



educo.ir

دانلود سوالات آزمون‌های مختلف



دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۵

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مسأله‌های تشریحی	سؤالات چند گزینه‌ای
۲۷۰	۶	-

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۷۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

آزمون مرحله دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۹ و ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند. دفترچه پیش‌رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه‌حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که سؤالات راه‌حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه‌حل صحیحی برای سؤالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد. با توجه به جنبه آموزشی این راه‌حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه‌حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که براساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل واضح بودن در این راه‌حل‌ها نیامده باشند.

۱- فرض کنید $0 < a \leq b \leq c$ ، اعدادی حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

(۷ نمره)

۲- مثلث ABC با دایره ی محیطی w_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطه A مماسی بر دایره w_1 رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه E قطع کند. دایره w_2 را طوری رسم می‌کنیم که در نقطه C بر ضلع AC مماس باشد و هم چنین از نقطه B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطه F قطع می‌کند. از نقطه E مماس EK را بر دایره w_2 رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایره w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهار ضلعی MFAK محاطی است.

(۷ نمره)

۳- فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم‌ها را در این شورا براساس رای موافق و مخالف اعضاء گرفته می‌شود. یک ((روش قابل قبول تصمیم‌گیری)) باید دارای دو شرط زیر باشد:

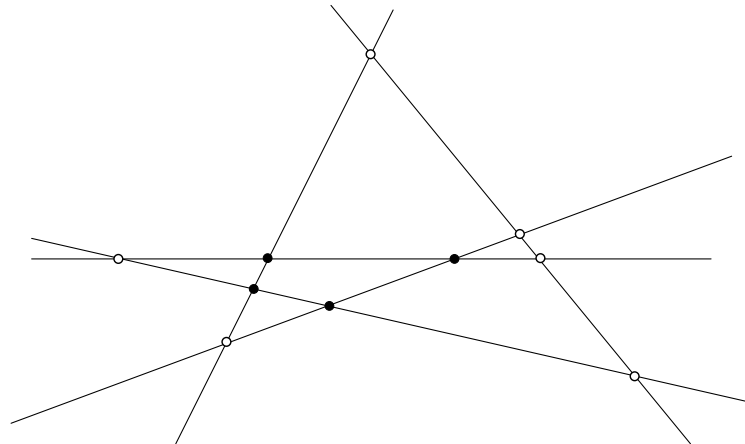
- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضاء مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجه نهایی باید باز هم مثبت باشد.
 - شرط تقارن: اگر همه اعضاء نظر خود را تغییر دهند، نتیجه نهایی نیز باید تغییر کند.
- یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری، ((رای‌گیری وزن دار)) است. به این ترتیب که به اعضاء وزن‌های نامنفی w_1, w_2, \dots, w_n تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رای دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ ، برای هر $i \geq 2$ ، $w_i = 1$ ، تصمیم‌گیری براساس رای اکثریت است. مگر در حالت برابری آراء که رای نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.
- یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رای‌گیری وزن دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

(۷ نمره)

۴- در صفحه $n \geq 3$ خط دو به دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه‌تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. یک نقطه تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل رو به رو ۵ خط با ۴ نقطه تقاطع درونی نشان داده شده است که با دوایر توپر مشخص شده‌اند.)

نشان دهید دست کم به تعداد $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

(۴ نمره)



۵- چهارضلعی $ABCD$ و نقطه T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیم‌ساز زاویه $\angle BCD$ است؛
 همچنین $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$. ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

(۷ نمره)

۶- همهی توابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y ، مقدار $f(x) + f(y)$ بر $x + y$ بخش پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی $x \geq 1395$ ، نابرابری $2f(x) \leq x^3$ برقرار است.

(۷ نمره)