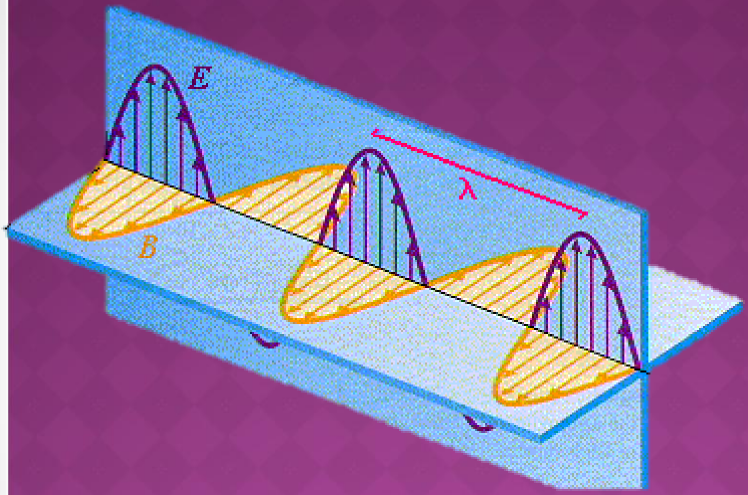
دانشگاه شاهد

الکترومغناطیس



مدرس:

سجاد محمد علی نژاد

بسم ا... الرحمن الرحیم

طرح درس

نام درس	الکترومغناطیس
مقطع	کارشناسی
مطالب پیش نیاز	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، فیزیک الکتریسیته و مغناطیس
منابع درس	1- جزوه 2- D. K. Cheng, *Wave and Field Electromagnetics*. Addison-Wesley, 2th edition, 1989. ۳- احمد صفایی، الکترومغناطیس مهندسی، شیخ بهایی، ۱۳۸۷ 4- R. Plonsey and R.Collin, *Principle and Application of Electromagnetic Field*, Magraw-Hill, 2th edition, 1961. 5- F. T. Ulaby and ..., *Fundamentals of Applied Electromagnetics*, Pearson, 6th edition, 2010. 6- W. H. Hayt and J. A. Buck, *Engineering Electromagnetics*, Magraw-Hill, 8th edition, 2011.
اهداف درس	هدف این درس آموختن ریاضیات مورد نیاز برای درک معادلات ماکسول و به عبارتی تئوری الکترومغناطیس به دانشجویان مهندسی برق است .از دیگر اهداف این درس آموختن روش های رایج برای حل مسائل کلاسیک میدان های الکترو استاتیک ، مگنو استاتیک و شبه استاتیک است . که برای آن، فرا گرفتن فیزیک مواد رسانا، عایق، و مواد مغناطیسی که در مهندسی برق بکار گرفته می شوند و بررسی رفتار آن ها در مجاورت میدان نیز باید مورد بررسی قرار گیرد.
مباحث	۱ - آنالیز برداری • دستگاه مختصات متعامد • انتگرال های برداری • مشتقات برداری(گرادیان، دیورژانس و کرل) ۲ - میدان الکتریکی در فضای آزاد • قانون کولن • قانون گوس • پتانسیل الکتریکی ۳ - میدان الکتریکی در اجسام

الکتریک در میدان الکتریکی

- جریان الکتریکی دائم و هادی در میدان الکتریکی
- شرایط مرزی در سطح مشترک اجسام
- تئوری تصویر
- ظرفیت و خازن
- انرژی در الکتریسته ساکن

۴ - حل مسائل مقدار مرزی

- حل معادله لاپلاس (در مختصات کارتزین، استوانه ای و کروی)
- حل معادله پواسن

۵ - میدان مغناطیسی در فضای آزاد

- قانون بیوساوار
- قانون آمپر
- پتانسیل مغناطیسی

۶ - میدان مغناطیسی در اجسام

- خواص مواد مغناطیسی
- شرایط مرزی
- مدار مغناطیسی
- انرژی و نیروی مغناطیسی

7 - میدان های متغیر با زمان

نرم افزار کامپیوتری	MATLAB	
نحوه ارزیابی	تکالیف و کوییز	٪۲۰
	امتحان میان ترم	٪۳۰ ۵ آذر
	امتحان پایان ترم	٪۵۰

