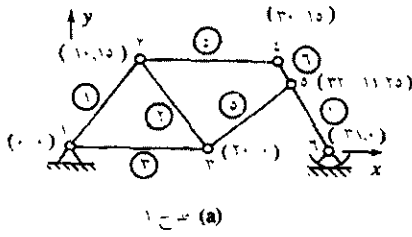
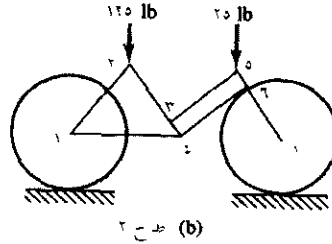
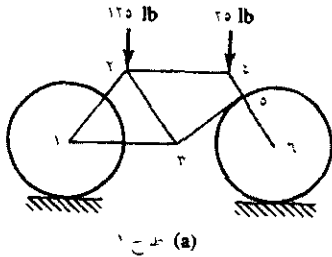
۲۳-۵ الی ۳۸-۵ در قاب‌ها یا تیرهای صلب مندرج در شکل ۲۳-۵P الی ۳۸-۵P، مطلوبست، جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها در کلیه‌ی گره‌ها، نیرو در هر المان و عکس‌العمل‌ها.



شکل ۲۳-۵P



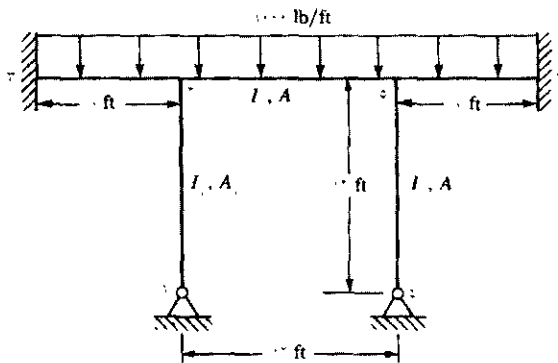
شکل ۲۴-۵P



$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$
 $E = 10 \times 10^6 \text{ psi}$

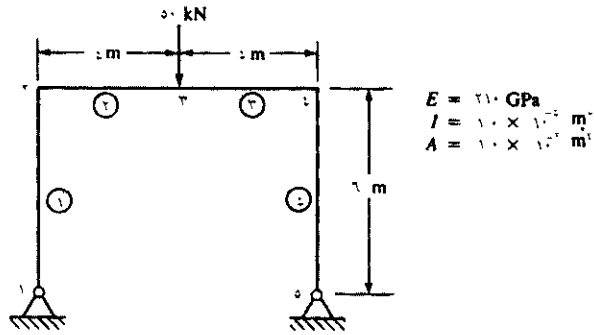
$A_1 = 0.1 \text{ in}^2$
 $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 5 \text{ in}^2$
 $A_6 = A_7 = A_8 = 0.7 \text{ in}^2$
 $I_1 = 0.01 \text{ in}^4$
 $I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = 0.02 \text{ in}^4$
 $I_6 = I_7 = I_8 = 0.01 \text{ in}^4$

شکل ۲۵-۵P

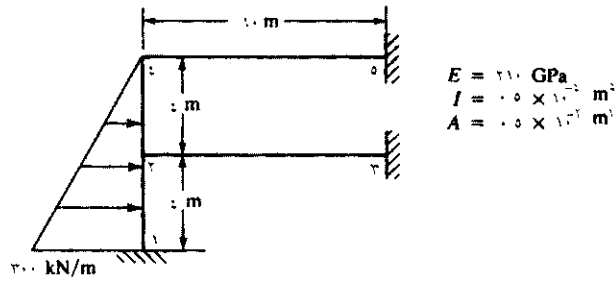


$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$
 $I = 3000 \text{ in}^4$
 $I = 3000 \text{ in}^4$
 $A = 50 \text{ in}^2$
 $A = 50 \text{ in}^2$

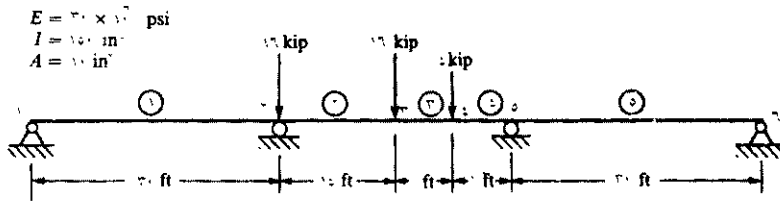
شکل ۲۶-۵P



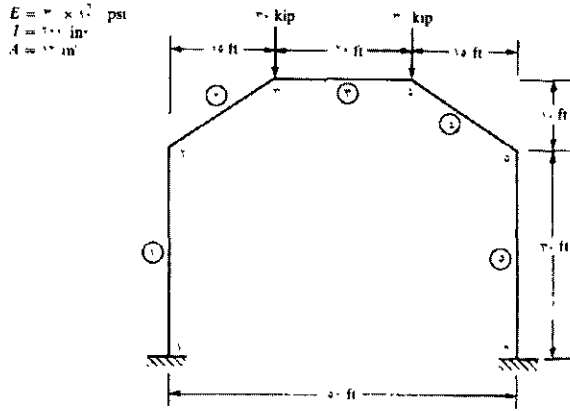
شکل ۲۷-۵P



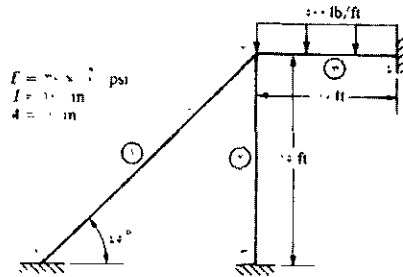
شکل ۲۸-۵P



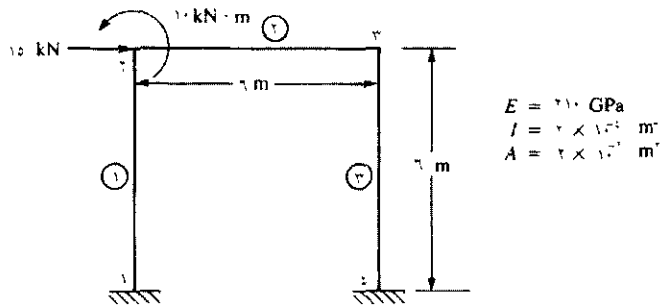
شکل ۲۹-۵P



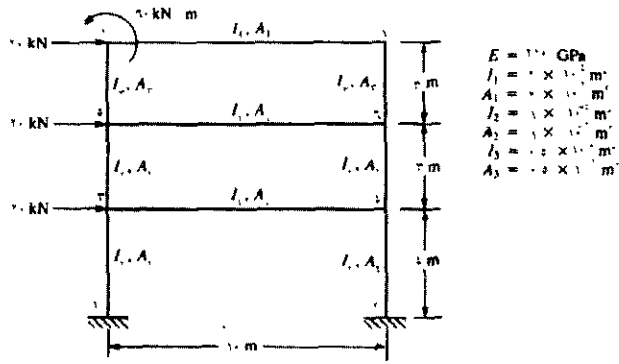
شکل ۳۰-۵P



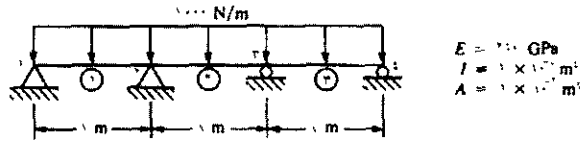
شکل ۳۱-۵P



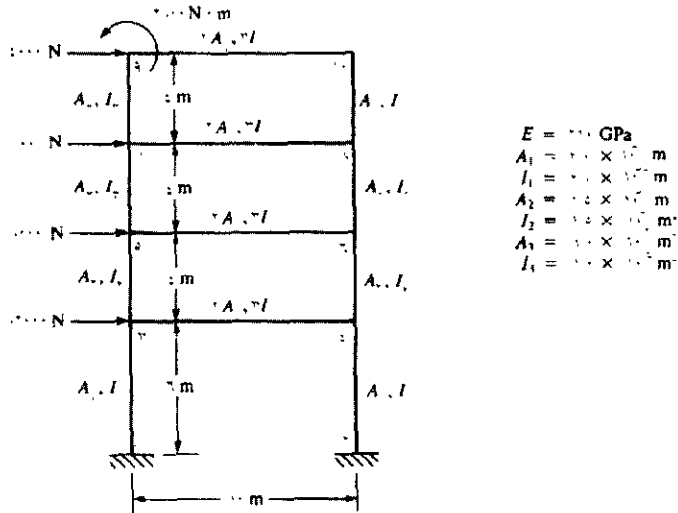
شکل ۳۲-۵P



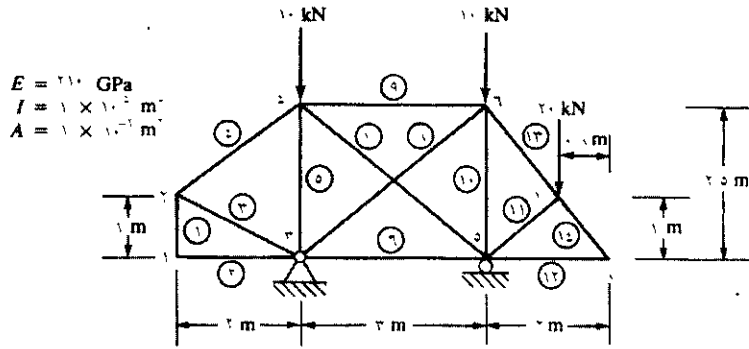
شکل ۳۳-۵P



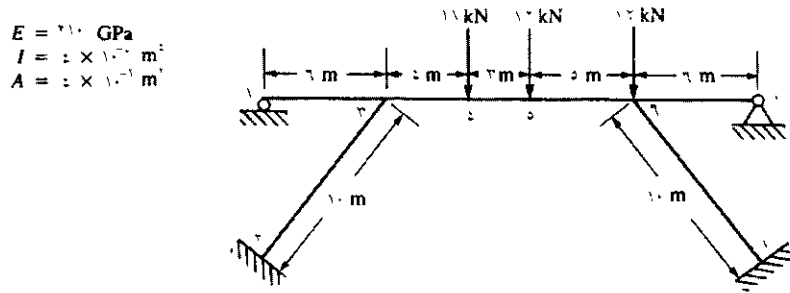
شکل ۳۴-۵P



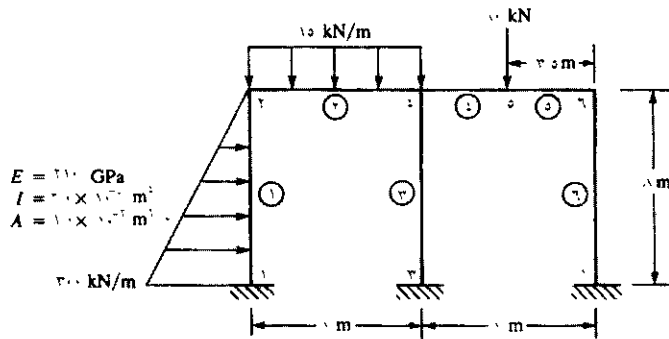
شکل ۳۵-۵P



شکل ۳۶-۵P

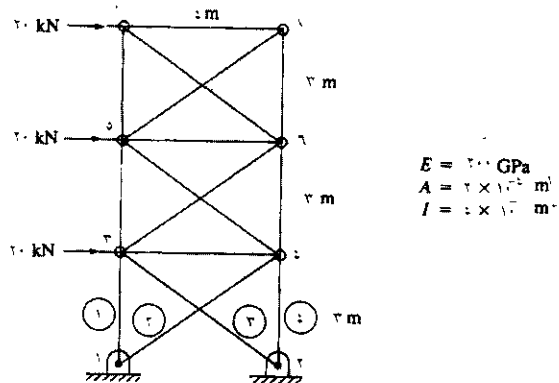


شکل ۳۷-۵P



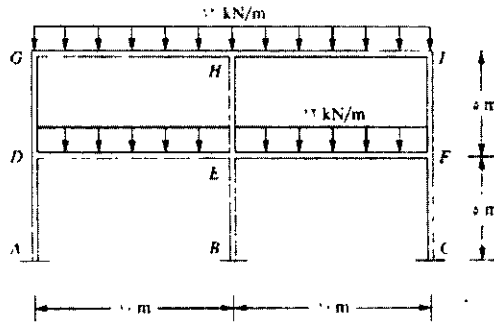
شکل ۳۸-۵P

۳۹-۵ سازه‌ی دو بعدی مندرج در شکل ۳۹-۵ را در نظر بگیرید. ابتدا سازه را به صورت قابی صفحه‌ای با اتصالات صلب در نظر گرفته و با استفاده از المان قاب آن را تحلیل کنید. سپس اتصالات سازه را لولایی فرض نموده و با استفاده از المان‌های خرپا آن را تحلیل نمایید. اگر سازه واقعاً یک خرپا باشد آیا مناسب است که آن را به صورت یک قاب صلب مدل سازی نمود؟ چگونه می‌توان با استفاده از المان قاب (یا تیر)، خرپا را مدل سازی نمود؟ به عبارت دیگر، چه ایده‌آل سازی باید در مدل خود اعمال کنید تا بتوان خرپا را با استفاده از المان تیر تقریب زد؟




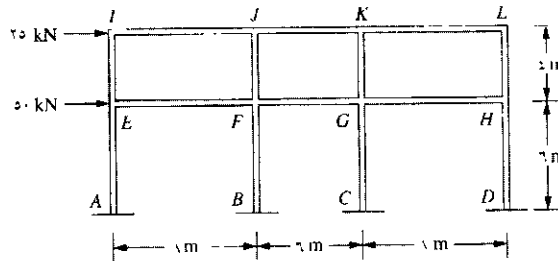
شکل ۳۹-۵P

۴۰-۵ در قاب دو طبقه‌ی صلبی که مطابق شکل از دو دهانه تشکیل شده مطلوبست (۱) مؤلفه‌های تغییر مکان گره‌ای و (۲) نیروی برشی و گشتاور خمشی در هر المان. فرض کنید در هر یک از عضوهای افقی، $E = 200 \text{ Gpa}$ ، $I = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ و در هر عضو قائم، $I = 1/5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$




شکل ۴۰-۵P

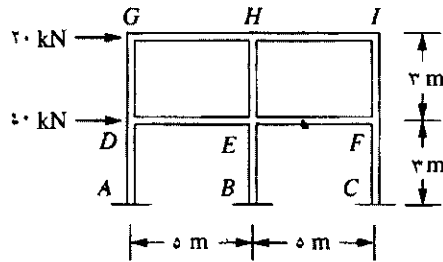
۴۱-۵ در قاب دو طبقه‌ی استواری که مطابق شکل از سه دهانه تشکیل شده مطلوبست  (۱) تغییر مکان گره‌ای و (۲) نیروی برشی و گشتاور خمشی در انتهای هر المان (۳) رسم نیروی برشی و گشتاور خمشی در هر المان. فرض کنید در هر یک از تیرها $E = ۲۰۰ \text{ Gpa}$, $J = ۱/۲۹ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^۴$ و در هر یک از ستون‌ها $J = ۰/۴۶۲ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^۴$



شکل ۴۱-۵P

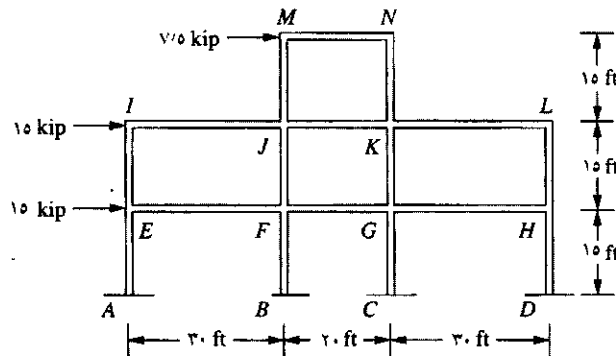
۴۲-۵ در قاب سفت و محکمی که در شکل نشان داده شده مطلوبست (۱) تغییر مکان‌ها و دوران‌های گره‌ای و (۲) نیروی برشی و گشتاور خمشی در هر المان.  فرض کنید در هر یک از عضوهای افقی، $E = ۲۰۰ \text{ Gpa}$, $J = ۰/۷۹۵ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^۴$

و در عضوهای قائم، $I = 0.316 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ مقادیر ممان اینرسی I به ترتیب مربوط به مقاطع بال پهن با مشخصات $W 60 \times 158$ و $W 410 \times 85$ می‌باشند.



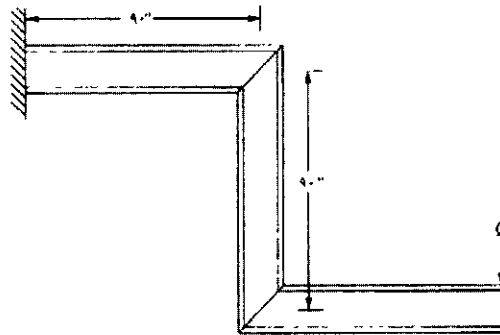
شکل ۵۲-۵P

۴۳-۵ در قاب سفت و محکم مندرج در شکل، مطلوبست (۱) تغییر مکان‌ها و دوران‌های گره‌ای و (۲) نیروی برشی و گشتاور خمشی در هر المان. فرض کنید در هر یک از عضوهای افقی، $E = 29 \times 10^7 \text{ psi}$ ، $I = 3100 \text{ in}^4$ و در عضوهای قائم، $I = 1110 \text{ in}^4$ مقادیر ممان اینرسی I به ترتیب مربوط به مقاطعی با مشخصات $W 16 \times 77$ و $W 24 \times 104$ می‌باشند.



شکل ۴۳-۵P

۴۴-۵ سازه‌ای از سه عضو I- شکل که به هم جوش داده شده‌اند مطابق شکل ۴۴-۵P ساخته شده است. تنش تسلیم در هر عضو برابر 30 ksi ، $E = 29000 \text{ psi}$ و ضریب پواسون برابر 0.3 است. خصوصیات سطح مقطع هر عضو منطبق با خصوصیات $18W$ در ۷۶ است. به عبارتی، $A = 22.3 \text{ in}^2$ ، ارتفاع سطح مقطع برابر $d = 18.21 \text{ in}$ ، $I_x = 1330 \text{ in}^4$ ، $I_y = 152 \text{ in}^4$ و $S_x = 27.6 \text{ in}^3$ ، $S_y = 27.6 \text{ in}^3$ مشخص کنید آیا به ازای نیرویی به بزرگی $Q = 10000 \text{ lb}$ ، به سمت پایین، سازه از امنیت کافی در مقابل به تسلیم رسیدن برخوردار است. ضریب اطمینان از دیدگاه تسلیم باید برابر ۲ باشد. همچنین، بیش‌ترین جابه‌جایی افقی و قائم در سازه را بیابید.



شکل ۴۴-۵P

۴۵-۵ در تیر غیر منشوری مندرج در شکل ۴۵-۵، ماکزیمم خیز را با استفاده از یک، دو، چهار و هشت المان تعیین کنید. در هر المان، ممان اینرسی را بر اساس ابعاد مقطع میانی آن محاسبه کنید. فرض کنید $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $I_o = 100 \text{ in}^4$ و $L = 100 \text{ in}$. حالت‌های مختلف را به ازای $n = 1, 3$ و 7

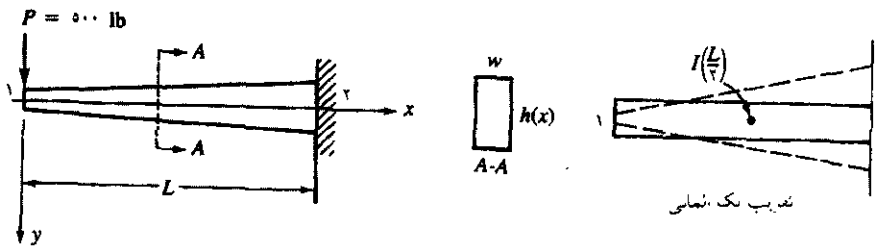
حل کنید. از المان تیر استفاده کنید. به ازای $n = 7$ حل تحلیلی از مرجع [۷] به صورت زیر داده شده است.

$$v_1 = \frac{PL^7}{49EI_0} (1/7 \ln 8 + 2/5) = \frac{1}{17/55} \frac{PL^7}{EI_0}$$

$$\theta_1 = \frac{PL^7}{49EI_0} (\ln 8 + 7) = -\frac{1}{9/95} \frac{PL^7}{EI_0}$$

$$I(x) = I_0 \left(1 + n \frac{x}{L} \right)$$

در جایی که n ضریب اختیاری و I_0 ممان اینرسی مقطع در $x = 0$ می باشد.

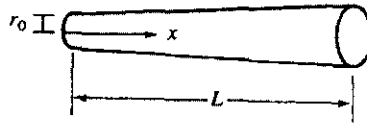


شکل ۴۵-۵P تیر آهن یک سر گیردار مخروطی

۴۶-۵ در میله‌ی تحت پیچش غیر منشوری مندرج در شکل ۴۶-۵P، ماتریس سختی را به دست آورید. شعاع محور تابع رابطه‌ی زیر است:

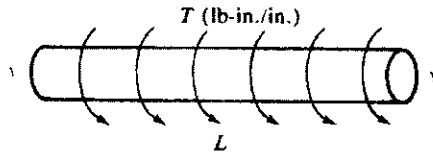
$$r = r_0 + (x/L)r_0$$

در جایی که r_0 شعاع در $x = 0$ است.



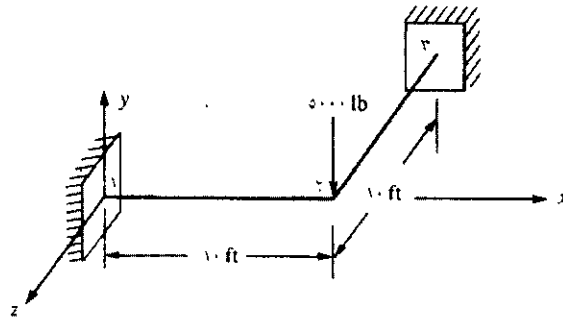
شکل ۴۶-۵P

۴۷-۵ در میله‌ی تحت پیچش منشوری شکل مندرج در شکل ۴۷-۵P، با مقطع دایره‌ای، انرژی پتانسیل کل را به دست آورید. همچنین گشتاورهای گره‌ای معادل را در این میله که تحت گشتاور گسترده‌ی یکنواختی بر واحد طول ($\text{lb}\cdot\text{in.}/\text{in.}$) قرار گرفته تعیین کنید. فرض کنید G مدول پیچشی و J ممان اینرسی قطبی میله است.



شکل ۴۷-۵P

۴۸-۵ در شبکه‌ی مندرج در شکل ۴۸-۵P، جابه‌جایی گره‌ها و نیروهای موضعی در هر المان را بیابید. در هر یک از دو المان فرض کنید: $E = 30 \times 10^3 \text{ psi}$ ، $G = 12 \times 10^3 \text{ psi}$ ، $I = 200 \text{ in}^4$ و $J = 100 \text{ in}^4$.



شکل ۴۸-۵P

۴۹-۵ مسأله‌ی ۴۸-۵P را مجدداً با افزودن گشتاوری در گره ۲ حول محور x برابر با 1000 k-in. حل کنید.

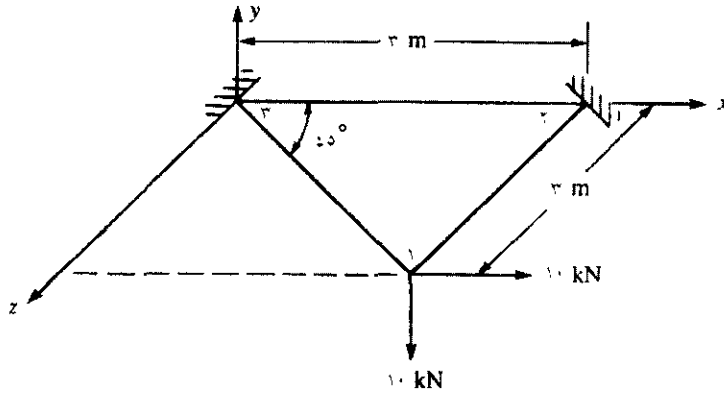
۵۰-۵ الی ۵۱-۵ در شبکه‌های مندرج در شکل‌های ۵۰-۵P و ۵۱-۵P، مقادیر



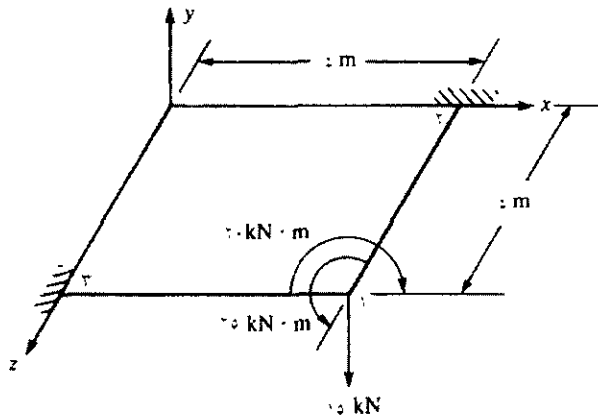
جابه‌جایی در گره‌ها و نیروهای موضعی در المان‌ها را تعیین کنید. فرض کنید:

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad G = 84 \text{ GPa}, \quad I = 2 \times 10^4 \text{ m}^4, \quad J = 1 \times 10^4 \text{ m}^4,$$

$$\text{و } A = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

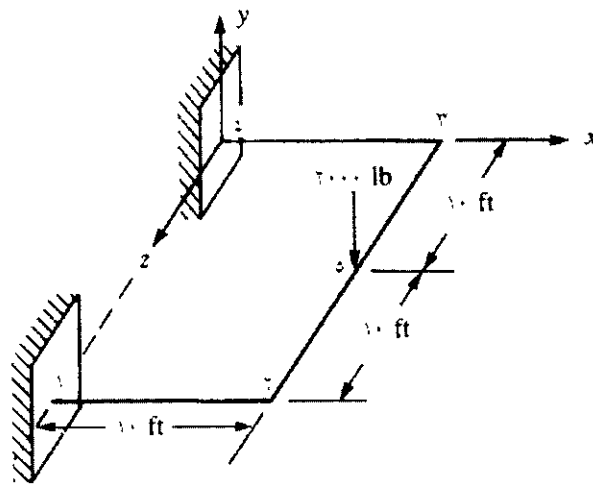


شکل ۵۰-۵P

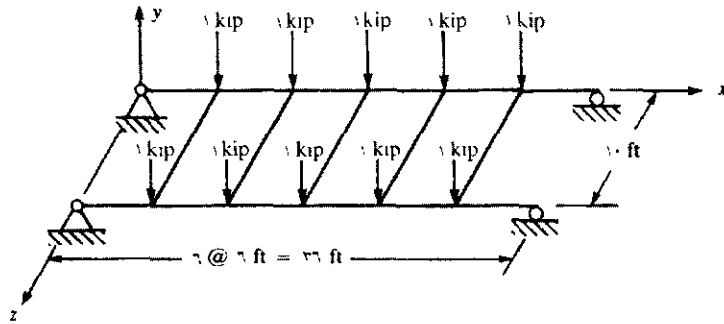


شکل ۵۱-۵P

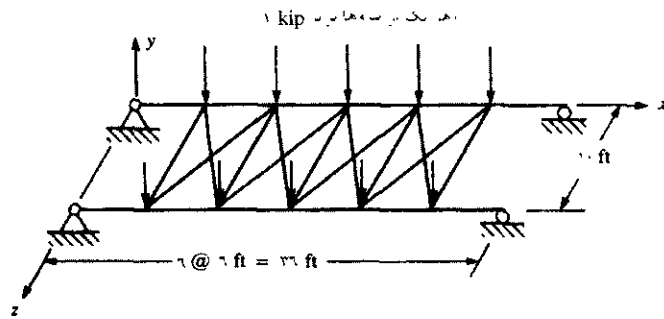
۵۲-۵ الی ۵۷-۵ سازه‌های شبکه‌ای مندرج در شکل‌های ۵۲-۵P الی ۵۷-۵P را با استفاده از یک برنامه‌ی رایانه‌ای حل کنید. در شبکه‌های ۵۲-۵P الی ۵۴-۵P، فرض کنید $E = 3.0 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $G = 1.2 \times 10^6 \text{ psi}$ ، و $I = 200 \text{ in}^4$ ، به‌جز آن‌هایی که مقادیر مربوطه در شکل قید شده است. در شکل ۵۴-۵P، با توجه به ابعاد و بارهای اعمال شده در شکل ۵۳-۵P، فرض کنید در المان‌های ضریبری، $I = 200 \text{ in}^4$ و $J = 20 \text{ in}^4$. در شبکه‌های ۵۵-۵P الی ۵۷-۵P، فرض کنید $E = 210 \text{ GPa}$ ، $G = 84 \text{ GPa}$ ، $I = 2 \times 10^4 \text{ m}^4$ ، $J = 1 \times 10^4 \text{ m}^4$ و $A = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$.



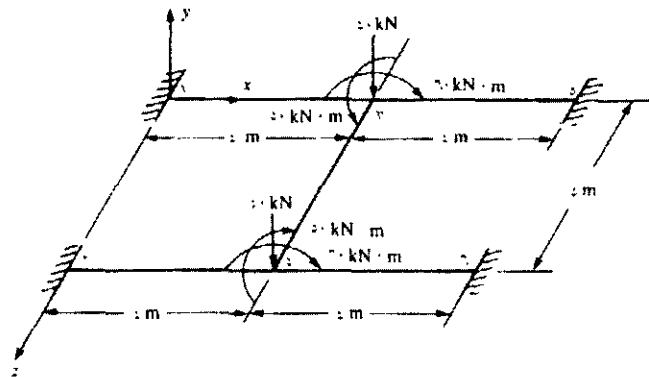
شکل ۵۲-۵P



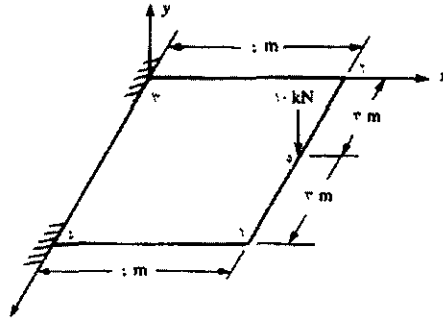
شکل ٥٣-٥P



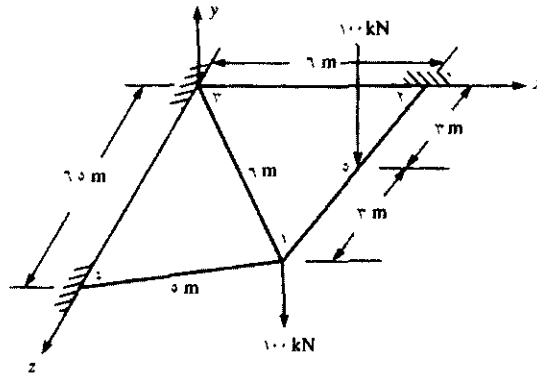
شکل ٥٤-٥P



شکل ٥٥-٥P



شکل ۵۶-۵P

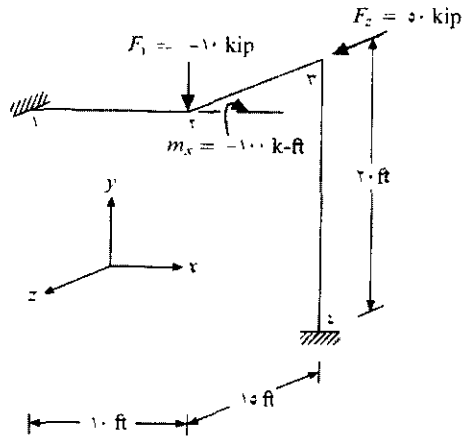


شکل ۵۷-۵P

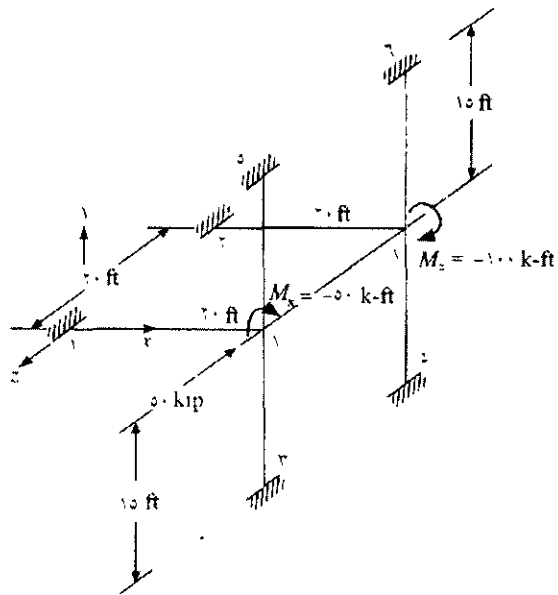
۵۸-۵ الی ۵۹-۵ در قاب‌های فضایی مندرج در شکل‌های ۵۳-۵P الی ۵۴-۵P مقادیر جابه‌جایی‌ها و عکس‌العمل‌ها را تعیین کنید. در هر دو قاب فرض کنید:

$$G = 10000 \text{ ksi}, E = 30000 \text{ ksi}, I_z = 1000 \text{ in}^4, I_y = 200 \text{ in}^4, I_x = 100 \text{ in}^4$$

و $A = 100 \text{ in}^2$



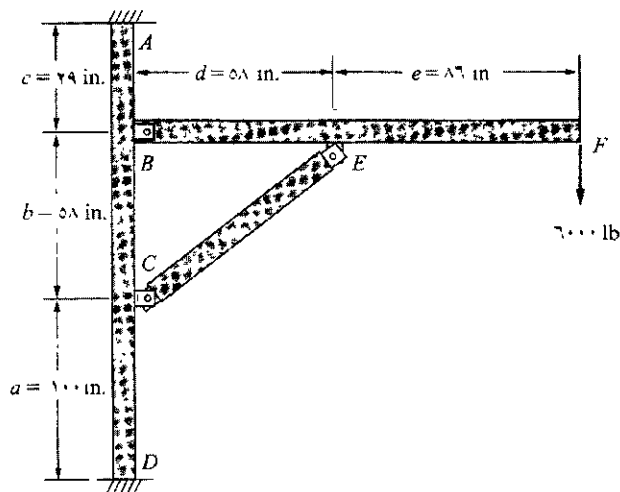
شکل ٥٨-٥P



شکل ٥٩-٥P

در حل مسائل طراحی ۵-۶۰ الی ۵-۷۲ از برنامه‌ی رایانه‌ای استفاده کنید.

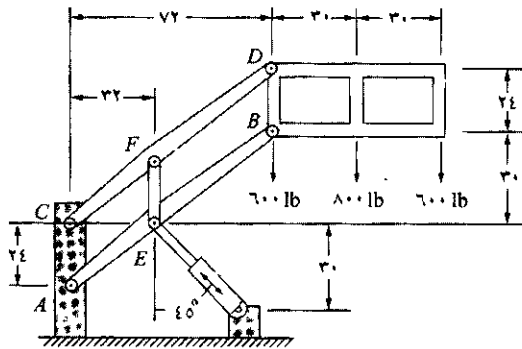
۵-۶۰ جرتقیل بازویی شکلی را مطابق شکل ۵P-۵۵، که باری برابر ۶۰۰۰ lb را به سمت پایین حمل می‌کند طراحی کنید. از فولاد سازه‌ای رایجی با مقطعی یکسان در کلیه‌ی اعضاها استفاده کنید. از تنش‌های مجاز $S_y/1.66$ (مقاومت تسلیم ماده است) در خمش و $S_y/1.60$ در کشش در سطح مقطع هر عضو استفاده کنید. بیش‌ترین تغییر مکان نباید از $\frac{1}{336}$ طول تیر افقی تجاوز کند. کماتش را بر اساس یکی از روش‌های اولر یا جانسون که مناسب باشد، بررسی نمایید.



شکل ۵P-۶۰

۵-۶۱ در سکوی بالابر مندرج در شکل ۵-۵۶، عضوهای حمال AB و CD را طراحی کنید. ضمن انتخاب فولاد نرم، از سطح مقطع‌های مناسبی که نسبت ممان اینرسی آن‌ها حول محورهای اصلی از ۴:۱ بیش‌تر نباشد استفاده کنید. به منظور کاهش

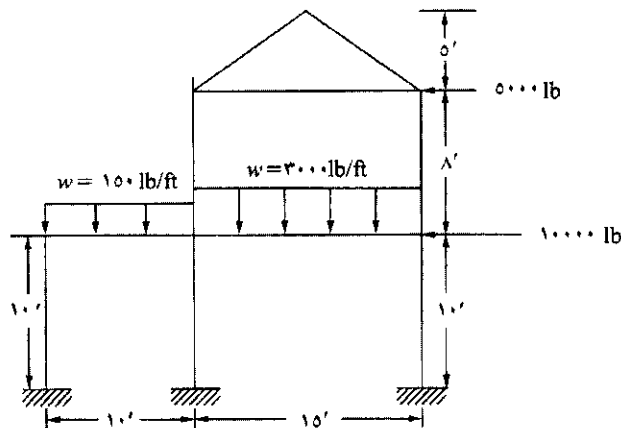
وزن هر بازو می‌توانید از دو سطح مقطع متفاوت استفاده نمایید. سازه‌ی واقعی دارای چهار بازوی حمال بوده است؛ در حالی که بارها فقط بر روی یک طرف سکو که شامل دو بازو است نشان داده شده‌اند. بارهای نشان داده شده به ازای حالت کاری می‌باشند. از ضریب اطمینان ۲ برای ایمنی افراد استفاده شود. به منظور ایجاد مدل اجزای محدود، سکو را برداشته و بجای آن از نیروهای معادل استاتیکی در اتصال‌های B و D استفاده کنید. از المان‌های خرپا، یا تیر با سختی خمشی پایین، در مدل سازی بازوی رابط B به D ، اتصال میانی E به F ، و محرک هیدرولیکی استفاده کنید. تنش مجاز در خمش $0.66S_y$ و تنش مجاز در کشش $0.60S_y$ است. کماتش را بر اساس یکی از روش‌های اولر یا جانسون که مناسب باشد بررسی کنید. همچنین حداکثر مقادیر خیز را بررسی کنید. هر خیزی بزرگ‌تر از $\frac{1}{360}$ طول عضو AB قابل قبول نیست.



ابعاد بر حسب اینچ می‌باشند

شکل ۵P-۶۱

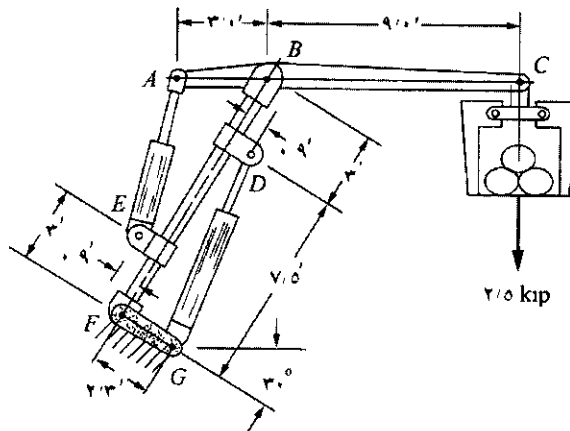
۶۲-۵ باید قاب یک ساختمان دو طبقه را در شکل ۵۷-۵P نشان داده شده طراحی نماییم. کلیه اعضا باید از تیرهای I شکل با اتصالات صلب باشند. می‌خواهیم تیرآهن‌های کف دارای ارتفاعی برابر ۱۵ in. و ستون‌ها دارای عرضی برابر ۱۰ in. باشند. جنس تیرها باید از فولاد سازه ای A ۳۶ انتخاب شود. دو بار افقی و دو بار عمودی در شکل نشان داده شده‌اند. اعضا را بر اساس تنش خمشی مجاز $24,000 \text{ psi}$ در تیرها انتخاب کنید. کماتش در ستون‌ها را بر اساس هر یک از روش‌های اوپلر یا جانسون که مناسب باشد بررسی کنید. خیز مجاز در هر تیر نباید از $\frac{1}{330}$ دهانه‌ی آن بیشتر شود. جابه‌جایی کلی قاب نباید از 0.5 in. تجاوز کند.



شکل ۵۷-۵P

۶۳-۵ یک حمل‌کننده‌ی خمیر کاغذ سازی، مطابق شکل ۵۸-۵P، باید طوری طراحی شود که باری برابر $2/5 \text{ kip}$ را بالا ببرد. با انتخاب فولاد مورد نظر، مقطع

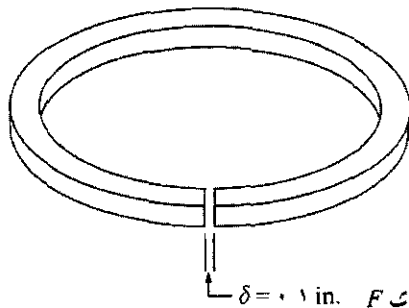
توخالی مدور مناسبی را برای عضو عمودی BF که به سیلندرهای هیدرولیکی محرک AE و DE متصل است، انتخاب کنید. ضمن تعیین فولادی مناسب، مقطع قوطی شکلی را برای بازوی افقی AC تعیین کنید. به منظور کاهش وزن، بازوی باربر افقی می‌تواند در قسمت‌های AB و BC دارای دو مقطع متفاوت باشد. در مدل اجزای محدود، باید از المان تیر در مدل سازی کلیه اعضا، به جز سیلندرهای هیدرولیکی که توسط المان خرپا مدل سازی می‌شوند، استفاده نمود. اتصال لولایی B ، بین تیرهای عمودی و افقی، به بهترین وجه از آزاد سازی گره انتهایی المان بالایی عضو عمودی، مدل سازی می‌شود. تنش مجاز خمشی در اعضا AB و BC $0.66S_y$ است. کماتش در عضو BF نیز باید بررسی شود. خیز مجاز در C باید کم‌تر از $\frac{1}{336}$ طول BC باشد. مازاد بر این، سفارش دهنده از شما می‌خواهد تا اندازه‌ی سیلندرهای هیدرولیکی AE و DE را تعیین کنید.



شکل ۵P-۶۳

۶۴-۵ رینگ پیستونی (با شیار مطابق شکل ۵P-۵۹) باید توسط ابزاری باز شده تا نصب آن آسان‌تر شود. رینگ به اندازه‌ای نازک است (ضخامت ۰/۲ in.) که می‌توان کاربرد روابط خمش در تیرآهن مستقیم را در مورد آن توجیه نمود. به منظور نصب رینگ، نیاز است تا تغییر مکانی برابر ۰/۱ in. در محل شیار ایجاد شود. نیروی مورد نیاز را برای این جابه‌جایی به دست آورید. به علاوه، بیش‌ترین تنش در رینگ را تعیین کنید. فرض کنید، $E = 18 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $G = 7 \times 10^6 \text{ psi}$ ، سطح مقطع $A = 0.06 \text{ in}^2$ و ممان اینرسی حول محور اصلی برابر $I = 4/5 \times 10^{-4} \text{ in}^4$ است. شعاع داخلی برابر ۱/۸۵ in. و شعاع خارجی برابر ۲/۱۵ in. می‌باشد. از ۴، ۶، ۸، ۱۰، و ۲۰ المان در مدل متقارن استفاده نموده تا جواب‌ها همگرا شوند. به ازای بار ثابتی که از رابطه‌ی قراردادی تئوری تیر مندرج در مرجع [۸] حاصل می‌شود، نمودار جابه‌جایی را بر حسب تعداد المان‌ها رسم کنید.

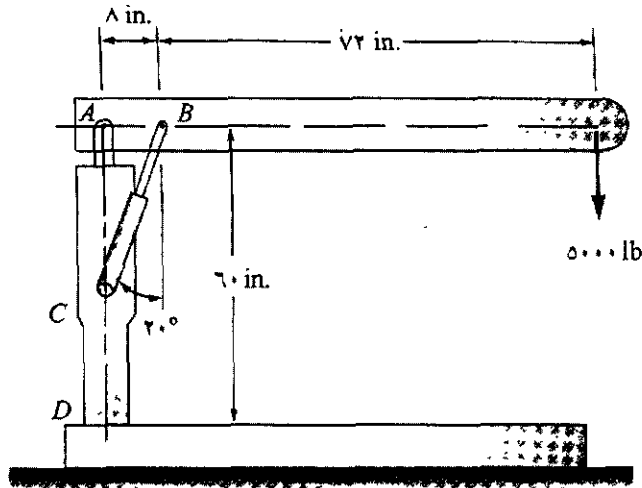
$$\delta = 0.01 \text{ in. و } R = 2/0 \text{ in. در جایی که } \delta = \frac{3\pi FR^2}{EI} + \frac{\pi FR}{EA} + \frac{3\pi FR}{5GA}$$



به ازای بار اعمال شده F ، $\delta = 0.01 \text{ in.}$

شکل ۵P-۶۴

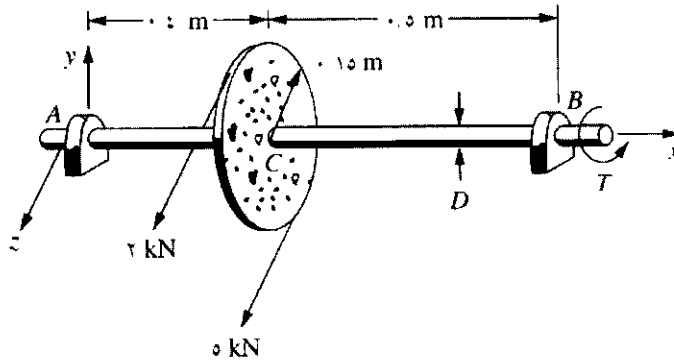
۶۵-۵ یک جرثقیل هیدرولیکی کفی مطابق شکل ۶۵-۵P باری برابر 5000 lb را حمل می‌کند. اندازه‌ی تیر و ستون مورد نیاز را تعیین کنید. از مقطع استاندارد شده‌ی قوطی شکل یا تیر آهن عریض (بال پهن) استفاده کنید. اتصال بین تیر و ستون را صلب فرض کنید. ستون به صورت صلب به کف متصل است. تنش مجاز خمشی در تیر $0.66S_y$ است. خیز مجاز برابر $\frac{1}{336}$ طول تیر است. کمانش در ستون را نیز بررسی کنید.



شکل ۶۵-۵P

۶۶-۵ اندازه‌ی محور توپری با مقطع دایره‌ای شکل را به قسمی تعیین کنید که به ازای بار اعمال شده حداکثر زاویه‌ی پیچش بین دو مقطع B و C از 0.26 درجه در هر متر بیش‌تر نشده و نیز خیز در محل اتصال قرقره‌ی C به آن کمتر از 0.05 اینچ باشد. تکیه‌گاه‌های A و B را از نوع ساده فرض کنید. جنس محور را از فولاد

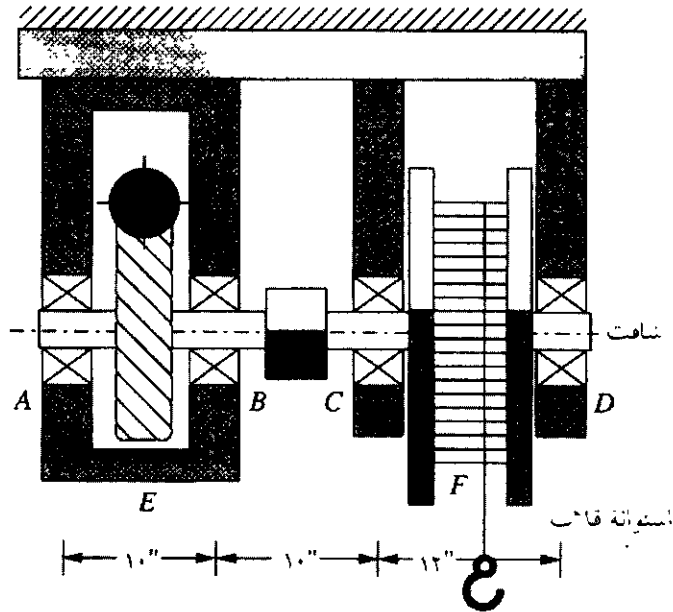
نورد سرد AISI ۱۰۲۰ در نظر بگیرید. (به خاطر داشته باشید که زوایای پیچش محورهای متحرک در کتاب مرجع *Machinery Handbook*, Oberg, E., et. al., 26th ed., Industrial Press, N. Y., 2000. آورده شده‌اند.)