والعاقبه للمتقین

alinezhad@shahed.ac.ir
smohammadalinezhad@yahoo
sajad.man@gmail

فصل اول

آنالیز برداری

۱-۱ مقدمه: کمیت‌ها در الکترومغناطیس دو دسته‌اند: یکی کمیت‌های اسکالر (scalar) که فقط با اندازه مشخص می‌شوند مثل بار الکتریکی، اختلاف پتانسیل، انرژی الکتریکی و ... و دیگری کمیت‌های برداری که هم دارای اندازه هستند و هم جهت، مثل شدت میدان الکتریکی و مغناطیسی، جریان الکتریکی و مغناطیسی و ... .

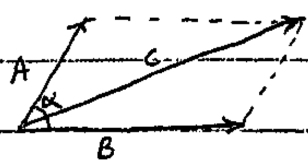
حجم گسترده‌ای از مسائل الکترومغناطیس براساس آنالیز برداری محاسبه می‌گردند. در این فصل بر آنیم تا با آنالیز برداری به صورت گسترده‌تر از گذشته آشنا گردیم.

۲-۱ عملیات برداری:

جمع برداری: جمع چند بردار را می‌توان از روش چندضلعی انجام داد. در این روش از انتهای بردار اول برداری مساوی بردار دوم رسم می‌کنیم. بردار حاصل از اتصال ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار بدست می‌آید.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

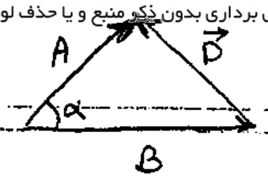
$$|\vec{C}| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|\cos\alpha}$$



تفریق برداری: برحسب جمع برداری به صورت روبرو تعریف می‌شود

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = A + (-\vec{B})$$

$$|\vec{D}| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos\alpha}$$



ضرب های برداری:

ضرب عدد در بردار (ضرب یک اسکالر در بردار)، اگر بردار $\vec{E}$ را در کمیت نرده‌ای q ضرب کنیم، اندازه بردار $\vec{E}$، q برابر شده و بر حسب اینکه q مثبت یا منفی باشد جهت بردار حاصل همانند یا عکس جهت بردار $\vec{E}$ می‌گردد.

ضرب داخلی دو بردار: حاصل آن می‌شود یک عدد که اندازه آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha \qquad 0<\alpha<\pi$$

که α زاویه کوچکتر بین $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و کمتر از π می‌باشد

نکته ۱:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \iff \begin{cases} \vec{A}=0 \ \text{یا}\ \vec{B}=0 \\ \vec{A}\perp\vec{B} \end{cases}$$

عمود بودن دو بردار

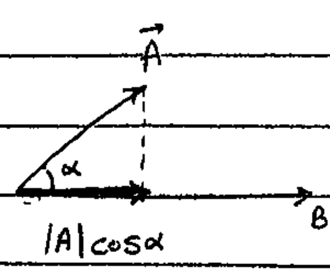
نکته ۲: محاسبه زاویه بین دو بردار

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|A||B|}\right)$$

نکته ۳: ضرب داخلی خاصیت جابجایی و توزیع پذیری دارد:

$$A\cdot B = B\cdot A$$
$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

نکته ۴: ضرب داخلی در واقع برابر است با حاصلضرب اندازه یک بردار در تصویر بردار دیگر بر روی بردار اول



نکته ۵: حاصلضرب دو بردار در دستگاه دکارتی می‌شود.

$$\vec{A} = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
$$\vec{B} = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$$

ضرب خارجی دو بردار: که حاصلش یک بردار است با اندازه $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\alpha$

و جهت آن نیز با قانون دست راست مشخص می‌گردد

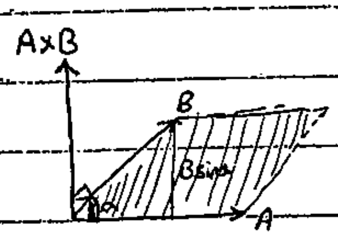
نکته ۱: اگر دو بردار موازی باشند ضرب خارجی آنها برابر صفر است $\alpha = 0 \rightarrow \sin\alpha = 0 \rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0$

نکته ۲: بر اساس قاعده دست راست $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

نکته ۳: ضرب خارجی دو بردار در دستگاه دکارتی

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

نکته ۴: چون $|B|\sin\alpha$ برابر ارتفاع متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای A و B است در نتیجه اندازه $\vec{A}\times\vec{B}$ برابر مساحت متوازی الاضلاع است



تمرین: اگر $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{C}$ آیا همواره $\vec{B} = \vec{C}$؟ در مورد $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\times\vec{C}$ چطور؟

۳- دستگاه های مختصات متعامد راستگرد

اگرچه قوانین الکترومغناطیسی نسبت به دستگاه مختصات تغییری نمی کنند ولی انتخاب دستگاه مختصات مناسب و متناسب با هندسه مسئله موجب سهولت در حل مسائل می گردد.

دستگاه مختصات: هر سه سطح متقاطع در یک نقطه را دستگاه مختصات می گویند. البته سطوح لزوماً نباید صفحه ای باشند.

اگر سه سطح u_1 و u_2 و u_3 را در نظر بگیریم: $u_1 =$ ثابت و $u_2 =$ ثابت و $u_3 =$ ثابت

اگر این سه سطح دو به دو بر یکدیگر عمود باشند یعنی $u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 = 0$

در این صورت به این دستگاه مختصات، دستگاه مختصات متعامد گویند.

اگر بین بردارهای یکه صفحات نظم راستگردی برقرار باشد یعنی از سمت راست حاصلضرب خارجی دو محور برابر محور سوم باشد، دستگاه مختصات را دستگاه مختصات راستگرد می گویند.

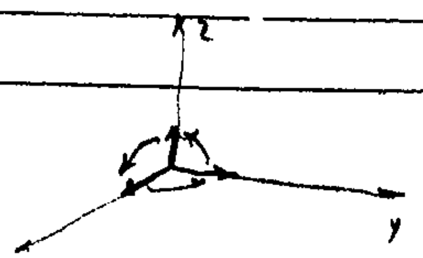
در صورتی که a_{u_1}، a_{u_2}، a_{u_3} بردارهای یکه صفحات u_1 و u_2 و u_3 باشند در یک دستگاه مختصات متعامد راستگرد داریم:

متعامد: $a_{u_1} \cdot a_{u_2} = a_{u_2} \cdot a_{u_3} = a_{u_1} \cdot a_{u_3} = 0$

یکه بودن: $a_{u_1} \cdot a_{u_1} = a_{u_2} \cdot a_{u_2} = a_{u_3} \cdot a_{u_3} = 1$

راستگرد: $a_{u_1} \times a_{u_2} = a_{u_3}$ ، $a_{u_2} \times a_{u_3} = a_{u_1}$

$a_{u_3} \times a_{u_1} = a_{u_2}$



توجه: بردار یکه، برداری با اندازه واحدی باشد. در دستگاه مختصات بردار یکه a_u، برداری با اندازه واحد و عمود بر صفحه (ثابت = u) می باشد. در گذشته همواره بردار یکه را در جهت محور مختصات می دانستیم که البته برای مختصات کارتزین، که تنها با آن سروکار داشتیم، هم صحیح است و برای همه دستگاه های مختصات این تعریف جوابگو نیست. در نتیجه در تعریف عمومی آن می بایستی این بردار عمود بر صفحه مورد نظر باشد.