شکل P ۶۶-۵

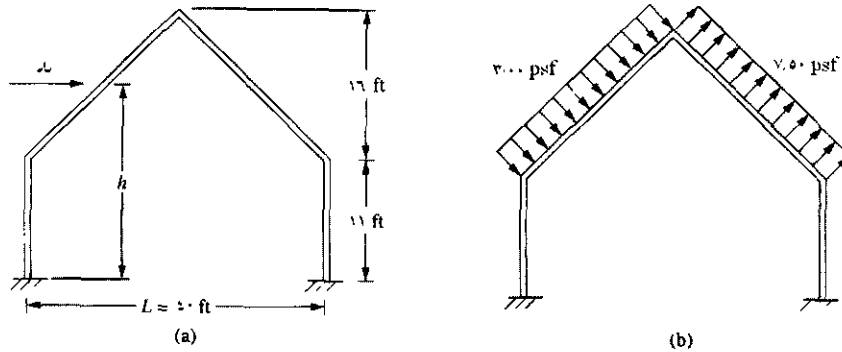
۶۷-۵ محوری که در شکل زیر نشان داده شده تحت تأثیر باری به بزرگی ۷۸۰ lb ناشی از قلاب یک جرثقیل، و گشتاوری پیچشی به بزرگی F در ۷۸۰۰ lb. in (۲۶ اینچ از مرکز یاتاقان A) قرار گرفته است. مضافاً، چرخ دنده‌ی حلزونی مستقر در E، نیرویی شعاعی به بزرگی ۵۰۰ lb و نیرویی محوری به بزرگی ۴۰۰ lb بر این محور وارد می‌کند. فرض کنید حداکثر تنش قابل اعمال بر محور نمی‌تواند بیش از مقداری باشد که بر اساس ضریب اطمینانی برابر ۲/۵، از فرضیه‌ی ماکزیمم انرژی اعوجاج حاصل می‌شود. همچنین، باید مطمئن بود که زاویه‌ی پیچش بین مقاطع A و D، از ۱/۵ درجه بیش‌تر نشود. در مدل انتخاب شده، به منظور محاسبه‌ی زاویه‌ی پیچش، فرض کنید یاتاقان A هیچ امکان حرکتی ندارد. می‌توان

یاتاقان‌های B, C, و D را به صورت تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفت. قطر مورد نیاز محور را بیابید.



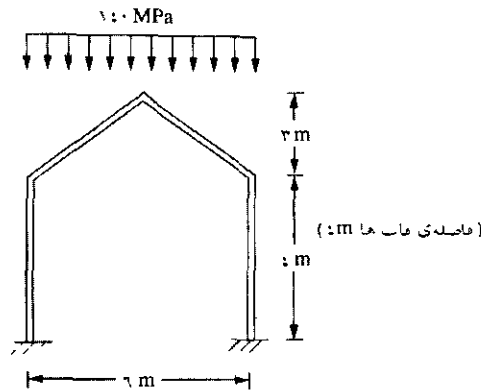
شکل ۵P-۶۷

۵-۶۸ در یک ساختمان صنعتی، قاب یک شیروانی را که تحت تأثیر بار خارجی ناشی از وزش باد قرار گرفته (معادل بادی به سرعت ۸۰ mph) طراحی کنید. فرض کنید قاب یاد شده جزئی از یک قاب اصلی است که به فاصله‌ی ۲۰ فوتی در کنار هم قرار گرفته‌اند. بدین منظور از مقطع بال پهن بر اساس تنش خمشی مجاز ۲۰ ksi و تنش تراکمی مجاز ۱۰ ksi در هر عضو استفاده کنید. از احتمال کمزش در هر عضو صرف‌نظر کنید. از فولاد ASTM A۳۶ استفاده نمایید.



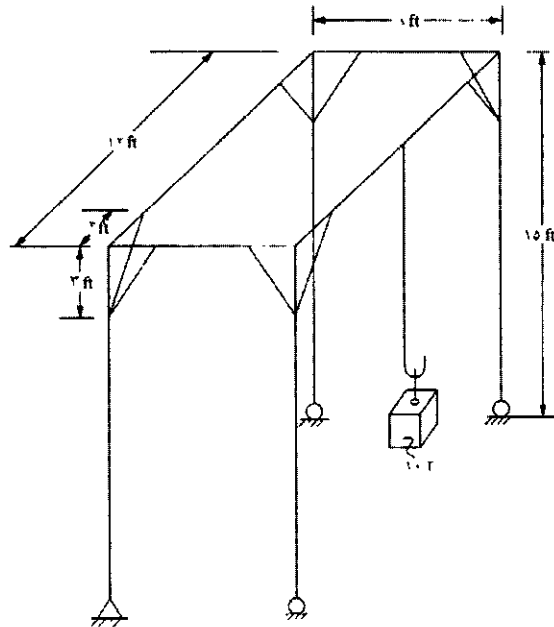
شکل P ۶۸-۵

در یک ساختمان آپارتمانی، قاب شیروانی مندرج در شکل زیر را به ازای بار متقارنی که از برف ناشی شده طراحی کنید. بدین منظور از مقطع بال پهن استفاده کنید. فرض کنید که تنش خمشی مجاز نباید از 140 MPa بیش تر شود. از فولاد ASTM A36 استفاده کنید.



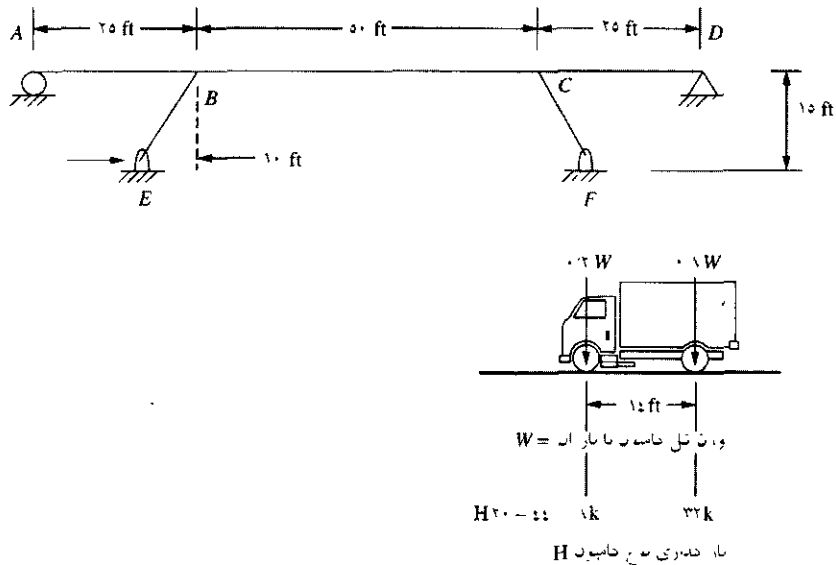
شکل P ۶۹-۵

۷۰-۵ جرثقیلی سقفی را به نوعی طراحی کنید که بتواند باری به بزرگی ۱۰ تن را بالا ببرد چرا که این جرثقیل باید کمپرسور، موتور، مبدل‌های حرارتی، و کنترل کننده‌ها را بلند نماید. همان‌طور که در شکل ۷۰-۵P نشان داده شده، این بار از طریق موقعیت بالا کشی در وسط یکی از تیرهای ۱۲ فوتی اصلی قرار دارد اعمال می‌شود. باید توجه داشت که این تیر در یک طرف جرثقیل قرار دارد. فرض کنید از فولاد سازه‌ای ASTM A۳۶ استفاده شده است. طول جرثقیل باید برابر ۱۲ فوت، عرض آن برابر ۸ فوت، و ارتفاع آن برابر ۱۵ فوت باشد. ابعاد تیرها باید همگی یکسان بوده و ستون‌ها نیز همه یک اندازه باشند. مضافاً، ابعاد بست‌ها همه باید با هم برابر باشد. بست‌های گوشه را می‌توان از مقاطع بال پهن یا هر شکل رایج دیگری انتخاب نمود. ضمن ارزیابی مقاومت خمش تیرها و خیز مجاز در آن‌ها، مقاومت کمانشی ستون‌ها، و نیز مقاومت کمانشی بست‌ها، باید از امن بودن سازه اطمینان حاصل نمایید. ضریب اطمینان را برابر ۵ و بر اساس تنش تسلیم در تیرها منظور نمایید. مطمئن شوید که خیز در تیرها از $L/360$ کم‌تر شود در جایی که L معرف طول دهانه‌ی تیر است. در ستون‌ها و بست‌ها از معادله‌ی کمانش اولر استفاده کنید. ضریب اطمینان در کمانش را برابر ۵ فرض نمایید. کلیه‌ی اتصالات بین تیرها و ستون‌ها را از نوع صلب فرض نموده در حالی که اتصال بین بست‌ها (کلاً هشت عدد) و ستون‌ها و تیرها، در هریک از چهار گوشه، از طریق پین صورت گرفته است. همچنین، فرض کنید جرثقیل بر روی غلطک‌هایی قرار دارد که یکی از آن‌ها به نحوی قفل شده که مطابق شکل، به صورت تکیه‌گاه لولایی عمل می‌کند.



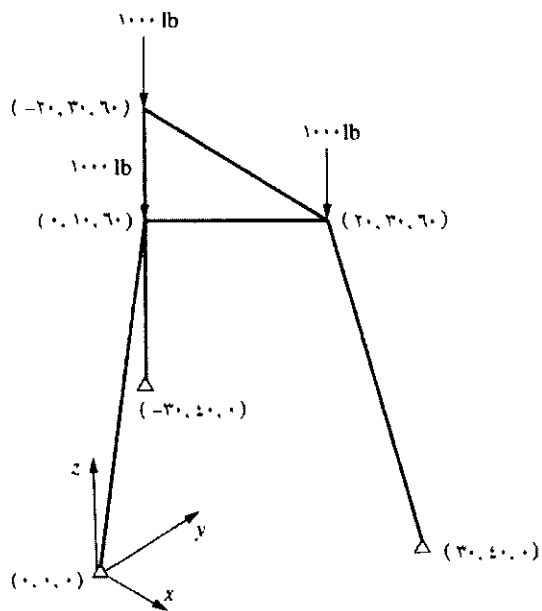
شکل P ۷۰-۵

۷۱-۵ سازه‌ی قاب صلبی از پل یک اتوبان را که در شکل ۷۱-۵P نشان داده شده به ازای بار ناشی از کامیون متحرکی (مطابق شکل)، به منظور شبیه سازی عبور آن از پل، طراحی کنید. از بار یاد شده استفاده نموده و آن را در موقعیت های مختلف قسمت فوقانی تیر حمال قرار دهید. از تنش های مجاز خمشی و تراکمی و خیزهای مجازی که در کتاب *Standard Specification for Highway Bridges*, American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington, D. C. قید شده یا هر مقدار معقول دیگری استفاده کنید.



شکل ۵P-۷۱

۷۲-۵ در خریای سه پایه‌ای مندرج در شکل ۵P-۷۲، سطح مقطع استاندارد شده‌ای را بیابید که تنش خمشی در آن از 20 ksi تجاوز ننموده و تنش تراکمی حاصلی که منجر به کماتش می‌شود، بر اساس ضریب اطمینانی برابر ۲، از آن چه که توسط معادله‌ی کماتش اولر حاصل می‌شود تجاوز ننماید. ضمناً، حداکثر خیز در هر دهانه به طول L ، از $L/360$ بیش‌تر نشود. هر سه تکیه‌گاه زیرین را ثابت فرض کنید. کلیه‌ی مختصات مندرج در شکل بر حسب اینچ می‌باشند.



شکل ۵P-۷۲

فصل ۶

استخراج معادلات سختی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای

مقدمه

در فصل‌های ۲ الی ۵، فقط المان‌های یک بعدی بررسی گردید. از اتصال دو المان یک بعدی یا بیش از آن در گره‌های مشترک، سازه‌های چارچوب‌دار یا مفصل‌داری همانند خرپاها، و قاب‌ها حاصل می‌شوند. المان‌های خطی دارای خصوصیات هندسی از قبیل اندازه‌ی سطح مقطع، و ممان اینرسی مرتبط با همان سطح مقطع می‌باشند. در هر حال، به منظور توصیف موقعیت در امتداد المان، تنها به مختصات محلی x در امتداد طول آن نیاز است (لذا آن‌ها را *المان‌های خطی* یا المان‌های یک بعدی می‌نامند): بنابراین، در یک المان خطی، هم سازگاری، اجباراً در خلال فرمول‌بندی معادلات تعادل در گره‌ها اعمال می‌شود.

در این فصل، اجزای محدود دو بعدی بررسی می‌شود. المان‌های دو بعدی (صفحه‌ای) توسط سه گره یا بیش‌تر، در یک صفحه دو بعدی تعریف می‌شوند (همانند $x-y$). المان‌ها در گره‌های مشترک و یا در امتداد لبه‌های مشترک به هم متصل شده تا سازه‌های پیوسته‌ای را همانند آنچه در شکل‌های ۱-۳، ۱-۴، ۱-۶ و ۶-۶(b) نشان داده شده، به وجود آورند. آن‌گاه، هم‌سازگاری در جابه‌جایی گره‌ها، در المان‌های دو بعدی، در خلال فرمول‌بندی معادلات تعادل در گره اعمال می‌شود. چنان‌چه از توابع جابه‌جایی درست استفاده شود، هم‌سازگاری در امتداد لبه‌های مشترک نیز به وجود خواهد آمد. المان دو بعدی در موارد زیر دارای اهمیت ویژه‌ای است: (۱) تحلیل تنش صفحه‌ای، که شامل مسائلی از قبیل ورق‌های سوراخ‌دار، گوشه‌گرد، یا هر تغییر شکل هندسی دیگری که منجر به ایجاد تمرکز تنش در هنگام بارگذاری شبیه به آنچه که در شکل ۱-۶ نشان داده شده می‌شود؛ و (۲) تحلیل کرنش صفحه‌ای، که شامل مسائلی می‌شود که از آن جمله می‌توان مجراهای زیر گذر قوطی شکل با بار یکسانی بر واحد طول، همانند شکل ۱-۳؛ و یا میله‌ی کنترل‌کننده‌ی استوانه‌ای شکلی همانند نمودار ۱-۴ که تحت تأثیر بار یکسانی در امتداد طول (یا عمق) قرار گرفته؛ و یا سدها و لوله‌هایی که همانند شکل ۱-۲ در معرض بارهای ثابتی در امتداد طول خود قرار گرفته‌اند را نام برد.

این فصل را با استخراج ماتریس سختی المان ساده‌ای در اجزای محدود، که در مقیاس دو بعدی یا صفحه‌ای، المان مثلثی شکل کرنش ثابت نامیده می‌شود، شروع می‌کنیم. دلیل این امر آن است که استخراج ماتریس سختی المان مثلثی شکل با کرنش ثابت (CST) در مقایسه با دیگر المان‌های دو بعدی، ساده‌تر است. این المان به آن دلیل CST نامیده می‌شود که کرنش در آن ثابت است.

از آنجا که روش انرژی از عملی‌ترین روش‌ها در استخراج ماتریس سختی المان‌های دو بعدی و سه بعدی در اجزای محدود است، لذا از اصل مینیمم انرژی پتانسیل در استخراج ماتریس سختی CST استفاده می‌شود.

سپس ضمن ارائه مثال ساده‌ای مرتبط با تنش صفحه‌ای در یک ورق نازک، نحوه‌ی انطباق ماتریس سختی المان‌ها را به روش مستقیم سختی که در فصل ۲ آورده شد نشان می‌دهیم. سپس حل کلی مسأله، که شامل محاسبه‌ی تنش در ورق است، ارائه خواهد شد.

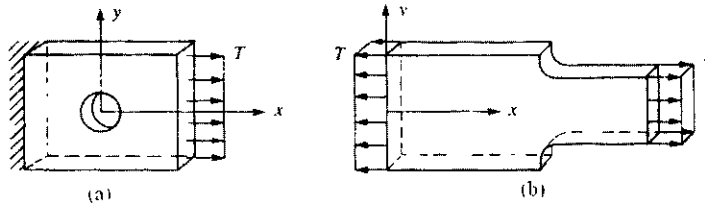
۶-۱ مفاهیم اولیه تنش و کرنش صفحه‌ای (دربرگیرنده)

در این بخش، مفاهیم تنش و کرنش صفحه‌ای توضیح داده خواهند شد. این مفاهیم از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند؛ زیرا آنچه در این فصل استخراج می‌شود مستقیماً به سیستم‌هایی قابل اعمال است که تحت تأثیر تنش یا کرنش صفحه‌ای قرار داشته باشند. حال جزئیات اصول یاد شده را بررسی می‌کنیم.

تنش صفحه‌ای

طبق تعریف، تنش صفحه‌ای دلالت بر حالتی از تنش می‌نماید که در آن از تنش‌های عمودی و برشی در راستای عمود بر صفحه‌ی مورد نظر صرف نظر شده است. برای مثال، در شکل‌های ۶-۱(a) و ۶-۱(b)، ورق‌هایی که در صفحه‌ی $x-y$ تحت تأثیر نیروی کششی سطحی T (فشار عمل‌کننده بر لبه یا سطح یک عضو با واحد سطح/نیرو) قرار دارند در حالت تنش صفحه‌ای به ستر می‌برند؛ به عبارتی، تنش عمودی σ_z و تنش‌های برشی τ_{xz} و τ_{yz} برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. به طور کلی،

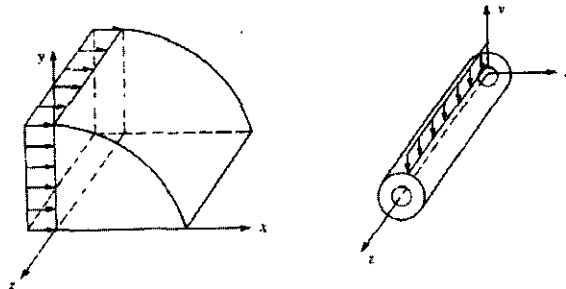
عضوهایی که نازک بوده (اجسامی که بعد z آن‌ها در مقایسه با دو بعد صفحه‌ای دیگر، x و y ، کوچک باشد) و بار اعمال شده بر آن‌ها فقط در صفحه‌ی x - y قرار داشته باشد در حالت تنش صفحه‌ای به سر می‌برند.



شکل ۱-۶ مسائلی از نوع تنش صفحه‌ای: (a) ورق سوراخ‌دار (b) ورقی با شعاع گوشه

کرنش صفحه‌ای

طبق تعریف، کرنش صفحه‌ای دلالت بر حالتی از کرنش می‌نماید که در آن از کرنش عمود بر صفحه‌ی x - y ، ϵ_z ، و کرنش‌های برشی γ_{yz} و γ_{xz} صرف‌نظر شده است. فرضیه‌ی کرنش صفحه‌ای در اجسام درازی (برای مثال، در راستای z) که دارای سطح مقطع ثابتی بوده و بار اعمال شده بر آن‌ها بدون تغییر در راستای z ، فقط در راستای x و y عمل می‌نماید واقع‌گرایانه است. مثال‌هایی در زمینه‌ی کرنش صفحه‌ای در شکل ۱-۶ [و نیز در شکل‌های ۱-۳ (یک کانال دراز زیر زمینی) و ۱-۴ (انتهای میله‌ی سیلندر هیدرولیکی)] نشان داده شده‌اند. در این مثال‌ها فقط ضخامت واحدی (۱ in. یا ۱ ft.) از سازه در نظر گرفته شده است؛ زیرا کلیه‌ی اجزای با ضخامت‌های واحد شبیه هم عمل می‌کنند (به‌جز نزدیک به هر یک از دو انتها). مدل‌های اجزای محدود سازه‌های مندرج در شکل ۱-۶، از سطح مقطع‌های المان بندی شده‌ی مناسب در صفحه‌ی x - y با بارهای اعمال شده بر ضخامت واحدی در جهت x و y تشکیل شده‌اند.



شکل ۶-۲ مسائلی مرتبط با کرنش صفحه‌ای (a) بار افقی اعمال شده به سد: (b) لوله تحت بار عمودی

تنش و کرنش حالت دو بعدی

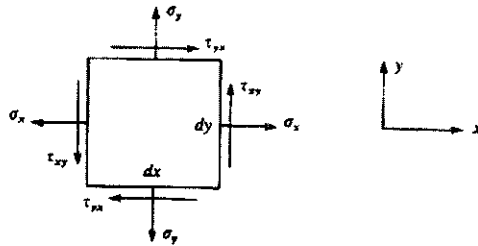
به منظور درک کامل از نحوه‌ی استخراج و کاربرد ماتریس سختی المان مثلثی شکل با تنش/کرنش صفحه‌ای، مفهوم تنش و کرنش دو بعدی و روابط دو بعدی تنش/کرنش، در حالت تنش و یا کرنش صفحه‌ای، از ضروریات است؛ بنابراین، به طور خلاصه رئوس مفاهیم ضروری تنش و کرنش دو بعدی را ارائه می‌کنیم (به مراجع [۱] و [۲] و پیوست C برای جزییات بیش‌تر این موضوع مراجعه نمایید).

ابتدا، با استفاده از شکل ۶-۳ حالت تنش دو بعدی را تشریح می‌کنیم. المان بسیار کوچکی به ابعاد dx و dy تحت تأثیر تنش‌های σ_x و σ_y به ترتیب در جهت‌های x و y قرار گرفته است (در این جا سطوح قائم و افقی). تنش برشی τ_{xy} بر لبه‌ی x (وجه عمودی) و در جهت y عمل می‌کند. تنش برشی τ_{yx} بر لبه‌ی y (وجه افقی) و در جهت x عمل می‌نماید. از تعادل گشتاورها در المان نتیجه می‌شود که اندازه‌ی τ_{xy} با τ_{yx} برابر است. برای اثبات این تساوی به پیوست C-۱ مراجعه شود؛ بنابراین، سه تنش مستقل وجود دارد که به صورت برداری ماتریسی به شرح زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1-1-6)$$

معادلات تعادل المان در پیوست ۱-C استخراج شده‌اند.

تنش‌هایی که در معادله‌ی (۱-۱-۶) داده شده‌اند بر حسب جابه‌جایی گره‌ها یا درجه‌های آزادی تشریح خواهند شد؛ بنابراین، در صورت تعیین جابه‌جایی‌ها می‌توان تنش‌های یاد شده را مستقیماً محاسبه نمود.



شکل ۳-۶ تنش دو بعدی

لازم به یادآوری است که از مبحث مقاومت مصالح [۲]، تنش‌های اصلی را که معرف حداکثر و حداقل تنش در فضایی دو بعدی می‌باشند می‌توان از عبارات زیر محاسبه نمود.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max} \quad (2-1-6)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min}$$

همچنین، زاویه‌ی اصلی θ_p را که اندازه‌ی آن معرف راستای عمود بر سطحی است که حاوی حداکثر یا حداقل تنش است، می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6-1-3)$$

شکل ۶-۴ نمایانگر تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 و زاویه‌ی θ_p می‌باشد. لازم به یادآوری است (بر اساس شکل ۶-۴) که اندازه‌ی تنش برشی بر سطوحی که تنش عمودی در

$$\sigma_1 = \sigma_y$$

$$\sigma_2 = \sigma_x$$

آن‌ها برابر با تنش اصلی است (حداکثر و حداقل) صفر می‌باشد. همین‌طور در شکل ۶-۵، المان کوچکی نشان داده شده که معرف کرنش دو بعدی در نقطه‌ای

از یک سازه است. المان یاد شده در نقطه‌ای همانند A به میزان u و v در جهت‌های x

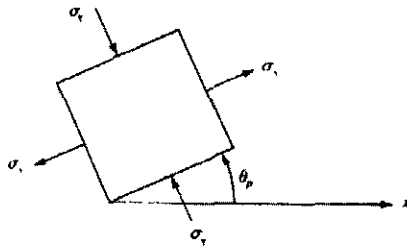
و y جابه‌جا شده و در امتداد خطی همانند AB به میزان $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$ ، و در امتداد خط AC

به میزان $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$ ، بیش از قبل، به ترتیب در جهت‌های یاد شده، جابه‌جایی یا افزایش

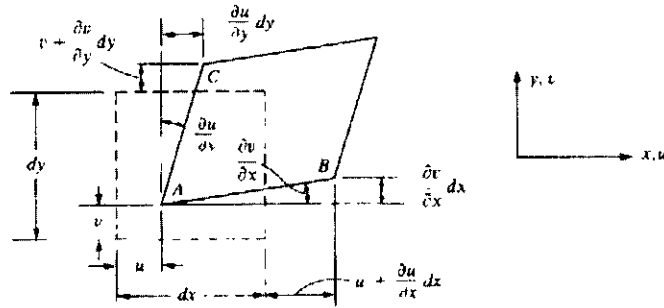
طول داشته است. مضافاً، با در نظر گرفتن خطوط AB و AC ، مشاهده می‌شود که

نقطه‌ی B به میزان $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$ نسبت به A به سمت بالا، و نقطه‌ی C به میزان

$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy$ نسبت به A به سمت راست حرکت می‌کند.



شکل ۶-۴ تنش‌های اصلی و جهت آن‌ها



شکل ۵-۶ جابه‌جایی و چرخش خطوطی از یک المان در صفحه‌ی $x-y$

با توجه به تعریف کلی کرنش برشی و عمودی در شکل ۵-۶ داریم:

رابطه کرنش
جا جایی در حالت درجه ۱

$$\left[\begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right] \quad (۴-۱-۶)$$

نحوه‌ی استخراج جزئیات معادلات (۴-۱-۶) در پوست $\gamma-C$ آورده شده است. لازم به یادآوری است که کرنش‌های ϵ_x و ϵ_y که از تغییر شکل المان ناشی می‌شوند، برابر با تغییرات طول بر واحد طول در فیبرهایی از ماده‌اند که در ابتدا با محورهای x و y موازیند. لذا چنین کرنش‌هایی، کرنش عمودی (یا کششی یا طولی) نامیده می‌شوند؛ بنابراین، γ_{xy} ، کرنش برشی نامیده می‌شود.

کرنش‌هایی که در معادلات (۴-۱-۶) داده شده‌اند به صورت بردار ماتریس ستونی زیر بیان می‌شوند.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۵-۱-۶)$$

به منظور درک مطالب بعدی که در این فصل آورده خواهد شد، روابط بین کرنش و جابه‌جایی‌ها در جهت‌های x و y ، مندرج در معادلات (۴-۱-۶)، کافی است.

حال روابط تنش - کرنش را برای اجسام همسانگرد، تحت شرایط کرنش و تنش صفحه‌ای ارائه می‌کنیم. در حالت تنش صفحه‌ای فرض می‌کنیم تنش‌های زیر برابر صفر باشند.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (6-1-6)$$

پس از اعمال معادله‌ی (6-1-6) به روابط سه بعدی تنش - کرنش [به پیوست C، معادله‌ی (C-3-10) مراجعه شود]، نتیجه می‌شود که $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ، در حالی که $\epsilon_z \neq 0$ است. در حالت تنش دو بعدی داریم:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (7-1-6)$$

در جایی که

ماتریس D (ماتریس کرنش)
 در حالت دو بعدی
 Plain stress

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

تنش منفرجه

$$(8-1-6)$$

ماتریس تنش / کرنش (یا ماتریس ترکیبی رابط)، E مدول الاستیسیته، و ν ضریب پواسون نامیده می‌شود. در معادله‌ی (7-1-6)، $\{\sigma\}$ و $\{\epsilon\}$ به ترتیب در روابط (6-1-1) و (6-1-5) تعریف شده‌اند.

در حالت کرنش صفحه‌ای، فرض می‌شود که کرنش‌های ذیل برابر باشند.

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (9-1-6)$$

پس از اعمال معادله‌ی (9-1-6) به روابط سه بعدی تنش / کرنش [معادله‌ی (C-3-10)، نتیجه می‌شود که تنش‌های برشی $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ، در حالی که $\sigma_z \neq 0$ است. لذا ماتریس تنش / کرنش برابر است با:

ماتریس کرنش $\{\epsilon\}$ در مختصات جهانی

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad (10-1-6)$$

ماتریس کرنش $\{\sigma\}$ در مختصات محلی

Plan strain

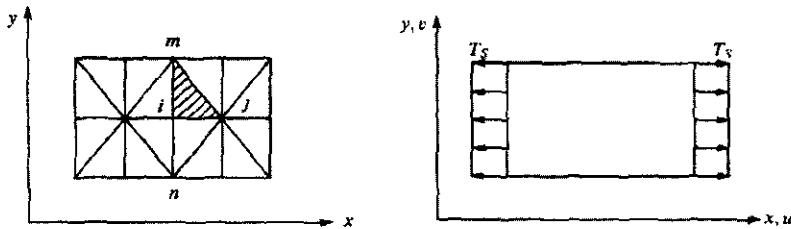
ماتریس‌های $\{\sigma\}$ و $\{\epsilon\}$ همانند ماتریس‌های مشابه در حالت تنش دو بعدی می‌باشند. بر اساس نتایج مرجع [۱]، در حالت تنش دو بعدی، معادلات دیفرانسیلی جزئی به شرح زیرند.

معادلات دیفرانسیل در حالت تنش دو بعدی

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (11-1-6)$$

۶-۲ استخراج معادلات و ماتریس سختی المان مثلثی شکل در حالت کرنش ثابت

به منظور تشریح مراحل و معرفی معادلات مورد نیاز اولیه در المان دو بعدی مثلثی شکل، ورق نازکی را که تحت تأثیر کشش سطحی T_s مطابق شکل ۶-۶ (a) قرار گرفته است در نظر می‌گیریم.



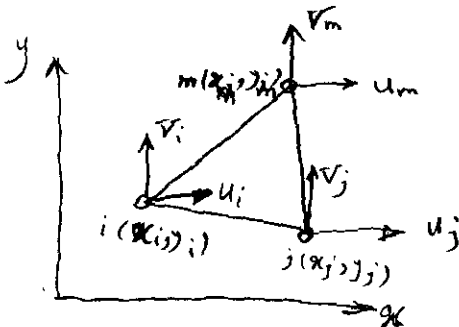
شکل ۶-۶ (a) ورق نازک تحت کشش T_s شکل ۶-۶ (b) ورق اجزای بندی شده‌ی شکل ۶-۶ (a) با استفاده از المان مثلثی شکل

مرحله ۱ انتخاب نوع المان

به منظور تحلیل ورق، المان مثلثی شکل مندرج در شکل ۶-۷ را که از ورق المان بندی شده‌ی شکل ۶-۶ (b) استخراج شده در نظر می‌گیریم. ورق جزء بندی شده به المان‌های مثلثی شکلی تقسیم شده که هر یک دارای گره‌هایی همانند i ، j و m می‌باشند. از المان‌های مثلثی شکل به آن دلیل استفاده می‌شود که می‌توان توسط آن‌ها مرز اجسام غیر یکنواخت را به خوبی تقریب زده و عبارات مرتبط با آن‌ها نسبتاً آسان است. چنانچه از تعداد کمی از المان‌های بزرگ در المان بندی استفاده شود، آن تقسیم بندی را شبکه بندی درشت می‌نامند. هر گره دارای دو درجه‌ی آزادی است - یک جابه‌جایی برای x و یک جابه‌جایی برای y . فرض می‌کنیم که u_i و v_i به ترتیب معرف مولفه‌های جابه‌جایی گره i در جهت‌های x و y باشند.

در این جا کلیه‌ی فرمول بندی‌ها بر اساس سیستم علامت گذاری پادساعتگرد گره‌ها استوار است، اگر چه می‌توان از سیستم ساعتگرد در علامت گذاری نیز استفاده نمود. باید به خاطر داشت تا از روش علامت گذاری همسانی در کل جسم استفاده نمود تا بدین وسیله از بروز مشکلات محاسباتی، همانند سطوح منفی در المان‌ها، جلوگیری شود. در این جا (x_i, y_i) ، (x_j, y_j) و (x_m, y_m) به ترتیب مختصات گره‌های شناخته شده‌ی i ، j و m می‌باشند.

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (1-2-6)$$



شکل ۶-۷ تنش در حالت آراسته المان مثلثی پایه

مرحله ۲ انتخاب توابع جابه‌جایی

در هر المان تابعی خطی را برای جابه‌جایی به شرح زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (2-2-6)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

در جایی که $u(x, y)$ و $v(x, y)$ معرف جابه‌جایی هر نقطه‌ای از المان به مختصات (x_i, y_i) است.

انتخاب تابع خطی، ارضا شدن شرط هم‌سازگاری را تضمین می‌نماید. هر تابع خطی که دارای دو انتهای مشخص باشد ملزم به عبور از یک مسیر است - به عبارتی، از هر دو انتها. لذا یکسان بودن جابه‌جایی‌ها در امتداد لبه‌ها و در گره‌های مشترک بین المان‌ها، همانند لبه‌ی $i - j$ ، در دو المان مندرج در شکل ۶-۶(b)، توسط المانی خطی تضمین می‌شود. با استفاده از معادلات (۲-۲-۶)، تابع عمومی جابه‌جایی $\{\psi\}$ را که حاوی توابع u و v است می‌توان به شرح زیر تشریح نمود.

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_4 + a_5 x + a_6 y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (3-2-6)$$

به منظور تعیین مقادیر a در روابط (۲-۲-۶)، می‌توان از جای‌گزینی مختصات نقاط گره‌ای در معادلات (۲-۲-۶) شروع نموده تا روابط زیر حاصل شوند.

$$\begin{aligned}
 u_i &= u(x_i, y_i) = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\
 u_j &= u(x_j, y_j) = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \\
 u_m &= u(x_m, y_m) = a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m \\
 v_i &= v(x_i, y_i) = a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i \\
 v_j &= v(x_j, y_j) = a_4 + a_5 x_j + a_6 y_j \\
 v_m &= v(x_m, y_m) = a_4 + a_5 x_m + a_6 y_m
 \end{aligned}
 \tag{۶-۲-۴}$$

برای تعیین مقادیر a می‌توان از سه معادله‌ی اول روابط (۶-۲-۴)، که به صورت ماتریسی به شرح زیر داده شده‌اند شروع نمود.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}
 \tag{۶-۲-۵}$$

یا، پس از تعیین مقادیر a داریم:

$$\{a\} = [x]^{-1} \{u\}
 \tag{۶-۲-۵}$$

در جایی که $[x_i]$ در سمت راست معادله‌ی (۶-۲-۵)، ماتریسی 3×3 است. روش کوفکتور یکی از روش‌هایی است که بدان وسیله می‌توان معکوس $[x]$ را به دست آورد. لذا:

$$[X]^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix}
 \tag{۶-۲-۷}$$

در جایی که

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad \text{دترمینان}
 \tag{۶-۲-۸}$$

برابر با دترمینان $[x]$ بوده و مقدار آن برابر است با:

$$|C| = \begin{vmatrix} \alpha_j \gamma_m - \gamma_j \alpha_m & \gamma_j - \gamma_m & \alpha_m - \alpha_j \\ \gamma_i \alpha_m - \alpha_i \gamma_m & \gamma_m - \gamma_i & \alpha_i - \alpha_m \\ \alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j & \gamma_i - \gamma_j & \alpha_j - \alpha_i \end{vmatrix}$$

$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j) \quad (9-2-6)$$

در این جا A سطح هر مثلث بوده و

$$\left. \begin{array}{lll} \alpha_i = x_j y_m - y_j x_m & \alpha_j = y_i x_m - x_i y_m & \alpha_m = x_i y_j - y_i x_j \\ \beta_i = y_j - y_m & \beta_j = y_m - y_i & \beta_m = y_i - y_j \\ \gamma_i = x_m - x_j & \gamma_j = x_i - x_m & \gamma_m = x_j - x_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ضرایب مثلث} \\ \text{ماتریس} \end{array} \quad (10-2-6)$$

پس از تعیین $[x_i]^{-1}$ می توان معادله ی (۶-۲-۶) را به صورت بسط یافته ی ماتریسی به شرح زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (11-2-6)$$

مشابهاً، با استفاده از سه رابطه ی آخر معادلات (۶-۲-۶) داریم:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (12-2-6)$$

حال مولفه ی x جابه جایی $u(x, y)$ از معادله ی $\{\psi\}$ را (v) نیز به طریقی مشابه حاصل می شود) بر حسب متغیرهای مختصاتی x و y ، متغیرهای مختصاتی معلوم $\gamma_m, \dots, \alpha_1, \alpha_2$ و جابه جایی های گره ای u_i, u_j و u_m استخراج می کنیم. ضمن شروع از معادلات (۶-۲-۶)، به صورت ماتریسی داریم:

$$\{u\} = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (13-2-6)$$

ضمن جای گزینی معادله ی (۶-۲-۶) در رابطه ی (۶-۲-۶) داریم:

$$\{u\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (14-2-6)$$

از بسط معادله‌ی (۱۴-۲-۶) می‌توان نوشت:

$$\{u\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i u_i + \alpha_j u_j + \alpha_m u_m \\ \beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m \\ \gamma_i u_i + \gamma_j u_j + \gamma_m u_m \end{Bmatrix} \quad (15-2-6)$$

از ضرب دو ماتریس مندرج در معادله‌ی (۱۵-۲-۶) و باز نویسی آن‌ها نتیجه می‌شود که:

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} \left[(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) u_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) u_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) u_m \right] \quad (16-2-6)$$

مشابه‌ها، ضمن جای‌گزینی v_i بجای u_i ، v_j به‌جای u_j و v_m به‌جای u_m در معادله‌ی (۱۶-۲-۶) -۲ (۱۶-۲)، مولفه‌ی y جابه‌جایی برابر است با:

$$v(x, y) = \frac{1}{2A} \left[(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) v_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) v_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) v_m \right] \quad (17-2-6)$$

به منظور تشریح ساده‌تر u و v در قالب معادلات (۱۶-۲-۶) و (۱۷-۲-۶)، روابط زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2A} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \\ N_m &= \frac{1}{2A} (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \end{aligned} \quad (18-2-6)$$

بنابراین، با استفاده از معادلات (۱۸-۲-۶)، می‌توان روابط (۱۶-۲-۶) و (۱۷-۲-۶) را به شرح زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v(x, y) &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \quad (۱۹-۲-۶)$$

از تشریح معادلات (۱۹-۲-۶) به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{Bmatrix}$$

یا

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} N_i & \cdot & N_j & \cdot & N_m & \cdot \\ \cdot & N_i & \cdot & N_j & \cdot & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (۲۰-۲-۶)$$

نهایتاً، ضمن تشریح معادله‌ی (۲۰-۲-۶) به صورت ماتریسی خلاصه شده داریم:

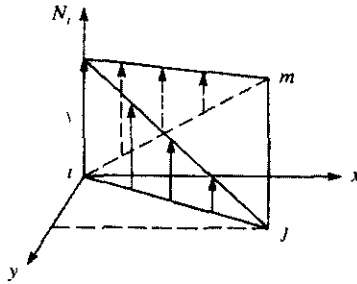
$$\{\psi\} = [N]\{d\} \quad (۲۱-۲-۶)$$

در حالی که $[N]$ برابر است با:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & \cdot & N_j & \cdot & N_m & \cdot \\ \cdot & N_i & \cdot & N_j & \cdot & N_m \end{bmatrix} \quad (۲۲-۲-۶)$$

تا به این‌جا، جابه‌جایی عمومی را در قالب توابعی از $\{d\}$ ، بر حسب توابع شکل N_i ، N_j و N_m تشریح نموده‌ایم. در صورت رسم، توابع شکل معرف تغییرات $\{\psi\}$ بر سطح هر المان می‌باشند. برای مثال، به ازای $u_i = 1$ ، و دیگر مقادیر درجه‌های آزادی برابر صفر؛ یعنی $v_i = v_j = v_m = 0$ ، رسم N_i معرف نحوه‌ی تغییرات متغیر u بر سطح المان است. مضافاً، $u(x_i, y_i)$ باید برابر u_i باشد. لذا، در (x_i, y_i) باید داشته

باشیم $N_i = 1$ ، $N_j = 0$ و $N_m = 0$. متشابهاً، $u(x_j, y_j) = u_j$. بنابراین، در (x_j, y_j) ، $N_i = 0$ ، $N_j = 1$ و $N_m = 0$. شکل ۸-۶ نمایانگر تغییرات تابع شکل N_i بر سطح یک المان دلخواه است. باید توجه داشت که N_i به‌جز در گره‌های i و m و امتداد خط رابط آن‌ها دارای اندازه‌ای غیر از صفر است.

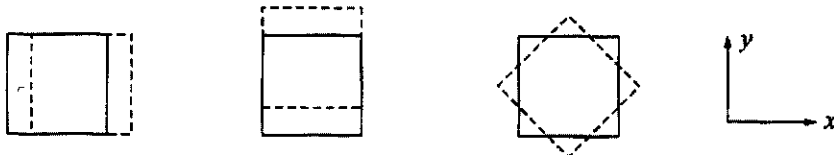


شکل ۸-۶ تغییرات N_i بر سطح x - y یک المان

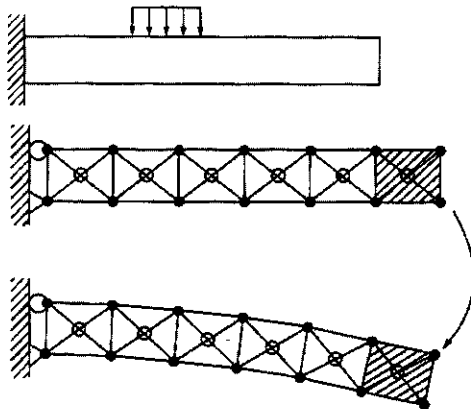
نهایتاً، در کلیه‌ی نقاط به مختصات x و y بر سطح المان، $N_i + N_j + N_m = 1$ ، به قسمی که اگر جسم به صورت یک جسم صلب تغییر مکان یابد u و v دارای مقادیری ثابت خواهند بود. اثبات این رابطه که مشابه با نحوه‌ی اثبات مطالب مندرج در بخش ۳-۲ برای المان میله‌ای شکل است به عنوان یک مسأله (مسأله‌ی ۶-۱) به عهده‌ی شما واگذار می‌شود. همان‌طور که در بخش ۳-۶ تشریح شده، از توابع شکل نیز به منظور محاسبه‌ی نیروهای حجمی و سطحی در گره‌های المان استفاده می‌شود.

لازمه‌ی کامل بودن المان مثلثی شکل به ازای کرنش ثابت در المان دو بعدی تنش صفحه‌ای، در شکل ۹-۶ نشان داده شده است. المان باید بتواند به طور یکنواخت در هر

یک از جهت‌های x یا y در صفحه انتقال یافته و بدون هیچگونه کرنشی بچرخد. علت انتقال المان به صورت یک جسم صلب و چرخش آن بدون هیچگونه تنشی در مثال تیرآهن مدل سازی شده با المان‌های تنش صفحه‌ای، در شکل ۶-۹ (b) نشان داده شده است. با توجه به مبحث استاتیک، المان‌هایی که در طرف دیگر بارگذاری قرار دارند عاری از تنش بوده و لذا این المان‌ها باید بتوانند آزادانه بدون هیچ‌گونه افزایش طول یا تغییر شکلی انتقال یافته و بچرخند.



(a) حالت‌های مختلف جابه‌جایی المان تنش دو بعدی به صورت یک جسم صلب (از چپ به راست، انتقال مطلق در جهت‌های x و y ، و چرخش مطلق)



(b) انتقال و چرخش به صورت یک جسم صلب در المان‌های سمت راست بارگذاری اتفاق می‌افتد

شکل ۶-۹

(b) تیرآهن یک سر گیردار مدل سازی شده با استفاده از المان‌های کرنش ثابت مثلثی شکل؛ المان‌های سمت راست بارگذاری فاقد تنش می‌باشند.

شکل ۶-۹ المان‌های عاری از تنش در تیرآهن یک سر گیردار مدل شده‌ای با CST

مرحله ۳ تعریف روابط کرنش/جاب‌جایی و تنش/کرنش

ابتدا تنش و کرنش بر حسب جاب‌جایی مجهول گره‌ها تعریف می‌شوند.

کرنش های المان

کرنش های المان دو بعدی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (23-2-6)$$

با استفاده از معادلات (۶-۲-۱۹) برای جاب‌جایی‌ها داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} (N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m) \quad (24-2-6)$$

یا

$$u_{,x} = N_{i,x} u_i + N_{j,x} u_j + N_{m,x} u_m \quad (25-2-6)$$

در جایی که علامت کامای بعد از هر متغیر، دلالت بر مشتق آن نسبت به آن متغیر می‌نماید. به دلیل آنکه $u_i = u(x_i, y_i)$ دارای مقداری ثابت است لذا $u_{i,x} = 0$. متشابهاً،

$$u_{m,x} = 0 \text{ و } u_{j,x} = 0$$

با استفاده از معادلات (۶-۲-۱۸)، می‌توان مشتق عبارات توابع شکل را در معادله‌ی

(۶-۲-۲۵) به شرح زیر تعیین نمود:

$$N_{i,x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) = \frac{\beta_i}{2A} \quad (26-2-6)$$

متشابهاً

$$N_{j,x} = \frac{\beta_j}{2A} \quad \text{و} \quad N_{m,x} = \frac{\beta_m}{2A} \quad (27-2-6)$$

بنابراین، از جای‌گزینی معادلات (26-2-6) و (27-2-6) در معادله (25-2-6) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} (\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m) \quad (28-2-6)$$

متشابهاً، می‌توان دریافت که:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} (\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_m v_m) \quad (29-2-6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A} (\gamma_i u_i + \beta_i v_i + \gamma_j u_j + \beta_j v_j + \gamma_m u_m + \beta_m v_m)$$

از جای‌گزینی معادلات (28-2-6) و (29-2-6) در معادله (23-2-6) داریم:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & \cdot & \beta_j & \cdot & \beta_m & \cdot \\ \cdot & \gamma_i & \cdot & \gamma_j & \cdot & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (30-2-6)$$

یا

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} B_i & B_j & B_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} \quad (31-2-6)$$

در جایی که

$$[B_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & \beta_i \end{bmatrix} \quad [B_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \gamma_j \\ \gamma_j & \beta_j \end{bmatrix} \quad [B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_m \\ \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (32-2-6)$$

نهایتاً، معادله‌ی (۳۱-۲-۶) به صورت ماتریسی ساده برابر است با:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (33-2-6)$$

در جایی که

$$[B] = [B_i \quad B_j \quad B_m] \quad (34-2-6)$$

ماتریس B مستقل از مختصات x و y است. همان‌طور که از روابط (۳۲-۲-۶) و (۳۱-۲-۶) ملاحظه می‌شود، این بردار فقط به مختصات گره‌ای وابسته است. کرنش‌های داده شده در معادله‌ی (۳۳-۲-۶) ثابتند؛ بنابراین، المان، مثلث کرنش ثابت (CST) نامیده می‌شود.

روابط تنش/کرنش

به طور کلی، روابط تنش/کرنش دو بعدی به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (35-2-6)$$

در جایی که در مسائلی با تنش صفحه‌ای $[D]$ از معادله‌ی (۸-۱-۶)، و در مسائلی با کرنش صفحه‌ای، از رابطه‌ی (۱۰-۱-۶) حاصل می‌شود. از جای‌گزینی معادله‌ی (۳۳-۲-۶) در رابطه‌ی (۳۵-۲-۶)، تنش‌های صفحه‌ای بر حسب درجه‌های آزادی مجهول گره‌ها به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\underline{\{\sigma\}} = [D][B]\{d\} \quad (36-2-6)$$

در جایی که تنش‌های $\{\sigma\}$ در هر نقطه‌ای از المان ثابتند.