هر بردار A را می توان به صورت مجموع مولفه های خود در سه جهت مبنا در به صورت زیر نوشت

$$\vec{A} = a_{u_1} A_{u_1} + a_{u_2} A_{u_2} + a_{u_3} A_{u_3}$$

$$n = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$\longrightarrow |A| = \sqrt{A_{u_1}^2 + A_{u_2}^2 + A_{u_3}^2}$$

در آنالیز برداری، نیازمند انتگرال گیری های خطی، سطحی و حجمی هستیم. بدین سبب می بایستی تغییرات دیفرانسیل طولی، سطحی و حجمی را متناسب با دستگاه مختصاتی را که برای حل مسئله انتخاب نموده ایم، بدست آوریم.

دیفرانسیل طولی: در حالت کلی دیفرانسیل طولی از رابطه مقابل بدست می آید $dl_i = h_i \, du_i$

که h_i، ضریب متریک می باشد. در واقع در برخی از دستگاه های مختصات u_i از جنس طول نیست (مثل φ و θ که از جنس زاویه اند نه طول) و می بایستی از ضریبی برای تبدیل تغییرات آنها به تغییرات طولی استفاده نمائیم.

(به عنوان مثال برای φ $dl = r\,d\varphi$ ، برای $\vec{z}$ $dl = dz$)

درنتیجه خواهیم داشت $dl = a_{u_1} dl_1 + a_{u_2} dl_2 + a_{u_3} dl_3$

$$dl = a_{u_1}(h_1 du_1) + a_{u_2}(h_2 du_2) + a_{u_3}(h_3 du_3)$$

دیفرانسیل سطح: دیفرانسیل سطح، سطحی است که بردار a_u متناظر با آن (هم نام آن) بر آن عمود است.

در واقع این سطح در جهت a_u عمود می باشد و مساحت برابر اضلاع بوده و از حاصلضرب تغییرات طولی دو جهت دیگر

بدست می آید $ds_1 = dl_2 dl_3 \, a_{u_1} = h_2 h_3 du_2 du_3 \, a_{u_1}$

$$ds_2 = dl_1 dl_3 \, a_{u_2} = h_1 h_3 du_1 du_3 \, a_{u_2}$$

دیفرانسیل حجم: $dv = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$

دستگاه های مختصات متعامد گسترده بسیاری وجود دارد ولی در بخش های زیر به سه دستگاه متداول در

حل مسائل الکترومغناطیسی می پردازیم

۱.۳. دستگاه مختصات کارتزین (قائم)

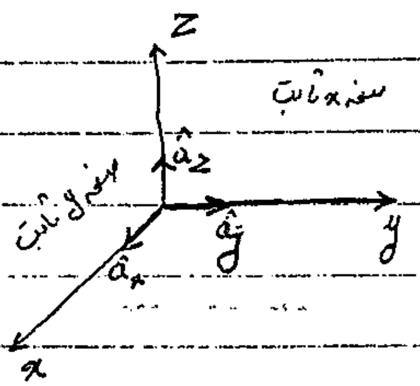
در این دستگاه مختصات سطوح متعامد شامل سه صفحه (x و y و z = ثابت) می باشند و هر نقطه ای

در فضا را می توان از تلاقی این صفحه ها یافت $(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$

همانطور که می دانیم بردارهای یکه بردارهایی با اندازه واحد بوده که بر سطوح متعامد گذرنده از نقطه مورد نظر

عمود باشند و در جهت افزایش مختصات هستند. این بردارها در مختصات کارتزین به ترتیب $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_z$

هستند که به ترتیب عمود بر صفحات x ثابت (صفحه yz) و y ثابت (xz) و z ثابت (xy) می‌باشند



و به ترتیب راستگرد بودن:

$$a_x \times a_y = a_z$$

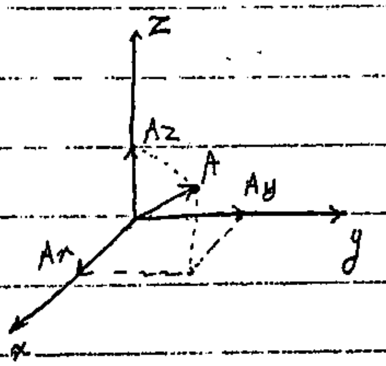
$$a_y \times a_z = a_x$$

$$a_z \times a_x = a_y$$

و به ترتیب متعامد بودن:

$$a_x \cdot a_y = a_x \cdot a_z = a_y \cdot a_z = 0$$

نمایش بردار در دستگاه کارتزین:



$$\vec{A} = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{A}}{|A|}$$

عملیات برداری در دستگاه مختصات کارتزین

$$K\vec{A} = KA_x a_x + KA_y a_y + KA_z a_z$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) a_x + (A_y + B_y) a_y + (A_z + B_z) a_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

دیفرانسیل طولی، سطحی و حجمی:

از آن جائیکه x، y و z از جنس طول می باشند در نتیجه هر سه ضریب تبدیل واحد (یک) و در نتیجه

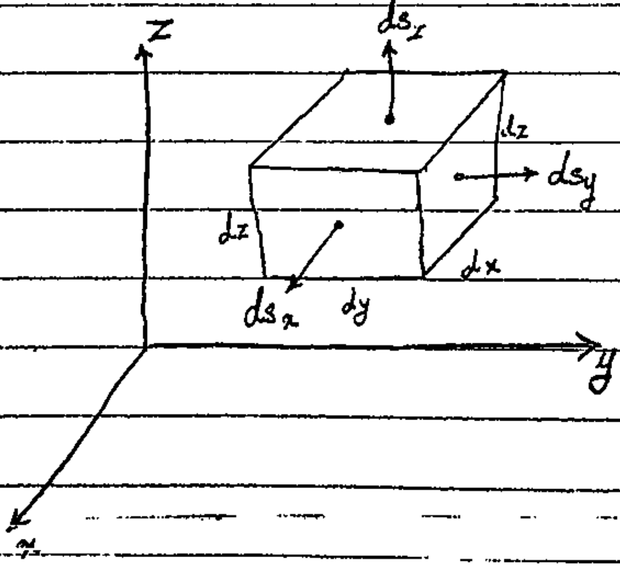
$$h_1=h_2=h_3=1 \longrightarrow dl=dx\,a_x+dy\,a_y+dz\,a_z$$

و برای دیفرانسیل سطحی داریم (مطابق شکل زیر)

$ds_x=dy\,dz\,\hat{a}_x$ سطح عمود بر بردار $\hat{a}_x$ است (در جهت a_x)

$ds_y=dx\,dz\,\hat{a}_y$ ؛ $ds_z=dx\,dy\,\hat{a}_z$

و دیفرانسیل حجمی می شود $dv=dx\,dy\,dz \longrightarrow$ جهت نداریم



مثال: بردارهای $A=3a_x+8a_y+a_z$ و $B=a_x-6a_y+5a_z$ داده شده اند. مطلوبست

تعیین بردار یکه C: الف) $C \parallel A$ ب) $C \perp A,B$

الف) چون $C \parallel A$ است در نتیجه داریم $\vec{C}\times\vec{A}=0$

$$\vec{C}\times\vec{A}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 3 & 8 & 1 \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=a_x(8c_z-c_y)+a_y(3c_z-c_x)+a_z(3c_y+8c_x)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases} 8c_z-c_y=0 \\ 3c_z-c_x=0 \\ 3c_y+8c_x=0 \end{cases}$$

از طرفی داریم $\xrightarrow[\text{یکه است}]{c}$ $c_x^2+c_y^2+c_z^2=1$

درنتیجه با حل معادلات بالا خواهیم داشت

$$c_y=8c_z=-\frac{8}{3}c_x$$

$$c_x=\frac{3}{\sqrt{74}}\qquad c_y=\frac{8}{\sqrt{74}}\qquad c_z=\frac{1}{\sqrt{74}}$$

ب) برداری که عمود بر بردارهای A و B باشد بردار $A\times B$ است که اگر بر اندازه ی آن تقسیم شود به بردار یکه تبدیل می گردد.

$$\vec{c}=\pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\pm\frac{46\hat{a}_x-14\hat{a}_y-26\hat{a}_z}{\sqrt{46^2+14^2+26^2}}$$