مرحله ۴ استخراج معادلات و ماتریس سختی المان

با استفاده از اصل مینیم انرژی پتانسیل، می‌توان معادلات المان مثلثی شکلی را با کرنش ثابت به دست آورد. در این‌جا باید به خاطر داشت که در المانی با تنش صفحه‌ای، انرژی پتانسیل کل تابعی از جابه‌جایی‌های گره‌های $u_i, v_i, u_j, \dots, v_m$ (به عبارتی، $\{d\}$) است به قسمی که:

$$\pi_p = \pi_p(u_i, v_i, u_j, \dots, v_m) \quad (37-2-6)$$

در این‌جا، انرژی پتانسیل کل برابر است با:

$$\pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s \quad (38-2-6)$$

در جایی که انرژی کرنشی برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (39-2-6)$$

یا، با استفاده از معادله‌ی (۳۵-۲-۶) داریم:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV \quad (40-2-6)$$

در جایی که از رابطه‌ی $[D]^T = [D]$ در معادله‌ی (۴۰-۲-۶) استفاده شده است.

انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای حجمی برابر است با:

$$\Omega_b = - \int_V \int_V \{\psi\}^T [X] dV \quad (41-2-6)$$

در جایی که مجدداً، $\{\psi\}$ تابع عمومی جابه‌جایی، $\{X\}$ نیروی ناشی از وزن بر واحد حجم، یا ماتریس وزن مخصوص (عموماً بر حسب پوند بر اینچ مکعب یا کیلو نیوتن بر متر مکعب) است.

$$\frac{l_b}{m^3}$$

$$\frac{kN}{m^3}$$

انرژی پتانسیل ناشی از بارهای متمرکز برابر است با:

$$\Omega_p = -\{d\}^T \{P\} \quad (۴۲-۲-۶)$$

در جایی که $\{d\}$ معرف جابه‌جایی‌های گره‌های معمول، و $\{P\}$ معرف بارهای متمرکز خارجی است.

انرژی پتانسیل بارهای گسترده (یا کشش‌های سطحی) که به میزان جابه‌جایی‌های مربوطه‌ی سطحی تغییر مکان می‌یابند برابر است با:

$$\Omega_s = - \int_S \{\psi_s\}^T \{T_s\} dS \quad (۴۳-۲-۶)$$

در جایی که $\{T_s\}$ معرف کشش‌های سطحی (عموماً در واحد پوند بر اینچ مربع یا کیلو نیوتن بر متر مربع)، $\{\psi_s\}$ معرف میدان جابه‌جایی‌های سطحی مرتبط با نیروهای سطحی، و S سطحی است که نیروهای کششی سطحی $\{T_s\}$ بر آن عمل می‌کنند. مشابه با معادله‌ی (۲۱-۲-۶)، $\{\psi_s\}$ را به صورت $\{\psi_s\} = [N_s] \{d\}$ تشریح نموده در جایی که $[N_s]$ معرف ماتریس توابع شکلی است که در امتداد قسمتی از سطح، که کشش‌های سطحی بر آن عمل می‌کنند ارزیابی می‌شود.

از جای‌گزینی معادله‌ی (۲۱-۲-۶) برای $\{\psi_s\}$ و رابطه‌ی (۳۳-۲-۶) برای کرنش‌ها در معادلات (۴۰-۲-۶) - (۴۳-۲-۶)، داریم:

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{V} \{d\}^T \int_V \int [B]^T [D] [B] \{d\} dV - \int_V \int \{d\}^T [N]^T \{X\} dV \\ & - \{d\}^T \{P\} - \int_S \int [d]^T [N_s] \{T_s\} dS \end{aligned} \quad (۴۴-۲-۶)$$

جابه‌جایی‌های گره‌ای $\{d\}$ مستقل از مختصات عمومی x و y بوده به قسمی که $\{d\}$ را می‌توان از درون انتگرال معادله‌ی (۴۴-۲-۶) بیرون کشید؛ بنابراین،

$$\pi_p = \frac{1}{\gamma} \{d\}^T \int_V \int \int [B]^T [D] [B] dV \{d\} - \{d\}^T \int_V \int \int [N]^T \{X\} dV - \{d\}^T \{P\} - \{d\}^T \int_S \int [N_s]^T \{T_s\} dS \quad (45-2-6)$$

از معادلات (۶-۲-۴۱)-(۶-۲-۴۳) ملاحظه می‌شود که سه عبارت آخر در معادله‌ی (۶-۲-۴۵)

(۶-۲-۴۵) معرف کل بار اعمال شده‌ی $\{f\}$ بر سطح المان است؛ به عبارتی،

$$\{f\} = \int_V \int \int [N]^T [X] dV + \{P\} + \int_S \int [N_s]^T \{T_s\} dS \quad (6-2-46)$$

در جایی که اولین، دومین، و سومین عبارت در سمت راست معادله‌ی (۶-۲-۴۶) به ترتیب معرف نیروهای حجمی، نیروهای متمرکز گره‌ای، و کشش‌های سطحی می‌باشند.

پس از جای‌گزینی معادله‌ی (۶-۲-۴۶) در معادله‌ی (۶-۲-۴۵) داریم:

$$\pi_p = \frac{1}{\gamma} \{d\}^T \int_V \int \int [B]^T [D] [B] dV \{d\} - \{d\}^T \{f\} \quad (6-2-47)$$

از آن‌جا که $\pi_p = \pi_p(d)$ ، پس از تعیین اولین تغییرات، یا همان‌طور که در فصل‌های ۲ و ۳ گفته شد، تعیین معادل آن؛ یعنی مشتق جزئی π_p نسبت به جابه‌جایی گره‌ها (همان‌طور که قبلاً در مورد المان‌های میله‌ای شکل و تیرآهن در فصل‌های ۳ و ۴ به ترتیب گفته شد)، داریم:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{d\}} = \left[\int_V \int \int [B]^T [D] [B] dV \right] \{d\} - \{f\} = 0 \quad (6-2-48)$$

پس از بازنویسی معادله‌ی (۶-۲-۴۸) داریم:

$$\int_V \int \int [B]^T [D] [B] dV \{d\} = \{f\} \quad (6-2-49)$$

در جایی که مشتق جزئی نسبت به ماتریس $\{d\}$ قبلاً در رابطه‌ی (۲-۶-۱۲) تعریف شده

است. از معادله‌ی (۶-۲-۴۹) ملاحظه می‌شود که:

$$[k] = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \quad (50-2-6)$$

در المانی که ضخامت آن، t ثابت است معادله‌ی (۵۰-۲-۶) برابر است با:

$$[k] = t \int_A [B]^T [D] [B] dx dy \quad (51-2-6)$$

در جایی که در المان مثلثی شکل، تابع زیر انتگرال، تابعی از x و y نبوده و می‌توان آن را از انتگرال بیرون کشید به قسمی که:

$$[k] = t A [B]^T [D] [B] \quad (52-2-6)$$

در جایی که A در معادله‌ی (۹-۲-۶)، $[B]$ در معادله‌ی (۳۴-۲-۶)، و $[D]$ در رابطه‌ی (۸-۱-۶) یا (۱۰-۱-۶) داده شده است. فرض خواهیم نمود که ضخامت المان ثابت است. (همگرا شدن این فرض با حالت واقعی، با کوچک شدن اندازه‌ی المان تحقق می‌یابد.)

از معادله‌ی (۵۲-۲-۶) ملاحظه می‌شود که $[k]$ تابعی از مختصات گره‌ای (زیرا $[B]$ و $[D]$ بر حسب آن‌ها تعریف شده‌اند) و خصوصیات مکانیکی E و ν (که $[D]$ تابعی از آن است) می‌باشد. در یک المان، از بسط معادله‌ی (۵۲-۲-۶) داریم:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] & [k_{im}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] & [k_{jm}] \\ [k_{mi}] & [k_{mj}] & [k_{mm}] \end{bmatrix} \quad (53-2-6)$$

در جایی که زیر ماتریس‌های 2×2 به صورت

$$\begin{aligned} [k_{ii}] &= [B_i]^T [D] [B_i] tA \\ [k_{ij}] &= [B_i]^T [D] [B_j] tA \\ [k_{im}] &= [B_i]^T [D] [B_m] tA \end{aligned} \quad (54-2-6)$$

الی آخر می‌باشند. در معادلات (۶-۲-۵۴)، $[B_i]$ ، $[B_j]$ ، و $[B_m]$ ، توسط رابطه‌ی (۶-۲-۳۲) تعریف شده‌اند. ماتریس $[k]$ 6×6 است (مرتبه‌ی ماتریس از حاصل ضرب درجه‌های آزادی در هر گره، یعنی ۲، و تعداد گره‌ها، یعنی ۳، حاصل می‌شود).

به طور کلی، باید از معادله‌ی (۶-۲-۴۶) به منظور تعیین نیروهای سطحی و حجمی استفاده نمود. چنانچه این نیروها از معادله‌ی (۶-۲-۴۶) محاسبه شوند اصطلاحاً به آنها نیروهای همسان گفته می‌شود؛ چرا که از روش همسانی (انرژی) استخراج شده‌اند. در المان‌هایی با مرتبه‌ی بالاتر، به طور نمونه، با توابع جابه‌جایی درجه دو یا سه، باید از معادله‌ی (۶-۲-۴۶) استفاده نمود. با این وصف، در المان‌های CST، نیروهای حجمی و سطحی را می‌توان با نیروهای معادلی در گره‌ها جای‌گزین نموده (این مسأله در بخش ۶-۳ نشان داده شده است) و به منظور تعیین ماتریس نیرو در المان، آن‌ها را با نیروهای متمرکز جمع نمود؛ لذا معادلات المان به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{rx} \\ f_{ry} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_r \\ v_r \end{Bmatrix} \quad (۶-۲-۵۵)$$

مرحله‌ی ۵ جمع بندی معادلات المان‌ها به منظور تعیین معادلات اصلی و اعمال

شرایط مرزی

با استفاده از روش مستقیم سختی، معادلات و ماتریس سختی اصلی سازه به شرح

زیر حاصل می‌شوند:

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k^{(e)}] \quad (56-2-6)$$

و

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (57-2-6)$$

در جایی که در معادله‌ی (۵۶-۲-۶)، کلیه‌ی ماتریس‌های سختی المان‌ها بر حسب مختصات اصلی $x-y$ تعریف شده، $\{d\}$ ماتریس جابه‌جایی کل سازه و

$$\{F\} = \sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} \quad (58-2-6)$$

نیروهای اصلی گره‌ای معادل به صورت ستونی بوده که از جمع نیروهای حجمی و بارهای گسترده در گره‌های مناسب (همراه با احتساب نیروهای گره‌ای متمرکز) یا از کاربرد صحیح معادله‌ی (۴۶-۲-۶) حاصل می‌شوند. (جزئیات بیشتر در مورد نحوه‌ی به‌کارگیری نیروهای حجمی و تنش‌های سطحی در بخش ۶-۳ ارائه خواهد شد).

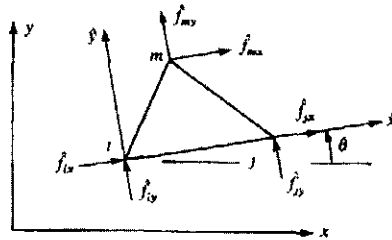
در فرمول‌بندی ماتریس سختی المان، معادله‌ی (۵۶-۲-۶)، ماتریس به ازای موقعیتی کلی در مختصات اصلی استخراج شده است؛ بنابراین، معادله‌ی (۵۲-۲-۶) را می‌توان به کلیه‌ی المان‌ها اعمال نمود. ماتریس کلیه‌ی المان‌ها، به ازای موقعیتی خاص در مختصات اصلی تشریح شده‌اند؛ بنابراین نیازی نیست تا معادلات را از مختصات محلی به مختصات اصلی انتقال داد. به هر حال، به منظور تکمیل بحث، در المان مثلثی شکل با کرنش ثابت، روشی را تشریح می‌کنیم که در آن نحوه‌ی استفاده از محور مختصات محلی که جهت آن با مختصات اصلی کل سازه موازی نیست، بیان شده است.

اگر مختصات محلی در المان مثلثی شکل با کرنش ثابت با محورهای اصلی کل سازه موازی نباشد در آن صورت باید از روشی شبیه به آنچه که در فصل ۳ توسط معادله‌ی (۱۶-۳-۳) در مورد نحوه‌ی انتقال چرخش محورها گفته شد، به منظور تعیین

ماتریس سختی المان و نیز ماتریس‌های جابه‌جایی و نیرو استفاده نمود. به منظور تشریح نحوه‌ی انتقال محورها در المان مثلثی شکل مندرج در شکل ۶-۱۰، المانی را در نظر می‌گیریم که مختصات محلی \hat{x} - \hat{y} آن با محوره‌های اصلی x - y موازی نباشد. نیروهای گره‌ای محلی نیز در شکل نشان داده شده‌اند. نحوه‌ی انتقال معادلات از مختصات محلی به اصلی شبیه به روشی است که در بخش ۳-۴ آورده شد. روابط کلی شبیه به آن‌هایی است که در معادلات (۳-۴-۱۴)، (۳-۴-۱۶)، و (۳-۴-۲۲) به ترتیب برای انتقال جابه‌جایی‌ها، نیروها، و ماتریس سختی محلی به اصلی آورده شد؛ به عبارتی،

$$\underline{\hat{d}} = \underline{T} \underline{d} \quad \underline{\hat{f}} = \underline{T} \underline{f} \quad \underline{k} = \underline{T}^T \underline{\hat{k}} \underline{T} \quad (۶-۲-۵۹)$$

در جایی‌که باید معادله‌ی (۳-۴-۱۵) را که معرف ماتریس انتقال در معادله‌ی (۶-۲-۵۹) است بسط داد؛ زیرا در المان مثلثی شکل با کرنش ثابت، دو درجه‌ی آزادی دیگر وجود دارد. به همین منظور، معادله‌ی (۳-۴-۱۵) به صورت زیر بسط داده می‌شود.



شکل ۶-۱۰ المان مثلثی شکل با محور مختصات محلی، غیر موازی با محور مختصات اصلی

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{matrix} \quad (6-2-6)$$

در جایی که $C = \cos \theta$ ، $S = \sin \theta$ و θ در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است.

مرحله ۶ تعیین جابه‌جایی گره‌ها

از حل معادلات جبری که در رابطه‌ی (۶-۲-۵۷) داده شده‌اند جابه‌جایی گره‌های اصلی در سازه حاصل می‌شوند.

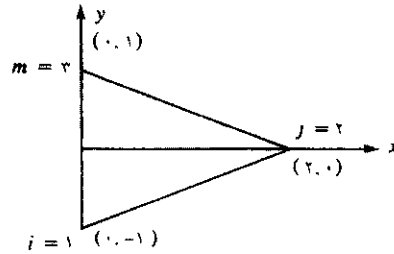
مرحله ۷ محاسبه‌ی نیروها (تنش‌ها) در المان

پس از تعیین جابه‌جایی‌ها، با استفاده از معادلات (۶-۲-۳۳) و (۶-۲-۳۶)، تنش‌ها و کرنش‌ها در المان، در جهت‌های اصلی x و y حاصل می‌شوند. نهایتاً، با استفاده از معادلات انتقال (۶-۱-۲)، مقادیر حداکثر و حداقل تنش‌های اصلی (در صفحه) σ_1 و σ_2 ، که عموماً محل اعمال آن‌ها بر مرکز المان فرض می‌شود، محاسبه می‌شوند. زاویه‌ی بین یکی از تنش‌های اصلی با محور x از معادله‌ی (۶-۱-۳) محاسبه می‌شود.

مثال ۶-۱

در المانی که در شکل ۶-۱۱ نشان داده شده، ماتریس سختی را بیابید. واحد محورها بر حسب اینچ است. از تنش صفحه‌ای استفاده نمایید. فرض کنید $E = 30 \times 10^6$ psi، $\nu = 0.25$ و ضخامت $t = 1$ in. است. همچنین، جابه‌جایی گره‌ها را

برابر $u_1 = 0/0$ ، $v_1 = 0/0.25$ in.، $u_2 = 0/0.12$ in.، $v_2 = 0/0$ ، $u_3 = 0/0$ و $v_3 = 0/0.25$ in. در نظر بگیرید. تنش‌ها در المان را محاسبه کنید.



شکل ۶-۱۱ المان تنش صفحه‌ای به منظور ارزیابی ماتریس سختی از معادله‌ی (۶-۲-۵۲) به منظور تعیین ماتریس سختی المان استفاده می‌کنیم. به منظور تعیین k ، ابتدا از معادلات (۶-۲-۱۰) مقادیر β و γ را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \beta_i &= y_j - y_m = 0 - 1 = -1 & \gamma_i &= x_m - x_j = 0 - 2 = -2 \\ \beta_j &= y_m - y_i = 1 - (-1) = 2 & \gamma_j &= x_i - x_m = 0 - 0 = 0 \\ \beta_m &= y_i - y_j = -1 - 0 = -1 & \gamma_m &= x_j - x_i = 2 - 0 = 2 \end{aligned} \quad (6-2-61)$$

با استفاده از معادلات (۶-۲-۳۲) و (۶-۲-۳۴)، B به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$B = \frac{1}{2(2)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (6-2-62)$$

در جایی که از $A = 2 \text{ in}^2$ در معادله‌ی (۶-۲-۶۲) استفاده شده است.

ضمن استفاده از معادله‌ی (۶-۱-۸) در حالت تنش صفحه‌ای،

$$\underline{D} = \frac{30 \times 10^6}{1 - (0.25)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 0.25}{2} \end{bmatrix} \text{psi} \quad (63-2-6)$$

از جای‌گزینی معادلات (62-2-6) و (63-2-6) در رابطه‌ی (52-2-6)، داریم:

$$\underline{k} = \frac{(2)30 \times 10^6}{4(0.9375)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \frac{1}{2(2)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

از انجام ضرب سه گانه ماتریس‌ها داریم:

$$\underline{k} = 4/0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 2/5 & 1/25 & -2 & 0 & -1/5 & -0/5 & 0/25 \\ 1/25 & 4/375 & -1 & -0/75 & -0/25 & -3/625 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ -1/5 & -0/75 & 0 & 1/5 & 1/5 & -0/75 \\ -0/5 & -0/25 & -2 & 1/5 & 2/5 & -1/25 \\ 0/25 & -3/625 & 1 & -0/75 & -1/25 & 4/375 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (64-2-6)$$

به منظور تعیین تنش‌ها، از معادله‌ی (36-2-6) استفاده می‌شود. از جای‌گزینی معادلات (62-2-6) و (63-2-6)، همراه با جابه‌جایی‌های گره‌ای در معادله‌ی (36-2-6)، داریم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{30 \times 10^6}{1 - (0.25)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (3 \times 3)$$

$$\times \frac{1}{2(2)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.025 \\ 0.012 \\ 0 \\ 0 \\ 0.025 \end{Bmatrix} \quad (65-2-6)$$

3×6 6×1

از ضرب سه گانه‌ی ماتریس‌ها در معادله‌ی (۶۵-۲-۶) داریم:

$$\sigma_x = 19200 \text{ psi} \quad \sigma_y = 4800 \text{ psi} \quad \tau_{xy} = -15000 \text{ psi} \quad (66-2-6)$$

نهایتاً، تنش‌های اصلی و جهت آن‌ها از جای‌گزینی نتایج حاصل از معادلات (۶-۲-۶)

(۶۶) در معادلات (۶-۱-۶) و (۶-۳-۱) به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\sigma_1 = \frac{19200 + 4800}{2} + \left[\left(\frac{19200 - 4800}{2} \right)^2 + (-15000)^2 \right]^{1/2} = 28639 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = \frac{19200 + 4800}{2} - \left[\left(\frac{19200 - 4800}{2} \right)^2 + (-15000)^2 \right]^{1/2} = -4639 \text{ psi}$$

(۶۷-۲-۶)

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2(-15000)}{19200 - 4800} \right] = -32/2^\circ$$



۳-۶ نحوه‌ی به کارگیری نیروهای حجمی و سطحی

نیروهای حجمی

با استفاده از اولین عبارت در سمت راست معادله‌ی (۶-۲-۶)، می‌توان نیروهای حجمی در گره‌ها را به شرح زیر به دست آورد:

$$\{f_b\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV \quad (۱-۳-۶)$$

در جایی که

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \quad (۲-۳-۶)$$

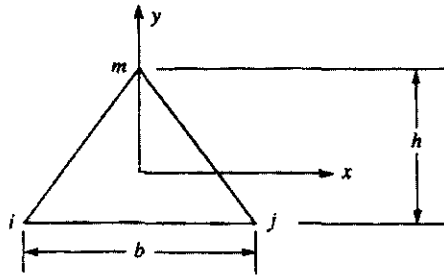
و X_b و Y_b به ترتیب برابر با مولفه‌های وزن مخصوص درجهت‌های x و y ، با واحد حجم/نیرو، می‌باشند. این نیروها ممکن است، برای مثال، از وزن واقعی جسم (نیروهای جاذبه)، سرعت زاویه‌ای (یا همان‌طور که در فصل ۹ تشریح شده، نیروهای گریز از مرکز)، یا نیروهای اینرسی در دینامیک ناشی شوند.

در معادله‌ی (۱-۳-۶)، $[N]$ تابعی خطی از x و y است؛ بنابراین، انتگرال‌گیری باید انجام شود. بدون از دست دادن کلیات، چنان‌چه مبدأ مختصات منطبق بر مرکز سطح المان منظور شود انتگرال‌گیری ساده‌تر خواهد شد. برای مثال المانی را با مختصات مندرج در شکل ۶-۱۲ در نظر می‌گیریم. ضمن انتخاب مبدأ مختصات منطبق بر مرکز سطح المان، از تعریف مرکز سطح داریم $\iint y dA = 0$ و $\iint x dA = 0$. بنابراین،

$$\iint \beta_i x dA = \iint \gamma_i y dA = 0 \quad (۳-۳-۶)$$

و

$$\alpha_i = \alpha_j = \alpha_m = \frac{tA}{3} \quad (4-3-6)$$



شکل ۶-۱۲ المان با مختصات منطبق بر مرکز سطح آن

از جای‌گزینی معادلات (۶-۳-۲) - (۶-۳-۴) در رابطه‌ی (۶-۳-۱)، نیروی حجمی در گره i به شرح زیر تشریح می‌شود:

$$\{f_{hi}\} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} = \frac{tA}{3} \quad (5-3-6)$$

متشابهاً، چنان‌چه نیروهای حجمی در گره‌های j و m منظور شوند نتایج مشابهی با معادله‌ی (۵-۳-۶) حاصل می‌شود. به صورت ماتریسی، نیروهای حجمی المان برابرند با:

$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_{bix} \\ f_{biy} \\ f_{bjx} \\ f_{bjy} \\ f_{hmx} \\ f_{hmy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \frac{At}{3} \quad (6-3-6)$$

از نتایج ناشی از معادله‌ی (۶-۳-۶) می‌توان نتیجه گرفت که نیروهای حجمی به طور یکنواخت به سه قسمت بین گره‌ها تقسیم می‌شوند. علامت این نیروها بستگی به جهت X_h و Y_h نسبت به جهت مثبت x و y در مختصات اصلی دارد. به ازای نیروی ناشی از وزن جسم به تنهایی، از آنجا که نیروی جاذبه در جهت y است، لذا فقط Y_h حضور خواهد داشت ($X_h = 0$).

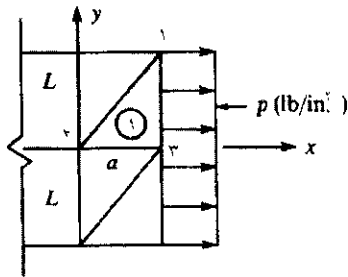
نیروهای سطحی

با استفاده از سومین عبارت در سمت راست معادله‌ی (۶-۲-۶)، می‌توان نیروهای سطحی در گره‌ها را به شرح زیر محاسبه نمود:

$$\{f_s\} = \int_S [N_s]^T \{T_s\} dS \quad (۷-۳-۶)$$

تأکید می‌شود که اندیس s در $[N_s]$ ، مندرج در معادله‌ی (۷-۳-۶)، بدان معنا است که توابع شکل بر روی سطحی ارزیابی می‌شوند که نیروی سطحی بر آن عمل می‌کند. حال نحوه‌ی استفاده از معادله‌ی (۷-۳-۶) را ضمن ارائه‌ی مثالی با تنش یکنواخت p (مثلاً، بر حسب پوند بر اینچ مربع) که بین گره‌های ۱ و ۳ بر لبه‌ی المان ۱، مندرج در شکل ۶-۱۳، عمل می‌کند، تشریح می‌کنیم. در معادله‌ی (۷-۳-۶)، کشش سطحی برابر است با:

$$\{T_s\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۸-۳-۶)$$



شکل ۶-۱۳ المان با کشش سطحی یکنواختی که بر یکی از لبه‌ها عمل می‌کند

و

$$[N_s]^T = \begin{bmatrix} N_1 & \cdot \\ \cdot & N_1 \\ N_2 & \cdot \\ \cdot & N_2 \\ N_3 & \cdot \\ \cdot & N_3 \end{bmatrix} \quad (9-3-6)$$

ارزیابی شده در $x = a, y = y'$

در حالی که نیروی سطحی p بر لبه‌ی واقع در $x = a$ و $y = y'$ ، از $y = 0$ تا $y = L$ عمل می‌کند، توابع شکل را در $x = a$ و $y = y'$ ارزیابی نموده و همان‌طور که در معادله‌ی (۶-۳-۱۰) نشان داده شده، آن‌ها را بر روی سطح، از 0 تا L در جهت y' و از 0 تا a در جهت x انتگرال گیری می‌کنیم.

با استفاده از معادلات (۶-۳-۸) و (۶-۳-۹)، معادله‌ی (۶-۳-۷) به صورت زیر

تشریح می‌شود:

$$\{f_s\} = \int \int^t \begin{bmatrix} N_1 & \cdot \\ \cdot & N_1 \\ N_2 & \cdot \\ \cdot & N_2 \\ N_r & \cdot \\ \cdot & N_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \cdot \end{Bmatrix} dz dy \quad (10-3-6)$$

ارزیابی شده در $x = a, y = y$

از ساده کردن معادله‌ی (۱۰-۳-۶) داریم:

$$\{f_s\} = t \int^t \begin{bmatrix} N_1 p \\ \cdot \\ N_2 p \\ \cdot \\ N_r p \end{bmatrix} dy \quad (11-3-6)$$

ارزیابی شده در $x = a, y = y$

حال، از معادلات (۱۸-۲-۶) (به ازای $i = 1$)، داریم:

$$N_1 = \frac{1}{2A} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y) \quad (12-3-6)$$

برای راحتی، مختصات المان را همان‌طور که در شکل ۶-۱۴ نشان داده شده در نظر می‌گیریم. با استفاده از عبارات تعریف شده در معادلات (۱۰-۲-۶)، می‌توان دریافت که:

$$\alpha_1 = x_j y_m - y_j x_m$$

یا، به ازای $i = 1, j = 2, m = 3$

$$\alpha_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3 \quad (13-3-6)$$

پس از جای‌گزینی مختصات در معادله‌ی (۱۳-۳-۶) داریم:

$$\alpha_1 = 0 \quad (14-3-6)$$

متشابهاً، ضمن استفاده‌ی مجدد از معادلات (۶-۲-۱۰) داریم:

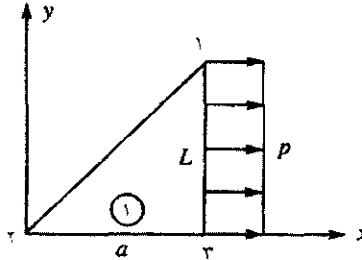
$$\beta_1 = 0 \quad \gamma_1 = a \quad (۶-۳-۱۵)$$

بنابراین، در صورت جای‌گزینی معادلات (۶-۳-۱۴) و (۶-۳-۱۵) در (۶-۳-۱۲)، خواهیم داشت،

$$N_1 = \frac{ay}{2A} \quad (۶-۳-۱۶)$$

متشابهاً، با استفاده از معادلات (۶-۲-۱۸)، می‌توان نشان داد که:

$$N_r = \frac{L(a-x)}{2A} \quad \text{و} \quad N_r = \frac{Lx-ay}{2A} \quad (۶-۳-۱۷)$$



شکل ۶-۱۴ المان مورد نظر با کشش سطحی لبه ای p

ضمن جای‌گزینی روابط (۶-۳-۱۶) و (۶-۳-۱۷) برای N_1 ، N_r و N_r در معادله‌ی (۶-۳-۱۱)، ارزیابی N_1 ، N_r و N_r در $x = a$ و $y = y$ (مختصات مرتبط با محل اعمال بار p)، و سپس انتگرال‌گیری نسبت به y داریم:

$$\{f_S\} = \frac{t}{2(aL/2)} \begin{Bmatrix} a\left(\frac{L'}{2}\right)p \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(L' - \frac{L'}{2}\right)ap \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (18-3-6)$$

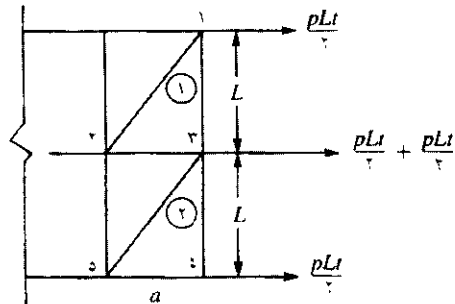
در جایی که تابع شکل N_r بین گره‌های ۱ و ۳، بر اساس تعریف توابع شکل، برابر صفر است. نهایتاً، پس از ساده کردن معادله‌ی (۱۸-۳-۶) داریم:

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} f_{S1x} \\ f_{S1y} \\ f_{S2x} \\ f_{S2y} \\ f_{S3x} \\ f_{S3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PLt/2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ PLt/2 \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (19-3-6)$$

شکل ۶-۱۵ نمایانگر نیروهای گره‌ای معادلی است که از بارگذاری سطحی در المان‌های ۱ و ۲ حاصل می‌شوند.

در المان مثلثی شکل با کرنش ثابت می‌توان نتیجه گرفت که بار گسترده بر یک لبه را می‌توان با بارهای متمرکزی که بر گره‌های مرتبط با لبه‌ی بارگذاری شده عمل می‌کنند، ضمن معادل قرار دادن دو نوع بارگذاری [که معادل با اعمال معادله‌ی (۷-۳-۶) است]، جای‌گزین نمود. به هر حال، در المان‌هایی با مرتبه‌ی بالاتر، همانند المان مثلثی شکل با کرنش خطی (در فصل ۸ بررسی شده است)، جای‌گزینی بار باید توسط

معادله‌ی (۷-۳-۶) که از روش اصل مینیمم انرژی پتانسیل استخراج گردید محاسبه شود.



شکل ۶-۱۵ نیروهای گره‌ای معادل با کشش سطحی

در المان‌های مرتبه‌ی بالاتر، جای‌گزینی بار توسط معادله‌ی (۷-۳-۶)، عموماً با بار ظاهری استاتیکی معادل برابر نیست؛ در حالی که این نوع جای‌گزینی منطبق با نتایجی است که از روش انرژی حاصل می‌شود.

حال، ملاحظه می‌شود ماتریس نیروی $\{f_s\}$ که در رابطه‌ی (۷-۳-۶) بر اساس اصل مینیمم انرژی پتانسیل تعریف شد، معادل با نیروی مشابه حاصل از کار معادلی است که قبلاً از آن در فصل ۴ به هنگام تشریح بارهای گسترده بر تیرها استفاده شد.



۶-۴ عبارات صریح برای ماتریس سختی در المان مثلثی شکل با کرنش ثابت

اگرچه در بیشتر برنامه‌های رایانه‌ای ماتریس سختی عموماً از حاصل ضرب سه گانه‌ی ماتریس‌های مندرج در معادله‌ی (۶-۴-۱) حاصل می‌شود، ولی با این وصف تحریمی ارزشمندی در یادگیری خواهد بود تا آن را به صورت صریح، در المان مثلثی

شکل با کرنش ثابت ارزیابی نمود. به همین دلیل، در خلال این استخراج، مشخصاً حالت کرنش صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم.

ابتدا، لازم به یادآوری است که ماتریس سختی از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$[k] = t A [B]^T [D] [B] \quad (1-4-6)$$

در جایی که به ازای کرنش صفحه‌ای، $[D]$ توسط رابطه‌ی (۶-۲-۱۰)، و $[B]$ توسط رابطه‌ی (۶-۲-۳۴) داده می‌شود. در صورت جای‌گزینی ماتریس‌های $[D]$ و $[B]$ در معادله‌ی (۶-۲-۱۰)، داریم:

$$[k] = \frac{tE}{4A(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \beta_1 & \cdot & \gamma_1 \\ \cdot & \gamma_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \cdot & \gamma_1 \\ \cdot & \gamma_1 & \beta_1 \\ \beta_m & \cdot & \gamma_m \\ \cdot & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \cdot \\ \nu & 1-\nu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \cdot & \beta_1 & \cdot & \beta_m & \cdot \\ \cdot & \gamma_1 & \cdot & \gamma_1 & \cdot & \gamma_m \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (2-4-6)$$

از حاصل ضرب ماتریس‌های مندرج در معادله‌ی (۶-۲-۱۰)، صریحاً ماتریس سختی المان مثلثی شکل با کرنش ثابت حاصل می‌شود. قابل ذکر است که $[k]$ تابعی از تفاضل x و y مختصات گره‌ها، همانند آنچه که در عبارات γ و β آورده شده، خصوصیات ماده، E و ν ، و ضخامت t مرتبط با سطح A از المان است.

$$[k] = \frac{tE}{\epsilon A(1+\nu)(1+2\nu)}$$

$$\times \left[\begin{array}{ccc} \beta_i^*(1-\nu) + \gamma_i^* \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_i \gamma_i \nu + \beta_i \gamma_i \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_i \beta_j (1-\nu) + \gamma_i \gamma_j \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \gamma_i^*(1-\nu) + \beta_i^* \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \gamma_j \gamma_i \nu + \beta_j \gamma_j \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_j \gamma_i \nu + \beta_i \gamma_j \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \\ & & \beta_i^*(1-\nu) + \gamma_i^* \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \end{array} \right]$$

مقارن

$$\left[\begin{array}{ccc} \beta_i \gamma_j \nu + \beta_j \gamma_i \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_i \beta_m (1-\nu) + \gamma_i \gamma_m \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_i \gamma_m \nu + \beta_m \gamma_i \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \gamma_i \gamma_j (1-\nu) + \beta_i \beta_j \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_m \gamma_j \nu + \beta_j \gamma_m \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \gamma_i \gamma_m (1-\nu) + \beta_i \beta_m \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \beta_j \gamma_i \nu + \beta_i \gamma_j \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_j \beta_m (1-\nu) + \gamma_j \gamma_m \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_j \gamma_m \nu (1-\nu) + \gamma_j \beta_m \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \beta_j \gamma_j \nu + \beta_j \gamma_j \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_m \gamma_j \nu + \beta_j \gamma_m \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \gamma_j \gamma_m (1-\nu) + \beta_i \beta_m \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \gamma_i^*(1-\nu) + \beta_i^* \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_m^*(1-\nu) + \gamma_m^* \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) & \gamma_m \beta_m \nu + \beta_m \gamma_m \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \\ & & \gamma_m^*(1-\nu) + \beta_m^* \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \end{array} \right]$$

(۳-۴-۶)

در حالت تنش صفحه‌ای، فقط نیاز است تا در معادله‌ی (۳-۴-۶)، $1-\nu$ با ۱، $(1-2\nu)/2$ با $(1-\nu)/2$ و $(1+\nu)(1-2\nu)$ که خارج از کروشه است با $(1-\nu)^2$ جای‌گزین شود.

نهایتاً، قابل ذکر است که با نزدیک شدن U به سمت $0/5$ ، برای مثال، در موادی شبیه به لاستیک یا پلاستیک‌های جامد، ماده‌ی مربوطه غیر قابل تراکم می‌شود. در حالت کرنش ثابت، با نزدیک شدن U به سمت $0/5$ ، مخرج ماتریس مرتبط با خصوصیات ماده، [به معادله‌ی (۶-۱-۱۰) توجه شود] و در نتیجه مخرج ماتریس سختی مندرج در رابطه‌ی (۶-۴-۳) برابر صفر می‌شود.

مقادیر U نزدیک به $0/5$ می‌توانند معادلات سازه را با مشکل مواجه سازند. در چنین شرایطی، از فرمول‌بندی خاصی (که فرمول بندی پنالتی نامیده می‌شود) استفاده می‌شود.

۵-۶ حل اجزای محدود مسأله‌ای با تنش ثابت

به منظور تشریح روش اجزای محدود در حل مسأله‌ای با تنش ثابت، جزییات حل آن را به شرح زیر ارائه می‌کنیم.

مثال ۶-۲

در ورق‌ی که مطابق شکل ۶-۱۶ تحت تأثیر کشش سطحی قرار گرفته است جابه‌جایی گره‌ها و تنش در المان‌ها را محاسبه کنید. ضخامت ورق $t = 1 \text{ in}$ ، $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ، و $\nu = 0/30$ است.

المان بندی

به منظور تشریح حل اجزای محدود ورق، ابتدا همان‌طور که در شکل ۶-۱۷ نشان داده شده، ورق را به دو المان تقسیم می‌کنیم. باید در نظر داشت که المان بندی درشت همان نتایجی را که از المان بندی ریز، به ویژه نزدیک به لبه‌ی ثابت حاصل می‌شود،

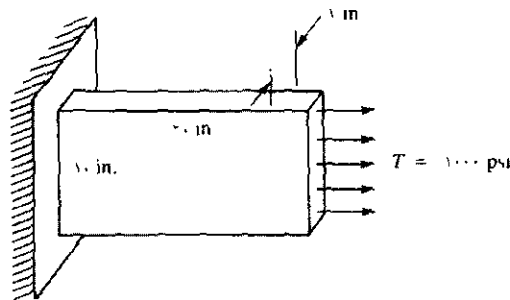
ایجاد نمی‌کند. با این وصف، از آن‌جا که حل مسأله به صورت دستی انجام می‌شود، از المان بندی درشت جهت سهولت (بدون از دست دادن عمومیت روش) استفاده می‌کنیم.

در شکل ۶-۱۷، نیروی کشش سطحی اولیه به شرح زیر به نیروهای گره‌ای تبدیل شده‌اند:

$$F = \frac{1}{2}TA$$

$$F = \frac{1}{2}(1000 \text{ psi})(1 \times 10 \text{ in.})$$

$$F = 500 \text{ lb.}$$

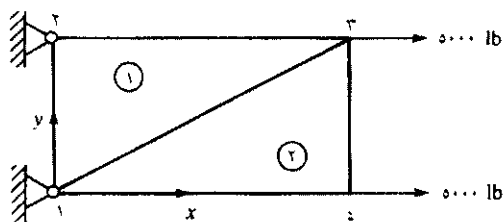


شکل ۶-۱۷ ورق نازک در معرض تنش کششی

به طور کلی، در المان‌هایی با مرتبه‌ی بالاتر، باید از معادله‌ی (۶-۳-۷) به منظور جای‌گزینی کشش سطحی با نیروهای گره‌ای استفاده نمود. به هر حال، در بخش ۶-۳ نشان داده شد که در المان CST، می‌توان از نیروهای استاتیکی جای‌گزین معادل، همانند آنچه که در این‌جا صورت گرفته است، مستقیماً استفاده نمود.

معادله‌ی ماتریس اصلی حاکم برابر است با:

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (6-5-1)$$



شکل ۶-۱۷ ورق المان بندی شده

از بسط ماتریس‌ها در معادله‌ی (۶-۵-۱) داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} \quad (6-5-2)$$

در جایی که قبل از حذف ردیف‌ها و ستون‌ها به منظور اعمال شرایط مرزی در گره‌های ۱ و ۲، $[K]$ ماتریسی 8×8 (چهار گره با دو درجه‌ی آزادی در هر گره) است.

هم‌گذاری ماتریس‌های سختی

ماتریس سختی کل از انطباق ماتریس سختی هر یک از المان‌ها حاصل می‌شود. با

توجه به معادله‌ی (۶-۲-۵۲)، ماتریس سختی هر المان برابر است با:

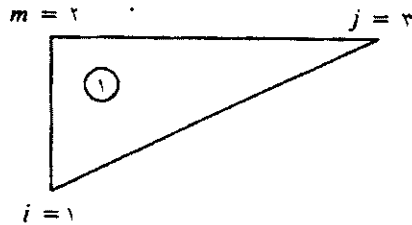
$$[k] = t A [B]^T [D] [B] \quad (6-5-3)$$

در شکل ۶-۱۸، برای المان ۱، از آنجا که محور مختصات اصلی در گره ۱ قرار دارد، لذا مختصات گره‌ها برابر با $x_i = 0$ ، $y_i = 0$ ، $x_j = 20$ ، $y_j = 10$ ، $x_m = 0$ و $y_m = 10$ بوده و

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)(20)(10) = 100 \text{ in}^2$$

یا، به طور کلی، A را می‌توان به طریقی معادل، از فرمول مختصات گره‌ها، معادله‌ی (۶-۲-۹)، به دست آورد.



شکل ۶-۱۸ المان ۱ از ورق المان بندی شده

حال $[\beta]$ را تعیین می‌کنیم، در جایی که $[\beta]$ در معادله‌ی (۶-۲-۳۴) داده شده و در این جا به صورت زیر بسط داده شده است.

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (6-5-4)$$

همچنین، از معادله‌ی (۶-۲-۱۰)،

$$\beta_i = \gamma_j - \gamma_m = 10 - 10 = 0$$

$$\beta_j = \gamma_m - \gamma_i = 10 - 0 = 10$$

$$\beta_m = \gamma_i - \gamma_j = 0 - 10 = -10$$

$$\gamma_i = x_m - x_j = 0 - 20 = -20 \quad (5-5-6)$$

$$\gamma_j = x_i - x_m = 0 - 0 = 0$$

$$\gamma_m = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

بنابراین، از جای‌گزینی معادلات (۵-۶) در رابطه‌ی (۴-۵-۶)، داریم:

$$[B] = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{in.}} \quad (6-5-6)$$

در حالت تنش صفحه‌ای، ماتریس $[D]$ به راحتی به شرح زیر تشریح می‌شود:

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7-5-6)$$

به ازای $E = 30 \times 10^7$ psi و $\nu = 0/3$ داریم:

$$[D] = \frac{30 \cdot (10^7)}{0/91} \begin{bmatrix} 1 & 0/3 & 0 \\ 0/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0/35 \end{bmatrix} \text{psi} \quad (8-5-6)$$

بنابراین:

$$[B]^T [D] = \frac{\begin{pmatrix} 3.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.91 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2.0 \\ 0.91 \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.0 \\ 0 & -2.0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \\ -1.0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 2.0 & -1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0/3 & 0 \\ 0/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0/3.0 \end{bmatrix} \quad (9-5-6)$$

از ساده کردن معادله‌ی (۹-۵-۶) می‌توان نوشت:

$$[B]^T [D] = \frac{\begin{pmatrix} 0/1.5 \\ 0.91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.91 \end{pmatrix}}{0.91} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ -6 & -2.0 & 0 \\ 1.0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 \\ -1.0 & -3 & 7 \\ 6 & 2.0 & -3/5 \end{bmatrix} \quad (10-5-6)$$

ضمن جای‌گزینی معادلات (۱۰-۵-۶) و (۶-۵-۶) در معادله‌ی (۳-۵-۶)، ماتریس

سختی المان ۱ برابر است با:

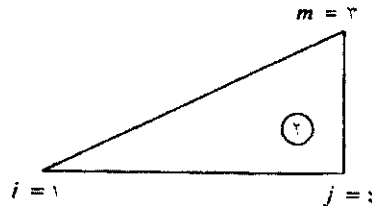
$$[k] = (1)(1.0 \dots) \frac{\begin{pmatrix} 0/1.5 \\ 0.91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.91 \end{pmatrix}}{0.91} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ -6 & -2.0 & 0 \\ 1.0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 \\ -1.0 & -3 & 7 \\ 6 & 2.0 & -3/5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2(2.0)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ -2.0 & 0 & 0 & 1.0 & 2.0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad (11-5-6)$$

نهایتاً، از ساده کردن معادله‌ی (۱۱-۵-۶) می‌توان نوشت:

$$[k] = \frac{75000}{.791} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 140 & 0 & 0 & -70 & -140 & 70 \\ 0 & 400 & -60 & 0 & 60 & -400 \\ 0 & -60 & 100 & 0 & -100 & 60 \\ -70 & 0 & 0 & 35 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & -100 & 70 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & 60 & -35 & -130 & 435 \end{bmatrix} \quad (12-5-6)$$

علاماتی که در بالای هر ستون قرار دارند معرف ترتیب گره‌ای درجه‌های آزادی ماتریس سختی در المان ۱ می‌نمایند.

بر اساس شکل ۶-۱۹، برای المان ۲ داریم: $x_1 = 0$ ، $x_2 = 20$ ، $y_1 = 0$ ، $y_2 = 10$ ، $x_m = 20$ و $y_m = 10$. بنابراین، از معادله‌ی (۶-۲-۱۰) می‌توان نوشت:



شکل ۶-۱۹ المان ۲ از ورق المان‌بندی شده

$$\beta_i = y_j - y_m = 0 - 10 = -10$$

$$\beta_j = y_m - y_i = 10 - 0 = 10$$

$$\beta_m = y_i - y_j = 0 - 0 = 0$$

$$\gamma_i = x_m - x_j = 20 - 20 = 0$$

$$\gamma_j = x_i - x_m = 0 - 20 = -20$$

$$\gamma_m = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

(۱۳-۵-۶)

بنابراین، از جای‌گزینی معادلات (۶-۵-۱۳) در رابطه‌ی (۶-۵-۴) داریم:

$$[B] = \frac{1}{200} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{in.}} \quad (14-5-6)$$

مجدداً، ماتریس $[D]$ برابر است با:

$$[D] = \frac{30(10^6)}{.491} \begin{bmatrix} 1 & .3 & 0 \\ .3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .35 \end{bmatrix} \text{psi} \quad (15-5-6)$$

بنابراین، با استفاده از معادلات (14-5-6) و (15-5-6) داریم:

$$[B]^T [D] = \frac{30(10^6)}{200(.491)} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & .3 & 0 \\ .3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .35 \end{bmatrix} \quad (16-5-6)$$

از ساده کردن معادله‌ی (16-5-6) نتیجه می‌شود که:

$$[B]^T [D] = \frac{(0.15)(10^6)}{.491} \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 \\ 10 & 3 & -7 \\ -6 & -20 & 3/5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & 20 & 0 \end{bmatrix} \quad (17-5-6)$$

نهایتاً، ضمن جای‌گزینی معادلات (17-5-6) و (14-5-6) در معادله‌ی (3-5-6)،

ماتریس سختی در المان ۲ به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$[k] = \frac{375,000}{.491} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 28 & 0 & -28 & 14 & 0 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 12 & -80 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -20 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 14 & -7 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (20-5-6)$$

المان ۲

$$[k] = \frac{375,000}{.491} \begin{bmatrix} u & v & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -14 & 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 & 21 & 0 & -28 & 14 \\ -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 0 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \quad (21-5-6)$$

حال با تکثیر شدن مرتبه‌ی درجه‌های آزادی، حسب انطباق ماتریس‌های سنجی، معادلات (۲۰-۵-۶) و (۲۱-۵-۶)، ماتریس سنجی حل به شرح زیر حاصل می‌شود.

$$[k] = \frac{375000}{.791} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 48 & 0 & -28 & 14 & 0 & -26 & -20 & 12 \\ 0 & 87 & 12 & -80 & -26 & 0 & 14 & -7 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & -20 & 12 & 48 & 0 & -28 & 14 \\ -26 & 0 & 14 & -7 & 0 & 87 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}}$$

(۲۲-۵-۶)

[متناوباً، می‌توانستیم از اعمال روش مستقیم سختی به معادلات (۱۲-۵-۶) و (۵-۶-۵-۶) (۱۹)، معادله‌ی (۲۲-۵-۶) را به دست آوریم.] از حای‌کزینی $[K]$ در رابطه‌ی $\{F\} = [K]\{d\}$ که همان معادله‌ی (۲-۵-۶) است، داریم

$$\begin{Bmatrix} R_{,1} \\ R_{,1} \\ R_{,1} \\ R_{,1} \\ 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix} = [k] = \frac{375000}{.791} \begin{bmatrix} 48 & 0 & -28 & 14 & 0 & -26 & -20 & 12 \\ 0 & 87 & 12 & -80 & -26 & 0 & 14 & -7 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & -20 & 12 & 48 & 0 & -28 & 14 \\ -26 & 0 & 14 & -7 & 0 & 87 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \begin{Bmatrix} d_{,1} \\ d_{,1} \\ d_{,1} \\ d_{,1} \\ d_{,1} \\ d_{,2} \\ d_{,2} \\ d_{,2} \end{Bmatrix}$$

(۲۳-۵-۶)

از اعمال شرایط مرزی یا تکیه گاهی، ضمن حذف ردیف‌ها و ستون‌های مرتبط با جابه‌جایی‌های صفر | صرفاً ردیف‌ها و ستون‌های ۱ الی ۴ در معادله‌ی (۲۳-۵-۶) داریم

$$\begin{Bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{375000}{0.91} \begin{bmatrix} 48 & 0 & -28 & 14 \\ 0 & 87 & 12 & -80 \\ -28 & 12 & 48 & -26 \\ 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{r1} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} \quad (24-5-6)$$

از ضرب دو طرف معادله‌ی (۶-۵-۲۴) در K^{-1} می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{r1} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} = \frac{0.91}{375000} \begin{bmatrix} 48 & 0 & -28 & 14 \\ 0 & 87 & 12 & -80 \\ -28 & 12 & 48 & -26 \\ 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25-5-6)$$

صفت معس خانه‌حالی‌ها از معادله‌ی (۶-۵-۲۵) داریم.

$$\begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{r1} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} = \frac{0.91}{75} \begin{Bmatrix} 0.05024 \\ 0.00032 \\ 0.05470 \\ 0.00878 \end{Bmatrix} \quad (26-5-6)$$

س از ساده کردن معادله‌ی (۶-۵-۲۶) خانه‌حالی‌های نهایی برآیند نا:

$$\begin{Bmatrix} d_{rx} \\ d_{r1} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.9/6 \\ 4.2 \\ 663/17 \\ 1.4/1 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} \text{ m} \quad (27-5-6)$$

از مقایسه‌ی ناخ تحلیل با ناخ حاصل از روش ~~فقط~~ اجزای محدود، به عنوان محریب اول، خانه‌حالی محوری سدهای تک بعدی که تحت تأثیر نیروی کششی قرار گرفته برآیند است تا

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(10000)20}{11(300000)} = 770 \times 10^{-7} \text{ m}$$

بنابراین، با در نظر گرفتن درشتی المان بندی و پیش‌قدر مقاومت کششی مدل ارائه شده در ورقی دو بعدی، مؤلفه‌ی x جابه‌جایی در معادله‌ی (۶-۵-۲۷)، نسبتاً معقول به نظر می‌رسد. (برای بحث بیشتر در این مورد به بخش ۷-۵ مراجعه شود.) انتظار می‌رود تا به دلیل اثر پواسون، در قسمت بالا (گره ۳)، مؤلفه‌ی y جابه‌جایی به سمت پایین، و در قسمت پایین (گره ۴)، به سمت بالا باشد. در هر حال، پیش‌قدر مقاومت کششی که متأثر از المان بندی درشت است، دلیل جنین نتیجه‌ی ضعیفی است.