۱-۳-۲ دستگاه مختصات استوانه ای

در این دستگاه مختصات سطوح متعامد شامل سه صفحه (ρ و φ و z ثابت) می باشند و هر نقطه ای در فضا را می توان از تلاقی این صفحه ها یافت

$$(u_1,u_2,u_3)=(\rho,\varphi,z)$$

در مختصات استوانه ای، نقطه $P(\rho_1,\varphi_1,z_1)$، محل تقاطع سطح استوانه ای با شعاع $\rho=\rho_1$، نیم صفحه ای شامل محور z که با صفحه xz زاویه $\varphi=\varphi_1$ می سازد و صفحه موازی صفحه xy (z ثابت) در نقطه $z=z_1$ است.

برای یافتن بردارهای یکه در این دستگاه، می بایستی ابتدا محور تغییرات را برای ρ و φ و z بیابیم که بتوانیم بردارهای یکه را در جهت آنها محاسبه نماییم. این محور تغییرات (همچون بردار یکه) نسبت به پارامتر مورد نظر فقط تغییر می کنند سایر پارامترها ثابت هستند و از طرفی نیز عمود بر صفحه ی تشکیل دهنده خود هستند.

محور تغییرات ρ:
- سطح ثابت φ ← نیم صفحه
- سطح ثابت z ← صفحه

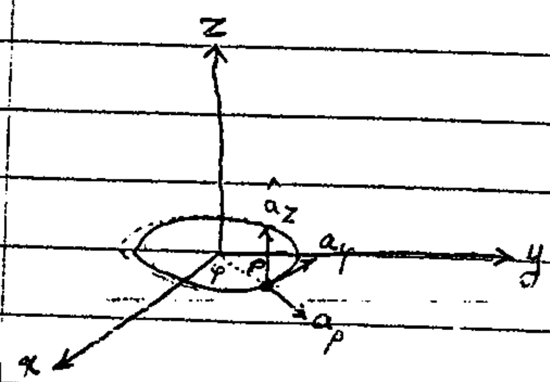
از تقاطع این دو یک نیم خط شعاعی محاسبه می گردد ($\rho>0$)

محور تغییرات φ:
- سطح ثابت ρ ← استوانه توخالی
- سطح ثابت z ← صفحه

از تقاطع این دو یک دایره به دست می آید ← $0<\varphi<2\pi$

محور تغییرات z ← محوری موازی z ($z>0$)

این محورها و بردارهای یکه آنها در شکل زیر نمایش داده شده اند:



$\hat a_\rho$: بردار یکه عمود بر سطح ρ ثابت (یا هم جهت محور ρ)

$\hat a_\varphi$: بردار یکه عمود بر نیم صفحه φ ثابت

$\hat a_z$: بردار یکه هم راستا با محور z (یا عمود بر صفحه z ثابت)

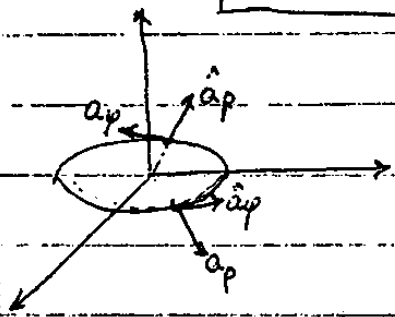
داریم:

$\hat a_\rho \times \hat a_\varphi = \hat a_z$ و $\hat a_\varphi \times \hat a_z = \hat a_\rho$

راستگرد

$\hat a_z \times \hat a_\rho = \hat a_\varphi$ و $a_\rho \cdot a_\varphi = a_\varphi \cdot a_z = a_\rho \cdot a_z = 0$ (تعامد)

نکته مهم: در دستگاه مختصات استوانه ای بردارهای $\hat{a}_\rho$ و $\hat{a}_\varphi$ بردارهای یکه ثابتی نیستند و وقتی از نقطه ای از فضا به نقطه ای دیگر برویم تغییر جهت می دهند. (در واقع به φ وابسته می باشند.)