حال، با استفاده از معادله‌ی (۶-۲-۳۶)، تنش‌ها در هر المان را محاسبه می‌کنیم.

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \quad (6-5-28)$$

به طور کلی، در المان ۱ داریم:

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \left(\frac{1}{2A}\right) \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_r & 0 & \beta_r & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_r & 0 & \gamma_r \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_r & \beta_r & \gamma_m & \beta_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{rx} \\ d_{ry} \\ d_{rx} \\ d_{ry} \end{Bmatrix} \quad (6-5-29)$$

ضمن جای‌گزینی مقادیر عددی $[B]$ از معادله‌ی (۶-۵-۶)؛ و مقادیر $[D]$ از معادله‌ی

(۶-۵-۸)؛ و نیز قسمت مناسب $\{d\}$ از معادله‌ی (۶-۵-۲۷)، داریم:

$$\{\sigma\} = \frac{30 \cdot (1.0^1)(1.0^{-1})}{0.91(2.0)} \begin{bmatrix} 1 & 0/3 & 0 \\ 0/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0/35 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.9/6 \\ 4/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30-5-6)$$

پس از ساده کردن معادله‌ی (۳۰-۵-۶) می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1005 \\ 301 \\ 2/4 \end{Bmatrix} \text{psi} \quad (31-5-6)$$

به طور کلی در المان ۲ داریم:

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{2A} \right) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_r & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_r \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_m & \beta_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{rx} \\ d_{ry} \end{Bmatrix} \quad (32-5-6)$$

از جای‌گزینی مقادیر عددی در رابطه‌ی (۳۲-۵-۶) داریم:

$$\{\sigma\} = \frac{30(1.0^6)(1.0^{-6})}{.91(200)} \begin{bmatrix} 1 & .3 & 0 \\ .3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .35 \end{bmatrix}$$

$$X \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 663/7 \\ 104/1 \\ 609/6 \\ 4/2 \end{Bmatrix} \quad (33-5-6)$$

پس از ساده کردن معادله‌ی (۳۳-۶-۵) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 995 \\ -1/2 \\ -2/4 \end{Bmatrix} \text{ psi} \quad (34-5-6)$$

حال می‌توان تنش‌های اصلی را از رابطه‌ی (۲۹-۱-۶) و زاویه‌ی یکی از آنها را از معادله‌ی (۳-۱-۶) محاسبه نمود. (تنش اصلی دیگر 90° دور از تنش اولی است). در المان ۲، تنش‌های یاد شده (تنش‌های مربوط به المان ۱ مشابه این تنش‌ها می‌باشند) به شرح زیر محاسبه می‌شوند.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_1 = \frac{995 + (-1/2)}{2} + \left[\left(\frac{995 - (-1/2)}{2} \right)^2 + (-2/4)^2 \right]^{1/2} \quad (35-5-6)$$

$$\sigma_1 = 497 + 498 = 995 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = \frac{995 + (-1/2)}{2} - 497 = -1/1 \text{ psi}$$

زاویه‌ی مرتبط با تنش اصلی برابر است با:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right]$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2(-2/4)}{995 - (-1/2)} \right] = 0.0 \quad \text{یا} \quad (37-5-6)$$

از آنجا که تنش اعمال شده بر لبه‌ی ورق در راستای x ثابت و برابر ۱۰۰۰ psi است لذا انتظار می‌رود تا تنش ($\sigma_1 (= \sigma_x)$) در هر المان برابر ۱۰۰۰ psi باشد؛ بنابراین، نتایج به دست آمده از معادلات (۳۱-۵-۶) و (۳۴-۵-۶) برای σ_x بسیار خوب می‌باشند. انتظار می‌رود تا تنش σ_1 (حداقل نزدیک به لبه‌ی آزاد بسیار کوچک باشد). مهار المان ۱ در گره‌های ۱ و ۲ باعث به وجود آمدن تنش نسبتاً بزرگی در σ_1 می‌شود؛ در حالی که مهار المان ۲ فقط در یک گره، منجر به σ_1 بسیار کوچکی می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رود، تنش τ_{xy} نزدیک به صفر است. چنانچه تعداد المان‌ها افزایش یابد، با استفاده از المان‌های کوچک‌تر نزدیک به لبه‌ی تکیه‌گاه، جواب‌های معقولانه‌تری حاصل خواهد شد. به هر حال، با کوچک‌تر شدن المان‌ها، حل دستی سخت شده و به همین دلیل، در اینجا از آن استفاده نشده است. به منظور تعیین جزئیات حل ورق یاد شده، و یقیناً، مسائل پیچیده‌تری مرتبط با محاسبه‌ی تنش/ کرنش، استفاده از برنامه‌ی رایانه‌ای توصیه می‌شود.

بر اساس تئوری ماکزیمم انرژی اعوجاج [۴] (که تئوری فون مایسز یا فون مایسز-هنکی نیز نامیده می‌شود)، در اجسام تردی که تحت بارگذاری استاتیکی قرار گرفته‌اند گسیختگی در ماده هنگامی رخ می‌دهد که تنش فون مایسز (تنش مؤثر یا معادل نیز نامیده می‌شود) به مقاومت تسلیم ماده، σ_k برسد. برای مثال، بر اساس آنچه که در مرجع [۴] استخراج شده، تنش فون مایسز بر حسب تنش‌های اصلی برابر است با:

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (a37-3-6)$$

یا به طور معادل، بر حسب مؤلفه های $x-y-z$ تنش برابر است با:

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (b37-3-6)$$

بنابراین، جهت بروز تسلیم، تنش فون مایسز باید برابر یا بیش از تنش تسلیم در ماده باشد به قسمی که:

$$\sigma_{vm} \geq S_y \quad (38-3-6)$$

از معادلات (۳۷a-۵-۶) یا (۳۷b-۵-۶) می‌توان دریافت که تنش فون مایسز کمیتی نرده‌ای است که نمایانگر شدت حالت کلی تنش است؛ چرا که شامل سه تنش اصلی یا سه تنش عمودی در جهت‌های x ، y و z و تنش‌های برشی در سطوح xy ، yz و zx است. تنش‌های دیگر، همانند حداکثر تنش اصلی، نمی‌توانند به دقت تنش یاد شده گسیختگی را پیش‌بینی نمایند.

در بیش‌تر برنامه‌های رایانه‌ای، از تئوری گسیختگی یاد شده استفاده شده و به عنوان گزینه‌ای دلخواه، کاربر می‌تواند رسم تغییرات این تنش را در جسم تحت بررسی، از برنامه در خواست نماید. اگر تنش فون مایسز برابر و یا بیش از تنش تسلیم در ماده‌ی مورد نظر باشد، در آن صورت می‌توان از ماده‌ی دیگری که دارای تنش تسلیم بالاتری است استفاده نموده و یا تغییرات دیگری در طراحی اعمال نمود.

در اجسام تردی همانند شیشه یا چدن، که خصوصیات کششی و تراکمی آن‌ها با هم متفاوت است، پیشنهاد می‌شود تا تئوری کولمب - مور، جهت پیش‌بینی گسیختگی استفاده نمود. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در این مورد به مرجع [۴] مراجعه نمایید.

عیوب المان CST

المان CST دارای محدودیت‌هایی است. در مسائل تحت خمش، المان بندی توسط المان CST منجر به مدلی می‌شود که از مسأله‌ی واقعی سخت تر است. همان‌طور که از نتایج مدل سازی مسائل مرتبط با خمش در تیرهایی که توسط المان‌های CST یا LST (در فصل ۸ بررسی خواهد شد) مدل سازی شده‌اند مشاهده می‌شود، مدل CST به آهستگی به سمت جواب واقعی هم گرا می‌شود. جزیی از این امر ناشی از آن است که تنش در المان ثابت است؛ در حالی که در مسائل مرتبط با خمش، تنش در واقع به صورت خطی در امتداد ارتفاع سطح مقطع تیر تغییر می‌نماید. همان‌طور که در فصل ۸ نشان داده خواهد شد، این مشکل با استفاده از المان LST اصلاح می‌شود.

مطابق آنچه که در [۳] برای خمش خالص یک تیر آهن نشان داده شده، CST منجر به تنش برشی غلط یا نادرست شده و در نتیجه، کرنش برشی نادرستی در بعضی از قسمت های مدل حاصل می‌شود که اصولاً نمی‌بایست هیچ تنش یا کرنش برشی را تحمل نمایند. کرنش نادرست فوق، منجر به جذب انرژی شده و در نتیجه، مقداری از این انرژی که می‌بایست صرف خمش شود از بین خواهد رفت؛ بنابراین، CST سختی بیش‌تری از خود در خمش نشان داده و خیز حاصل، از آنچه که می‌بایست در حالت واقعی وجود داشته باشد کم‌تر است. فرآیند سختی بیش از اندازه‌ای که در یک مُد تغییر مکان یا بیش از آن رخ می‌دهد، اغلب تحت عنوان *فشل کنندگی برشی* یا *برش منزاحم* تشریح می‌شود.

مضافاً، در مسائلی که کرنش در آن‌ها دو بعدی بوده (توجه داشته باشید که این بدان معنا است که $\epsilon_z = 0$) و ضریب پواسون به سمت $0/5$ میل می‌نماید، المان بندی ممکن

است واقعاً قفل نموده؛ و این بدان معنا است که در المان بندی انجام شده، هیچ تغییر مکانی رخ نخواهد داد.

شرح خلاصه‌ای از آنچه که در مورد محدودیت‌های المان CST ذکر شد مانع استفاده از آن در مسائل مرتبط با تنش و کرنش صفحه‌ای نخواهد شد. شرح فوق ما را ملزم بر آن می‌نماید تا از المان‌های ریزتر، در مقایسه با المان‌های درشت‌تر، به ویژه هنگام بروز خمش، و به طور کلی* حضور گرادیان زیادی در تنش، استفاده کنیم. همچنین، باید در نظر داشت که برنامه‌ی مورد نظر باید بتواند در صورت نیاز، تغییرات ضریب پواسون را با نزدیک شدن آن به سمت ۰/۵، مثلاً در موادی که رفتاری شبیه به لاستیک دارند منظور نماید. در مواد معمولی، از قبیل فلزات، ضریب پواسون تقریباً برابر ۰/۳ بوده و در نتیجه، نیازی نیست تا نگران قفل شدن مسأله باشیم.



مراجع

- [1] Timoshenko, S., and Goodier, J., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York 1970.
- [2] Gere, J. M., *Mechanics of Materials*, 5th ed., Brooks/Cole Publishers, Pacific Grove, CA, 2001.
- [3] Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York, 1989.
- [4] Shigley, J. E., Mischke, C. R., and Budynas, R. G., *Mechanical Engineering Design*, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 2004.



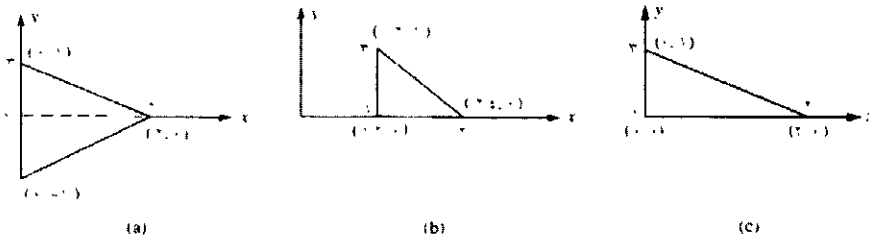
مسائل

۱-۶ نحوه‌ی تغییرات توابع شکل N_i و N_m مندرج در معادله‌ی (۶-۲-۱۸) را که بر روی سطح المان مثلث شکلی با گره‌های i, j و m داده شده‌اند رسم کنید: صحت رابطه‌ی

۱ $N_i + N_j + N_m = 1$ را در کلیه نقاط المان بررسی کنید.

۲-۶ در یک المان سه گره‌ای مثلثی شکل ساده، صریحاً نشان دهید که معادله‌ی (۲-۶) (۴۸) در واقع از مشتق‌گیری معادله‌ی (۲-۶) (۴۷) حاصل می‌شود؛ به عبارتی دیگر، عبارت مربوطه برای $[B]$ و شرط تنش صفحه‌ای برای $[D]$ را در معادله‌ی (۲-۶) (۴۷) جای‌گزین نموده و پس از مشتق‌گیری π_{θ} نسبت به هر یک از درجه‌های آزادی قید شده در معادله‌ی (۲-۶) (۴۷)، معادله‌ی (۲-۶) (۴۸) را به دست آورید.

۳-۶ در هر یک از المان‌های مندرج در شکل ۳-۶P، ماتریس سختی را به دست آورید. واحد محورها بر حسب اینچ است. از حالت تنش صفحه‌ای استفاده کنید. فرض کنید $E = 30 \times 10^6$ psi، $\nu = 0.25$ ، و ضخامت $t = 1$ in.



شکل ۳-۶P

۴-۶ برای المان‌هایی که در مسأله‌ی ۳-۶ داده شده، جابه‌جایی گره‌ها برابرند با:

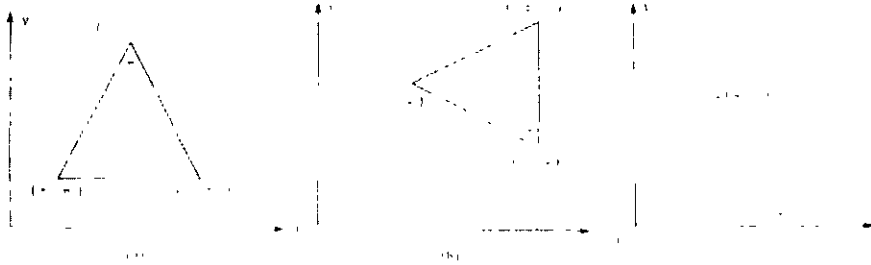
$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0/0 & v_1 &= 0/0.025 \text{ in.} & u_2 &= 0/0.012 \text{ in.} \\
 v_2 &= 0/0 & u_3 &= 0/0 & v_3 &= 0/0.025 \text{ in.}
 \end{aligned}$$

مطلوبست تعیین تنش‌های σ_x ، σ_y ، τ_{xy} ، σ_x و σ_y و زاویه‌ی تنش اصلی θ_p . از مقادیر E ، ν و t که در مسأله‌ی ۳-۶ داده شده استفاده کنید.

۵-۶ در مسأله‌ی ۴-۶ تنش فون مایسز را محاسبه کنید.

۶-۶ در هر یک از المان‌های مندرج در شکل ۶-۶P، ماتریس سختی را به دست آورید. واحد محورها بر حسب میلی‌متر است. از حالت تنش صفحه‌ای استفاده کنید. فرض

$$E = 210 \text{ Gpa}, \nu = 0.25, \text{ و } t = 10 \text{ mm}$$



شکل ۶-۶P

۷-۶ در المان‌هایی که در مسأله‌ی ۶-۶ داده شده‌اند، جابه‌جایی کره‌ها برابرند با:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2/0 \text{ mm} & v_1 &= 1/0 \text{ mm} & u_2 &= 0/5 \text{ mm} \\ v_2 &= 0/0 & u_3 &= 3/0 \text{ mm} & v_3 &= 1/0 \text{ mm} \end{aligned}$$

مطلوبست تعبیر تنش‌های $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \sigma_3$ و σ_4 و زاویه‌ی تنش اصلی θ_p .

از معادیر E, ν و t که در مسأله‌ی ۶-۵ داده شده استفاده کنید

۸-۶ در مسأله‌ی ۶-۷ تنش فون ماکس را محاسبه کنید

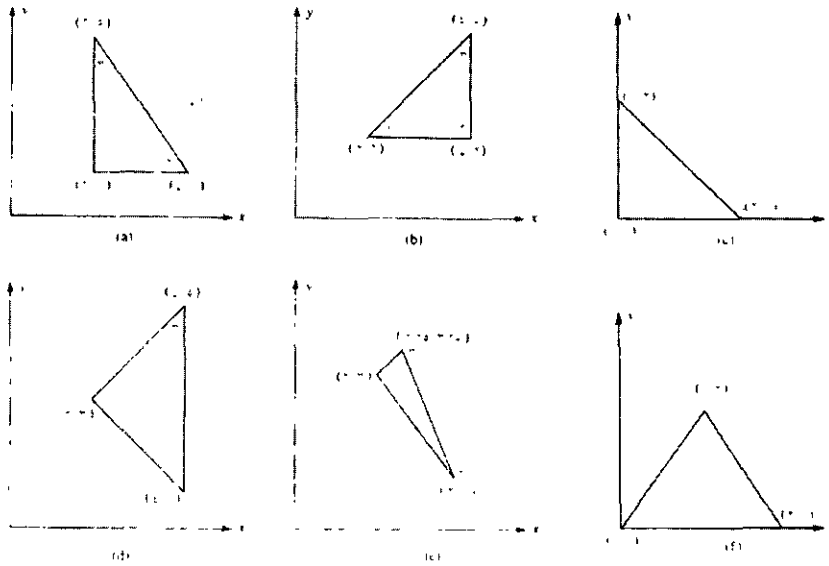
۹-۶ در المان‌های کرنش صفحه‌ای مندرج در شکل ۶-۹P، جابه‌جایی کره‌ها برابرند با:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0/001 \text{ in.} & v_1 &= 0/005 \text{ in.} & u_2 &= 0/001 \text{ in.} \\ v_2 &= 0/0025 \text{ in.} & u_3 &= 0/0 \text{ in.} & v_3 &= 0/0 \text{ in.} \end{aligned}$$

مطلوبست تعبیر تنش‌های $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \sigma_3$ و σ_4 و زاویه‌ی تنش

اصلی θ_p فرض کنید $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ و $\nu = 0.25$ و از ضخامت واحد

در تنش صفحه‌ای استفاده کنید. واحد تبدیلی محورها بر حسب اینچ است

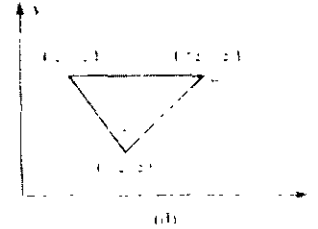
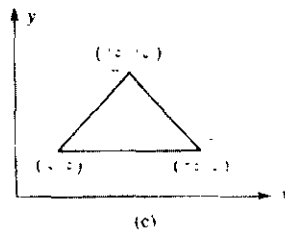
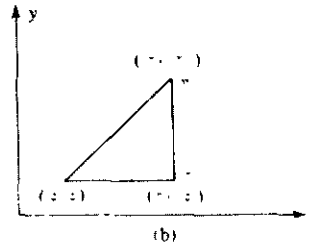
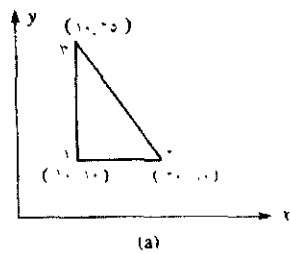


شکل ۶P-۹

۶-۱۰ در المان‌های کرنش صفحه‌ای مندرج در شکل ۶P-۱۰، جابه‌جایی گره‌ها برابرند با:

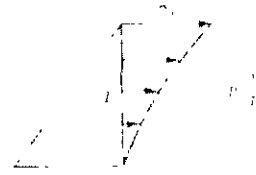
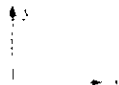
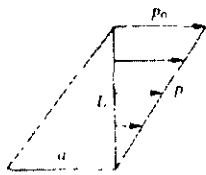
$$\begin{array}{lll}
 u_1 = 0.005 \text{ mm} & v_1 = 0.002 \text{ mm} & u_2 = 0.0 \text{ mm} \\
 v_2 = 0.0 \text{ mm} & u_3 = 0.005 \text{ mm} & v_3 = 0.0 \text{ mm}
 \end{array}$$

مطلوبست تعیین تنش‌های σ_x ، σ_y ، τ_{xy} ، σ_z و σ_θ و زاویه‌ی تنش اصلی θ_p فرض کنید $E = 70 \text{ Gpa}$ ، $\nu = 0.3$ و از ضخامت واحد در کرنش صفحه‌ای استفاده کنید. واحد کلیه‌ی محورها بر حسب میلیمتر است



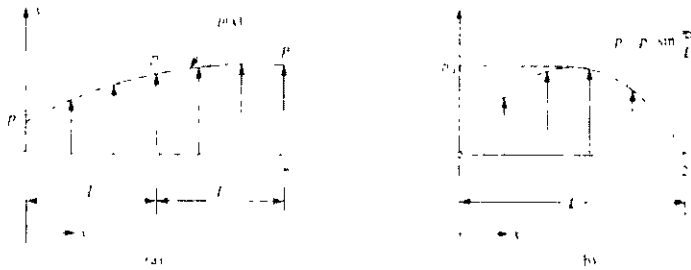
شکل ۶P-۱۰

۶-۱۱ ضمن ارزیابی عبارت انتگرال سطحی مدرج در معادله‌ی (۶-۳-۷)، سروهای دهانی (a) المان مثلثی شکل مدرج در شکل ۶P-۱۱ (a) را به ازای فشار خطی اعمال شده‌ی p بر لبه‌ی آن و (b) فشار اعمال شده‌ی درجه دومی مطابق با شکل ۶P-۱۱ (b)، تعیین نمید.



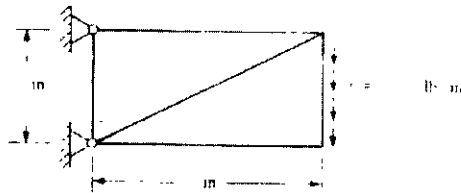
شکل ۶P-۱۱

۱۲-۶ با استفاده از روش کار معادل (ضمن استفاده از عبارت انتگرال سطحی که در معادله‌ی (۷-۳-۶) داده شده) نیروهای گره‌ای را به ازای بارگذاری ناشی از فشار متغیر درجه دومی که در شکل ۱۲-۶P (a) نشان داده شده و بارگذاری ناشی از فشار سینوسی مندرج در شکل ۱۲-۶P (b) بیابید. فرض کنید ضخامت المان برابر t است.



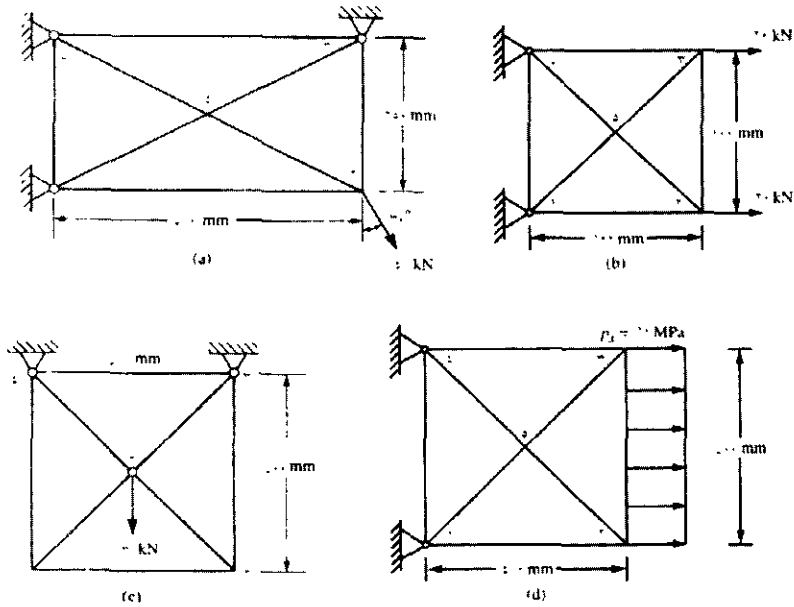
شکل ۱۲-۶P

۱۳-۶ حابه‌جایی گره‌ها و مولفه‌های تنش در المان را به انضمام تنش‌های اصلی، در ورق نازک ذکر شده در بخش ۵-۶، به ازای نیروی برشی ثابتی (به‌حای بار کتشی) که بر لبه‌ی سمت راست همانند شکل ۱۳-۶P عمل می‌کند بیابید. فرض کنید $E = 30 \times 10^6$ psi، $\nu = 0.3$ ، و $t = 1$ in. (راهنمایی: از ماتریس $[K]$ مستخرج از بخش ۵-۶ که در رابطه‌ی (۶-۵-۲۲) داده شده می‌توان برای حل مسأله استفاده نمود.)



شکل ۱۳-۶P

۱۴-۶ جابه‌جایی گره‌ها و مؤلفه‌های تنش در المان را به انضمام تنش‌های اصلی، در ورق نازک مندرج در شکل ۱۴-۶P به ازای بارهای اعمال شده بیابید. از مقادیر $E = 210 \text{ GPa}$ ، $\nu = 0.3$ و $t = 5 \text{ mm}$ استفاده کنید. فرض کنید شرایط تنش صفحه‌ای حکم فرما است. ورق‌های المان بندی شده در شکل نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۴-۶P

۱۵-۶ ماتریس نیروی حجمی را در ورق مندرج در شکل‌های ۱۴-۶P (a) و (c) بیابید. فرض کنید وزن مخصوص برابر $77/1 \text{ kN/m}^3$ است.

۱۶-۶ چرا ماتریس سختی المان مثلثی شکل استخراج شده در بخش ۶-۲ مثلث کرنش ثابت نامیده می‌شود؟

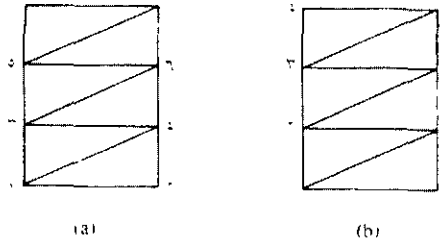
۶-۱۷ در المان مثلثی شکل کرنش ثابت تنش‌ها به چه صورت تغییر می‌کنند؟
 ۶-۱۸ آیا می‌توان از المان کرنش ثابت یا تنش ثابت در مدل سازی‌های زیر استفاده نمود؟

- a. ورق مسطحی در کف یک ساختمان
- b. دیواری که تحت بارگذاری ناسی از باد فرار گرفته است (دیوار به عنوان دیوار برشی عمل می‌کند)
- c. ورقی تحت کشش با سوراچی درون آن
- d. میله‌ای با سوراچ‌های انتهایی جهت اتصال
- e. بوده‌ای از خاک که تحت تأثیر بار ناسی از بی فرار گرفته است
- f. آجاری که تحت تأثیر نیرویی در صفحه‌ی خود قرار گرفته است
- g. آجاری که تحت تأثیر کوئل پیچشی فرار گرفته است (راستای کوئل پیچشی خارج از صفحه‌ی آجاز است)
- h. ورق رابط مثلثی شکلی که درون صفحه‌ی خود بارگذاری شده است
- i. ورق رابط مثلثی شکلی که خارج از صفحه‌ی خود بارگذاری شده است

۶-۱۹ در المانی با نینس ناس، فقط امکان حانه‌حانی‌های درون صفحه‌ای فراهم است در حالی که، المان بر با فاب می‌تواند متحمل تغییر مکان‌ها با دوران‌ها شود. حکویه می‌توان از المان بر و نس صفحه‌ای استفاده نموده و به طور هم‌زمان از هم سازگاری مطمئن بود.

۶-۲۰ در سازه‌های دو بعدی مدرج در شکل ۶P-۲۰ که وسط المان‌های مثلثی شکل مدل سازی شده‌اند نشان دهید که شماره گذاری در جهتی که دارای کره‌های

کم‌تری است. همانند شکل ۶P-۲۰(a) (در مقایسه با شماره گذاری در راستایی که دارای گره‌های بیش‌تری است)، منجر به کاهش پهنای باند ماتریس می‌شود. این امر را همان‌طور که در پیوست B-۴ آورده شده با بر کردن هر یک از جایگاه‌های ماتریس K با X برای هر المان نشان دهید. باندهای هر حالت را با هم مقایسه کنید.

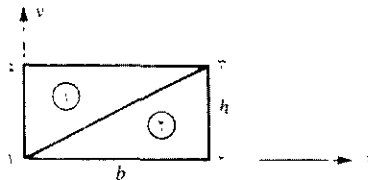


شکل ۶P-۲۰

۶-۲۱ جزئیات مراحل استخراج معادله‌ی (۶-۳-۶) را قید نمایید.

۶-۲۲ چگونه المان سه گره‌ای مثلثی شکلی را که دارای ضخامت متغیر خطی است تحلیل می‌کنید؟

۶-۲۳ ماتریس سختی المان ۱ از مدل دو المانی ورق مستطیل شکل مندرج در شکل ۶P-۲۳ را که تحت تأثیر تنش صفحه‌ای است محاسبه کنید. سپس ماتریس سختی المان ۲ را تعیین کنید.



شکل ۶P-۲۳

فصل ۷

نکات کاربردی در مدل سازی، تفسیر نتایج و مثال‌هایی از تحلیل تنش/ کرنش صفحه‌ای

مقدمه

در این فصل راهکارهایی در مدل سازی، از قبیل اندازه المان بندی، زیر تقسیمات معمول در مدل در نزدیکی بارهای متمرکز، و استفاده از تقارن و اعمال شرایط مرزی، ارائه خواهد شد. در ادامه، مبحث تعادل، هم سازگاری و همگرایی در حل مسأله آورده شده است. پس از آن تفسیر تنش‌های به دست آمده بررسی خواهند شد.

سپس، مفهوم خلاصه سازی استاتیکی که بدان وسیله قادر خواهیم بود تا ایده‌ی ماتریس سختی المان مثلثی شکل با کرنش ثابت را به المان چهارضلعی اعمال کرده و

بررسی نماییم؛ بنابراین می توان از هر یک از دو نوع المان سه ضلعی و چهار ضلعی در مدل کردن اجسام واقعی به روش اجزای محدود استفاده نمود.

سپس نتایج چند برنامه‌ی رایانه‌ای نشان داده خواهد شد. در مسائلی که دارای درجه‌ی آزادی بالایی هستند، یک برنامه‌ی رایانه‌ای حل مسائل پیچیده‌ی تنش و کرنش صفحه‌ای را، که به دلیل تعدد معادلات نمی توان آن‌ها را با دست حل نمود، آسان می کند. همچنین، در مسائلی که حل دستی آن‌ها ممکن نیست (از قبیل مسائلی که دارای شکل هندسی پیچیده‌ای بوده و یا دارای بارگذاری پیچیده‌ای هستند، و یا از فرضیه‌های نامتعارف و اغلب غیر واقعی به منظور ساده کردن حل مسأله و فراهم نمودن امکان تشریح مسأله از طریق یک معادله‌ی دیفرانسیلی کلاسیک استفاده شده است) را می توان با اعتماد بالا نسبت به نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود (از حل سیستم معادلات جبری حاصل) حل نمود.



۷-۱ مدل سازی در اجزای محدود

اینک مفاهیم متعددی را که باید در مدل سازی مسائل و حل آن‌ها از روش اجزای محدود در نظر گیریم بررسی خواهیم نمود.

ملاحظات کلی

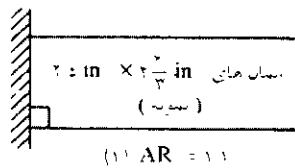
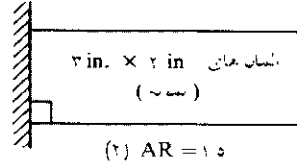
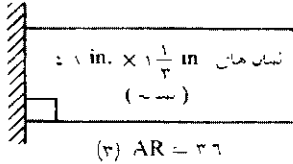
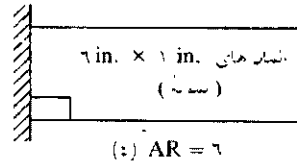
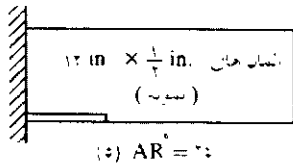
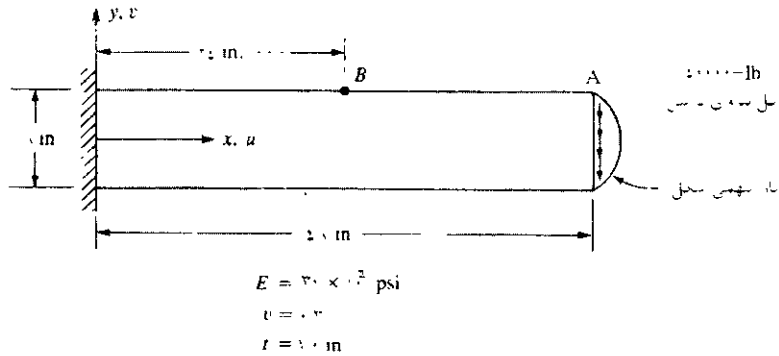
مدل سازی در اجزای محدود هنری است که تا حدی تابع مشاهدات بر هم کنش‌های فیزیکی متقابلی است که درون جسم اتفاق می افتند. عموماً هر فرد روش خوب مدل کردن را بر اساس تجربه و کار با افراد با تجربه می آموزد. برنامه‌های چند منظوره رهنمودهایی را در مورد بعضی از مسائل خاص ارائه می کنند [۱۲، ۱۵]. در قسمت‌های بعدی این بخش، بعضی از مفاهیم مهم که باید مد نظر قرار گیرند تشریح

می‌شوند. در مدل سازی و در بعضی مواقع، ابتدا کاربر با امر مهم و مشکل درک رفتار فیزیکی در حال اتفاق و نیز درک فیزیکی رفتار المان‌های مختلف موجود، به منظور استفاده از آن‌ها مواجه می‌شود. انتخاب المان یا المان‌های مناسب که تا حد امکان منطبق با رفتار فیزیکی مسأله‌ی مورد نظر است یکی از تصمیم‌های متعددی است که باید توسط کاربر گرفته شود. در بعضی مواقع، درک شرایط مرزی که باید بر مسأله اعمال شود کار مشکلی است. همچنین، اغلب نوع بار، اندازه و محل آن بر جسم، از مشکلات محسوب می‌شوند. مجدداً، می‌توان ضمن کار با افراد مجرب و تحقیق در مورد مطالب مرتبط، بر این مشکلات غلبه نمود.

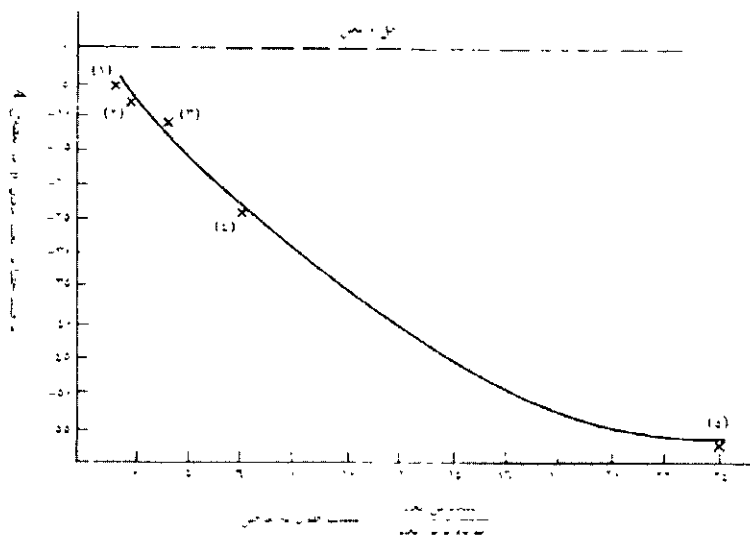
نسبت طول به عرض و شکل المان‌ها

طبق تعریف، نسبت طول به عرض، برابر است با نسبت بزرگ‌ترین طول به کوچک‌ترین طول از یک المان چهار ضلعی. در بسیاری از موارد، با افزایش نسبت طول به عرض، دقت محاسبات کاهش می‌یابد. به منظور نشان دادن این نکته، شکل ۷-۱ (a) نمایانگر پنج مدل مختلف اجزای محدودی است که به منظور تحلیل تیر تحت خمشی به کار گرفته شده‌اند. شکل ۷-۱ (b) معرف تغییرات خطای حاصل در تغییر مکان نقطه‌ی A از تیر، برحسب نسبت طول به عرض است. در جدول ۷-۱، نتایج تغییر مکان‌ها در نقاط A و B در پنج مدل یاد شده و حل تحلیلی با هم مقایسه شده‌اند [۲].

استثناهایی وجود دارد که در آن به ازای نسبت‌های طول به عرض نزدیک به ۵۰، هنوز نتایج قابل قبولی حاصل می‌شود. برای مثال، اگر گرادیان تنش در بعضی از نقاط مسأله صفر باشد، در آن صورت نسبت‌های طول به عرض بالا در آن محل، هنوز جواب‌های قابل قبولی را ارائه خواهد نمود.



شکل ۷-۱ (a) تیر آهن تحت بارگذاری؛ نمایش اثرات نسبت طول به عرض (AR) در پنج حالت مختلف با پنج نسبت مختلف.



شکل ۱-۷ (b) اشتباه در جواب‌ها به صورت تابعی از نسبت طول به عرض (اعداد درون پرانتز دلالت بر حالات مندرج در جدول ۱-۷ می‌نمایند)

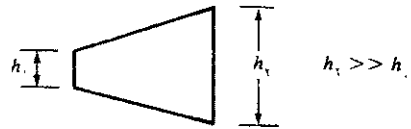
به طور کلی اگر شکل المانی منظم و جمع و جور باشد نتایج حاصل از آن بهتر خواهد بود. اگرچه المان‌های مختلف حساسیت‌های متفاوتی را نسبت به اعوجاج شکل از خود نشان می‌دهند، ولی با این وصف سعی کنید که (۱) نسبت طول به عرض همانند موارد (۱) و (۲) در شکل ۱-۷ پایین نگه داشته شده و (۲) زوایای المان‌های چهارگوش نزدیک به 90° انتخاب شوند. شکل ۲-۷ معرف المان‌هایی با اشکال ضعیف است که نتایج ضعیفی را به دنبال خواهد داشت. اگر تعدادی از این المان‌ها در مدل وجود داشته باشند در آن صورت نتایج حاصل در نزدیکی این المان‌ها ضعیف خواهد بود. در برنامه‌ی [12] Algor، چنان‌چه در شکل ۲-۷ (c)، $\alpha \geq 170^\circ$ باشد، برنامه به طور خودکار المان چهارگوش را بر دو المان مثلثی شکل تقسیم می‌کند.

جدول ۷-۱ مقایسه‌ی نتایج به ازای نسبت طول به عرض های متفاوت

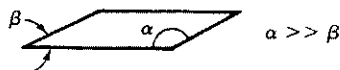
مورد	نسبت طول به عرض	تعداد گره‌ها	تعداد المان‌ها	جابه‌جایی قائم		درصد خطا در جابه‌جایی A در
				v (in.)		
				نقطه‌ی A	نقطه‌ی B	
۱	۱/۱	۸۴	۶۰	-۱/۰۹۳	-۰/۳۴۶	۵/۲
۲	۱/۵	۸۵	۶۴	-۱/۰۷۸	-۰/۳۳۹	۶/۴
۳	۳/۶	۷۷	۶۰	-۱/۰۱۴	-۰/۳۲۸	۱۱/۹
۴	۶/۰	۸۱	۶۴	-۰/۸۸۶	-۰/۲۸۰	۲۳/۰
۵	۲۴/۰	۸۵	۶۴	-۰/۵۰۰	-۰/۱۵۸	۵۶/۰
[۲] حل واقعی				-۱/۱۵۲	-۰/۳۶۰	



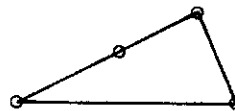
(a) نسبت طول به عرض بالا



(b) ارتفاع بزرگ نسبت به ارتفاع کوچک



(c) دو زوای بسیار بزرگ و کوچک، نسبت به هم



(d) چهار ضلعی سه ضلعی تک‌مفصل شده است

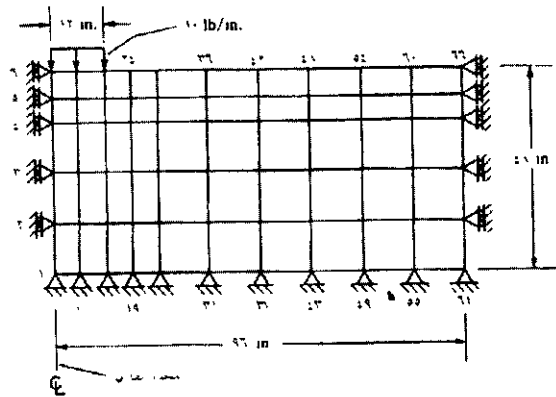
شکل ۷-۲ المان‌هایی با شکل‌های نامرغوب

استفاده از تقارن

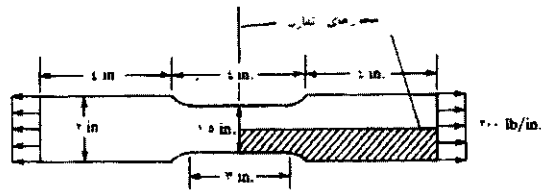
کاربرد صحیح تقارن* اغلب روند مدل سازی یک مسأله را سرعت می بخشد. استفاده از تقارن این امکان را فراهم می کند که به جای حل مسأله واقعی، جزیی از آن را حل نمود؛ بنابراین می توان از المان های ریزتر همراه با زحمت کم تر و هزینه های رایانه ای کم تر استفاده نمود. برای توضیح بیش تر درباره ی استفاده از تقارن به مرجع [۳] مراجعه نمایید.

شکل های ۷-۳ الی ۷-۵ نمایانگر کاربرد تقارن در مدل کردن (۱) قسمتی از خاک تحت بار فونداسیون، (۲) عضوی با گرد گوشه ای تحت بارگذاری یکنواخت محوری، و (۳) صفحه ی سوراخداری تحت فشار داخلی می باشند. باید توجه داشت که در صفحه ی تقارن، جابه جایی در راستای عمود بر صفحه، باید برابر صفر باشد. این مطلب توسط غلطک هایی در گره های ۲ الی ۶ در شکل ۷-۳، که در آن صفحه ی تقارن، صفحه ی قائم گذرا از گره های ۱ الی ۶، عمود بر صفحه ی مدل است، نشان داده شده است. در شکل های ۷-۴ (a) و ۷-۵ (a) دو صفحه تقارن وجود دارد. بنابراین همان طور که در شکل های ۷-۴ (b) و ۷-۵ (b) نشان داده شده نیاز است تا فقط یک چهارم اعضا مدل سازی شوند؛ بنابراین از غلطک ها بر گره های موجود در راستاهای افقی و قائم صفحات تقارن استفاده شده است.

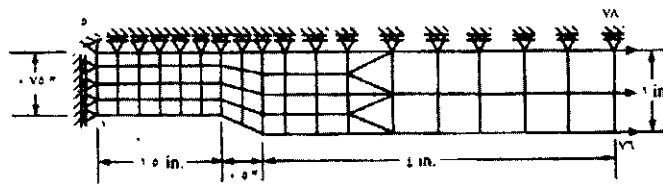
* محدوداً، تقارن آینه ای بدان معنا است که اندازه، شکل، موقعیت بارها، خصوصیات ماده، و شرایط مرزی در طرف دیگر خط یا سطح مقسم یکسان است.



شکل ۷-۳ استفاده از تقارن در مدل سازی قسمتی از خاک تحت بارگذاری فوندانسیون
 (تعداد گره‌ها=۶۶، تعداد المان‌ها = ۵۰) (۱ in. = ۲/۵۴ cm، ۱ lb = ۴/۴۴ N)

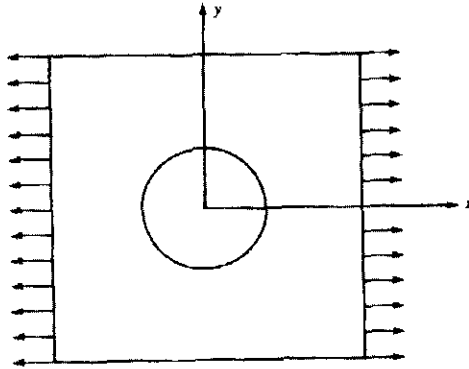


(a) تنش صفحه‌ای در عضو گرد گوشه‌داری تحت کشش با نیروی محوری

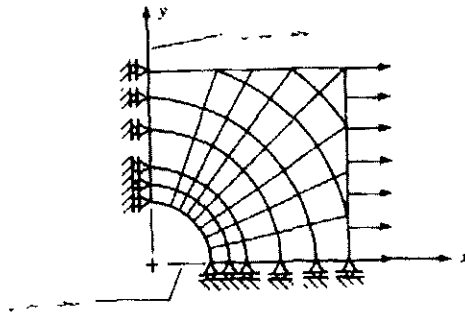


(b) تصویر بزرگ شده‌ی مدل اجزای محدود یک چهارم هاشور خورده‌ی عضو
 (تعداد گره‌ها = ۷۸، تعداد المان‌ها = ۶۰) (۱ in. = ۲/۵۴ cm)

شکل ۷-۴ اعمال تقارن به عضو تحت کشش با یک گرد گوشه



(a) ورق سوراخ‌داری تحت تنش صفحه‌ای



(b) مدل اجزای محدود یک چهارم

شکل ۵-۷ اعمال تقارن به ورق سوراخ‌داری تحت نیروی کششی به منظور کاهش حجم مسأله

همان‌طور که قبلاً در بخش ۳ ذکر شد در مسائل کماتش و ارتعاشات، باید با احتیاط از تقارن استفاده نمود؛ چرا که تقارن در شکل لزوماً به منزله‌ی تقارن در کله‌ی مُدهای ارتعاشی و کماتش نیست.