دیفرانسیل های طولی، سطحی و حجمی

در این دستگاه مختصات ρ و z از جنس طول هستند ولی φ از جنس طول نمی باشد که در نتیجه برای محاسبه تغییرات طول در اثر تغییرات زاویه بایستی از یک ضریب (متریک) استفاده شود

با توجه به اینکه $d\varphi \to 0$ داریم

$dl = \rho \sin(d\varphi)$ (میل می کند به یک خط است)

$$\xrightarrow[\sin d\varphi = d\varphi]{d\varphi \to 0} dl = \rho\, d\varphi$$

پس ضرایب متریک در مختصات استوانه ای می شوند:

$h_2 = \rho$ و $h_1 = h_3 = 1$

دیفرانسیل طولی:

$$dl = d\rho\, \hat{a}_\rho + \rho\, d\varphi\, \hat{a}_\varphi + dz\, \hat{a}_z$$

دیفرانسیل سطحی:

$$ds_\rho = \rho\, d\varphi\, dz\, \hat{a}_\rho$$

یعنی بردار عمود بر سطح بردار $\hat{\rho}$ است به عبارت دیگر ρ ثابت است

و در این سطح z و φ تغییر می کنند

یعنی بردار عمود بر $\hat{z}$ است $\qquad ds_z = \rho\, d\varphi\, d\rho\, \hat{a}_z$

ρ و φ تغییر می‌کنند ولی z ثابت است

و چون ما می‌خواهیم سطح را محاسبه کنیم باید ρ را در $d\varphi$ ضرب نماییم تا زاویه به طول تبدیل شود

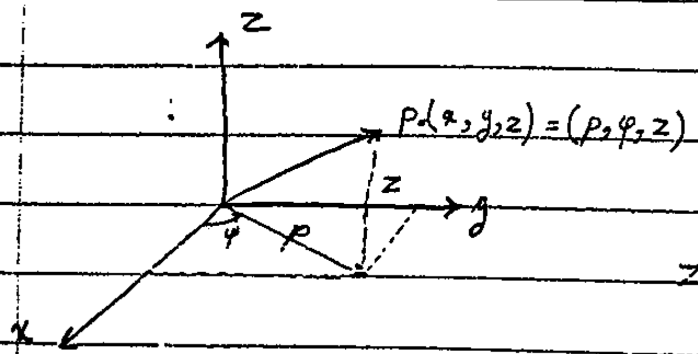
$$ds_\varphi = d\rho\, dz\, \hat{a}_\varphi$$

دیفرانسیل حجمی $\qquad dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

تبدیل بردارها از دستگاه مختصات استوانه‌ای به کارتزین

در بسیاری از اوقات برای حل ساده‌تر مسائل (به خصوص در هنگام انتگرال‌گیری) نیازمند تبدیل بردارها از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات کارتزین هستیم (چرا که تنها بردارهای یکه $\hat{x}$ و $\hat{y}$ و $\hat{z}$ هستند که در کل فضا ثابت بوده و تغییر نمی‌کنند) برای اینطور سه مرحله پیش رو داریم

۱) تبدیل پارامترها:



همانطور که از شکل روبرو کاملاً مشخص است

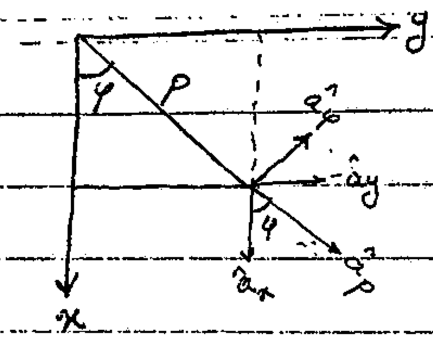
$$z = z$$

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

۲) تبدیل بردار یکه: با استفاده از شکل صفحه بعد می‌توان رابطه هر یک بردارهای یکه $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_\rho$ و $\hat{a}_\varphi$ را