تقسیم بندی‌های مجدد در ناپیوستگی‌ها

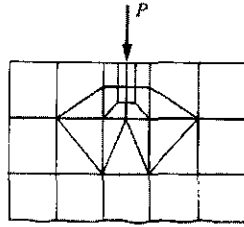
شکل ۶-۷ نمایانگر زیر قسمت‌های طبیعی مختلف در شبکه بندی اجزای محدود است. برای مثال، همان‌طور که در شکل ۶-۷ (a) و (b) نشان داده شده، در محل بارهای متمرکز یا ناپیوستگی در بارها، به گره‌هایی نیاز است. خطوط گره‌ای بر اساس تغییر ناگهانی در ضخامت ورق، همانند شکل ۶-۷ (c)، و تغییرات ناگهانی در خصوصیات ماده، همانند شکل ۶-۷ (d) و (e) تعریف می‌شوند. تقسیم بندی‌های مجدد در نقاط دیگری همانند محل دخول دو جسم درون هم، مطابق با شکل ۶-۷ (f)، و یا در امتداد سوراخ درون اعضا، همانند شکل ۶-۷ صورت می‌گیرد.

اندازه بندی المان‌ها و نحوه‌ی پالایش آن‌ها از روش‌های p و h

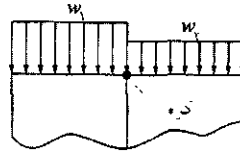
در مسائل سازه‌ای، بسیاری از برنامه‌های رایانه‌ای از دو روش به منظور تعیین تغییر مکان‌ها، دوران‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها، استفاده می‌کنند. (روش‌های یاد شده نیز به مسائل غیر سازه‌ای اعمال می‌شوند.) این دو روش، روش‌های p و h نامیده می‌شوند. لذا از این دو روش به منظور اصلاح و پالایش (ریزتر نمودن) شبکه‌ی اجزای محدود، و به منظور بهبود نتایج در تحلیل شبکه‌ی ریزتر شده‌ی بعدی استفاده می‌شود. هدف تحلیل گر آن است تا شبکه‌ی مورد نظر را به قسمی پالایش نماید تا با دستیابی به تعداد درجه‌های آزادی کافی دقت لازم را کسب نماید. هدف نهایی از به اصطلاح پالایش انطباقی یاد شده آن است تا شاخص خطا به طور یکنواخت در میان المان‌ها تقسیم شود.

المان بندی، به شکل سازه، الگوی بار گذاری، و شرایط مرزی بستگی دارد. برای مثال، همان‌طور که در شکل‌های ۶-۷، ۶-۷، ۶-۷، و ۶-۷ (f) نشان داده شده، نواحی حاوی تمرکز تنش یا گرادیان‌های تنش در اثر پیچ‌ها، سوراخ‌ها، یا محل ورود دو جسم درون هم، به شبکه‌ی ریزتری در نزدیکی نواحی یاد شده نیاز دارند.

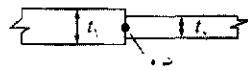
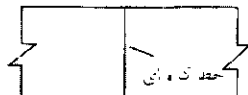
در این جا روش های پالایش p و h را به طور خلاصه تشریح نموده و برای آن دسته از افرادی که تمایل به درک عمیق تری از موضوع دارند مراجعی مرتبط با روش های یاد شده آورده خواهد شد.



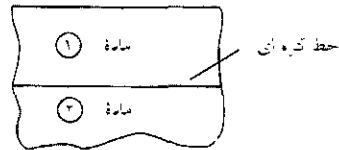
(a) نیروی متمرکز



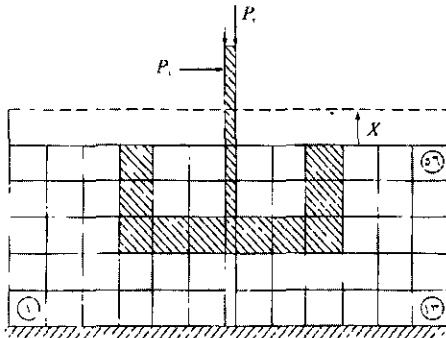
(b) نوسان ناکنشها در بار



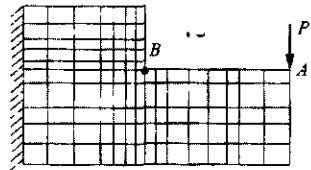
(c) نوسان ناکنشها در صفحات ورق



(d) نوسان ناکنشها در حوضه صلب ماده

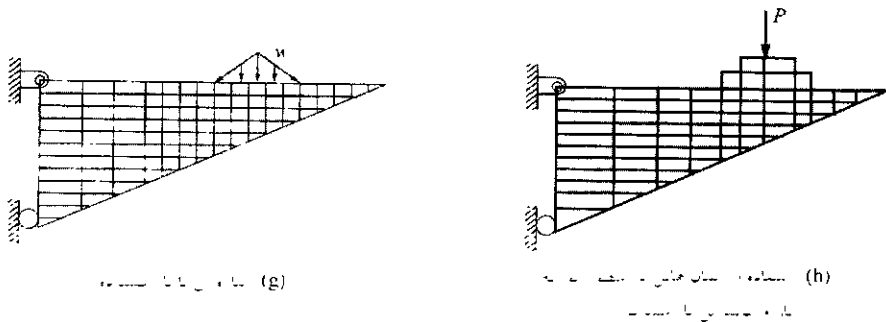


(e) مدل ماده چسبناک ساخته شده از ماده الاستیک در دو بعد. این مدل را می توان تحلیل کرد با روش اجزای محدود



(f) تحلیل اجزای محدود در یک ماده الاستیک در دو بعد

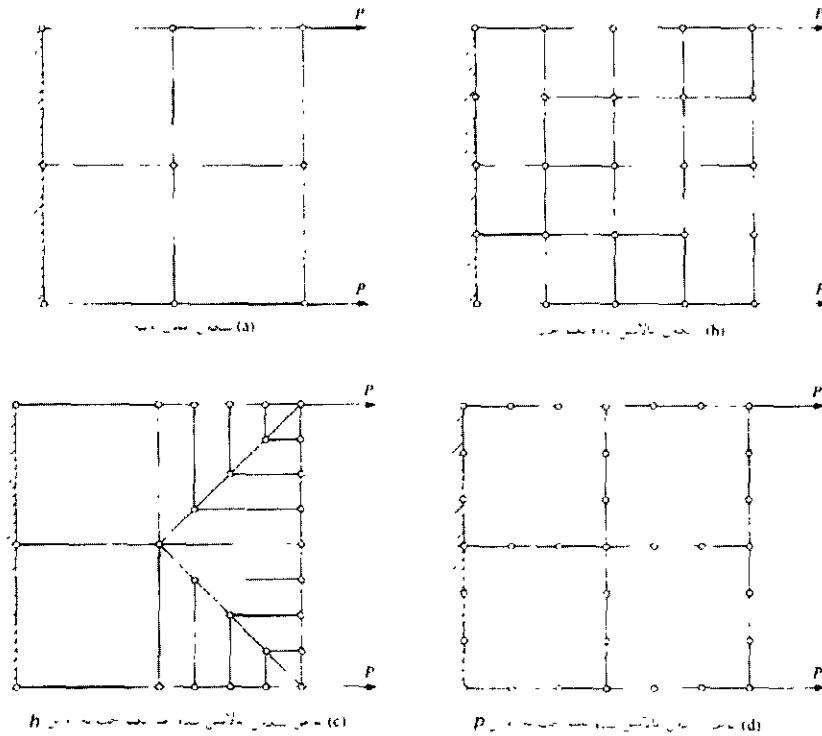
شکل ۶-۷ تقسیم بندی های مجدد در ناپیوستگی ها



شکل ۷-۶ (ادامه)

پالایش (ریزتر نمودن) المان‌ها از روش h در روس با لایتس المان‌ها از روش h از المان خاصی که بر اساس تابع شکل مرتبط با آن المان انتخاب می‌شود (برای مثال، توابع خطی در میله، درجه دو در تیر، روج خطی در CST) استفاده می‌کنیم. سپس، ضمن شروع از شبکه‌ی پایه‌ای به عنوان مبدا، حل پایه‌ای را به عنوان یک مرحله و به منظور تخمین خطا و رهنمودی برای باربینی شبکه به دست می‌آوریم سپس به منظور بالانس تا کوچک‌تر نمودن المان‌ها در مدل، المان‌هایی از همان نوع را اضافه می‌کنیم. در بعضی مواقع، همان‌طور که در شکل ۷-۷-b نشان داده شده، المان‌ها را به صورت کنواخت ریزتر می‌کنیم به قسمی که مثلاً اندازه‌ی هر المان (شکل ۷-۷-a) در هر راستا به دو قسمت تقسیم شود در بیس‌تر مواقع. همان‌طور که در شکل ۷-۷-c نشان داده شده، پالایش تا ریزتر نمودن المان‌ها به صورت بالانس غیر کنواخت h صورت می‌گیرد. اسباب به آن دلیل از بالانس محلی استفاده می‌شود تا به بعضی از نمودهای فیلد از فیلد موج ضربه‌ای تا لایه‌ی مروری که در سئالات استفاده می‌شوند دسترسی داشته باشد (۱۹۱۱). ریزتر نمودن سازه تا به اینجا ادامه می‌یابد که جواب‌های حاصل از یک

شبکه نزدیک به جواب‌های حاصل از شبکه‌ی پالایش شده‌ی قبلی باشند. مضافاً، ممکن است قسمتی از شبکه را به جای ریزتر نمودن، درشت‌تر نمود. برای مثال، در ناحیه‌ای که تنش ثابت بوده و یا به آهستگی عوض می‌شود، کاربرد المان‌های درشت‌تر می‌تواند کاملاً قابل قبول باشد. استراتژی ریزتر نمودن شبکه به روش h بر اساس آنچه که در مراجع [۲۰ الی ۲۳] آورده شده شروع گردید. کدهای رایانه‌ای تجاری متعددی، همانند آنچه که در [۱۲] آورده شده، مبتنی بر روش پالایش h می‌باشند.



شکل ۷-۷ نمونه‌هایی از نحوه‌ی پالایش به روش h و p



(e)

شکل ۷-۷ (ادامه)

پالایش (ریزتر نمودن) المان‌ها از روش p . به منظور ریزتر نمودن المان‌ها از روش p [۲۴ الی ۲۸]. بر اساس دقتی که توسط کاربر مشخص می‌شود چند جمله‌ای p مثلاً از نوع درجه دو، به مرتبه‌های بالاتر از نفا می‌یابد. در صورت ریزتر نمودن المان‌ها از روش p ، مرتبه‌ی چند جمله‌ای، یا تراز p ، به قسمی توسط این روش تنظیم می‌شود تا انطباق بهتری با شرایط مسأله، از قبیل شرایط مرزی، بارگذاری، و یا تغییرات در شکل هندسی حاصل شود. متعاقباً مسأله به ازای تراز خاصی از p حل شده و سپس در حالی که شکل هندسی المان یکسان باقی می‌ماند، عموماً با افزایش مرتبه‌ی چند جمله‌ای، مسأله مجدداً حل می‌شود. نتایجی که از این تکرار حاصل می‌شود با صوابی

که به عنوان معیار همگرایی توسط کاربر مشخص می‌شود مقایسه می‌گردند. عموماً چند جمله‌ای‌هایی که مرتبه‌ی آن‌ها بالاتر است منجر به جواب‌های بهتری می‌شوند. فرآیند این تکرار به صورت خودکار، توسط برنامه‌ی رایانه‌ای صورت می‌گیرد؛ بنابراین، نیازی نیست تا کاربر به صورت دستی اقدام به ایجاد تغییرات در انداره‌ی المان‌ها نموده تا شبکه‌ی ریزتری را همانند آنچه که در روش h گفته شد ایجاد نماید. (نحوه‌ی پالایش h را می‌توان به کمک الگوریتمی که مرتبط با شبکه بندی محدود در نرم افزار اجزای محدود است خودکار نمود.) با عنایت به مسأله‌ی مورد نظر، شبکه بندی درشت اغلب منجر به جواب‌های قابل قبول می‌شود. بحث گسترده‌ای مرتبط با نحوه‌ی تعبیر نتایج حاصل و تخمین آن در ادبیات مرجع [۱۹] آورده شده است.

پالایش المان‌ها از روش h ممکن است شامل بالا بردن درجه‌های آزادی گره‌های موجود، اضافه نمودن گره‌ها در مرز بین المان‌ها، و یا درجه‌های آزادی داخلی نباشد. ریزتر نمودن یکنواخت المان‌ها از روش h (بالایش کلیه‌ی المان‌ها یکسان است)، در شکل ۷-۷ نشان داده شده است. در یکی از برنامه‌های رایانه‌ای تحاری که دارای کاربرد رایج‌تری است، Pro/MECHANICA [۲۹]، به طور گسترده از روش h استفاده می‌شود. مدل نمونه‌ای از قرقره‌ای که توسط Pro/MECHANICA المان بندی شده در شکل ۷-۷ نشان داده شده است.

مثلث‌های واسطه

شکل ۷-۴ نمایانگر کاربرد المان‌های مثلثی شکل در سواحی اتصال از چهار ضلعی‌های کوچک‌تر به چهار ضلعی‌های بزرگ‌تر است. این اتصال ضروری است چرا که در المان‌های ساده‌ی CST، حضور گره‌های مابین در امتداد هر لبه‌ی سه‌ضلعی معادلات CST از روس انرژی مطابقت ندارند. چنان‌چه از گره‌های مابین استفاده شود،

تضمین شرط هم سازگاری به هم خورده و ممکن است در مدل تغییر شکل یافته حفره‌هایی حاصل شود. با استفاده از المان‌های مرتبه‌ی بالاتر، از قبیل المان‌های مثلثی شکل با کرنش ثابت که در فصل ۸ تشریح خواهد شد، می‌توان از گره‌های میانی در امتداد لبه‌های المان استفاده نموده و هم سازگاری را حفظ نمود.

بارهای متمرکز یا نقطه‌ای

بارهای متمرکز یا نقطه‌ای را می‌توان به گره‌های یک المان اعمال نمود مشروط بر آن‌که گره یاد شده درجه‌ی آزادی مرتبط با آن بار را دارا باشد. برای مثال، المان‌های خریا و المان‌های دو و سه بعدی فقط دارای درجه‌ی آزادی انتقالی بوده و لذا نمی‌توان گشتاورهای متمرکز را بر این گره‌ها اعمال نمود؛ فقط نیروهای متمرکز بر این گره‌ها قابل اعمال می‌باشند. در هر حال، باید در نظر داشت که به طور فیزیکی، نیروهای متمرکز اغلب نوعی تطبیق و سهولت از دیدگاه ریاضی است که به منظور معرفی بار گسترده‌ای که دارای شدت بالایی بوده و بر سطحی کوچکی عمل می‌کند، به‌کار می‌روند.

بر اساس تئوری‌های کلاسیک الاستیسته‌ی خطی در تیرها، ورق‌ها، و اجسام صلب [۲، ۱۶، ۱۷]، چنانچه نقطه‌ای تحت تأثیر بار عمودی متمرکزی قرار گیرد، میزان تنش و جابه‌جایی در نقطه‌ای از تیر محدود، در نقطه‌ای از ورق تغییر مکان محدود و تنش نامحدود، و در نقطه‌ای از یک جسم جامد دو یا سه بعدی، هر یک از دو مقدار تنش و جابه‌جایی نامحدود می‌باشند. این نتایج منتج از فرضیه‌هایی است که در مورد میدان تنش در هر یک از فرضیه‌های خطی تیر، ورق، و اجسام جامد الاستیک انحداد می‌شود چنانچه باری حقیقتاً متمرکز باشد سبب می‌شود تا جسم در بر بار به نقطه‌ی نسلیم برسد؛ در حالی که فرضیه‌های الاستیک خطی حین حالی را بیش نمی‌کنند.

در تحلیل مسأله از روش اجزای محدود، چنانچه بار متمرکز بر گره‌ای از مدل اجزای محدود اعمال شود، تنش و جابه‌جایی محاسبه شده هیچ وقت برابر بی‌نهایت نخواهند شد. بار متمرکز اعمال شده بر مدلی که در آن از نمنش یا کرنش صفحه‌ای استفاده شده، دارای تعدادی بار گسترده‌ی معادل است که انتظار نمی‌رود تا جابه‌جایی‌ها و تنش‌های حاصل از آن‌ها بی‌نهایت باشند. مقادیر تنش و جابه‌جایی فقط در صورتی به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند که اندازه‌ی المان‌ها در حومه‌ی بارگذاری بی‌نهایت کوچک شود. آنچه که نهایتاً می‌توان انتظار داشت آن است که همان‌طور که در شکل ۷-۶ (a) نشان داده شده، در صورت کوچک‌تر نمودن المان بندی در اطراف بار متمرکز، تعبیر مکان‌ها و نس‌های به دست آمده در آن محدوده تقریبی بوده، با محاسبه‌ی تنش‌ها در این نواحی از اهداف مورد نظر نوده و هدف تعبیر تنش در نقطه‌ی دیگری همانند B ، دور از بار اعمال شده است. نکات قبده شده در مورد بارهای متمرکز، به عکس‌العمل‌های متمرکز نیز قابل اعمال است.

نهایتاً، همان‌طور که در شکل ۷-۶ (b) نشان داده شده، نیروی متمرکز را می‌توان به روش دیگری که در آن از یک بار متمرکز و المان‌های مازاد استفاده می‌شود مدل سازی نمود نحوه‌ی براكندگی المان‌هایی را که بار گسترده را سببه سازی می‌کند می‌توان با کنترل نسبت سجنی المان‌های بالای سطح بارگذاری به سختی سازه واقعی، و با تغییر مدول الاستیسته‌ی این المان‌ها انجام داد. در این روش، بار متمرکز از طریق تعدادی المان بر سازه‌ی واقعی توزیع می‌شود.

بر اساس حل الاستیسته، در اسکال هندسی و بارگذاری‌های خاصی، همانند آنچه در شکل ۸-۱۱ نشان داده شده، در نوسه‌ی مربوط به محل ورود دو جسم به یکدیگر، ممکن است نسبی به برخی بی‌نهایت وجود داشته باشند. بی‌نهایتی می‌شود که

در محل ذکر شده، تنش برابر بی نهایت شود؛ بنابراین، روش اجزای محدودی که مبتنی بر مدل های الاستیک خطی در مواد است هیچ گاه همگرا نشده (بدون توجه به این که چندین بار شبکه بندی المان ها ریزتر شده است) تا بدین وسیله اندازه ی تنش در گوشه ی یاد شده را اصلاح نمود [۱۸]. در این صورت باید محل تیز ورود دو قسمت به یک دیگر را به گوشه ی گرد شده ای تغییر داده یا از تئوری استفاده نمود که تسلیم در ماده ی مورد نظر را منظور می نماید.

محیط نامحدود

شکل ۷-۳ نمونه ای از مدلی است که محیط نامحدودی (توده ای از خاک که تحت تأثیر بار فوندانسیون قرار گرفته است) را معرفی می کند. از قواعد مدل سازی در روش اجزای محدود آن است که محیط مورد نظر را باید آنقدر بزرگ انتخاب نمود تا جابه جایی گره ها و تنش در المان ها، در نقاطی دور از بار اعمال شده بر فوندانسیون، قابل اغماض باشند. میزان مدل سازی از محیط را می توان از روش سعی و خطا، که در آن تأثیر فواصل عمودی و افقی از بار بر مقادیر جابه جایی و تنش بررسی می شوند، به دست آورد. متناوباً، می توان از تجارب محققین دیگری که مسائل مشابهی را مورد بررسی قرار داده اند استفاده نمود. تجربه نشان داده است که در محیط همگنی از خاک، اگر طول افقی مدل پنج تا شش برابر پهنای پای بست و طول قائم آن چهار تا ده برابر پهنای یاد شده انتخاب شود [۴-۶]، در آن صورت اثر بار اعمال شده بر پای بست به محیط اطراف در فواصل یاد شده ناچیز خواهد بود. مضافاً، کاربرد المان های نامحدود در مرجع [۳] مورد بحث قرار گرفته است.

پس از انتخاب ابعاد افقی و عمودی مدل، باید شرایط مرزی شبیه سازی شوند. عموماً در نقاطی دور از بار اعمال شده، جابه جایی های افقی قابل اغماض بوده و به

همین دلیل در گره‌های مرتبط با این نقاط، این جابه‌جایی‌ها برابر صفر منظور می‌شوند (مرز سمت راست در شکل ۷-۳): بنابراین از غلطک‌ها به منظور جلوگیری از حرکت افقی قسمت سمت راست استفاده می‌شود. همان‌طور که در شکل ۷-۳ نشان داده شده، می‌توان با استفاده از تکیه‌گاه‌های لولایی در نقاط لبه‌ی پایینی، مرز زیرین را کاملاً ثابت نمود. متناوباً، لبه‌ی پایینی می‌تواند فقط در مقابل جابه‌جایی‌های قائم مقید باشد. انتخاب یکی از حالات فوق بستگی به شرایط خاک در پایین مدل دارد. عموماً، اگر مرز پایینی مدل بر تکیه‌گاه صخره‌ای قرار داشته باشد، جابه‌جایی کلیه‌ی گره‌های مربوط به آن برابر صفر منظور می‌شوند.

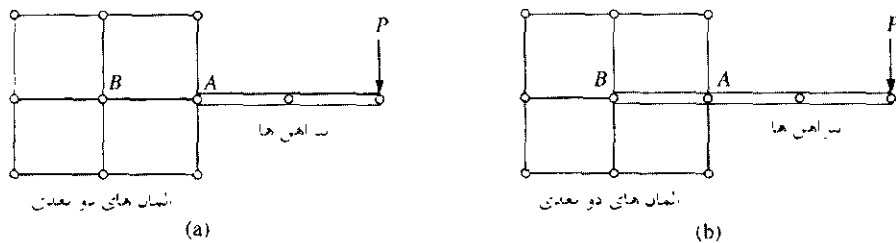
در شکل ۷-۳، مرز سمت چپ مستقیماً زیر مرکز بار قرار گرفته است؛ چرا که از تقارن استفاده شده است. همان‌طور که قبلاً گفته شد، چنان‌چه از تقارن استفاده شود، جابه‌جایی کلیه‌ی نقاط گره‌ای منطبق بر خط تقارن، در امتداد افق، صفر منظور می‌شوند. نهایتاً، مرجع [۱۱] جهت بررسی قواعد بیش‌تری مرتبط با مدل‌سازی از طریق المان‌های مختلف، همانند تیرآهن‌ها، تنش/کرنش صفحه‌ای، و نیز اجسام سه بعدی پیشنهاد می‌شود.

اتصال (ترکیب) انواع مختلف المان‌ها

در بعضی مواقع لازم است تا مدل‌سازی به قسمی صورت پذیرد تا انواع مختلف المان‌ها از قبیل تیرها و المان‌های صفحه‌ای همانند CST‌ها، با هم ادغام می‌شوند. مشکل ادغام این المان‌ها آن است که درجه‌های آزادی در گره‌های هر یک با هم متفاوت است. گره‌های یک تیر می‌توانند در راستای قائم جابه‌جا شده و به طور همزمان بچرخند در حالی که گره‌های المان سطحی فقط مجازند تا در صفحه‌ی خود جابه‌جا شوند. المان تیر می‌تواند گشتاور متمرکزی را در گره خود تحمل نماید در حالی که

المان دو بعدی (CST) قادر به این کار نیست؛ بنابراین، اگر المانی از یک تیر، همانند آنچه که در شکل ۷-۸ (a) نشان داده شده، در گره ای به المانی دو بعدی متصل شود، نتیجه مفصلی لولایی در A خواهد بود. این بدان معنا است که از طریق گره یاد شده، فقط می توان نیرو را از یک المان به المان دیگر انتقال داد. این امر حالتی را به وجود می آورد که به صورت منفرد شدن ماتریس سختی خود را نشان می دهد. این مشکل را می توان با ادامه ی المان تیر در المان دو بعدی، با اضافه نمودن یک یا بیش از یک المان، همان طور که در شکل ۷-۸ (b) در قالب خط AB نشان داده شده، اصلاح نمود. حال می توان گشتاور را از المان تیر به المان صفحه ای انتقال داد. ادامه ی المان یاد شده تضمین می نماید تا درجه های آزادی مرتبط با جابه جایی گره های دو نوع المان یاد شده در A و B، به هم متصل باشند. دوران های گره ای فقط مرتبط با المان تیر AB می باشند. تحت چنین شرایطی، عموماً تنش های محاسبه شده دو المان دو بعدی، در نزدیکی A، از دقت کافی برخوردار نخواهند بود.

برای مثال های بیشتر در زمینه ی اتصال انواع مختلف المان ها، شکل های ۵-۱، ۵-۱۱-۱۰، ۱۰-۱۲، و ۱۶-۳۱ را ملاحظه فرمایید. شکل های یاد شده، نمودارهایی را نشان می دهند که در آنها المان های صفحه ای به المان تیر (شکل های ۵-۱، ۱۰-۱۲، و ۱۶-۳۱) و نیز المان های سه بعدی (آجری) به المان های صفحه ای متصل شده اند (شکل ۱۱-۱۰).



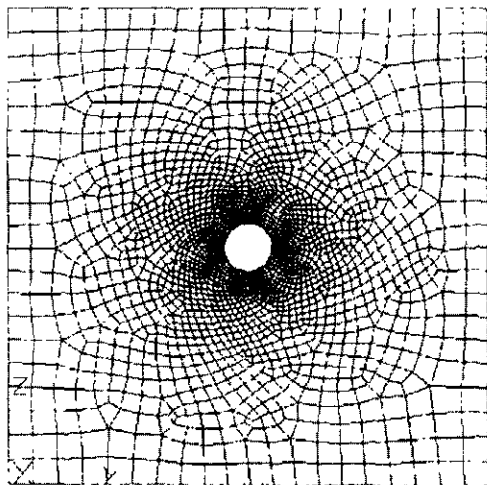
شکل ۷-۸ اتصال المان تیر به المان دو بعدی (a) هیچ گشتاوری انتقال نخواهد یافت (b) گشتاور انتقال خواهد یافت.

بررسی مدل

قبل از محاسبه‌ی نتایج، مدل اجزا بندی شده باید به دقت مورد بررسی قرار گیرد. به طور ایده‌آل، مدل باید توسط تحلیل‌گری بررسی شود که در تهیه‌ی آن نقشی نداشته است، شخصی که به احتمال بیش‌تر، بدون نظر خاصی با مسأله برخورد خواهد نمود. امروزه، پیش پردازنده‌ها با قابلیت‌های گرافیکی منحصر به فرد خود (شکل ۷-۹)، نحوه‌ی تعیین خطاها را نسبتاً آسان می‌سازند، به ویژه، خطاهای آشکاری همانند گره‌های جابه‌جا شده، المان‌های جابه‌جا شده یا از قلم افتاده، و یا شرایط تکیه‌گاهی مرزی. پیش پردازنده‌ها دارای قابلیت‌های جالبی از قبیل رنگ‌ها، کوچک نمودن شکل‌ها، نماهای مختلف، برش مقاطع، نماهای باز شده، و حذف خطوط نقطه چین، به منظور کشف بهتر خطاها می‌باشند.

بیش‌تر کدهای تجاری، حاوی اختارهایی در مورد انطباق المان‌های اعوجاج یافته بر خود، و بررسی تکیه‌گاه‌های کافی می‌باشند. در هر حال، به منظور دستیابی به

تحلیلی موفق، کاربر باید المان مناسب، محل مناسب نیروها و تکیه‌گاه‌ها، واحد مناسب و غیره را انتخاب نماید.

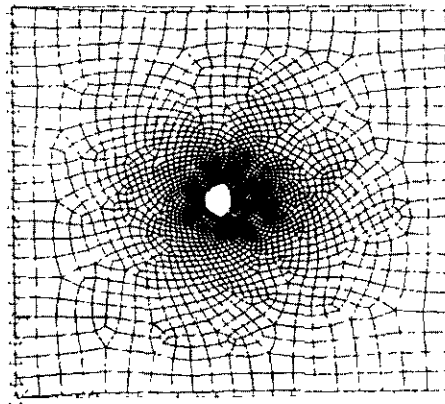


شکل ۷-۹ ورق فولادی (به طول ۲۰ in، عرض ۱ in، ضخامت ۱ in، و سوراخی به قطر ۱ in) که توسط پیش پردازنده‌ای [۱۵] به روش خودکار المان بندی شده است

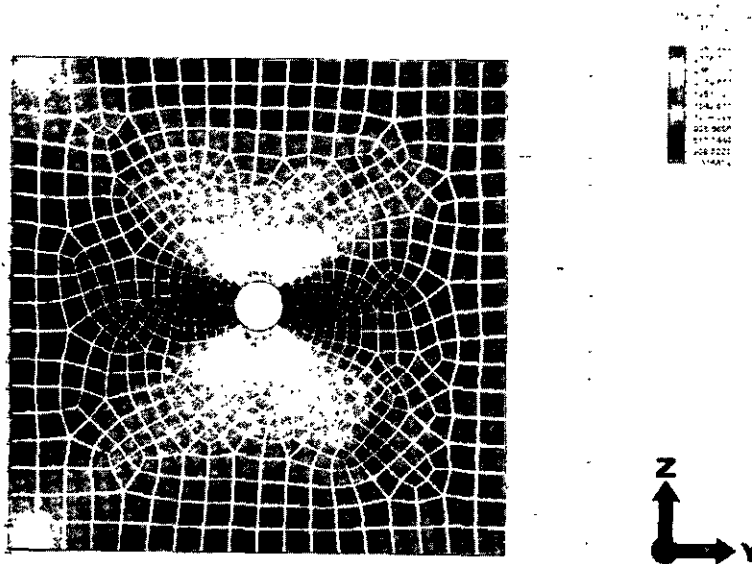
بررسی نتایج و نمونه ای از نتایج یک پس پردازنده

صحت نتایج به دست آمده را باید از بررسی جابه‌جایی صفر گره‌های منطبق بر تکیه‌گاه‌ها و مقایسه‌ی آن‌ها با شرایط قید شده کنترل نمود. در صورت وجود تقارن، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها، باید این تقارن را در خود نشان دهند. نتایج حاصل از روش اجزای محدود باید با نتایج حاصل از روش‌های دیگر مقایسه شود حتی اگر روش‌های یاد شده خام‌تر از روش اجزای محدود باشند. برای مثال، از فرمول‌های تقریبی روش مقاومت مصالح، نتایج آزمایشگاهی، و نتایج حاصل از تحلیل عددی مسائل ساده‌تر اما مشابه با مسأله‌ی مورد نظر، باید به منظور مقایسه‌ی نتایج استفاده نمود، به ویژه اگر هیچ

ایده‌ای از مقدار جواب‌ها در ذهن نباشد. به خاطر داشته باشید که از کلیه‌ی نتایج با احتیاط یاد کنید؛ چرا که ممکن است خطاهای غیر منتظره‌ای در کتب درسی، جواب‌های مندرج در کتب مرجع، یا نتایج آزمایشگاهی وجود داشته باشد. در خاتمه، شاید تحلیل‌گر نیازمند آن باشد تا به همان میزان وقت صرف اجرا، بررسی، و تحلیل نتایج نماید که در تهیه‌ی اطلاعات اولیه صرف کرده است. نهایتاً، تعدادی از نتایج حاصل از مسأله‌ی تنش صفحه‌ای شکل ۷-۹، که از پیش پردازنده‌های مربوطه حاصل شده است ارائه می‌شوند. (شکل‌های ۷-۱۰ و ۷-۱۱). مثال‌های دیگری همراه با نتایج آن‌ها در بخش ۷-۷ آورده شده‌اند.



شکل ۷-۱۰ ورق سوراخ داری که نمایانگر انطباق شکل تغییر مکان یافته‌ی ورق بر شکل اولیه‌ی آن است. ورق در لبه‌ی سمت چپ گیردار بوده و تحت تأثیر تنش کششی 1000 psi در امتداد لبه‌ی سمت راست قرار گرفته است. حداکثر جابه‌جایی افقی برابر $7.046 \times 10^{-6} \text{ in.}$ در گوشه‌ی لبه‌ی سمت راست است.



شکل ۷-۱۱ طیف حداکثر تنش اصلی در ورق سوراخ دار (شکل کوچک شده است). حداکثر تنش‌های اصلی ۳۰۸۵ psi، که دلالت بر تمرکز تنش ۳/۰۸ می نمایند، در بالا و پایین سوراخ رخ می دهند. تنش‌ها از معدل گیری مقادیر گره‌ای (که یکنواخت سازی نامیده می شود) به دست آمده‌اند.

۷-۲ تعادل و هم سازگاری در نتایج حاصل از روش اجزای محدود

در تحلیل تنش، حل تقریبی مسأله‌ای که از روش اجزای محدود و با استفاده از میدان‌های جابه‌جایی فرضی حاصل می‌شود، عموماً کلیه‌ی شرایط تعادل و هم سازگاری را ارضا ننموده، در حالی که در جوابی که بر اساس تئوری الاستیسیته حاصل می‌شود

شرایط یاد شده ارضا خواهند شد. به هر حال، باید به خاطر داشت که تعداد حل‌های واقعی نسبتاً انگشت شمارند؛ بنابراین، روش اجزای محدود روشی کاربردی، اما تقریبی، در حل عددی مسائل است. باید مزایای روش اجزای محدود را که در فصل ۱ و مکرراً در خلال این کتاب آورده شده است به خاطر داشت.

حال بعضی از تقریب‌ها را که ذاتاً مختص جواب‌های حاصل از این روش است تشریح می‌کنیم.

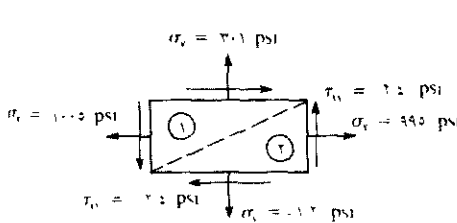
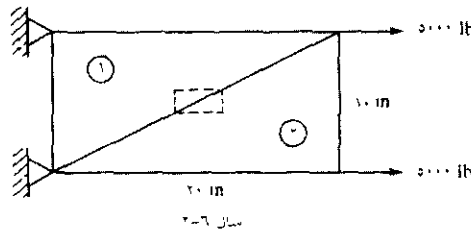
۱. تعادل نیروها و گشتاورها ارضا شده است. دلیل صحت این امر آن است که رابطه‌ی $F = Kd$ که از حل آن d به قسمی حاصل می‌شود که جمع نیروها و گشتاورها در هر گره برابر صفر می‌شوند، خود بر پایه‌ی تعادل استوار است. تعادل در کل سازه به آن دلیل ارضا می‌شود که عکس‌العمل‌های سازه در نیروهای اصلی و نهایتاً در معادلات تعادل گره‌ای منظور شده‌اند. مسائل متعددی، به ویژه مسائلی در زمینه‌ی تحلیل خرابی و قاب به ترتیب در فصل‌های ۳ و ۵، تعادل در گره‌ها و کل سازه را نشان داده‌اند.

۲. تعادل در هر المان همیشه ارضا شده نیست. با این وصف، در میله‌ی کرنش ثابت فصل ۳، و مثلث کرنش ثابت فصل ۶، تعادل در المان ارضا می‌شود. همچنین نشان داده شده است که تابع درجه سه جابه‌جایی، معادله‌ی دیفرانسیلی تعادل در تیرآهن فصل ۴ را ارضا نموده و در نتیجه، تعادل نیرو و گشتاور در المان ارضا می‌شود. به هر حال، المان‌هایی از قبیل المان مثلثی شکل کرنش ثابت فصل ۸، المان متقارن محور فصل ۹، و المان مستطیل شکل فصل ۱۰، عموماً به طور تقریب معادلات تعادل در المان را ارضا می‌کنند.

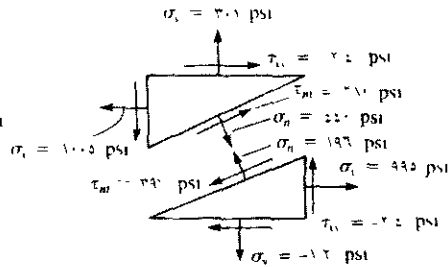
۳. عموماً، تعادل بین المان‌ها ارضا شده نیست. المان کوچکی که جزیی از دو المان مجاور را در بر دارد معمولاً در حال تعادل نیست (شکل ۷-۱۲). در المان‌های میله‌ای، از قبیل آن‌هایی که در تحلیل خرپا و قاب استفاده شد، همان‌طور که در مثال‌های فصل‌های ۳ الی ۵ نشان داده شده است، تعادل بین المانی وجود دارد. علی‌رغم این مطلب، در المان‌های دو و سه بعدی، تعادل بین المان‌ها ارضا شده نیست. برای مثال، نتایج مثال ۶-۲ حاکی از آن است که تنش عمودی در امتداد ضلع قطری بین دو المان، از هر یک از دو المان متفاوت است. همچنین، درشت‌تر شدن المان بندی، سبب می‌شود تا عدم وجود تعادل بین المان‌ها، بیش از پیش خود را نشان دهد. تنش‌های عمودی و برشی بر لبه‌ی آزاد عموماً برابر صفر نیستند اگرچه تئوری عدد صفر را برای آن‌ها پیش بینی می‌کند. مجدداً، مثال ۶-۲، این رفتار را که در آن σ_1 و τ_{11} بر لبه‌ی آزاد برابر صفر نیستند نشان می‌دهد. با این وصف، با افزایش تعداد المان‌ها (کوچک‌تر شدن آن‌ها)، مقادیر σ_1 و τ_{11} بر لبه‌ی آزاد به سمت صفر میل می‌نمایند.

۴. با موقعی که میدان جابه‌جایی در المان پیوسته باشد، هم سازگاری نیز در المان ارضا شده است. لذا هریک از المان‌ها به نهایه‌ی نکه تکه نخواهند شد.

۵. در فرمول‌بندی معادلات المان، هم سازگاری در گره‌ها به کار گرفته شده است؛ بنابراین، المان‌ها در گره‌های مشترک به هم متصل باقی می‌مانند. متسایها، از آنجا که شرایط مرزی در گره‌های تکیه‌گاهی بکار گرفته شده‌اند، لذا سازه به تکیه‌گاه نیز متصل باقی می‌ماند.



تین در امتداد محور عمودی است
یعنی امتداد محور عمودی است



تین در امتداد محور عمودی است
یعنی امتداد محور عمودی است

تین در امتداد محور عمودی است
یعنی امتداد محور عمودی است

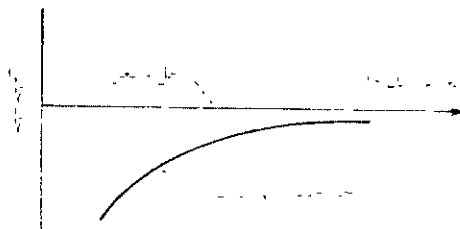
شکل ۷-۱۲ مسأله ۶-۲، نمایانگر نقض تعادل در المانی کوچک و در امتداد ضلع قطری بین دو المان (درشت‌تر بودن المان بندی، نقض تعادل را قوت می‌بخشد)

۶. ممکن است هم سازگاری در امتداد مرز بین دو المان ارضا شده یا نشده باشند. در المان‌های خطی از قبیل میله‌ها و بیر آهن‌ها، مرز بین المان‌ها صرفاً گره‌ها است؛ بنابراین عبارت مندرج در بند ۵ به این المان‌ها قابل اعمال است. المان کرنش ثابت مثلثی شکل فصل ۶ و المان مستطیل شکل فصل ۱۰، پس از تغییر مکان، مستقیم باقی می‌مانند؛ بنابراین، هم سازگاری بین المانی، در اس المان‌ها وجود خواهد

داشت؛ به عبارتی دیگر، این دو المان در امتداد مرز خود بدون بروز هیچ‌گونه درز، انطباق بر هم یا ناپیوستگی، تغییر مکان خواهند یافت. المان‌های ناسازگار، یا المان‌هایی که امکان وجود درز یا انطباق بین آن‌ها وجود دارد می‌توانند قابل قبول و حتی مورد دلخواه نیز باشند. در بعضی مواقع نشان داده شده است که فرمول‌بندی المان‌های ناسازگار سریع‌تر به سمت جواب‌های حقیقی همگرا می‌شوند [۱]. (برای بحث بیشتر در این مورد به مراجع [۷] و [۸] مراجعه فرمایید.

Δ ۳-۷ همگرایی در حل Δ

در بخش ۳-۲، راهکارهایی به منظور تعیین توابع جابه‌جایی اصطلاحاً کامل و هم سازگار، برای المان میله‌ای شکل ارائه شد. چهار راهکار یاد شده عموماً قابل اعمال بوده و نشان داده شده است که ارضای آن‌ها همگرایی بکنواخت حل مسأله را به دنبال خواهد داشت [۹]. مضافاً، نشان داده شده است [۱۰] که چنین توابع کامل و هم سازگاری که در فرمول‌بندی جابه‌جایی در روش اجزای محدود استفاده می‌شوند، همان‌طور که در شکل ۷-۱۳ نشان داده شده، منجر به حد بالای ماتریس سختی، و در نتیجه حد ناسازگاری جابه‌جایی در یک مسأله می‌شوند.



شکل ۷-۱۳ همگرایی جواب‌ها در اجزای محدود بر اساس تابع هم سازگاری برای

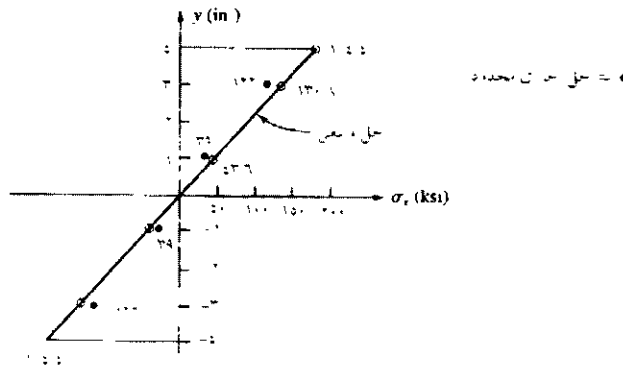
بنابراین، با کاهش اندازه‌ی المان‌ها- یا به عبارتی افزایش تعداد آن‌ها- چنان‌چه از توابع جابه‌جایی کامل استفاده شود همگرایی در جواب تضمین خواهد شد. مثال‌هایی از این همگرایی در مراجع [۱] و [۱۱] و نیز در جدول ۷-۲ برای تیرآهنی که مطابق شکل ۷-۱ (a) بارگذاری شده نشان داده شده است. کلیه‌ی المان‌های مندرج در این جدول مسنطیل شکلند. نتایج مندرج در جدول ۷-۲، اثر تعداد المان‌ها (یا تعداد درجه‌های آزادی که توسط تعداد گره‌ها اندازه گرفته می‌شود) را بر همگرایی جواب‌ها به سمت جوابی مشترک، در این جا جواب واقعی، نشان می‌دهد. در این جا، مجدداً اثر نسبت طول به عرض مشاهده می‌شود. با افزایش نسبت طول به عرض، حتی در حضور درجه‌های آزادی بالاتر، همان‌طور که از مقایسه‌ی موارد ۲ و ۳ مشهود است، جواب‌ها بدتر می‌شوند.

جدول ۷-۲ مقایسه‌ی نتایج حاصل از المان‌های مختلف

مورد	تعداد گره‌ها	تعداد المان‌ها	نسبت طول به عرض	جابه‌جایی قائم
				v (in.) نقطه‌ی A
۱	۲۱	۱۲	۲	-۰٫۷۴۰
۲	۳۹	۲۴	۱	-۰٫۹۸۰
۳	۴۵	۳۲	۳	-۰٫۸۷۵
۴	۸۵	۶۴	۱۵	-۱٫۰۷۸
۵	۱۰۵	۸۰	۱۲	-۱٫۱۰۰
حل واقعی [۲]				-۱٫۱۵۲

۷-۴ تفسیر مقادیر تنش

در این کتاب، کمیت‌های اولیه‌ای که در خلال فرمول‌بندی ماتریس سختی یا جابه‌جایی، از روش المان محدود مد نظر قرار می‌گیرند، جابه‌جایی گره‌های بین‌المانی کل مجموعه است. سپس، کمیت‌های ثانویه، از قبیل تنش‌ها و کرنش‌های المان، با استفاده از روابط $\{\epsilon\} = [B]\{d\}$ و $\{\sigma\} = [D][B]\{d\}$ حاصل می‌شوند. در المان‌هایی که از مدل جابه‌جایی خطی استفاده می‌شود، از قبیل المان‌های میله‌ای و مثلثی شکل با کرنش ثابت، $[B]$ ثابت بوده و از آنجا که $[D]$ نیز ثابت فرض شده است، تنش در المان ثابت خواهد بود. تحت چنین شرایطی، عموماً رسم است تا اندازه‌ی قابل قبول تنش در مرکز المان محاسبه شود.



شکل ۷-۴ مقایسه‌ی مقادیر تنش خمشی حاصل از روش اجزای محدود و حل واقعی بر سطح مقطعی از یک تیر آهن

در هر حال، همان‌طور که در بخش ۳-۱۱ در عضوی تحت کشش محوری قرار دارد نشان داده شد، تنش‌ها با همان دقت جابه‌جایی‌ها پیش‌بینی نمی‌شوند (به

شکل‌های ۳-۳۲ و ۳-۳۳ توجه شود). برای مثال، باید توجه داشت که از المانی با تنش یا کرنش ثابت، در مدل سازی تیر آهن مندرج در شکل ۷-۱ استفاده شده است؛ بنابراین تنش در هر المان ثابت است. شکل ۷-۱۴ تنش‌های ناشی از خمش را در المان‌های منطبق بر سطحی که در مجاورت دیوار قرار داشته و اندازه‌ی آن‌ها از مرکز سطح به سمت بیرون محاسبه شده‌اند، برای چهارمین مورد مندرج در جدول ۷-۲، از دو روش اجزای محدود و فرضیه‌ی تیرها، با هم مقایسه می‌کند. مدل اجزای محدود یاد شده دارای چهار المان در امتداد سطح مقطع تیر بوده و لذا فقط چهار مقدار تنش برای آن وجود دارد. مجدداً به نظر می‌رسد بهترین تقریب تنش در مرکز هر المان رخ می‌دهد؛ چرا که مشتق جابه‌جایی به بهترین وجه بین گره‌ها و نه در گره‌ها حاصل می‌شود.

در المان‌هایی با مرتبه‌ی بالاتر، همانند المان کرنش ثابت فصل ۸، $[B]$ ، و در نتیجه تنش‌ها، تابعی از مختصات می‌باشند. در چنین شرایطی، عموماً رسم است که تنش‌ها در مرکز سطح المان محاسبه می‌شوند.

در بعضی مواقع، روش جای‌گزین آن است که از مقدار تنش متوسط (احتمالاً مقدار وزنی) محاسبه شده در هر گره استفاده می‌شود. چنین روش متوسطی، بر اساس محاسبه‌ی تنش‌ها در نقاط گوس درون هر المان (در فصل ۱۰ تشریح شده است) و سپس تعمیم آن‌ها به گره‌های مورد نظر آن المان، بر اساس تابع شکل مربوطه، استوار است. پس از آن، در کلیه‌ی المان‌ها تنش‌های یاد شده در گره مشترکی معدل گیری شده و معرف تنش در آن گره می‌شوند. این روش معدل گیری، یکنواخت سازی نامیده می‌شود. شکل ۷-۱۱ معرف طیف تغییرات ماکزیمم تنش اصلی (به صورت سیاه و سفید) است که از یکنواخت سازی حاصل شده است.

یکنواخت سازی سبب می شود تا منحنی به دست آمده چشم نواز و پیوسته بوده و مشکلات جدی در مدل و نتایج آن مشهود نباشند. شما پیوسته باید طیف های غیر یکنواخت شده را بررسی نمایید. ناپیوستگی های جدی در طیف ها، در نواحی غیر یکنواخت شده، دلالت بر حضور مشکل در مدل سازی نموده و عموماً نیاز به پالایش در نواحی مشکوک دارند.

اگر ناپیوستگی ها در نمودار یکنواخت شده ای قابل اغماض باشند و یا در نواحی کم اهمیت رخ دهند در آن صورت می توان با ضریب اعتماد بالایی از نمودار یکنواخت شده ی نتایج استفاده نمود. به هر حال، استثناهایی وجود دارد که به ازای آن یکنواخت سازی منجر به نتایج نادرست می شود. برای مثال، چنانچه ضخامت یا سختی بین المان های مجاور به میزان قابل توجهی تغییر کند طبیعتاً تنش ها از یک المان به المان مجاور عوض خواهند شد. یکنواخت سازی عموماً نتایج واقعی را مخفی خواهد نمود. همچنین، در مسائلی که دو جسم با فشار و از طریق انبساط حرارتی یکی از استوانه ها بر استوانه ی کوچک تر با فشار جا زده می شوند، تنش محیطی بین دو استوانه ی درگیر، عموماً با هم فرق خواهند داشت [۱۶].

نتایج دیگری از چند برنامه ی رایانه ای از قبیل مدل های تغییر مکان یافته همراه با منحنی طیف تنش ها، و نمودار تنش های یکنواخت شده، در بخش ۷-۷ نشان داده شده اند. تنش های رسم شده می توانند از نوع تنش فون مایسز (از این تنش در فرضیه ی ماکزیمم انرژی اعوجاج جهت پیش بینی گسیختگی مواد نرمی که تحت بارگذاری استاتیکی قرار می گیرند استفاده می شود)، ترسکا (که از آن در فرضیه ی ماکزیمم تنش برشی یا ترسکا، به منظور پیش بینی گسیختگی مواد نرم تحت بارگذاری استاتیکی استفاده می شود) [۱۴، ۱۶]، و یا حداکثر و حداقل تنش های اصلی باشند.



۵-۷ خلاصه سازی استاتیکی

حال مفهوم خلاصه سازی استاتیکی را بررسی می‌کنیم، چرا که از این مفهوم در استخراج ماتریس سختی المان چهارضلعی در بسیاری از برنامه‌های رایانه‌ای استفاده می‌شود.

المان چهار ضلعی پایه‌ای را با گره‌های ۱-۴ که در شکل ۷-۱۵ نشان داده شده در نظر می‌گیریم. گره فرضی ۵ را موقتاً در محل تلاقی دو قطر چهارضلعی در نظر گرفته تا چهار مثلث حاصل شود. سپس از انطباق ماتریس چهار مثلث، ماتریس سختی چهارضلعی حاصل می‌شود، در جایی که، درجه‌های آزادی گره داخلی فرضی ۵ بیرون کشیده شده تا به هیچ وجه در معادلات نهایی ظاهر نشوند. لذا، فقط درجه‌های آزادی مرتبط با ۴ گره واقعی که در گوشه‌ها قرار دارند در معادلات ظاهر می‌شوند.

روش خلاصه سازی استاتیکی را با تقسیم معادلات تعادل به شرح زیر شروع

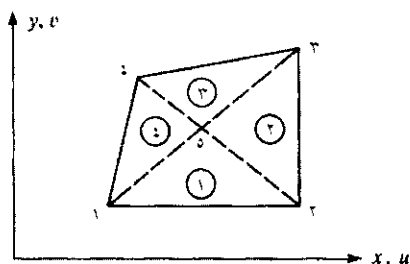
می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{d}_a \\ \underline{d}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_a \\ \underline{F}_i \end{Bmatrix} \quad (1-5-7)$$

در جایی که \underline{d}_i دلالت بر بردار جابه‌جایی داخلی، مرتبط با گره فرضی داخلی (گره ۵ در شکل ۷-۱۵)، \underline{F}_i دلالت بر بردار نیروها در گره داخلی، و \underline{d}_a و \underline{F}_a بترتیب دلالت بر درجه‌های آزادی گره‌ها و نیروها در گره‌های واقعی می‌نمایند از بار بویسی معادله‌ی (۱-۵-۷) داریم:

$$[k_{11}]\{d_a\} + [k_{12}]\{d_i\} = \{F_a\} \quad (2-5-7)$$

$$[k_{21}]\{d_a\} + [k_{22}]\{d_i\} = \{F_i\} \quad (3-5-7)$$



شکل ۷-۱۵ المان چهارضلعی با گره‌های داخلی

از حل معادله‌ی (۷-۵-۳) برای $\{d_i\}$ داریم:

$$\{d_i\} = -[k_{rr}]^{-1}[k_{ri}]\{d_a\} + [k_{rr}]^{-1}\{F_i\} \quad (۷-۵-۴)$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۷-۵-۴) در معادله‌ی (۷-۵-۲)، معادله‌ی خلاصه شده‌ی تعادل حاصل می‌شود.

$$[k_c]\{d_a\} = \{F_c\} \quad (۷-۵-۵)$$

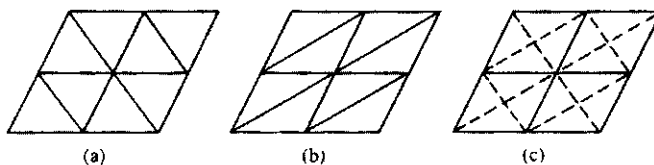
در جایی‌که

$$[k_c] = [k_{ii}] - [k_{ir}][k_{rr}]^{-1}[k_{ri}] \quad (۷-۵-۶)$$

$$\{F_c\} = \{F_a\} - [k_{ir}][k_{rr}]^{-1}\{F_i\} \quad (۷-۵-۷)$$

و $[k_c]$ و $\{F_c\}$ به ترتیب ماتریس خلاصه شده‌ی سختی و ماتریس خلاصه شده‌ی نیرو نامیده می‌شوند. معادله‌ی (۷-۵-۵) را می‌توان به منظور تعیین جابه‌جایی گره‌های گوشه‌ای به طریق معمول از حل سیستم معادلات جبری به طور همزمان حل نمود. از هر یک از دو المان مثلثی شکل کرنش ثابت (CST) و چهار ضلعی کرنش ثابت در تحلیل مسائلی از نوع تنش/کرنش صفحه‌ای استفاده می‌شود. المان چهار ضلعی، دارای چهار المان CST است. از مزایای این نوع المان آن است که حل به دست آمده کم‌تر تابع نحوه‌ی اربویی بودن تقسیم بندی شبکه‌ی مورد نظری است که نمونه‌ای از آن

در شکل ۷-۱۶ نشان داده شده است. در اینجا اریب به معنی تمایل اثر بخشی سختی هر المان در مدل است که با توجه به نحوه تقسیم بندی آن ایجاد می‌شود. چرا که همان‌طور که از معادله (۶-۲-۵۲) مشهود است ماتریس سختی هر المان تابعی از مختصات گره‌ای است. شبکه بندی مندرج در شکل ۷-۱۶(c) که در آن نحوه المان بندی به قسمی است که چهار ضلعی خود از چهار المان CST تشکیل شده، در مقایسه با شکل‌های ۷-۱۶(a) و ۷-۱۶(b) دارای خاصیت اریبی بودن کم‌تری است. المان بندی شکل ۷-۱۶(b) از المان بندی ۷-۱۶(a) بدتر است؛ زیرا استفاده از المان دراز و باریک مثلثی شکل، ماتریس سختی آن را در راستای جهت دراز و باریک مثلث تقویت می‌بخشد.



شکل ۷-۱۶ اثرات نامتوازن در مدل سازی اجزای محدود

همان‌طور که در شکل ۷-۱۵ نشان داده شد، ماتریس سختی المان چهارضلعی از ماتریس سختی چهار المان تشکیل شده و 8×8 است. ماتریس سختی ابتدا بر اساس روش مستقیم سختی معمول حاصل می‌شود. سپس، با اعمال خلاصه سازی استاتیکی که در معادلات $(7-5-7)-(1-5-7)$ آورده شد درجه‌های آزادی مرتبط با گره ۵ حذف می‌شوند.

ماتریس سختی نمونه‌ای از یک المان مثلثی شکل (که در شکل ۷-۱۵ المان ۱ نامیده شده)، با گره‌های ۱، ۲، و ۵، به صورت کلی زیر داده شده است.

$$[k^{(i)}] = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11}^{(i)} & \underline{k}_{1r}^{(i)} & \underline{k}_{1o}^{(i)} \\ \underline{k}_{r1}^{(i)} & \underline{k}_{rr}^{(i)} & \underline{k}_{ro}^{(i)} \\ \underline{k}_{o1}^{(i)} & \underline{k}_{or}^{(i)} & \underline{k}_{oo}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (۸-۵-۷)$$

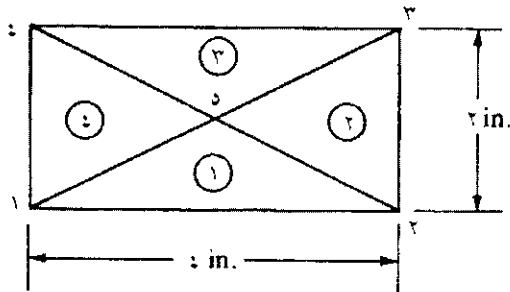
در جایی که بالانویس های درون پرانتز دلالت بر شماره ی المان، و مرتبه ی هر یک از زیر ماتریس های $[k_{ij}^{(i)}]$ 2×2 است. ماتریس سختی المان چهارضلعی، با استفاده از معادله ی (۸-۵-۷)، همراه با ماتریس های سختی مشابه برای المان های ۲ الی ۴ که در شکل ۷-۱۵ آورده شده به صورت زیر است (قبل از اعمال خلاصه سازی استاتیکی):

$$[k] = \begin{array}{c} (u_1, v_1) \quad (u_r, v_r) \quad (u_o, v_o) \quad (u_i, v_i) \quad (u_e, v_e) \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} \begin{array}{c} [k_{11}^{(i)}] \\ + \\ [k_{11}^{(i)}] \end{array} & [k_{1r}^{(i)}] & [.] & [k_{1i}^{(i)}] & [k_{1o}^{(i)}] + [k_{1e}^{(i)}] \\ \begin{array}{c} [k_{11}^{(i)}] \\ + \\ [k_{11}^{(i)}] \end{array} & [k_{rr}^{(i)}] & [.] & [k_{ri}^{(i)}] & [k_{ro}^{(i)}] + [k_{re}^{(i)}] \\ [k_{r1}^{(i)}] & [k_{rr}^{(i)}] & [.] & [k_{ri}^{(i)}] & [k_{ro}^{(i)}] + [k_{re}^{(i)}] \\ [k_{r1}^{(i)}] & [k_{rr}^{(i)}] & [.] & [k_{ri}^{(i)}] & [k_{ro}^{(i)}] + [k_{re}^{(i)}] \\ [.] & [k_{rr}^{(i)}] & [k_{rr}^{(r)}] & [k_{ri}^{(r)}] & [k_{ro}^{(r)}] + [k_{re}^{(r)}] \\ [k_{o1}^{(i)}] & [.] & [k_{or}^{(i)}] & [k_{oi}^{(i)}] & [k_{oo}^{(i)}] + [k_{oe}^{(i)}] \\ [k_{o1}^{(i)}] & [.] & [k_{or}^{(i)}] & [k_{oi}^{(i)}] & [k_{oo}^{(i)}] + [k_{oe}^{(i)}] \\ \hline [k_{o1}^{(i)}] & [k_{or}^{(i)}] & [k_{or}^{(r)}] & [k_{oe}^{(r)}] & ([k_{oo}^{(i)}] + [k_{oo}^{(r)}]) \\ + & + & + & + & + \\ [k_{o1}^{(i)}] & [k_{or}^{(r)}] & [k_{or}^{(r)}] & [k_{oe}^{(i)}] & ([k_{oo}^{(r)}] + [k_{oo}^{(i)}]) \end{array} \right. \quad (۹-۵-۷)$$

در جایی که مرتبه‌ی درجه‌های آزادی، در بالای هر یک از ستون‌های ماتریس سختی آورده شده و روش تقسیم بندی در خلاصه سازی استاتیکی، توسط خطوط نقطه چین نشان داده شده است. قبل از اعمال خلاصه سازی استاتیکی، مرتبه‌ی ماتریس سختی 10×10 است.

مثال ۱-۷

با استفاده از ابعاد چهار ضلعی مندرج در شکل ۱۷-۷، با گره داخلی ۵، کاربرد خلاصه سازی استاتیکی را نشان دهید.



شکل ۱۷-۷ المان چهار ضلعی با گره داخلی

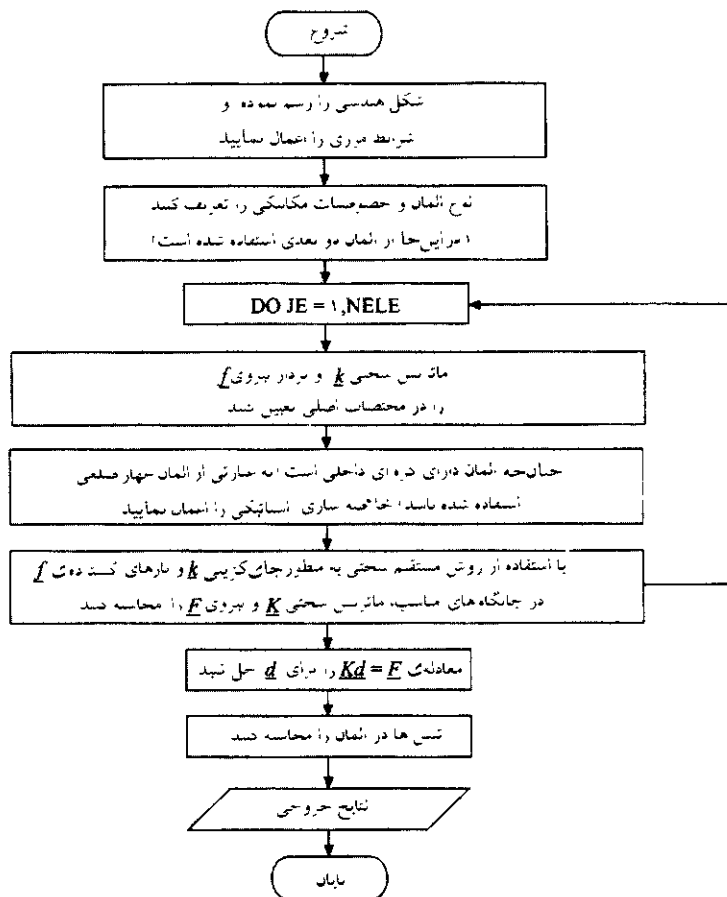
لازم به یادآوری است که ماتریس سختی اولیه‌ی المان چهار ضلعی 10×10 است؛ اما پس از حذف درجه‌های آزادی (u_6, v_6) مرتبط با گره ۵، به 8×8 تنزل می‌یابد. با استفاده از معادله‌ی (۳-۴-۶) برای ماتریس سختی CST در حالت کرنش ثابت، داریم:

$$[k] = \frac{E}{\epsilon/16} \begin{bmatrix} 3/0 & 2/0 & 0/1 & 0/2 & 0/0 & 0/0 & -0/1 & -0/2 & -3/0 & -2/0 \\ & 6/0 & -0/2 & 2/6 & 0/0 & 0/0 & 0/2 & -2/6 & -2/0 & -6/0 \\ & & 3/0 & -2/0 & -0/1 & 0/2 & 0/0 & 0/0 & -3/0 & 2/0 \\ & & & & -0/2 & -2/6 & 0/0 & 0/0 & 2/0 & -6/0 \\ & & & & 3/0 & 2/0 & 0/1 & 0/2 & -3/0 & -2/0 \\ & & & & & 6/0 & -0/2 & 2/6 & -2/0 & -6/0 \\ & & & & & & 3/0 & -2/0 & -3/0 & 2/0 \\ \text{متقارن} & & & & & & & 6/0 & 2/0 & -6/0 \\ \hline & & & & & & & & 12/0 & 0/0 \\ & & & & & & & & & 24/0 \end{bmatrix} \quad (12-5-7)$$

پس از تقسیم بندی معادله‌ی (۱۲-۵-۷)، ضمن استفاده از معادله‌ی (۶-۵-۷)، ماتریس سختی خلاصه شده برابر است با:

$$[k_1] = \frac{E}{\epsilon/16} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 2/0.8 & 1/0.0 & -0/2.8 & 0/3.0 & -0/9.2 & -1/0.0 & -0/6.8 & -0/2.0 \\ & 4/1.7 & -0/2.0 & 1/4.3 & -1/0.0 & -1/8.3 & 0/2.0 & -3/7.7 \\ & & 2/0.8 & -1/0.0 & -0/6.8 & 0/2.0 & -0/9.2 & 1/0.0 \\ & & & 4/1.7 & -0/2.0 & -3/7.7 & 1/0.0 & -1/8.3 \\ & & & & 2/0.8 & 1/0.0 & -0/4.8 & 0/2.0 \\ \text{متقارن} & & & & & 4/1.7 & -0/2.0 & 1/4.3 \\ & & & & & & 2/0.8 & -1/0.0 \\ & & & & & & & 4/1.7 \end{bmatrix} \quad (13-5-7)$$

۶-۷ نمودار گردش کار نحوه‌ی حل مسائلی از نوع تنش/ کرنش صفحه‌ای در شکل ۷-۱۸، نمودار گردش کار نحوه‌ی حل مسائلی از نوع تنش و کرنش صفحه‌ای بر اساس فرآیند اجزای محدود، که بر اساس تئوری قید شده در فصل ۶ استوار است، ارائه می‌شود.



شکل ۷-۱۸ نمودار گردش کار فرآیند اجزای محدود در تنش/کرنش صفحه‌ای

۷-۷ حل گام به گام به کمک برنامه‌ی رایانه‌ای، دیگر مدل‌ها

و نتایج حاصل از مسائلی از نوع تنش/کرنش صفحه‌ای

در این بخش، مراحل حل رایانه‌ای مسأله‌ای را که شامل تنش صفحه‌ای است همراه با نتایج حاصل از مسائلی را که در قالب تنش/کرنش صفحه‌ای، به کمک برنامه‌ای رایانه‌ای [۱۲] حل شده‌اند، ارائه می‌کنیم. این نتایج معرف انواع مسائل سختی است که می‌توان به کمک برنامه‌های چند منظوره‌ی رایانه‌ای آن‌ها را حل نمود.

یکی از مسائلی که حل مرحله به مرحله‌ی رایانه‌ای آن آورده شده، آچار دو سر مندرج در شکل ۷-۱۹(a) است. از مراحل زیر به منظور تعیین تنش‌ها در آچار استفاده شده است.

۱. اولین مرحله، رسم شکل آچار به کمک برنامه‌ی رایانه‌ای استاندارد شده‌ای است که مطابق شکل ۷-۱۹(a) انجام شده است. ابعاد دقیق آچار با توجه به شکل VP-۳۵ انتخاب شده‌اند؛ در حالی که ارتفاع سطح مقطع آچار برابر 2.70 cm ، طول آن برابر 14 cm و طول هر ضلع شش‌ضلعی وسط برابر 9 mm و طول هر ضلع شش‌ضلعی‌هایی که در انتها قرار دارند برابر 1.50 cm است.

۲. دومین مرحله، استفاده از یک مولد ایجاد شبکه‌ی دو بعدی به منظور المان بندی مدل، همانند شکل ۱۷-۱۹(b) است.

۳. مرحله‌ی سوم اعمال شرایط مرزی به گره‌های مربوطه به کمک دستورات لازم مرتبط با این موضوع است. اعمال این مرحله توسط علامت کوچک @ در گره‌های داخلی شش ضلعی سمت چپ، مطابق شکل ۷-۱۹(c)، نشان داده شده است. علامت @ دلالت بر ثابت بودن کامل گره‌ها می‌نماید. این بدان معنی است

که گره‌های مربوطه، نمی‌توانند تحت هیچ شرایطی در راستای λ و t در صفحه‌ی آچار جابه‌جا شوند.

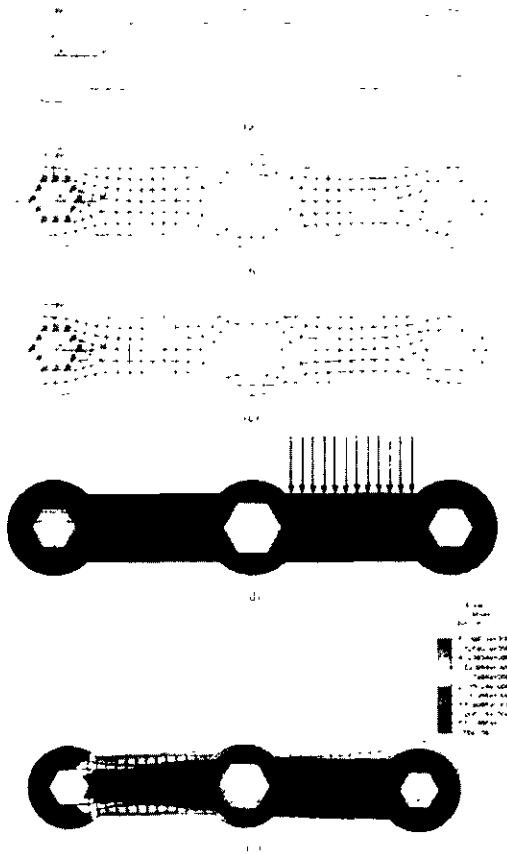
۴. در مرحله‌ی چهارم نیاز است تا سطحی انتخاب شود که بارگذاری گسترده بر آن اعمال شده و اندازه‌ی آن تعیین شود. در این‌جا سطح بالایی بین سوراخ شش ضلعی وسطی و سوراخ شش ضلعی انتهای سمت راست انتخاب شده و نیروی سطحی 100 N/cm^2 ، مطابق شکل ۷-۱۹(d)، بر آن اعمال می‌شود. در برنامه‌ی رایانه‌ای، این سطح پس از انتخاب توسط کاربر، قرمز می‌شود (شکل ۷-۱۹(c)).

۵. در مرحله‌ی پنجم خصوصیات ماده را انتخاب می‌کنیم. در این‌جا از فولاد ASTM A-۵۱۴ استفاده شده است به دلیل آنکه در اثر سخت شدن و حرارت دیدن ماده‌ی یاد شده، حد تسلیم آن بالا بوده و این امکان فراهم می‌شود تا ضخامت آچار حداقل ممکن باشد.

۶. در مرحله‌ی ششم، نوع المان در تحلیل مورد نظر انتخاب می‌شود. در این‌جا از المان تنش صفحه‌ای استفاده می‌شود؛ زیرا نوع رفتاری که در تنش صفحه‌ای ایجاد می‌شود به نحو نسبتاً مطلوبی توسط این المان تقریب زده می‌شود. در تحلیل تنش صفحه‌ای، نیاز است تا ضخامت معلوم باشد. به عنوان حدس اولیه، از ضخامت 1 cm استفاده می‌شود. به نظر می‌رسد تا ضخامت یاد شده متناسب با ابعاد دیگر آچار باشد.

۷. مرحله‌ی هفتم بررسی اختیاری ابعاد مدل است. اگر تصمیم به اجرای این مرحله گرفته شود، ملاحظه خواهد شد که شرایط مرزی به صورت مثلث‌های کوچکی در گره‌های سمت چپ که مرتبط با علامت (\bar{u}) به منظور گیردار کردن گره‌ها

است، ظاهر شده و بردارهای نیروی سطحی نیز که معرف محل و جهت نیروی اعمال شده‌ی سطحی است، مطابق شکل ۷-۱۹ (d)، نیز ظاهر می‌شوند.



شکل ۷-۱۹ آچار دو طرفه (a) رسم شکل هندسی آچار، (b) مدل المان بندی شده‌ی آچار (c) انتخاب شرایط مرزی و سطحی که باید بار را بر آن اعمال نمود، (d) بررسی مدل به منظور رؤیت شرایط مرزی و نیروی سطحی اعمال شده، و (e) رسم تنش فون مایسز (با تشکر از Angela Moe)

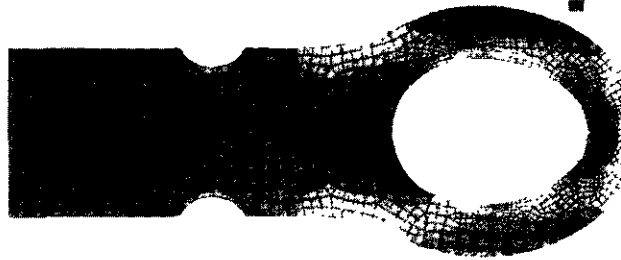
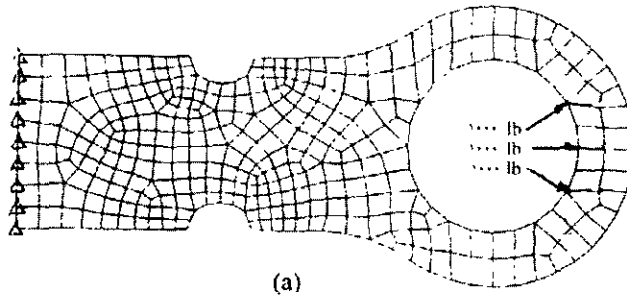
۸. در مرحله‌ی هشت، تحلیل تنش در مدل انجام می‌شود.

۹. در مرحله‌ی نه، نتایجی همانند رسم تغییر مکان، تنش اصلی، و تنش فون مایسز صورت می‌گیرد. از تنش فون مایسز به منظور گسیختگی آچار، بر اساس آنچه که در بخش ۶-۵ در مورد تئوری ماکزیمم انرژی اعوجاج گفته شد استفاده می‌شود. مقادیر تنش فون مایسز در شکل ۷-۱۹ (e) نشان داده شده‌اند. حداکثر تنش فون مایسزی که در شکل ۷-۱۹ (e) نشان داده شده برابر 502 MPa است؛ در حالی که مقاومت فولاد ASTM A-514 برابر 690 MPa است؛ بنابراین، از نقطه نظر تسلیم، آچار مشکلی ندارد. اگر نیاز باشد تا ضریب اطمینان و تغییر مکان‌ها نیز ارضا شوند، می‌توان از سعی‌های دیگری استفاده نمود.

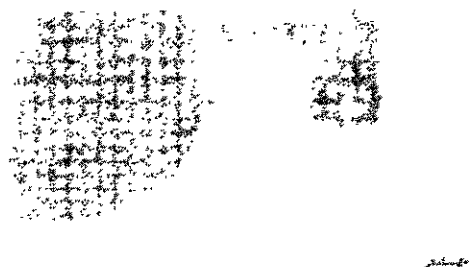
شکل ۷-۲۰ (a) نمایانگر شاتونی از جنس فولاد است که لبه‌ی سمت چپ آن گیردار بوده و قسمت درونی سوراخ سمت راست تحت تأثیر باری به بزرگی 3000 lb قرار گرفته است. برای جزییات بیشتر، که شامل شکل هندسی میله نیز می‌شود، به شکل ۷-۱۱، در انتهای این فصل مراجعه شود. شکل ۷-۲۰ (b)، معرف نمودار تغییرات ماکزیمم تنش اصلی حاصل است. بزرگ‌ترین تنش اصلی که برابر 12051 psi است در لبه‌ی درونی قسمت بالا و پایین سوراخ رخ می‌دهد.

شکل ۷-۲۱ نمایانگر مدل اجزای محدود و منحنی تغییرات تنش فون مایسز در عضو محافظی به منظور جلوگیری از بارگذاری بیش از حد است (برای جزییات این مثال به مسأله ۷-۳۰ مراجعه شود). عضو بالایی قطعه، توسط قالب ریزی ساخته شده بود. گره S که در محل بین برشی قرار داشت نمی‌توانست در راستای قائم جابه‌جا شده و گره‌ای که در E قرار داشت نمی‌توانست در راستای افق جابه‌جا شود. باری که تعادل را حفظ می‌نمود در راستای خط BD بر B اعمال شده بود. اندازه‌ی این بار به قسمی

محاسبه شده بود که به ازای آن نیروی برشی در پینی که در S قرار داشت به 40 MPa می‌رسید. بیش‌ترین تنش فون مایسزی که برابر 178 MPa است در لبه‌ی داخلی قسمت فرو رفتگی اتفاق می‌افتد.



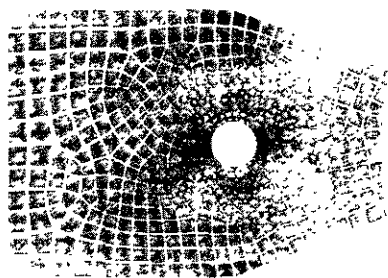
شکل ۷-۲۰ (a) شاتونی که تحت تأثیر نیروی کستنی قرار گرفته است و (b) تنش‌های اصلی حاصل در شاتون



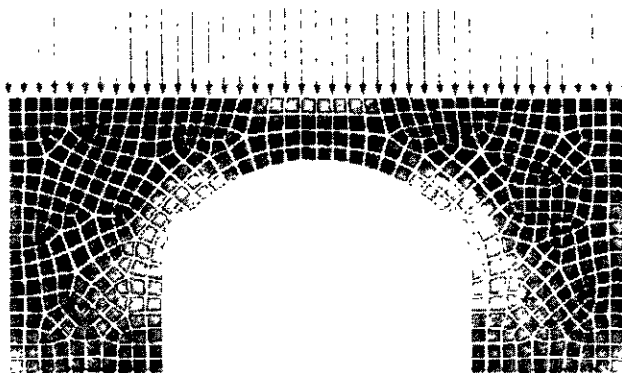
شکل ۷-۲۱ منحنی تغییرات تنش فون مایسز در عضو محافظی برای اضافه بار

شکل ۷-۲۲ تصویر کوچک شده‌ی تحلیل احزای محدود ورق دوزنقه‌ای شکل سوراخ شده‌ای را نشان می‌دهد که لبه‌ی سمت راست آن تحت تأثیر نیروی کشتی قرار گرفته است. انتهای سمت چپ گیردار شده بود. برای حزییات این مثال به مسأله ۷-۲۳ مراجعه شود. در تصویر کوچک شده، به منظور رویت بهتر مدل، المان‌ها از هم جدا شده‌اند. بیش‌ترین تنش اصلی به بزرگی $19 \text{ e}6 \text{ Pa}$ (19 MPa) در لبه‌ی سوراخ داده در حالی که بیش‌ترین تنش اصلی بعدی به بزرگی $17.95 \text{ e}6 \text{ Pa}$ (17.95 MPa) در خم بین کوچک‌ترین سطح مقطع و سطح شیب دار رخ می‌دهد.

سکل ۷-۲۳ نمایانگر تصویر کوچک شده‌ی تعبیرات ماکزیمم تنش در روگذری است که تحت تأثیر بار عمودی در لبه‌ی بالایی قرار گرفته است. بیش‌ترین تنش اصلی که برابر 56162 lb/ft^2 (390 psi) است در قسمت بالایی لبه‌ی داخلی رخ می‌دهد. برای حزییات بیش‌تر این مثال به مسأله‌ی ۷-۲۰ مراجعه نمایید.

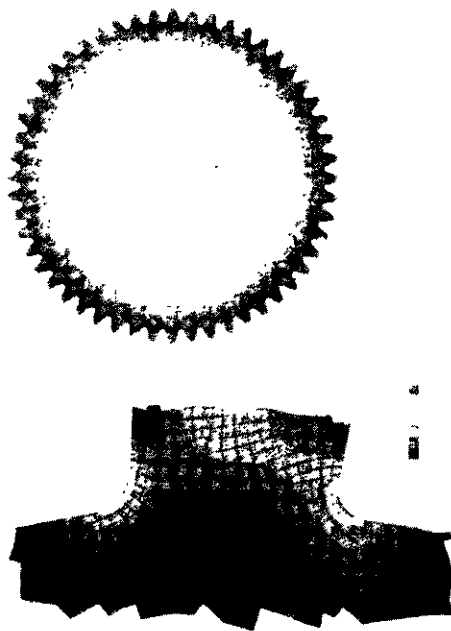


شکل ۷-۲۲ منحنی کوچک شده‌ی تغییرات تنش اصلی در ورق دوزنقه‌ای شکلی با یک سوراخ



شکل ۷-۲۳ منحنی کوچک شده‌ی تغییرات تنش اصلی در یک روگذر

نهایتاً، شکل ۷-۲۴ (a) مدل المان بندی شده از یک چرخ دنده‌ی ساده‌ی فولادی را به منظور بررسی تنش در آن نشان می‌دهد. خصیصه‌ی خودکار شبکه بندی کردن برنامه منجر به المان‌های ریزتر در پایه‌ی دندانه شده است. بار اعمال شده‌ی $164/8 \text{ Ib}$ و گره‌های ثابت در اطراف سوراخ داخلی چرخ دنده در شکل نشان داده شده‌اند. شکل ۷-۲۴ (b) رسم تنش‌های بزرگ شده‌ی فون مایسز را در ریشه‌ی دندانه با بار اعمال شده نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که بیش‌ترین تنش به بزرگی 4315 psi در ریشه‌ی سمت چپی دندانه رخ می‌دهد. مدل چرخ دنده، دارای 27761 المان از نوع تنش سطحی است.



شکل ۷-۲۴ (a) مدل اجزای محدود چرخ دنده‌ی ساده و (b) رسم تنش فون مایسز (با تشکر از Bruce Figi)



- [1] Desai, C. S., and Abel, J. F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.
- [2] Timoshenko, S., and Goodier, J., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.
- [3] Glockner, P. G., "Symmetry in Structural Mechanics," *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, Vol. 99, No. ST1, pp. 71-89, 1973.
- [4] Yamada, Y., "Dynamic Analysis of Civil Engineering Structures," *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, R. H. Gallagher, Y. Yamada, and J. T. Oden, eds., University of Alabama Press, Tuscaloosa, AL, pp. 487-512, 1970.
- [5] Koswara, H., *A Finite Element Analysis of Underground Shelter Subjected to Ground Shock Load*, M. S. Thesis, Rose-Hulman Institute of Technology, Terre Haute, IN, 1983.
- [6] Dunlop, P., Duncan, J. M., and Seed, H. B., "Finite Element Analyses of Slopes in Soil," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 96, No. SM2, March 1970.
- [7] Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York, 1989.
- [8] Taylor, R. L., Beresford, P. J., and Wilson, E. L., "A Nonconforming Element for Stress Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No.6, pp. 1211-1219, 1976.
- [9] Melosh, R. J., "Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 1, No.7, pp. 1631-1637, July 1963.
- [10] Fraeijs de Veubeke, B., "Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis," *Matrix Methods of Structural Analysis*, AGARDograph 72, B. Fraeijs de Veubeke, ed., Macmillan, New York, 1964.
- [11] Dunder, V., and Ridlon, S., "Practical Applications of Finite Element Method," *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, No. ST1, pp. 9-21, 1978.

- [12] *Linear Stress and Dynamics Reference Division*, Docutech On-line Documentation, Algor, Inc., Pittsburgh, PA 15238.
- [13] Bettess, P., "More on Infinite Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 1613-1626, 1980.
- [14] Gere, J. M., *Mechanics of Materials*, 5th ed., Brooks/Cole Publishers, Pacific Grove, CA, 2001.
- [15] *Superdraw Reference Division*, Docutech On-line Documentation, Algor, Inc., Pittsburgh, PA 15238.
- [16] Cook, R. D., and Young, W. C., *Advanced Mechanics of Materials*, Macmillan, New York, 1985.
- [17] Cook, R. D., *Finite Element Modeling for Stress Analysis*, Wiley, New York, 1995.
- [18] Kurowski, P., "Easily Made Errors Mar FEA Results," Machine Design, Sept. 13, 2001.
- [19] Huebner, K. H., Dewirst, D. L., Smith, D. E., and Byrom, T. G., *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, New York, 2001.
- [20] Demkowicz, L., Devloo, P., and Oden, J. T., "On an *h*-Type Mesh-Refinement Strategy Based on Minimization of Interpolation Errors," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 53, 1985, pp. 67-89.
- [21] Lohner, R., Morgan, K., and Zienkiewicz, O. C., "An Adaptive Finite Element Procedure for Compressible High Speed Flows," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 51, 1985, pp. 441-465.
- [22] Lohner, R., "An Adaptive Finite Element Scheme for Transient Problems in CFD," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 61, 1987, pp. 323-338.
- [23] Ramakrishnan, R., Bey, K. S., and Thornton, E. A., "Adaptive Quadrilateral and Triangular Finite Element Scheme for Compressible Flows," *AIAA J.*, Vol. 28, No.1, 1990 pp.51-59.
- [24] Peano, A. G., "Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plate Bending," *Comput. Meth. Appl.*, Vol. 2, 1976, pp. 211-224.
- [25] Szabo, B. A., "Some Recent Developments in Finite Element Analysis," *Comput. Meth Appl.*, Vol. 5, 1979, pp. 99-115.
- [26] Peano, A. G., Pasini, A., Riccioni, R. and Sardella, L., "Adaptive Approximation in Finite Element Structural Analysis," *Comput. Struct.*, Vol. 10, 1979, pp. 332-342.
- [27] Zienkiewicz, O. c., Gago, J. P. de S. R., and Kelly, D. W., "The

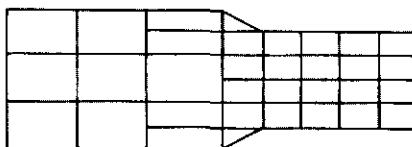
Hierarchical Concept in Finite Element Analysis," *Comput Struct.*, Vol. 16, No. 1-4, 1983, pp. 53-65.

- [28] Szabo, B. A., "Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method," *Compu Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 55, 1986, pp. 181-197.
- [29] Toogood, Roger, Pro/MECHANICA, Structural Tutorial, SDC Publications, 2001.



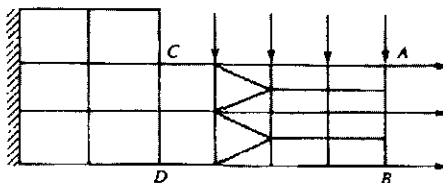
مسائل

۱-۷ در شبکه‌های المان بندی شده در شکل ۱-۷، در مورد خوب بودن شبکه بندی بحث کنید. خطاها در مدل را مشخص کنید. ضمن تشریح، نشان دهید که به چه صورت می‌توان آن‌ها را اصلاح نمود؟



شکل ۱-۷

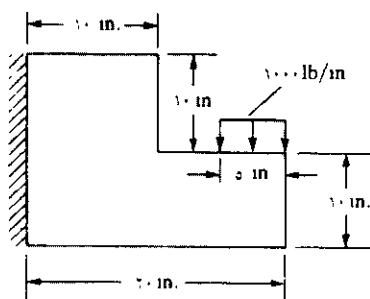
۲-۷ در مورد اندازه‌ی شبکه بندی در شکل ۲-۷ بحث کنید. آیا اندازه‌ها معقولند؟ اگر جواب منفی باشد، دلیلش را مشخص کنید.



شکل ۲-۷

۳-۷ در حالت کرنش صفحه‌ای چه می‌شود اگر $U=0.5$ باشد؟ آیا چنین چیزی ممکن است؟ شرح دهید.

۴-۷ تحت چه شرایطی مسأله‌ی مندرج در شکل VP-۴ از نوع کرنش صفحه‌ای است؟ تحت چه شرایطی مسأله از نوع تنش صفحه‌ای است؟

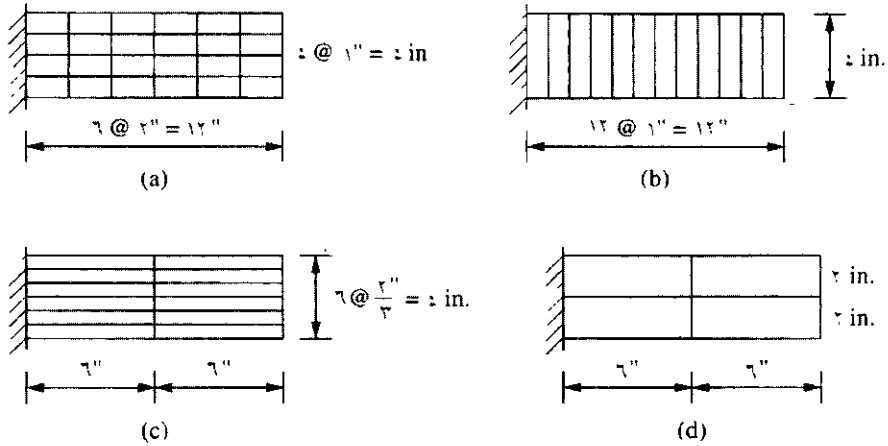


شکل VP-۴

۵-۷ در صورت استفاده از روش بکنواخت سازی در تعیین تنش‌ها (معدل گیری تنش در گره‌ها از المان‌هایی که به گره متصلند) در چه هنگام مشکلات بروز می‌نمایند؟

۶-۷ فکر می‌کنید که در برنامه‌های رایانه‌ای، هنگام استفاده از کرنش سطحی از چه ضخامتی استفاده می‌شود؟


۷-۷ در تیرآهنی که انتهای آن تحت برش قرار گرفته، فکر می‌کنید کدامیک از مدل‌های CST زیر بهترین نتیجه را حاصل می‌نماید؟ چرا؟

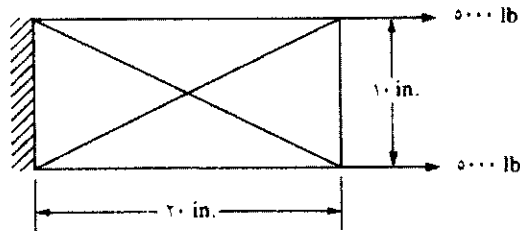


شکل ۷-۷

۸- نشان دهید که معادله (۷-۵-۱۳) از خلاصه سازی معادله (۷-۵-۱۲) حاصل می‌شود.

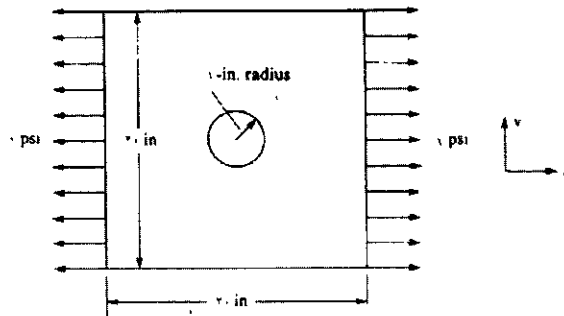
مسائل ذیل را با استفاده از برنامه‌ی رایانه‌ای حل کنید. در بعضی از این مسائل، قسمت‌های جداگانه‌ای از مسأله (یا مدل) به دانشجو داده شود تا حل پارامتری آن آسانتر شود.

۹-۷ در ورقی که مطابق شکل ۷-۹ به چهار المان مثلثی شکل تقسیم شده و تحت  تأثیر نیروی کششی قرار گرفته است جابه‌جایی انتهایی آزاد و نیز تنش در المان‌ها را بیابید. نتایج به دست آمده را با نتایج حاصل از بخش ۶-۵ مقایسه کنید. چرا نتایج فرق می‌کنند؟ فرض کنید $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ و $\nu = 0.3$ و $t = 1 \text{ in}$.



شکل ۹-VP

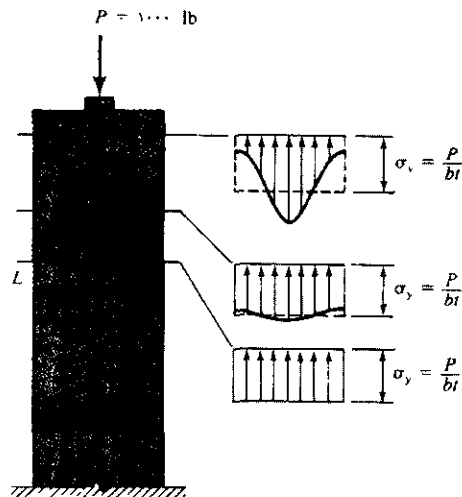
۱۰-۷ تنش‌ها در ورق سوراخ‌داری را که مطابق شکل ۱۰-VP تحت کشش قرار گرفته است بیابید. منحنی تغییرات تنش σ_x را بر حسب فاصله y رسم کنید. فرض کنید $E = 30 \times 10^6$ psi، $\nu = 0.25$ ، و $t = 1$ in. (در مدل اجزای محدود از تعداد تقریبی ۲۵، ۵۰، ۷۵، ۱۰۰، و نهایتاً ۱۲۰ گره استفاده کنید.) در صورت امکان، از تقارن استفاده نمایید.



شکل ۱۰-VP

۱۱-۷ مسأله‌ای را که در آن ورقی تحت تأثیر نیروی متمرکزی در لبه‌ی بالایی آن، مطابق شکل ۱۱-VP، قرار گرفته است حل کنید. مشخص کنید در چه ارتفاعی اثر محلی بار از بین می‌رود؟ منحنی تغییرات تنش σ_y را بر حسب فاصله

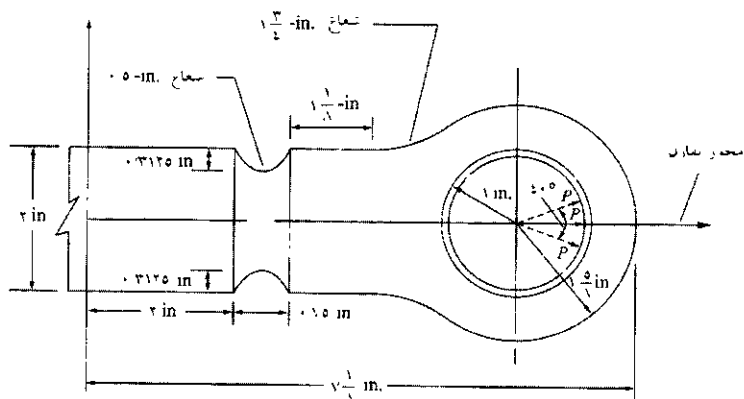
نقطه‌ی مورد نظر تا محل اعمال بار رسم کنید. در فواصل ۱ in.، ۲ in.، ۴ in.، ۶ in.، ۱۰ in.، ۱۵ in.، ۲۰ in. و ۳۰ in. از بار، مقادیر σ_x را بر حسب این فواصل تعیین کنید. فرض کنید عرض ورق $b = 4$ in. ضخامت آن $t = 0.25$ in. و طول آن برابر $L = 40$ in. است. مشخص کنید اثر سنت وانان به چه صورت توزیع تنش در این مسأله را توجیه می‌کند.



شکل ۷P-۱۱

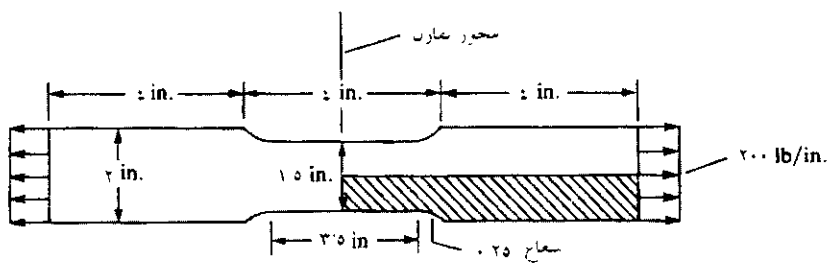
۷-۱۲ در شانونی که در شکل ۷P-۱۲ نشان داده شده، تنش‌های اصلی و محل آر‌ها را تعیین کنید. فرض کنید $E = 30 \times 10^6$ psi، $\nu = 0.25$ ، و $t = 1$ in. و

$$P = 1000 \text{ lb}$$



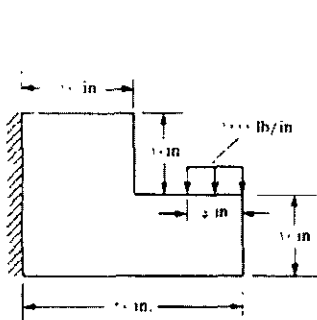
شکل ۱۲-۷P

در عضو گرد گوشه‌داری که مطابق شکل ۱۳-۷P تحت کشش قرار گرفته است، حداکثر تنش‌های اصلی و محل آن‌ها را تعیین کنید. ابتدا فرض کنید $E = 30 \times 10^3 \text{ psi}$ ، $\nu = 0.25$ و سپس، $E = 10 \times 10^3 \text{ psi}$ ، $\nu = 0.3$ در هر دو مورد فرض کنید. $t = 1 \text{ in}$. نتایج حاصل از دو مورد را با هم مقایسه کنید.

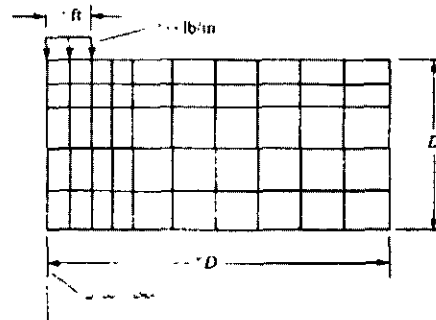


شکل ۱۳-۷P

۱۴-۷ تنش‌ها در گوشه‌ی عضوی که از دو جسم تو در تو مطابق شکل VP-۱۴ تشکیل شده است را بیابید. در چه نقطه‌ای تنش‌های اصلی بیش‌ترین مقدار را دارا می‌باشند. فرض کنید $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ و $\nu = 0.25$. از حالت کرنش صفحه‌ای استفاده کنید.



شکل VP-۱۴



شکل VP-۱۵

۱۵-۷ تنش‌ها در توده‌ای از خاک را که تحت تأثیر بار بر واحد طولی مطابق شکل VP-۱۵ قرار گرفته است بیابید. طول را برابر $2D$ و عرض را برابر D فرض کنید در جایی که D برابر است با ۳، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ فوت. به ازای هر حالت، طیف ماکزیمم تنش در مدل اجزای محدود خود به دست آورید. نتایج را با هم مقایسه کنید. در نحوه‌ی مدل‌سازی محیط نامحدود بحث کنید. فرض کنید $E = 30000 \text{ psi}$ و $\nu = 0.35$. از شرایط کرنش صفحه‌ای استفاده کنید.

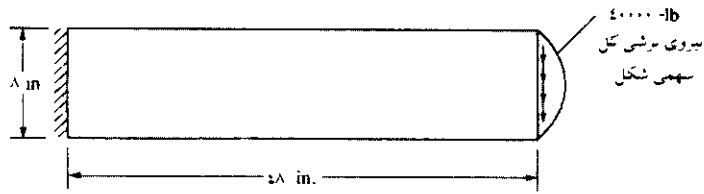
۱۶-۷ در دندان کاشته شده‌ای که مطابق شکل VP-۱۶ بار گذاری شده است حداکثر تعیین تنش‌های اصلی را بیابید. فرض کنید در عضو نگه‌دارنده‌ی دندان (به صورت هاشور زده)، $E = 1/6 \times 10^6 \text{ psi}$ و $\nu = 0.3$ ، و در قسمت استخوانی $E = 1 \times 10^6 \text{ psi}$ و $\nu = 0.35$. فرض کنید $X = 0.05 \text{ in}$ ، 0.1 in ، 0.2 in

۰/۳ in. و ۰/۵ in. در جایی که X معرف عمق جزء کاشته شده زیر سطح استخوانی است. در شکل ۱۳-۷P از المان‌های مستطیل شکل استفاده شده است. فرض کنید ضخامت هر المان $t = 0/25$ in. است.

۱۷-۷ در تیرآهنی که در شکل ۱۷-۷P نشان داده شده خیز را در نقطه‌ی وسط ضخامت انتهای آزاد آن که تحت تأثیر تغییرات نیروی برشی قرار گرفته است بیابید. این مسأله را از طریق ۶۴ المان مستطیل شکل به ابعاد $12 \text{ in.} \times 0/5 \text{ in.}$ سپس به ابعاد $12 \text{ in.} \times 1 \text{ in.}$ و بعد از آن از طریق المان‌هایی به ابعاد $3 \text{ in.} \times 2 \text{ in.}$ حل نمایید. پس از آن از ۶۰ المان مستطیل شکل به ابعاد $12 \text{ in.} \times 2 \frac{2}{3} \text{ in.} \times 2 \frac{2}{3} \text{ in.}$ و بعد از آن به ابعاد $4 \frac{1}{3} \text{ in.} \times 1 \frac{1}{3} \text{ in.} \times 4 \frac{1}{8} \text{ in.}$ استفاده کنید. در هر حالت، خیز در انتهای بیرآهن و نیز ماکزیمم ننس‌های اصلی در انتهای تیر را با نتایج واقعی مقایسه کنید. فرض کنید $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $\nu = 0/3$ و $t = 1 \text{ in.}$ در مورد صحت جابه‌جایی‌ها و ننس‌ها بحث کنید.



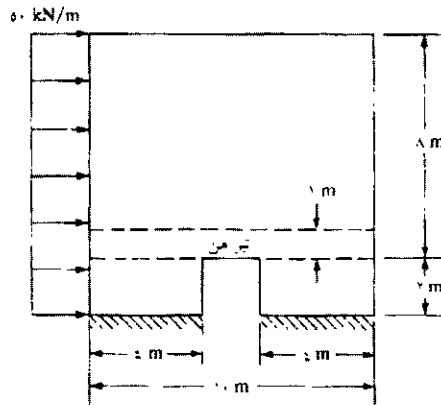
شکل ۱۷-۷P



شکل ۱۷-VP

۱۸-۷ در دیوار برشی شکل ۱۸-VP تنش‌ها را بیابید. در چه نقطه‌ای تنش‌های اصلی بیش‌ترین مقدار را دارا می‌باشند. فرض کنید $E = 21 \text{ Gpa}$ ، $\nu = 0.25$ و

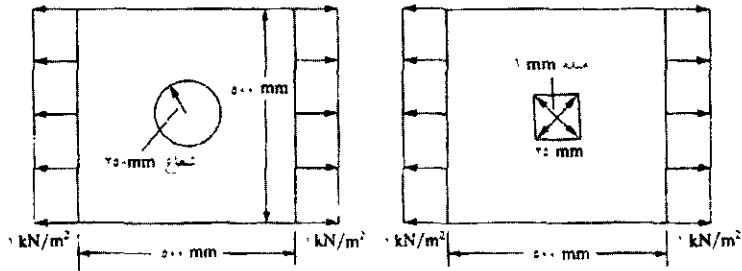
$$t_{\text{دیوار}} = 0.10 \text{ m} \text{ و } t_{\text{تیر}} = 0.2 \text{ m}$$



شکل ۱۸-VP

۱۹-۷ تنش در ورق‌های سوراخ‌داری به شکل مربع و دایره‌ای را که مطابق شکل ۱۹-VP- تحت تأثیر تنش کششی قرار گرفته‌اند بیابید. بیش‌ترین تنش اصلی در هر

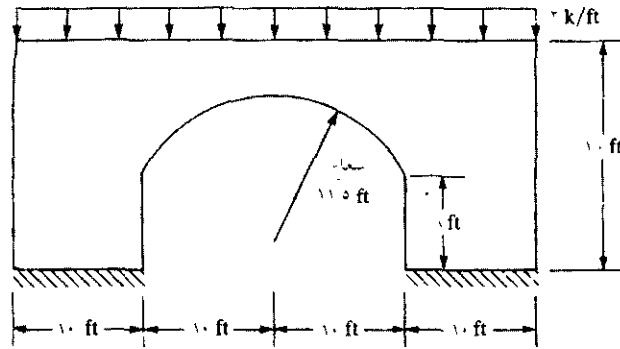
ورق را محاسبه کنید. فرض کنید $E = 210 \text{ Gpa}$ ، $\nu = 0.25$ و $t = 5 \text{ mm}$



شکل ۱۹-VP

۲۰-۷ در سازه‌ی روگذر بتنی مندرج در شکل ۲۰-VP، ماکزیمم تنش‌های اصلی و

محل آن‌ها را تعیین کنید. فرض کنید $E = 3.0 \times 10^4 \text{ psi}$ ، $\nu = 0.3$.

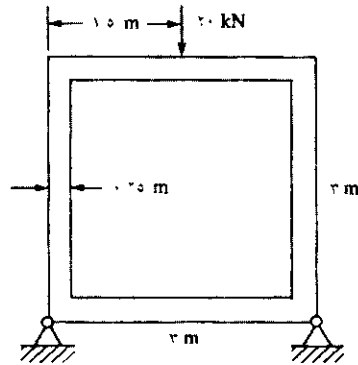


شکل ۲۰-VP

۲۱-۷ در کانال زیر زمینی فولادی مندرج در شکل ۲۱-VP، ماکزیمم تنش‌های اصلی و

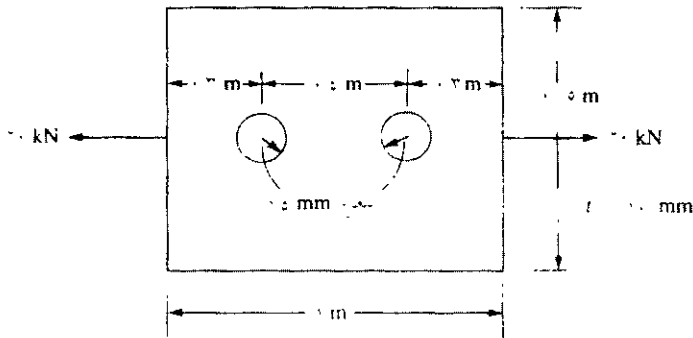
محل آن‌ها، و نیز ماکزیمم جابه‌جایی و محل آن را بیابید. فرض کنید

$E = 210 \text{ Gpa}$ ، $\nu = 0.3$.



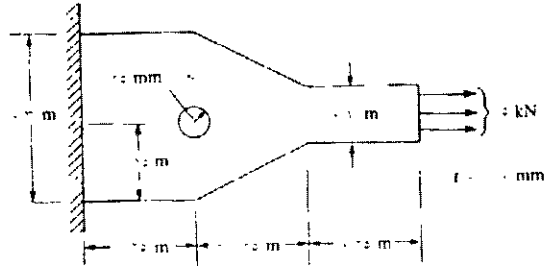
شکل ۲۱-VP

۲۲-۷ در عضو کششی مندرج در شکل ۲۲-VP که دارای دو سوراخ است، ماکزیمم تنش‌های اصلی و محل آن‌ها را تعیین کنید. فرض کنید $E = 210 \text{ Gpa}$ ، $\nu = 0.3$ و $t = 10 \text{ mm}$ سپس به فرض، $E = 70 \text{ Gpa}$ ، $\nu = 0.25$ مسئله را حل نموده و نتایج را با هم مقایسه کنید.



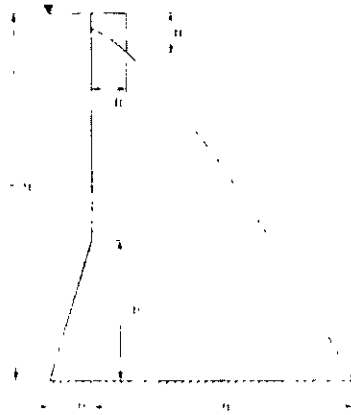
شکل ۲۲-VP

۲۳-۷ در ورقی که در شکل ۲۳-۷P نشان داده شده، ماکزیمم تنش‌های اصلی و محل آن‌ها را بیابید. فرض کنید $E = 210 \text{ Gpa}$ ، $\nu = 0.25$.



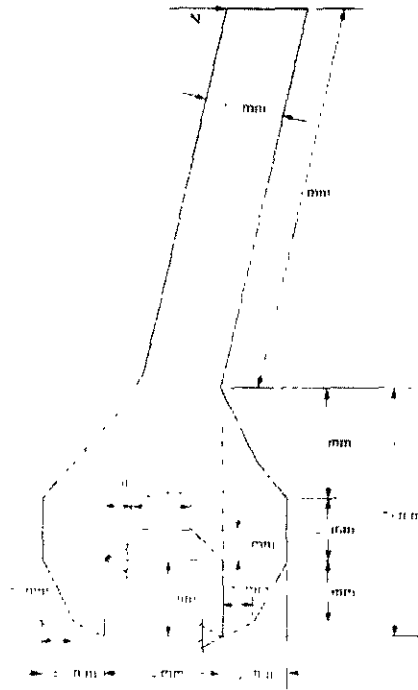
شکل ۲۳-۷P

۲۴-۷ در سد بتنی مندرج در شکل ۲۴-۷P که تحت تأثیر فشار ناسی از آب فرار گرفته است کرنس‌های اصلی را بیابید. فرض کنید $E = 3/5 \times 10^7 \text{ psi}$ و $\nu = 0.3$. از حالت کرنس صفحه‌ای استفاده کنید. ابتدا تحلیل را بر اساس وزن سد و سپس بر اساس فشار هیدرواستاتیکی (آب) اعمال شده بر سطح عمودی سد، مطابق شکل، انجام دهید.



شکل ۲۴-۷P

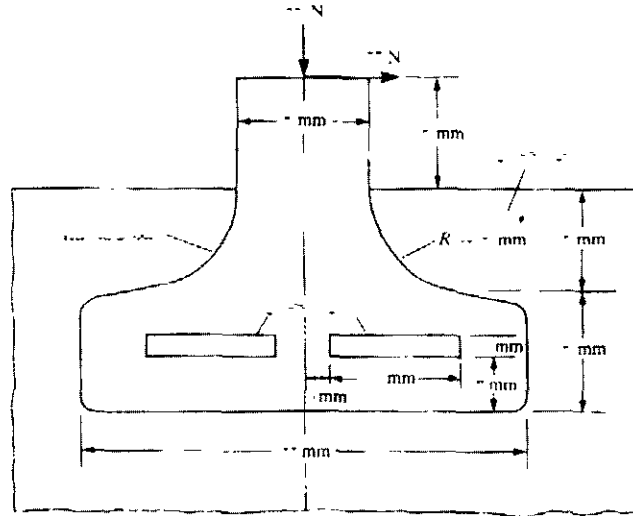
۲۵-۷ تنش‌ها در آچار مندرج در شکل ۲۵-۷P را بیابید. فرض کنید $E = 210 \text{ Gpa}$. $U = 0/25$ و ضخامت آچار ثابت و برابر $t = 10 \text{ mm}$ است.



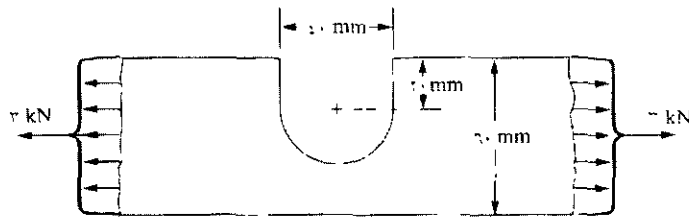
شکل ۲۵-۷P

۲۶-۷ تنش‌های اصلی در تیغه‌ی کاشنه سده و جیس اسخوانی مندرج در شکل ۲۶-۷P را بیابید فرض کنید $E_{سده} = 20 \text{ Gpa}$, $E_{جیس} = 12 \text{ Gpa}$, $U_{سده} = 0.3$, $U_{جیس} = 0.35$ حالت نس را صفحه‌ای و ضخامت t را برابر 5 mm فرض کنید.

۲۷-۷ تنش‌ها در ورق مندرج در شکل ۲۷-۷P را بیابید. $E = 210 \text{ Gpa}$ ، $\nu = 0.25$. ضخامت المان 10 mm است.



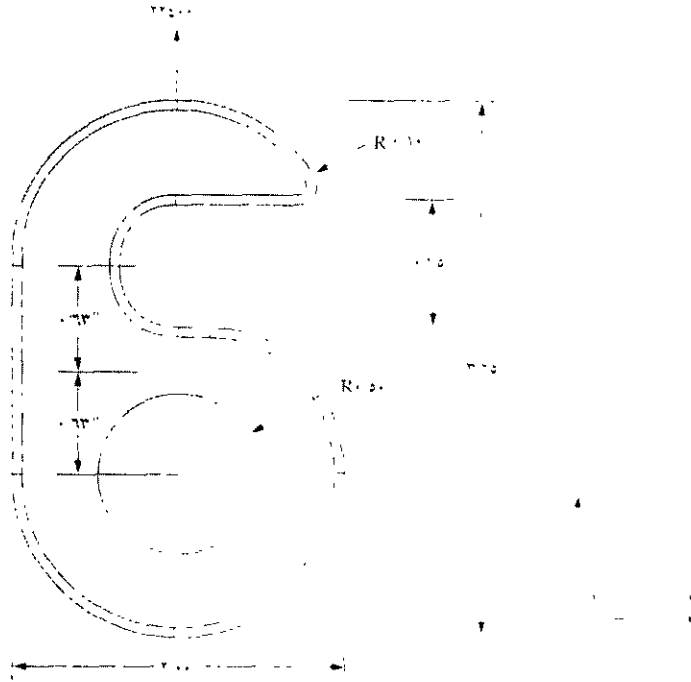
شکل ۲۶-۷P



شکل ۲۷-۷P

۲۸-۷ در قلابی به ضخامت 0.15 in از یک سایه بان، مندرج در شکل ۲۸-۷P، که از آن به منظور مهار سایه بان هواپیما استفاده می‌شود، حداکثر تنش فون مایسر و حداکثر خیز را بیابید. همان‌طور که نشان داده شده است، قلاب تحت تأثیر

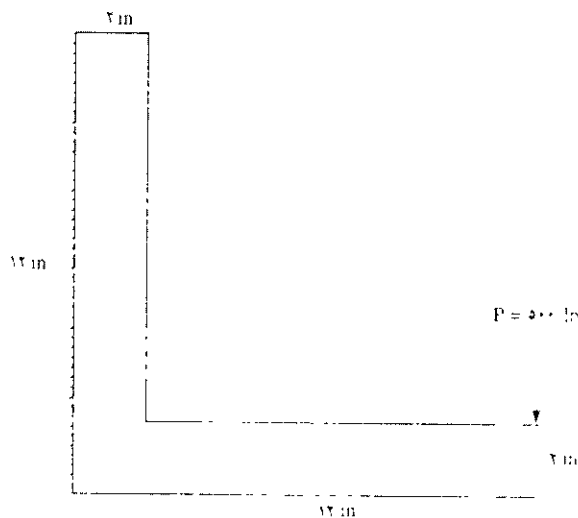
نیروی به بزرگی ۲۲۴۰۰ lb به سمت بالا قرار گرفته است. شرایط مرزی تکیه گاه را در نیمه‌ی پایینی سمت داخلی قطر سوراخ به صورت گیردار فرض کنید. جنس قلاب از فولاد AISI ۴۱۳۰ بوده که پس از سرد کردن، در مای $F 400$ ° حرارت داده شده است (در این مسأله از آقای Steven Miller تشکر می‌شود).



شکل ۲۸-VP

۲۹-۷ در بستنی I شکلی از جنس فولاد، مندرج در شکل ۲۹-VP، به ضخامت $\frac{1}{4}$ in، سان دهید که نئس در کوسه‌ی ۹۰ درجه‌ای ورود دو قسمت نه‌نی به نکدبگر، همکرا نمی‌شود. از مدل‌های مختلفی که در آن‌ها تعداد المان‌ها بیش‌تر می‌شود،

ضمن رسم مقادیر حداکثر تنش اصلی در نبشی، برای اثبات این مطلب استفاده کنید. به عبارتی دیگر، ضمن شروع از یک مدل، شبکه را در اطراف گوشه‌ی ورود دو قسمت نبشی به هم، ریزتر نموده و ملاحظه نمایید که مثلاً پس از دو بار پالایش شبکه چه اتفاقی رخ می‌دهد. چرا؟ سپس گرد گوشه‌ای را به شعاع، مثلاً، $\frac{1}{4}$ in. اضافه نموده و سپس ملاحظه کنید که با ریزتر نمودن شبکه چه اتفاقی می‌افتد. مجدداً، حداکثر تنش اصلی را در هر بار پالایش رسم کنید.

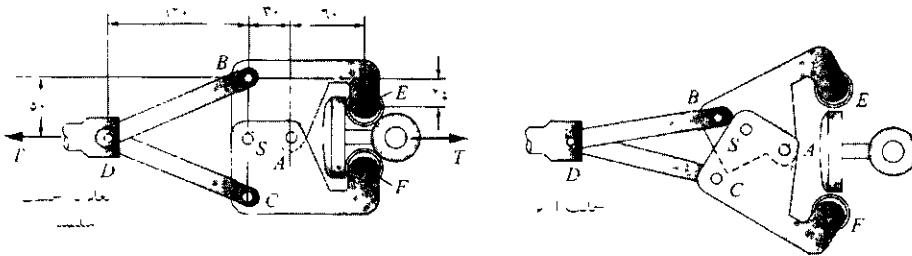


شکل ۲۹-VP

در حل مسائل طراحی ۷-۳۰ الی ۷-۳۶ از برنامه‌ی رایانه‌ای کمک بگیرید.

۷-۳۰ ماشینیه که در شکل ۷-۳۰ نشان داده شده ابزار محافظی برای اضافه بار است که بار را به ازای برش خوردن بین K آزاد می‌کند. ماکزیمم تنش فون مایسز را

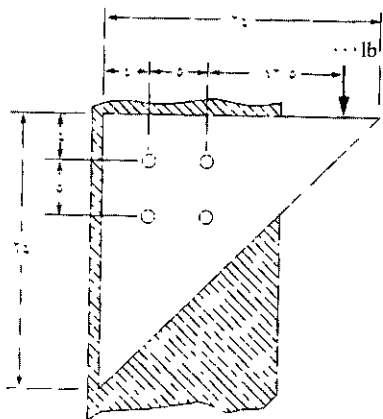
در عضو بالایی ABE هنگامی که پین یاد شده به ازای نیروی برتسی 40 MPa برش می‌خورد بیابید. فرض کنید ضخامت عضو بالایی ثابت و برابر 6 mm است. از حالت تنش صفحه‌ای در این عضو استفاده کنید. جنس عضو یاد شده از آلایاز آلومینیوم ۶۰۶۱ است. آیا بر اساس فرضیه‌ی ماکزیمم انرژی اعوجاح ضخامت فوق کافی است؟ چنان‌چه جواب منفی باشد ضخامت بهتری را پیشنهاد کنید.



شکل ۷-۳۰ دستگاه محافظ در مقابل اضافه بار

۷-۳۱ ورق منثلی شکل فولادی مندرج در شکل ۷-۳۱ از طریق پیچ‌هایی به قطر $\frac{3}{4} \text{ in.}$ به ستونی فولادی مطابق شکل متصل شده است. به فرض آنکه ستون و پیچ‌ها نسبت به ورق صلب باشند، ضمن صرف‌نظر از اصطکاک بین ستون و ورق، حداکثر بار اعمال شده به هر پیچ را بیابید. پیچ‌ها نباید در مدل حضور داشته باشند. گره‌های اطراف سوراخ پیچ را ثابت نموده و عکس‌العمل‌های حاصل را به عنوان نیروی اعمال شده به پیچ در نظر بگیرید. اگر پیچ‌هایی که

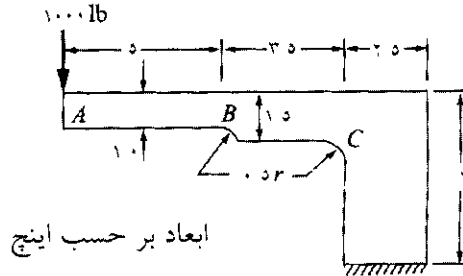
دارای قطر $\frac{3}{4}$ in. هستند ضعیف باشند، قطر استاندارد شده‌ی دیگری را پیشنهاد نمایید. جنس استاندارد شده‌ای را برای پیچ‌ها منظور نمایید. نتایج حاصل از اجزای محدود را با نتایج ناشی از روش‌های کلاسیک مقایسه کنید.



ابعاد بر حسب اینچ

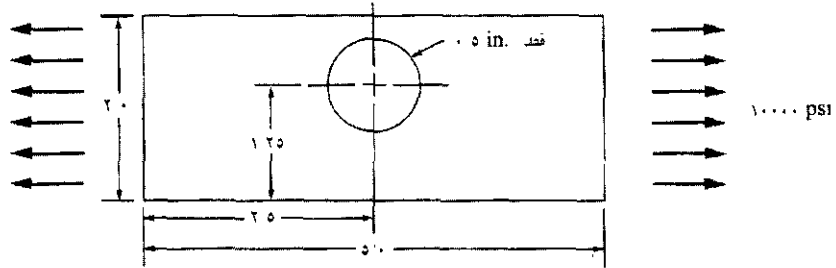
شکل ۷P-۳۱ اتصال ورق فولادی مثلنی شکل

۷-۳۲ عضوی از یک ماتسین به ضخامت $\frac{1}{4}$ in.، نیرویی برابر 1000 lb را در آنها مطابق شکل تحمل می‌کند. ضریب تمرکز تنش را در دو نقطه‌ای که در محل دو قوس مندرج در لبه‌ی یابینی قطعه، مطابق شکل، قرار دارند بیابید. نتایج حاصل را با مقادیری که از تنوری کلاسیک بی‌ها، با و بدون تعبیر سکلی که در هندسه‌ی قطعه ایجاد می‌نمایند مقایسه کنید، به عبارتی دیگر، از ارتفاع 1 in. برای کل قسمت افقی آن، به‌حای 10 in. در حزیی از آن. فرص کنید جس قطعه از فولاد نرم استاندارد شده است. چنان‌چه نیاز است تا تعبیراتی در هندسه‌ی قطعه ایجاد شود آن را پیشنهاد نماید.



شکل VP-۳۲

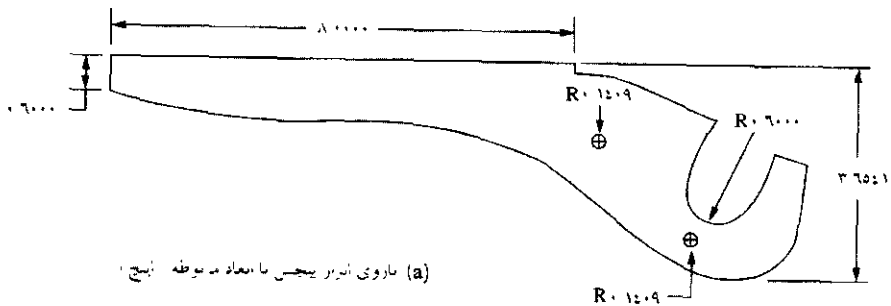
۳۳-۷ ورقه‌ای که دارای سوراخ خارج از مرکزی است در شکل VP-۳۳ نشان داده شده است. مشخص کنید این سوراخ تا چه اندازه در نزدیکی لبه‌ی بالا می‌تواند قرار داشته باشد بدون آن که تسلیم در فولاد A۳۶ (بر اساس فرضیه‌ی ماکزیمم انرژی اعوجاج) رخ دهد. تنش اعمال شده برابر ۱۰۰۰۰ psi و ضخامت ورق برابر $\frac{1}{4}$ in. است. حال اگر جنس ورق از آلایز آلومینیوم ۶۰۶۱-T۶ با مقاومت تسلیم ۳۷ ksi انتخاب شود آیا جواب‌ها عوض خواهند شد؟ چنانچه ضخامت ورق به $\frac{1}{3}$ in. تغییر یابد تا چه حد جواب‌ها تحت تأثیر قرار خواهند گرفت؟ از همان باری استفاده کنید که به ازای ضخامت $\frac{1}{4}$ in. استفاده شد.

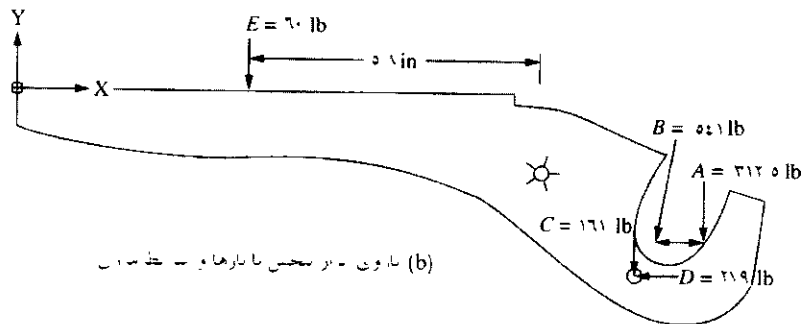


ابعاد بر حسب اینچ

شکل ۷-۳۳ ورقی با سوراخ خارج از مرکز

۷-۳۴ یکی از بازوهای ابزارری که از آن به منظور پیچش استفاده شده و در شکل ۷-۳۳ نشان داده شده است باید بر اساس فولاد نورد شده‌ی ۱۰۸۰ طراحی شود. بار اعمال شده و شرایط مرزی در شکل نشان داده شده‌اند. به ازای ضریب اطمینانی برابر ۱/۵ در مقابل تسلیم جنس فوق، ضخامت مورد نیاز را بیابید. هر گونه اصلاح دیگر در طرح را پیشنهاد نمایید. (اندازه‌ی هر بُعد دیگری را که نیاز دارید با رعایت مقیاس انتخاب کنید.)



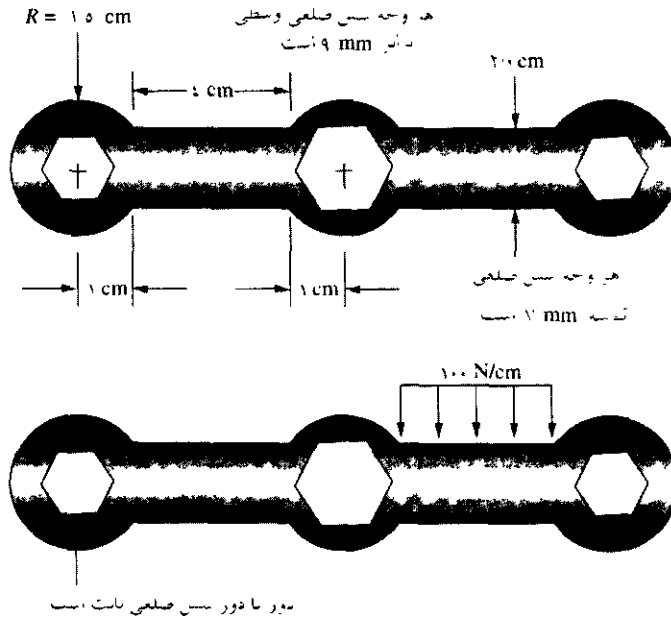


شکل ۳۴-۷P بازوی ابزار پیچش

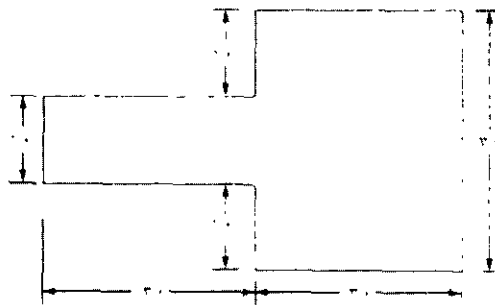
۳۵-۷ آچار دو سری که ابعاد تقریبی آن در شکل ۳۵-۷P نشان داده شده را طراحی کنید. اگر نیاز است تا ابعاد آچار عوض شوند، دلیل آن را ذکر نمایید. جنس آچار باید از فولاد یا آلایژ آلومینیوم باشد. حداکثر ضخامت مورد نیاز را بر اساس ماکزیمم انرژی اعوجاج تعیین کنید. شکل تغییر مکان آچار و تنش اصلی و نیز فون مایسز را در آچار به دست آورید. شرایط مرزی در شکل نشان داده شده و بار به صورت نیروی گسترده‌ای در قسمت سمت راستی آچار اعمال شده است. از ضریب اطمینان ۱/۵ بر اساس تنش تسلیم استفاده کنید.

۳۶-۷ در قطعات مختلفی که در شکل ۳۶-۷P نشان داده شده، کدامیک تنش را بهتر آزاد می‌کند. در قطعه‌ی اولیه، در گوشه‌های اتصال دو قسمت به یکدیگر، از شعاع کوچکی برابر ۱/۵ in. استفاده کنید. بار گسترده‌ای را در قالب فشاری برابر با ۱۰۰۰ lb در انتهای سمت راست قرار داده و انتهای سمت چپ را گیردار

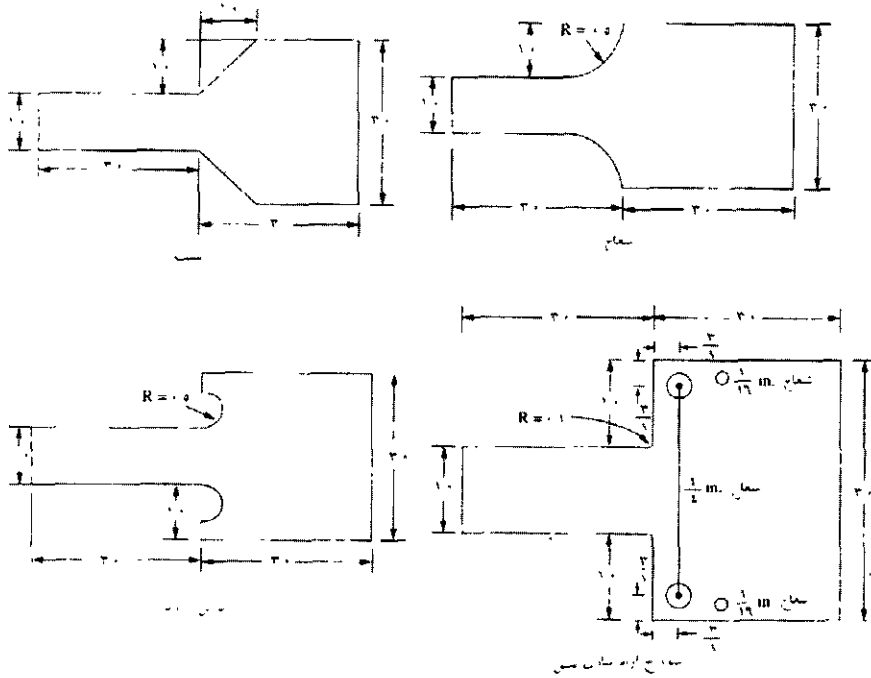
نمایید. کلیه واحدها بر حسب اینچ می‌باشند. فرض کنید جنس قطعات از فولاد A۳۶ است.



شکل ۷۲-۳۵ آچار دو سر



شکل ۷۲-۳۶



شکل ۳۶-VP (ادامه)

فصل ۸

استخراج معادلات المان مثلثی شکل با کرنش خطی

مقدمه

در این فصل، نحوه‌ی استخراج ماتریس سختی و معادلات المان مثلثی شکل با مرتبه بالاتر، که مثلث کرنش خطی (LST) نامیده می‌شود را بررسی می‌کنیم. این المان در بسیاری از برنامه‌های رایانه‌ای تجاری موجود بوده و دارای مرابایی نسبت به المان مثلثی شکل کرنش ناسی است که در فصل ۶ تشریح شد.

المان LST، دارای شش گره و دوازده درجه‌ی آزادی مرتبط با حاشه‌هایی می‌باشد که مجهول است. نواحی حاشه‌هایی در این نوع المانها، به‌جای خطی (در المان CST) است. درجه دو هستند.

مراحل استخراج معادلات المان LST شبیه به مراحل است که در فصل ۶ برای المان CST گفته شد. در حالی که اکنون تعداد معادلات، به جای شش، برابر دوازده عدد شده و در نتیجه حل دستی مسأله بی‌نهایت مشکل می‌شود؛ بنابراین از رایانه به منظور انجام عملیات ریاضی استفاده خواهد شد.

بعد از استخراج معادلات المان، نتایج حاصل از مسائلی که از طریق المان LST حل می‌شوند با نتایج مشابهی که از المان CST حاصل می‌شوند، مقایسه خواهند شد. معرفی المان LST با درجه‌ی بالاتر، مزایای محتمل آن‌ها را روشن نموده و درک کلی شما را از مفاهیمی که در روش‌های اجزای محدود مستتر است بالا خواهد برد.



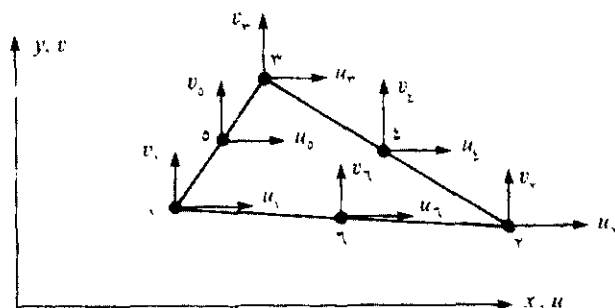
۸-۱ استخراج ماتریس سختی و معادلات المان مثلثی شکل با کرنش خطی

حال ماتریس سختی LST و معادلات المان را استخراج می‌کنیم. مراحل است که در این جا از آن‌ها استفاده می‌شود شبیه به مراحل است که در المان CST استفاده شد، همچنین بیش‌تر نمادسازی‌ها شبیه به یک‌دیگرند.

مرحله‌ی ۱۰ انتخاب نوع المان

المان مثلثی شکل مندرج در شکل ۸-۱ را با گره‌های معمولی انتهایی و سه گره اضافی که برای راحتی در وسط اضلاع قراز گرفته‌اند در نظر می‌گیریم؛ بنابراین هر برنامه‌ی رایانه‌ای می‌تواند به‌طور خودکار مختصات نقطه‌ی وسط را با استفاده از مختصات گره‌ای دو انتها، که به عنوان ورودی داده می‌شوند، محاسبه نماید. در این حالت جابه‌جایی‌های مجهول در گره‌ها به سرح زیر حاصل می‌شوند.

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_r \\ \underline{d}_r \\ \underline{d}_i \\ \underline{d}_o \\ \underline{d}_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_r \\ v_r \\ u_r \\ v_r \\ u_2 \\ v_2 \\ u_o \\ v_o \\ u_\gamma \\ v_\gamma \end{Bmatrix} \quad (1-1-8)$$



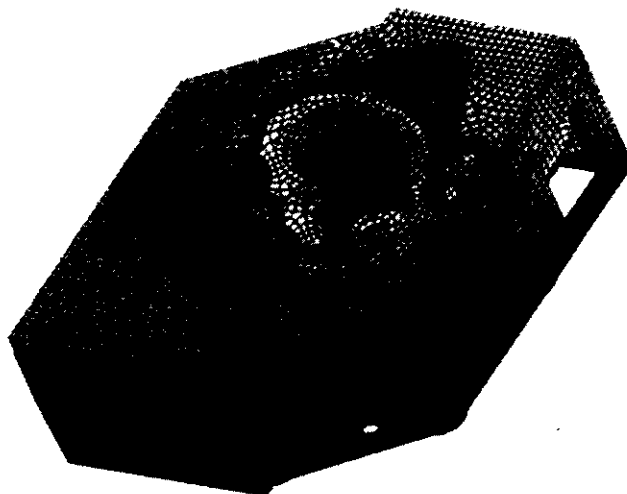
شکل ۸-۱ المان اولیه‌ی مثلثی شکل با ۶ گره که در آن درجه‌های آزادی نشان داده شده‌اند.



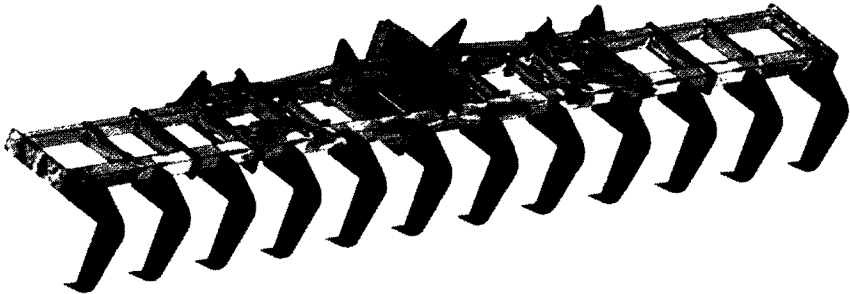
انزکتور سوخت- انزکتور سوخت قسمتی از مونور نوریسی است که در وسایل حمل و نقل جاده‌ای توسط یک شرکت مهندسی طراحی شده است. آنچه که در بالا نشان داده شده ناشی از تحلیل انتقال حرارت نابایی است که به منظور توزیع دما در اثر نازگذاری حرارتی به صورت جاده‌حایی، در محور داخلی و سطح خارجی کل مجموعه، به کمک ALGOR حاصل شده است. از المان‌های آجری (نشان داده نشده‌اند) در مدل سازی استفاده شده است. (با تسکر از ALGOR inc.)



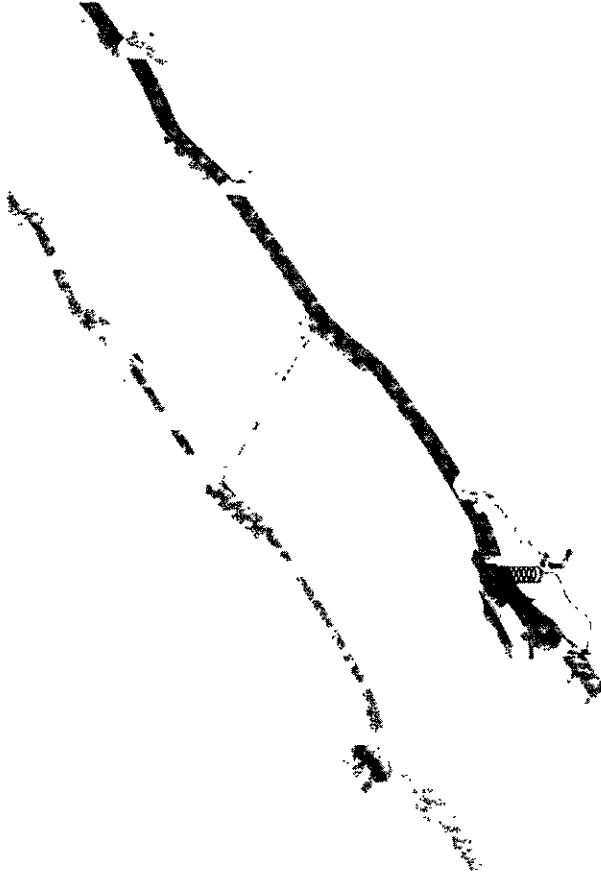
مدل یوسته- مدلی که در شکل نشان داده شده از فولاد ۵۷۲ - ASTM A رده بندی شده در گروه ۵۰، مربوط به اکسل عقب یک کامیون حفاری است. نیاز بود تا یوسته توسط اجزای محدود مدل سازی شده تا مشخص شود چرا یوسته در حین کار معیوب شده است. تحلیل تنشی که به کمک المان‌های آجری همراه با بارهای پیچشی انجام شد مشخص نمود که تنش در سطح مجاور حلقه‌ی نابت دیواره (به رنگ قرمز نشان داده شده است) بحرانی شده و بنابراین حبابی قطعه را که عیناً مشاهده شده بود ناپدید می‌نماید. تحلیل باد شده توسط مهندس سازه‌ای صورت گرفت که در یک شرکت حفاری کار می‌کند. (با سنکر از ALGOR inc.)



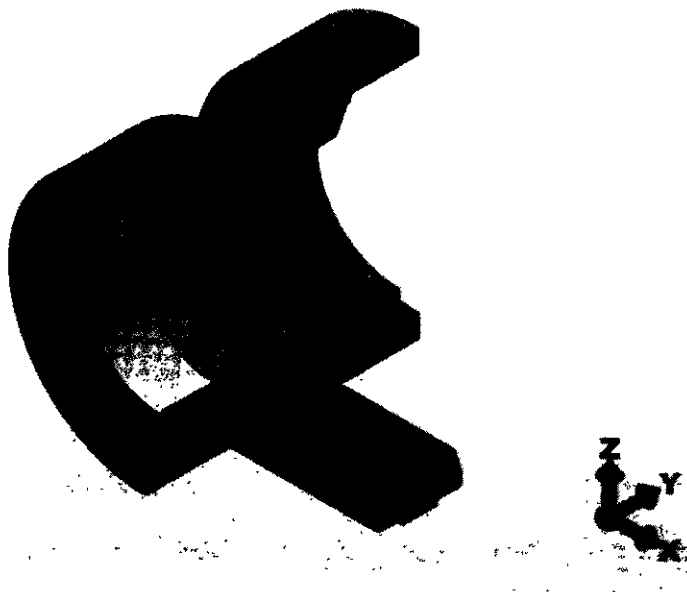
سرسیلندر- مدل سر سیلندری که جنس آن از فولاد ضد زنگ ۴۱۰ AISI بوده و در شکل نشان داده شده است، جزئی از یک نمونه‌ی آزمایشی موتور دیزلی است که کاهش حرارت از دست رفته در آن باعث افزایش توان موتور شده است. آنچه که در شکل نشان داده شده تحلیل انتقال حرارت پایای مسأله توسط ALGOR است (با استفاده از المان آجری) که در آن دمای بالای $1500^{\circ}F$ به رنگ قرمز، در سطح بین دو مدخل آگروز قرار دارد. تنش‌های یاد شده در تحلیل گر خطی وارد شده تا تنش‌های حرارتی که در محدوده‌ی ۸۵ ksi الی ۲۰۰ ksi قرار داشتند حاصل شوند. تحلیل تنش خطی انجام شده رفتاری را که مهندسان در خلال انجام آزمایش بر مدل اولیه مشاهده نمودند تأیید می‌نمود. محل حداکثر تنش‌های حرارتی با قسمتی از سر سیلندر که در نمونه‌ی آزمایشی اولیه نشت می‌نمود منطبق بود. (با تشکر از ALGOR inc.)



شخم زن عمیق- مدل شخم زن عمیق دوازده ردیفه‌ای که از آن به عنوان ابزار کشاورزی استفاده می‌شود، به منظور آماده سازی زمینی جهت پاشش بذر در بسترهای ۱۰ اینچی که به فواصل ۴۰ اینچ از هم قرار دارند و عموماً از آن‌ها در تولید پنبه استفاده می‌شود، نشان داده شده است. یکی از انواع بارگذاری‌ها آن بود که تیرهای اصلی شخم‌زن به قسمی شبیه‌سازی شوند تا آن را به میزان ۱۸ اینچ در خاک سفت بکشند. از برنامه‌ی تحلیل تنش خطی ALGOR به منظور بهینه‌سازی ضخامت، شکل، جنس قاب، قسمت‌های مفصلی و اتصالات ثابت، به منظور کاهش مقادیر بالای تنش استفاده شده است. در شکل نشان داده شده، تنش فون مایسز به دست آمده به ازای باری است که تیرهای اصلی را به میزان تقریبی ۱۸ اینچ در خاک می‌کشد. به کمک این نتایج طراح می‌تواند قطعاتی را طراحی نماید که نیازمند آن هستند تا از آلیاژ فولاد قوی‌تری در آن‌ها استفاده شود. (با تشکر از ALGOR inc.)



شاسی کامپیون - تناسی کامپیونی که نشان داده شده، مدل اجزای محدودی است که در آن از المان آجری استفاده شده است. شاسی فولادی به قسمی طراحی شده بود تا کامپیون را با موتور الکتریکی همراه با باطری های آن به زور درآورد (با تشکر از TrueGrid)



پوسته‌ی یاتاقان- از پوسته‌ی یاتاقانی به منظور تکیه‌گاه ماسوره‌ای در صنعت کاغذسازی استفاده شده است. به منظور مطالعه‌ی خیز و تنش در پوسته‌ی یاتاقان، مدل اجزای محدود آن ایجاد شده است. در مدل یاد شده، از المان تیر به منظور مدل سازی محور درون یاتاقان و از المان آجری به منظور مدل سازی یاتاقان (به صورت چندین رنگ درون پوسته‌ی سبز رنگ یاتاقان نشان داده شده است)، پوسته‌ی یاتاقان و ریل (نارنجی رنگ)، چهار شاخ مربوطه جهت اتصال محور به سطح یاتاقان، و از اتصالات سطحی به منظور معرفی درگیری یاتاقان با پوسته و پوسته با ریل، استفاده شده است. مدل به کمک

FEMPRO در محیط ALGOR ساخته شده است. (با تشکر از Jason Fencil و David Stertz دانشجویان دانشگاه UW، شاخه‌ی Plattville)

مرحله ۲ انتخاب تابعی برای جابه‌جایی

حال تابع درجه دومی را برای جابه‌جایی به شرح زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (2-1-8)$$

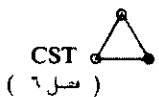
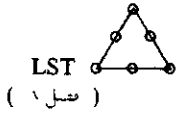
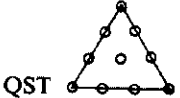
$$v(x, y) = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2$$

مجدداً، تعداد ضرایب a_i (۱۲) برابر با تعداد کل درجه‌های آزادی هر المان است. هم‌سازگاری در جابه‌جایی در مرز المان‌ها ارضا شده است؛ چرا که در امتداد هر لبه سه گره وجود داشته و یک سهمی را می‌توان توسط سه گره تعریف نمود. از آن‌جا که المان‌های مجاور در گره‌های مشترک به هم متصلند لذا هم‌سازگاری در جابه‌جایی در امتداد مرز آن‌ها حفظ خواهد شد.

به‌طور کلی، با در نظر گرفتن المان مثلثی شکل می‌توان توسط یک چند جمله‌ای، میدان جابه‌جایی در المان را تشریح نموده و در صورت لزوم، با در نظر گرفتن گره‌های داخلی در المان‌های مرتبه‌ی بالاتر درجه سه و چهار، مطابق شکل ۸-۲، از کلیه‌ی عبارات قسمتی از مثلث پاسکال که در این شکل نشان داده شده، برای میدان جابه‌جایی یا معادل آن، توابع شکل، استفاده نمود. به عبارتی، در المان CST که قبلاً در فصل ۶ منظور شد، از تابع خطی کاملی استفاده شده است. در این فصل، از تابع درجه دومی برای LST استفاده شده است. در المان مثلثی شکلی با کرنش درجه دو (QST)، از تابع درجه سوم کاملی با گره‌ی داخلی مازادی به عنوان گره دهم استفاده شده است.

حال، توابع کلی جابه‌جایی، معادلات (۸-۱-۲)، به صورت ماتریسی برابرنده:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (3-1-8)$$

تعداد عبارات در سلب ماسکال	درجه عدد جمله بی	تعداد عبارات	سلب
۱	۰ (ثابت)	۱	
$x \quad y$	۱ (خطی)	۳	 CST (۳ نود)
$x^2 \quad xy \quad y^2$	۲ (درجه دوم)	۶	 LST (۶ نود)
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	۳ (درجه سوم)	۱۰	 QST

شکل ۸-۲ رابطه‌ی بین نوع المان مثلثی شکل و ضرایب چند جمله‌ای بر اساس مثلث پاسکال

متناوباً، معادله‌ی (۳-۱-۸) را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

$$\{\psi\} = [M^*] \{a\} \quad (4-1-8)$$

در جایی که $[M^*]$ اولین ماتریس در سمت راست معادله‌ی (۳-۱-۸) است. ضرایب a_i الی a_{12} را می‌توان از جای‌گزینی مختصات در عبارات u و v به شرح زیر به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_7 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_6 \\ v_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7 y_7 & y_7^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7 y_7 & y_7^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_7 \\ a_v \\ \vdots \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix}$$

(۵-۱-۸)

از حل روابط فوق برای تعیین ضرایب a_i داریم:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \\ a_v \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7 y_7 & y_7^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7 y_7 & y_7^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_7 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_7 \end{Bmatrix}$$

(۶-۱-۸)

یا متناوباً، معادله‌ی (۶-۱-۸) را می‌توان به شرح زیر تشریح نمود:

$$\{a\} = [X]^{-1} \{d\} \quad (۷-۱-۸)$$

در جایی که $[X]$ که در سمت راست معادله‌ی (۶-۱-۸) است ماتریسی ۱۲×۱۲ است. ماتریس معکوس $[X]$ به بهترین وجه از طریق یک رایانه حاصل می‌شود. سپس مقادیر a_i بر حسب جابه‌جایی گره‌ها در معادله‌ی (۶-۱-۸) جای‌گزین می‌شوند. قابل ذکر است که در واقع، فقط قسمت ۶×۶ $[X]$ در معادله‌ی (۶-۱-۸) باید معکوس شود. نهایتاً، از

جای‌گزینی (۸-۱-۷) در رابطه‌ی (۸-۱-۴)، می‌توان عبارت کلی جابه‌جایی را بر حسب توابع شکل و درجه‌های آزادی گره‌ها به شرح زیر به دست آورد:

$$\{\psi\} = [N] \{d\} \quad (۸-۱-۸)$$

در جایی‌که

$$[N] = [M^*] [X]^{-1} \quad (۹-۱-۸)$$

مرحله‌ی ۳ تعریف روابط کرنش / جابه‌جایی و تنش / کرنش

کرنش‌ها در المان برابرند با:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (۱۰-۱-۸)$$

یا از جای‌گزینی معادله‌ی (۸-۱-۳) برای u و v در معادله‌ی (۸-۱-۱۰)، داریم:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (۱۱-۱-۸)$$

مشاهده می‌شود که معادله‌ی (۸-۱-۱۱) معرف تغییرات کرنش خطی در المان است. بنابراین، المان، مثلث کرنش خطی (LST) نامیده می‌شود. ضمن دوباره نویسی معادله‌ی (۸-۱-۱۱) داریم:

$$\{\varepsilon\} = [M'] \{a\} \quad (۱۲-۱-۸)$$

در جایی که $[M']$ اولین ماتریس در سمت راست معادله‌ی (۸-۱-۱۱) است. ضمن جای‌گزینی معادله‌ی (۸-۱-۶) برای a_i در معادله‌ی (۸-۱-۱۲)، $\{\varepsilon\}$ بر حسب جابه‌جایی‌های گره‌ای برابر است با:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\} \quad (۸-۱-۱۳)$$

در جایی که $[B]$ تابعی از متغیرهای x و y و مختصات (x_i, y_i) الی (x_7, y_7) بوده و برابر است با:

$$[B] = [M'] [X]^{-1} \quad (۸-۱-۱۴)$$

به منظور تشریح معادله‌ی (۸-۱-۱۴) از معادله‌ی (۸-۱-۷) استفاده شده است. در این جا باید توجه داشت که مرتبه‌ی ماتریس $[B]$ ، ۱۲×۳ است. مجدداً، تنش‌ها برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] [B] \{d\} \quad (۸-۱-۱۵)$$

در جایی که $[D]$ در حالت تنش صفحه‌ای توسط رابطه‌ی (۶-۱-۸) و در حالت کرنش صفحه‌ای توسط رابطه‌ی (۶-۱-۱۰) داده شده است. این تنش‌ها تابعی خطی از مختصات x و y می‌باشند.

مرحله‌ی ۴ استخراج ماتریس سختی و معادلات المان

با استفاده از معادله‌ی (۶-۲-۵۰) که مجدداً در این جا تکرار شده، ماتریس سختی را به همان صورت که در بخش ۶-۲ قید شده است، تعیین می‌کنیم.

$$[k] = \iiint [B]^T [D] [B] dV \quad (۸-۱-۱۶)$$

از طرفی، ماتریس $[B]$ تابعی از x و y است که در معادله‌ی (۸-۱-۴) داده شده است؛ بنابراین باید انتگرال‌گیری در رابطه‌ی (۸-۱-۱۶) انجام شود. نهایتاً، ماتریس $[B]$ برابر است با:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_1 & \cdot & \beta_2 & \cdot & \beta_3 & \cdot & \beta_4 & \cdot & \beta_5 & \cdot & \beta_6 & \cdot & \beta_7 & \cdot \\ \cdot & \gamma_1 & \cdot & \gamma_2 & \cdot & \gamma_3 & \cdot & \gamma_4 & \cdot & \gamma_5 & \cdot & \gamma_6 & \cdot & \gamma_7 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_4 & \beta_4 & \gamma_5 & \beta_5 & \gamma_6 & \beta_6 & \gamma_7 & \beta_7 \end{bmatrix} \quad (8-1-17)$$

در جایی‌که، همان‌طور که در مثلث کرنش خطی خاصی که در بخش ۸-۲ توسط معادله‌ی (۸-۲-۸) تشریح شده، β ها و γ ها توابعی از x و y و نیز مختصات گره‌ای می‌باشند. از ضرب ماتریس‌ها در معادله‌ی (۸-۱-۱۶) ملاحظه می‌شود که ماتریس سختی 12×12 است. تعیین صریح ماتریس سختی در معادله‌ی (۸-۱-۱۶)، کاری دشوار بوده و لذا از ارائه‌ی آن در این‌جا صرف‌نظر می‌شود. در هر حال، چنان‌چه مبداء مختصات منطبق بر مرکز سطح المان منظور شود انتگرال‌گیری شدنی‌تر خواهد بود [۹]. متناوباً، از مختصات سطح [۳، ۸، ۹] می‌توان به منظور تعیین صریح ماتریس سختی استفاده نمود. با این وصف، حتی استفاده از مختصات سطح می‌تواند منجر به محاسبات خسته‌کننده شود. بنابراین، انتگرال‌گیری به بهترین وجه به صورت عددی انجام می‌شود. (انتگرال‌گیری عددی در بخش ۱۰-۴ تشریح شده است).

نیروهای حجمی و سطح را نباید به‌طور خودکار در گره‌ها اضافه نمود، در حالی‌که در یک فرمول‌بندی نامتناقض (فرمول‌بندی که در آن از همان توابع شکل به کار رفته در تعیین ماتریس سختی استفاده می‌شود)، به‌ترتیب باید از معادلات (۶-۳-۱) و (۶-۳-۷) استفاده شود. (مسائل ۸-۳ و ۸-۴ این مفهوم را تشریح می‌کنند.) این نیروها را می‌توان به هر یک از نیروهای متمرکز گره‌ای اضافه نموده تا ماتریس نیرو در المان حاصل شود.

در این جا، ماتریس نیرو در المان 12×1 است؛ زیرا، به طور کلی، ممکن است در هر یک از شش گره المان، مؤلفه‌های x و y نیرو وجود داشته باشند. لذا، معادلات المان به شرح زیرند:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ \vdots \\ f_{6x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1,12} \\ k_{21} & & k_{2,12} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{12,1} & \dots & k_{12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v_1 \\ \vdots \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (18-1-8)$$

(12×1) (12×12) (12×1)

مراحل ۵ الی ۷

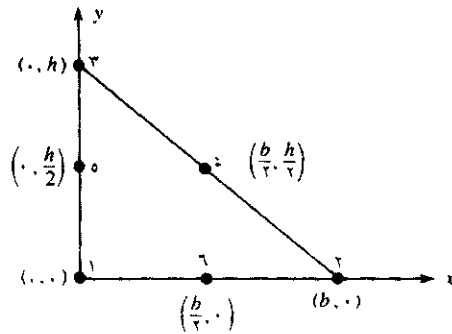
مراحل ۵ الی ۷، که مربوط به جمع‌آوری معادلات و ماتریس سختی کل، تعیین جابه‌جایی گره‌های مجهول، و محاسبه‌ی تنش‌ها است شبیه به مراحل ۱ است که در بخش ۶-۲ برای المان CST گفته شد. در هر حال، به جای تنش ثابت در هر المان، تغییرات آن به صورت خطی است. قبلاً رسم بر این بود که تنش‌ها در مرکز المان محاسبه می‌شد. در حال حاضر، از میانگین تنش‌های گره‌ای در المان استفاده می‌شود.

۲-۸ مثالی در مورد نحوه‌ی تعیین المان CST

به منظور نمایش روش‌هایی که در بخش ۸-۱ جهت استخراج ماتریس سختی LST گفته شد، مثال ذیل را در نظر می‌گیریم. شکل ۸-۳ نمونه‌ای خاص از یک المان LST است. قاعده‌ی این مثلث برابر b و ارتفاع آن برابر h و دارای گره‌های میانی در هر ضلع است.

با استفاده از شش رابطه‌ی اول در معادله‌ی (۸-۱-۵)، ضرایب a_1 الی a_6 را از ارزیابی مقدار u به ازای مختصات معلوم هر شش گره به شرح زیر تعیین می‌کنیم:

$$u_1 = u(0,0) = a_1 \quad (1-2-8)$$



شکل ۳-۸ مثلث LST در تعیین ماتریس سختی

$$u_3 = u(b,0) = a_1 + a_2 h + a_3 b^x$$

$$u_2 = u(0, h) = a_1 + a_2 h + a_3 h^x$$

$$u_1 = u\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) = a_1 \frac{b}{2} + a_2 \frac{h}{2} + a_3 \left(\frac{b}{2}\right)^x + a_2 \frac{bh}{2} + a_3 \left(\frac{h}{2}\right)^x$$

$$u_2 = u\left(\frac{b}{2}, 0\right) = a_1 + a_2 \frac{h}{2} + a_3 \left(\frac{b}{2}\right)^x$$

$$u_3 = u\left(\frac{b}{2}, 0\right) = a_1 + a_2 \frac{h}{2} + a_3 \left(\frac{b}{2}\right)^x$$

از حل همزمان معادلات (۱-۲-۸) برای a_i داریم:

$$\begin{aligned}
 a_i &= u_i & a_r &= \frac{\varepsilon u_r - \nu u_r - u_r}{b} & a_r &= \frac{\varepsilon u_r - \nu u_r - u_r}{h} \\
 a_i &= \frac{\nu(u_r - \nu u_i + u_i)}{b^2} & a_o &= \frac{\varepsilon(u_i + u_i - u_o - u_i)}{bh} & & (2-2-8) \\
 a_i &= \frac{\nu(u_r - \nu u_o + u_i)}{h^2} & & & &
 \end{aligned}$$

از جای‌گزینی معادلات (۲-۲-۸) در عبارت مندرج در معادلات (۲-۱-۸) برای جابه‌جایی، داریم:

$$\begin{aligned}
 u &= u_i + \left[\frac{\varepsilon u_r - \nu u_i - u_r}{b} \right] x + \left[\frac{\varepsilon u_o - \nu u_i - u_r}{h} \right] y + \left[\frac{\nu(u_r - \nu u_i + u_i)}{b^2} \right] x^2 \\
 &+ \left[\frac{\varepsilon(u_i + u_i - u_o - u_i)}{bh} \right] xy + \left[\frac{\nu(u_r - \nu u_o + u_i)}{h^2} \right] y^2
 \end{aligned} \quad (3-2-8)$$

متشابهاً، ضمن ارزیابی جابه‌جایی v در هر شش‌گره و تعیین مقادیر a_i الی a_7 و سپس نتایج حاصل در عبارت v از روابط (۲-۱-۸)، داریم:

$$\begin{aligned}
 v &= v_i + \left[\frac{\varepsilon v_r - \nu v_i - v_r}{b} \right] x + \left[\frac{\varepsilon v_o - \nu v_i - v_r}{h} \right] y + \left[\frac{\nu(v_r - \nu v_i + v_i)}{b^2} \right] x^2 \\
 &+ \left[\frac{\varepsilon(v_i + v_i - v_o - v_i)}{bh} \right] xy + \left[\frac{\nu(v_r - \nu v_o + v_i)}{h^2} \right] y^2
 \end{aligned} \quad (4-2-8)$$

با استفاده از معادلات (۳-۲-۸) و (۴-۲-۸)، عبارت کلی جابه‌جایی را می‌توان بر حسب توابع شکل به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & \cdot & N_r & \cdot & N_r & \cdot & N_i & \cdot & N_o & \cdot & N_i & \cdot \\ \cdot & N_i & \cdot & N_r & \cdot & N_r & \cdot & N_i & \cdot & N_o & \cdot & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \vdots \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (5-2-8)$$

در جایی که توابع شکل از جمع ضرایبی که در هر یک از عبارات u_i در معادله‌ی (۸-۲-۲) ضرب شده‌اند حاصل می‌شوند. برای مثال، از جمع کلیه‌ی ضرایبی که در u_1 در معادله‌ی (۸-۲-۳) ضرب می‌شوند، N_1 حاصل می‌شود. توابع شکل یاد شده برابرند با:

$$N_1 = 1 - \frac{3x}{b} - \frac{3y}{h} + \frac{2x^2}{b^2} + \frac{4xy}{bh} + \frac{2y^2}{h^2} \quad N_2 = \frac{-x}{b} + \frac{2x^2}{b^2}$$

$$N_3 = \frac{-y}{h} + \frac{2y^2}{h^2} \quad N_4 = \frac{4xy}{bh} \quad N_5 = \frac{4y}{h} - \frac{4xy}{bh} - \frac{4y^2}{h^2} \quad (8-2-6)$$

$$N_6 = \frac{4x}{b} - \frac{4x^2}{b^2} - \frac{4xy}{bh}$$

از جای‌گزینی معادله‌ی (۸-۲-۵) در معادله‌ی (۸-۱-۱۰)، و مشتق‌گیری نسبت به u و v داریم:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}d \quad (8-2-7)$$

در جایی که \underline{B} در قالب معادله‌ی (۸-۱-۱۷) بوده به قسمی که β ها و γ های حاصل در رابطه‌ی (۸-۱-۱۷) برابرند با:

$$\beta_1 = -3h + \frac{4hx}{b} + 4v \quad \beta_2 = -h + \frac{4hx}{b} \quad \beta_3 = 0$$

$$\beta_4 = 4y \quad \beta_5 = -4y \quad \beta_6 = 4h - \frac{4hx}{b} - 4y$$

$$\gamma_1 = -3b + 4x + \frac{4by}{h} \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = -b + \frac{4by}{h} \quad (8-2-8)$$

$$\gamma_4 = 4x \quad \gamma_5 = 4b - 4x - \frac{4by}{h} \quad \gamma_6 = -4x$$

β ها و γ های به دست آمده، خاص المان مندرج در شکل ۸-۳ می‌باشند. مخصوصاً، اگر معادلات (۸-۱-۱) و (۸-۱-۱۷) در معادله‌ی (۸-۲-۷) جای‌گزین شوند، داریم:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2A} [\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4 + \beta_5 u_5 + \beta_6 u_6 + \beta_7 u_7]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2A} [\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 + \gamma_4 v_4 + \gamma_5 v_5 + \gamma_6 v_6 + \gamma_7 v_7]$$

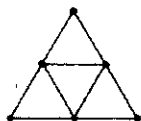
$$\gamma_{31} = \frac{1}{2A} [\gamma_1 u_1 + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_7 v_7]$$

حال، در المانی با ضخامت ثابت، می‌توان از جای‌گزینی معادلات (۸-۲-۸) در معادله‌ی (۸-۱-۱۷) برای تعیین B ، و سپس از جای‌گزینی B در معادله‌ی (۸-۱-۱۶)، عبارات لازم را به کمک حساب دیفرانسیل، جهت انتگرال‌گیری و تعیین ماتریس سختی مهیا نمود. عبارت صریح ماتریس سختی 12×12 ، که دست‌یابی به آن طاقت‌فرسا است، در این‌جا داده نشده است. عبارت ماتریس سختی برای المان‌هایی با مرتبه‌ی بالاتر در مراجع [۱] و [۲] یافت می‌شوند.



۳-۸ مقایسه‌ی المان‌ها

به ازای تعداد مشخصی از گره‌ها، عموماً جابه‌جایی و تنش واقعی به دست آمده از المان LST، بهتر از نتایجی است که از تقسیم المان LST به المان‌های کوچک‌تر CST حاصل می‌شوند. برای مثال، استفاده از یک المان LST منجر به نتایج بهتری در مقایسه با چهار المان CST با همان تعداد گره (شکل ۸-۴)، و در نتیجه همان تعداد درجه‌های آزادی می‌شود (به‌جز مواقعی که تنش در المان ثابت است).



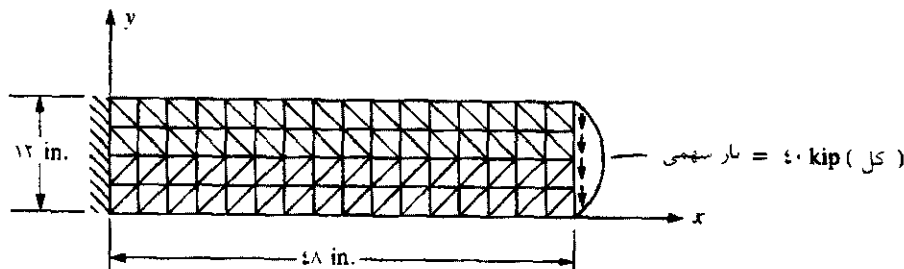
(a)



(b)

شکل ۸-۴ المان مثلثی شکل اولیه (a) چهار CST و (b) یک LST

حال به منظور مقایسه‌ی CST فصل ۶ و LST این فصل، نتایج زیر را ارائه می‌کنیم. تیرآهن یک سر گیرداری را که تحت تأثیر بار سهمی شکل مطابق شکل ۵-۸ قرار گرفته است در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $E = 30 \times 10^6$ psi، $\nu = 0.25$ ، و $t = 1/16$ in. است.



شکل ۵-۸ تیرآهن یک سر گیردار مورد استفاده در مقایسه‌ی المان‌های CST و LST با شبکه بندی 4×16

جدول ۸-۱ نمایانگر نتایجی است که به ازای حالات مختلف با استفاده از المان‌های CST و LST حاصل شده است. جدول ۸-۲، خیز در انتهای آزاد (نوک) تیرآهن مدل سازی شده و تنش σ_x را به ازای المان‌های مختلف با هم مقایسه می‌کند. از جدول ۸-۲ ملاحظه می‌شود که با افزایش درجه‌های آزادی در هر المان مثلثی شکل، نتایج سه دست آمده بهتر به سمت جواب‌های واقعی همگرا می‌شوند. (نتایج ناشی از حالت ۱-A را با ۲-A، و ۱-B را با ۲-B مقایسه کنید). به ازای تعداد خاصی از گره‌ها، تحلیل مبتنی بر LST نتایج بهتری را در مقایسه با تحلیل مبتنی بر CST ارائه می‌کند (حالت ۱-A را با ۱-B مقایسه کنید).

جدول ۸-۱ مدل‌های مورد استفاده در مقایسه‌ی نتایج حاصل از مدل سازی تیرآهن یک سرگیردار شکل ۸-۵ توسط المان‌های CST و LST

تعداد المان‌های مثلثی شکل	تعداد درجات آزادی n_d	تعداد گره‌ها	سری محاسبات انجام شده
۱۲۸ CST	۱۶۰	۸۵	شبه‌ی ۱۴×۱۶-A
۵۱۲ CST	۵۷۶	۲۹۷	۲۸×۳۲-A
۳۲ LST	۱۶۰	۸۵	۱۲×۸-B
۱۲۸ LST	۵۷۶	۲۹۷	۲۴×۱۶-B

جدول ۸-۲ مقایسه‌ی نتایج ناشی از مدل سازی تیرآهن یک سرگیردار شکل ۸-۵ توسط المان‌های CST و LST

اجرا	n_d	پهنای باند n_b	خیز در انتها (in.)	σ_x (ksi)	موقعیت (in.) x, y
۱-A	۱۶۰	۱۴	-۰/۲۹۵۵۵	۶۷/۲۳۶	۲/۲۵۰, ۱۱/۲۵۰
۲-A	۵۷۶	۲۲	-۰/۳۳۸۵۰	۸۱/۳۰۲	۱/۱۲۵, ۱۱/۶۳۰
۱-B	۱۶۰	۱۸	-۰/۳۳۴۷۰	۵۸/۸۸۵	۴/۵۰۰, ۱۰/۵۰۰
۲-B	۵۷۶	۲۲	-۰/۳۵۱۵۹	۶۹/۹۵۶	۲/۲۵۰, ۱۱/۲۵۰
حل واقعی			-۰/۳۶۱۳۳	۸۰/۰۰۰	۰, ۱۲

پهنای باند در پیوست ۴-B تشریح شده است.

به هر حال، یکی از دلایلی که مقادیر تنش پیش بینی شده ی σ_x توسط مدل ۱-B LST، به دقت مقادیر به دست آمده از مدل ۱-A CST نیست به شرح زیر می باشد. باید به خاطر داشت که تنش در مرکز المان محاسبه می شود. ضمن توجه به جدول، ملاحظه می شود که محل تنش خمشی به دست آمده در مدل ۱-A CST، در مقایسه با ۱-B LST، به تکیه گاه و سطح بالایی نزدیک تر است. همان طور که بر اساس تئوری کلاسیک، به ازای بار اعمال شده ای به سمت پائین، تنش خمشی در تیر آهن این مثال، به صورت خطی از مرکز سطح به سمت بالا افزایش می یابد، لذا انتظار می رود تا بیش ترین تنش در سطح بالایی تیر رخ دهد؛ بنابراین، در مدل ۱-A، با المان های بیش تر و کوچک تر (هشت المان در امتداد ارتفاع سطح مقطع تیر)، مرکز سطح المان (۰/۷۵ in. از بالا) در مقایسه با مدل ۱-B با المان های کم تر (دو المان در امتداد ارتفاع سطح مقطع با فاصله ای برابر ۱/۵ in. از سطح بالایی) به سطح بالایی نزدیک تر است. متشابهاً، از مقایسه ی ۲-A با ۲-B LST، همین روند مشاهده می شود - جابه جایی های سطح بالایی توسط مدل LST دقیق تر پیش بینی شده در حالی که تنش هایی که در مرکز هر المان محاسبه می شوند سبب می شوند تا مدل ۲-A دقیق تر از مدل LST، تنش ها را به دلیل موقعیتی که در آن گزارش می شوند، پیش بینی نماید.

اگرچه المان CST در مدل سازی نسبتاً ضعیف است، اما از جدول ۸-۲ ملاحظه می شود که از این المان می توان در خمش نیز استفاده نمود - مشروط بر آن که از تعداد المان های کافی در امتداد ارتفاع سطح مقطع تیر استفاده شود. به طور کلی، نتایج حاصل از هر دو المان LST و CST به اندازه ی کافی در تحلیل مسائل تنش / کرنش صفحه ای از صحت کافی برخوردار می باشند مشروط بر آن که از تعداد کافی المان استفاده شده باشد. اگرچه از این المان اساساً در مراحل تغییر المان ها در مدل سازی استفاده می شود

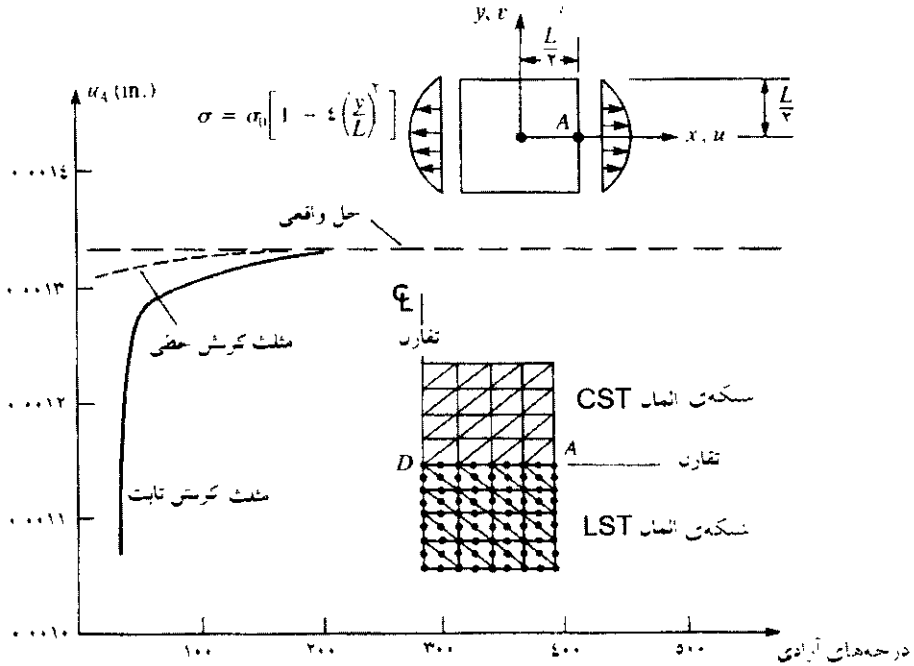
(عموماً در هنگام ایجاد شبکه‌ی المان‌ها)، ولی برنامه‌های تجاری زیادی، به منظور تحلیل مسائل تنش / کرنش صفحه‌ای، این دو المان را در خود جای داده‌اند. عموماً، از المان چهار ضلعی ایزوپارامتریک تنش / کرنش صفحه‌ای که در فصل ۱۰ تشریح خواهد شد در بیش‌تر برنامه‌های تجاری استفاده می‌شود.

همچنین باید توجه داشت که جواب‌های حاصل از روش اجزای محدود پیوسته کم‌تر از (یا برابر با) جواب‌های واقعی است؛ زیرا چنانچه از فرمول‌بندی جابه‌جایی در روش اجزای محدود استفاده شود، مدل حاصل عموماً سخت‌تر از مدل واقعی است. (دلیل سخت‌تر بودن مدل در بخش‌های ۳-۱۰ و ۷-۳ تشریح شد.) اثبات این ادعا را می‌توان در مراجع [۴-۷] جست‌وجو نمود.

نهایتاً، در شکل ۸-۶، مقایسه‌ی مدل‌های CST و LST در ورق‌ی که تحت بارهای لوله‌ای سهمی شکل قرار گرفته است (در مرجع [۸]) نشان داده شده است. بر اساس شکل ۸-۶، نتایج حاصل از مدل LST برای جابه‌جایی افقی نقطه‌ی A سریعتر از نتایج مشابه از مدل LST به سمت جواب‌های واقعی همگرا می‌شوند. در هر حال، مدل CST، مدل قابل قبولی حتی به ازای درجه‌های آزادی نسبتاً کم است. برای مثال، مدلی از CST با ۱۰۰ گره (۲۰۰ درجه‌ی آزادی) اغلب نتایجی را با همان دقت مدل LST با همان تعداد درجه‌های آزادی از خود نشان می‌دهد.

در خاتمه، نتایج حاصل از جدول ۸-۲ و شکل ۸-۶ دلالت بر این مسأله می‌نمایند که در تحلیل‌های تنش صفحه‌ای که در آن‌ها از تعداد نسبتاً کمی گره استفاده شده باشد، مدل LST بر مدل CST ارجعیت دارد. در هر حال، چنانچه از المان‌های زیادی استفاده شود، کاربرد المان‌های مثلثی شکل مرتبه‌ی بالاتر، همانند LST، مزیت قابل‌ذکری

نداشته، به ویژه هنگامی که هزینه‌ی تشکیل ماتریس سختی، پهنای باند معادلات، و مشکلات دیگری که در مدل سازی وجود دارند، مد نظر باشد.



شکل ۸-۶ ورقه‌ی بار لبه‌ای سهمی شکل؛ مقایسه‌ی نتایج حاصل از المان‌های مثلثی

شکل. (Gallagher, R. H. *Finite Element Analysis Fundamentals*, © 1975, pp.

269-270. با کسب اجازه از (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ

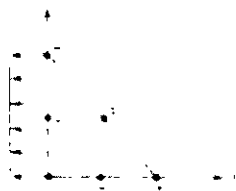
- [1] Pederson, P., "Some Properties of Linear Strain Triangles and Optimal Finite Element Models," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, pp. 415-430, 1973.
- [2] Tocher, J. L., and Hartz, B. J., "Higher-Order Finite Element for Plane Stress," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 93, No. EM4, pp. 149-174, Aug. 1967.
- [3] Bowes, W. H., and Russell, L. T., *Stress Analysis by the Finite Element Method for Practicing Engineers*, Lexington Books, Toronto, 1975.
- [4] Fraeijs de Veubeke, B., "Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis," *Matrix Methods of Structural Analysis*, AGAR-Dograph 72, B. Fraeijs de Veubeke, ed., Macmillan, New York, 1964.
- [5] McLay, R. W., *Completeness and Convergence Properties of Finite Element Displacement Functions: A General Treatment*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper No. 67-143, AIAA 5th Aerospace Meeting, New York, 1967.
- [6] Tong, P., and Pian, T. H. H., "The Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 3, pp. 865-879, 1967.
- [7] Cowper, G. R., "Variational Procedures and Convergence of Finite-Element Methods," *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S. J. Fenves, N. Perrone, A. R. Robinson, and W. C. Schnobrich, eds., Academic Press, New York, 1973.
- [8] Gallagher, R., *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [9] Zienkiewicz, O. c., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1977.

مسائل

۱-۸ توابع شکلی را که در معادله‌ی (۸-۲-۶) داده شده ارزیابی کنید. تغییرات هر تابع را بر سطح المان مثلثی شکلی که در نمودار ۸-۳ نشان داده شده رسم کنید.

۲-۸ با استفاده از نتایج بخش ۸-۲، کرنش‌های ϵ_1 ، ϵ_2 و γ_{xy} را در المان مندرج در شکل ۸-۳ تعیین نمایید. کرنش‌های یاد شده را در مرکز المان ارزیابی نموده و سپس تنش‌ها را بر حسب E و ν در مرکز سطح المان تعیین کنید. فرض کنید حالت تنش صفحه‌ای حاکم است.

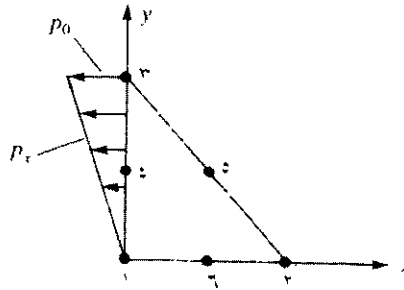
۳-۸ برای المان مندرج در شکل ۸-۳ (مجدداً در شکل ۸P-۳ نشان داده شده است) که تحت بارگذاری یکنواختی بر لبه‌ی قائم قرار گرفته، با استفاده از معادله‌ی (۶-۳-۷)، نیروهای گره‌ای جای‌گزین را بیابید. فرض کنید ضخامت المان برابر t است.



شکل ۸P-۳

۴-۸ برای المان مندرج در شکل ۸-۳ (در قالب شکل ۸P-۴ نشان داده شده است) که تحت بارگذاری حطی متغیری بر لبه‌ی قائم قرار گرفته، با استفاده از معادله‌ی (۶-۳-۷)، نیروهای گره‌ای جای‌گزین را بیابید. نتایج به دست آمده را

با نتایج حاصل از مسأله‌ی ۶-۹ مقایسه کنید. آیا انتظار چنین نتایجی می‌رود؟ شرح دهید.

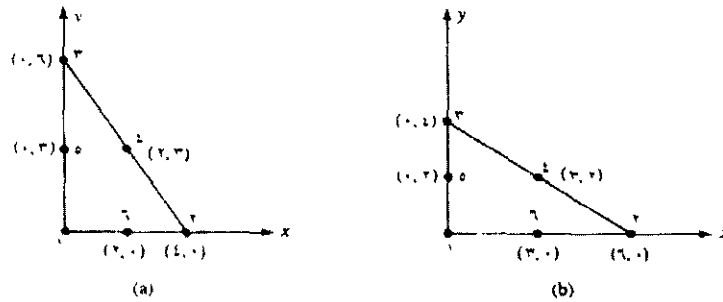


شکل ۸-۴

۵-۸ در المان‌های کرنش خطی مندرج در شکل ۸-۵، کرنش‌های ϵ_1 ، ϵ_2 و γ_{xy} را تعیین کنید. تنش‌های σ_x ، σ_y و τ_{xy} را در مرکز سطح المان تعیین کنید. مختصات گره‌ها بر حسب اینچ بیان شده‌اند. در هر دو المان، فرض کنید $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $\nu = 0.25$ ، $t = 0.25 \text{ in}$. حکم‌فرما است. جابه‌جایی‌های کل برابرند با:

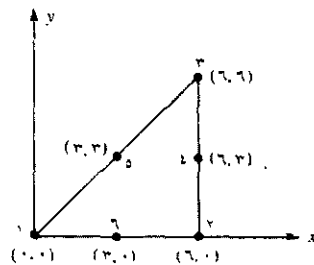
$u_1 = 0.0$	$v_1 = 0.0$
$u_2 = 0.001 \text{ in}$	$v_2 = 0.002 \text{ in}$
$u_3 = 0.0005 \text{ in}$	$v_3 = 0.0002 \text{ in}$
$u_4 = 0.0002 \text{ in}$	$v_4 = 0.0001 \text{ in}$
$u_5 = 0.0$	$v_5 = 0.0001 \text{ in}$
$u_6 = 0.0005 \text{ in}$	$v_6 = 0.001 \text{ in}$

(راهنمایی: از نتایج بخش ۸-۲ استفاده کنید)



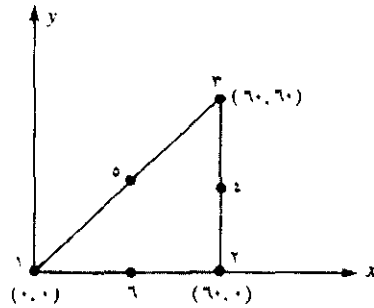
شکل ۵-۸

۶-۸ در المان‌های کرنش خطی مندرج در شکل ۵-۸، کرنش‌های ϵ_x ، ϵ_y ، و γ_{xy} را تعیین کنید. سپس، تنش‌های σ_x ، σ_y ، و τ_{xy} را در مرکز سطح المان تعیین کنید. مشخصات گره‌ها بر حسب میلی‌متر بیان شده‌اند. فرض کنید $E = 210 \text{ GPa}$ ، $\nu = 0.25$ ، $t = 10 \text{ mm}$. فرض کنید حالت تنش صفحه‌ای حکم‌فرما است. از جابه‌جایی‌های گره‌ای داده شده در شکل ۵-۸ استفاده کنید (پس از تبدیل به میلی‌متر). باید به خاطر داشت که در این جا نمی‌توان از β ‌ها و γ ‌های داده شده در مثال ۲-۸ استفاده نمود چرا که موقعیت المان مندرج در شکل ۵-۸ با موقعیت المانی که در شکل ۳-۸ نشان داده شده فرق می‌کند.



شکل ۶-۸

۷-۸ در مثلث کرنش خطی مندرج در شکل ۷-۸P، توابع شکل را تعیین کنید. سپس ماتریس B را ارزیابی کنید. واحدها بر حسب میلیمترند.



شکل ۷-۸P

۸-۸ مسأله‌ی ۷-۲ را به کمک المان LST حل کنید. نتایج را با هم مقایسه کنید.
 ۹-۸ برنامه‌ای رایانه‌ای نوشته تا به کمک المان LST بتوان مسائل تنش صفحه‌ای را حل نمود.

فصل ۹

المان‌های متقارن محور

مقدمه

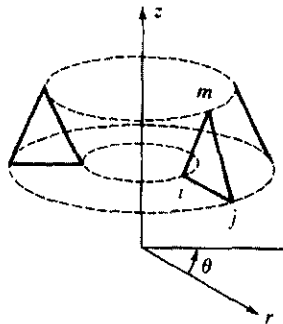
در فصل‌های قبل، المان‌های خطی و یک بعدی (فصل‌های ۲ الی ۵)، و المان‌های دو بعدی (فصل‌های ۶ الی ۸) مد نظر قرار گرفتند. در این فصل نوعی خاص از المان دو بعدی که المان متقارن محور نامیده می‌شود بررسی خواهد شد. این المان برای تحلیل اجسامی که دارای هندسه و بارگذاری متقارنی حول یک محور می‌باشند مناسب است. مسائلی از قبیل توده‌های خاک با بارگذاری ستونی، یا مخازن تحت فشار با دیواره‌ی ضخیم را اغلب می‌توان با استفاده از المانی که در این فصل به دست می‌آید تحلیل نمود.

ابتدا بحث را با استخراج ماتریس سختی ساده‌ترین المان متقارن محور، هلالی مثلثی شکل، که مقطع عمودی آن صفحه‌ی مثلثی شکلی است، آغاز می‌کنیم.

سپس حل دستی مخزن تحت فشاری را با دیواره‌ی ضخیم، به منظور تشریح کاربرد المان‌های متقارن محور ارائه می‌کنیم. پس از آن مسائل بزرگ‌تری را که با استفاده از المان متقارن محور مدل سازی شده‌اند تشریح می‌کنیم.

۱-۹ استخراج ماتریس سختی

در این بخش ماتریس سختی و ماتریس‌های نیروهای حجمی و خارجی در المان متقارن محور استخراج می‌شوند. به هر حال، قبل از استخراج، بعضی از مفاهیم اولیه را که مقدمه‌ی فهم نحوه‌ی استخراج است ارائه می‌کنیم. المان‌های متقارن محور، المان‌های مثلثی شکل حلقوی هستند که هر المان نسبت به هندسه‌ی جسم و بارگذاری حول محوری همانند z در شکل ۱-۹، متقارن است؛ بنابراین، محور z محور تقارن یا محور دوران نامیده می‌شود. هر یک از مقاطع عمودی این المان یک مثلث است. همان‌طور که در شکل ۱-۹ نشان داده شده، نقاط گره‌ای این المان، خطوط دایره‌ای شکلی را تشکیل می‌دهند.



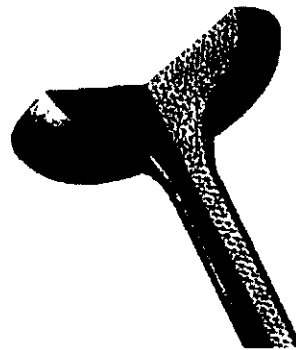
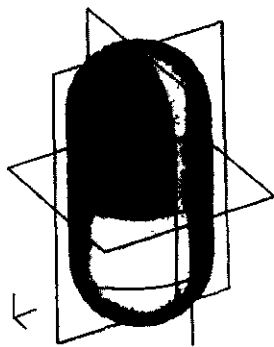
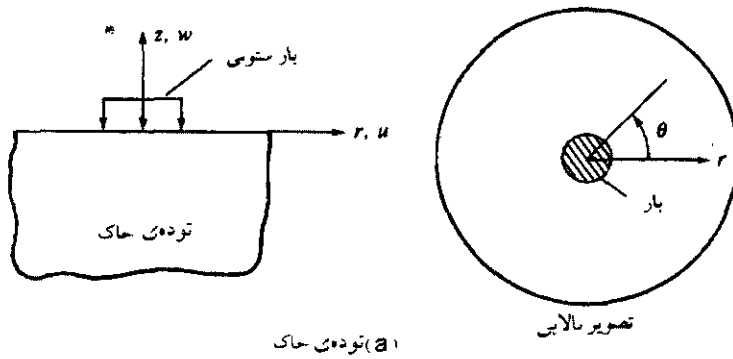
شکل ۱-۹ نمونه‌ای از یک المان متقارن محور ijm

در مسائلی با تنش صفحه‌ای، تنش‌ها فقط در صفحه‌ی $r-\theta$ قرار دارند. در مسائل متقارن محور، جابه‌جایی‌های شعاعی باعث ایجاد کرنش‌های محیطی شده و در نتیجه، تنش‌های σ_r ، σ_θ و $\tau_{r\theta}$ حاصل می‌شوند در جایی که r ، θ و z به ترتیب دلالت بر جهت‌های شعاعی، محیطی، و محوری می‌نمایند. در سیستم‌هایی که حول یک محور متقارند، عموماً از المان‌های مثلثی شکل هلالی استفاده می‌شود؛ چرا که استفاده از آن‌ها آسان بوده و می‌توان سطوح پیچیده را توسط آن‌ها شبیه‌سازی نمود. برای مثال، فضای نیمه‌متناهی متقارن محوری را که توسط سطح دایره‌ای شکلی (بارگذاری ستونی) همانند شکل ۹-۲(a) بارگذاری شده، مخزن فشار گنبدی شکلی را که در شکل ۹-۲(b) نشان داده شده، و یا ساق سوپاپ موتوری را که در شکل ۹-۲(c) نشان داده شده می‌توان با استفاده از المان متقارن محور استخراج شده در این فصل حل نمود.

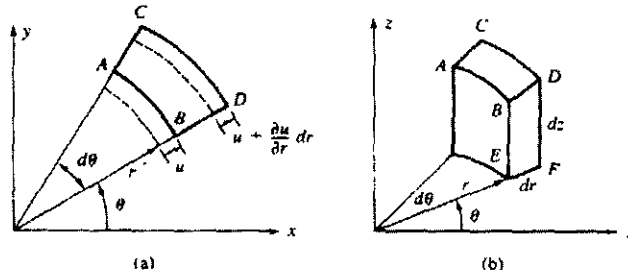
به دلیل تقارن حول محور z ، تنش‌ها مستقل از θ می‌باشند؛ بنابراین، کلیه مشتق‌ها نسبت به θ حذف شده و مؤلفه‌ی v جابه‌جایی (مماس بر جهت θ)، کرنش‌های برشی γ_{rz} و $\gamma_{\theta z}$ ، و تنش‌های برشی τ_{rz} و $\tau_{\theta z}$ ، همگی برابر صفرند.

شکل ۹-۳ نمایانگر المان حلقه‌ای شکل متقارن محوری است که همراه با سطح مقطع آن به منظور معرفی حالت کلی کرنش در یک المان متقارن محور از آن استفاده می‌شود. راحت‌ترین راه آن است تا جابه‌جایی المانی همانند $ABCD$ در مختصات استوانه‌ای شکل در صفحه‌ی سطح مقطع تشریح شود. سپس فرض می‌شود تا u و w به ترتیب معرف جابه‌جایی‌ها در جهت شعاعی و طولی باشند. لبه‌ی AB به میزان u و لبه‌ی CD به میزان $u + (\partial u / \partial r) dr$ در راستای شعاعی جابه‌جا می‌شوند. لذا کرنش عمودی در جهت شعاعی برابر است با:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (a1-1-9)$$



شکل ۹-۲ مثال‌هایی از مسائل متقارن محور؛ (a) جسم نیمه منتهای (توده‌ی خاک) مدل شده توسط المان‌های متقارن محور، (b) مخزن فشار گنبدی، و (c) ساق سوپاپ یک موتور



شکل ۹-۳ (a) تصویر المان در یک صفحه (b) المان متقارن محور

به‌طور کلی، کرنش در جهت مماسی به جابه‌جایی مماسی v و جابه‌جایی شعاعی u بستگی دارد. اما لازم به یادآوری است که تغییر مکان مماسی v در مسائل متقارن محور برابر صفر است. لذا کرنش مماسی فقط تابعی از جابه‌جایی شعاعی است. با حضور جابه‌جایی شعاعی u ، طول جدید کمان \widehat{AB} برابر $(r+u)d\theta$ بوده و کرنش مماسی برابر است با:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r} \quad (b1-1-9)$$

سپس، به منظور محاسبه‌ی کرنش طولی و کرنش برشی، المان طولی $BDEF$ را در نظر می‌گیریم. در شکل ۹-۴، نشان داده شده است که این المان در نقطه‌ای همانند E به میزان u و در جهت‌های شعاعی و طولی و مازاد بر آن، به میزان $(\partial w / \partial z) dz$ در امتداد BE ، و $(\partial u / \partial r) dr$ در امتداد EF جابه‌جا شده است. مضافاً، با در نظر گرفتن خطوط EF و BF ، ملاحظه می‌شود که F نسبت به E به میزان $(\partial w / \partial r) dr$ به سمت بالا حرکت نموده و نقطه‌ی B نسبت به E به میزان $(\partial u / \partial z) dz$ به سمت راست

حرکت می‌کند. مجدداً، بر اساس تعاریف اولیه‌ی کرنش عمودی و برشی، کرنش عمودی طولی برابر است با:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (c1-1-9)$$

و کرنش برشی در صفحه‌ی $r-z$ برابر است با

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (d1-1-9)$$

برای راحتی، از خلاصه کردن روابط کرنش / جابه‌جایی معادلات (d-a1-1-9)، در یک معادله، داریم:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (e1-1-9)$$

در یک جسم همسانگرد، روابط تنش / کرنش که از ساده کردن روابط تنش / کرنش قید شده در پیوست C حاصل می‌شوند برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (2-1-9)$$

تئوری استخراج مربوطه، شبیه به مراحل اولیه است که در مورد تنش / کرنش صفحه‌ای در فصل ۶ گفته شد.