با یکدیگر در صفحه $x-y$ یافت



$$\hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_x = |\hat{a}_\rho||\hat{a}_x| \cos\varphi = \cos\varphi$$

$$\hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_y = |\hat{a}_\rho||\hat{a}_\varphi| \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin\varphi$$

$$\hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_x = \cos(\pi/2 + \varphi) = -\sin\varphi \qquad \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_y = \cos\varphi$$

حال می خواهیم رابطه مابین $\hat{a}_\rho$ را با بردارهای یکه x و y بیابیم. می دانیم

$$\boxed{\hat{a}_\rho = A\hat{a}_x + B\hat{a}_y}$$

برای آنکه A و B که مجهول هستند را بیابیم از ضرب داخلی مابین بردارهای یکه که در بالای صفحه محاسبه نمودیم استفاده می کنیم

$$\hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_x = A\underbrace{\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x}_{1} + B\underbrace{\hat{a}_y \cdot a_x}_{0} = A$$

$$\longrightarrow A = \cos\varphi = \hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_x \quad \text{و به روش مشابه} \longrightarrow B = \sin\varphi = \hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_y$$

پس خواهیم داشت

$$\hat{a}_\rho = \cos\varphi\, \hat{a}_x + \sin\varphi\, \hat{a}_y$$

$$\hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{a}_x + \cos\varphi\, \hat{a}_y \qquad \hat{a}_z = \hat{a}_z$$

و همچنین داریم

$$a_x = A\hat{a}_\rho + B\hat{a}_\gamma$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}_x &= \cos\varphi\, \hat{a}_\rho - \sin\varphi\, a_\varphi \\ \hat{a}_y &= \sin\varphi\, \hat{a}_\rho + \cos\varphi\, \hat{a}_\varphi \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{کاربرد آنها}$$

توجه: پس برای تبدیل بردارهای یکه یک مختصات به مختصات دیگر کافی است حاصلضرب هریک از بردارهای

یکدیگر را در حالت برداریه بنویسیم و با یکدیگر جمع نمائیم

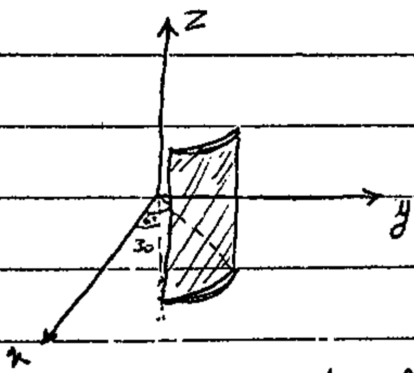
۳) تبدیل مولفه‌های یک بردار: مولفه‌های یک بردار نیز هم جهت با بردارهای یکه هستند و رابطه مابین آنها مشابه رابطه

مابین بردارهای یکه است $A = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z = A_\rho\hat{a}_\rho + A_\varphi\hat{a}_\varphi + A_z\hat{a}_z$

$A_\rho \cdot A_x = \cos\varphi \qquad A_\rho \cdot A_y = \sin\varphi \quad \ldots$

$\rightarrow A_\rho = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi$ و $A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$

مثال: سطح مابین استوانه‌ای با مشخصات زیر را بیابید $3 \geq z \geq 0$ و $60^\circ \geq \varphi \geq 30^\circ$ و $\rho = 5$



مساحت می‌شود $S = \rho \int_{30^\circ}^{60^\circ} d\varphi \int_0^3 dz$

$= 5\left(\pi/3 - \pi/6\right)\left(3 - 0\right) = \frac{5\pi}{2}$

در اینجا از حاصلضرب تغییرات طولی z در تغییرات طولی φ (که می‌شود $\rho d\varphi$)

مساحت محاسبه شده است

مثال: نقطه $(3, -4, 3)$ و بردار $P_1 = (3, -4, 3)$ و بردار $A = 2a_x - 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$ را از دستگاه مختصات کارتزین

به دستگاه مختصات استوانه‌ای منتقل کنید

ابتدا تبدیل نقطه: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5 \qquad \varphi = \tan^{-1} y/x = -53.1^\circ$

φ نیز بدون تغییر باقی می ماند پس در مختصات استوانه ای داریم $P_1 = (5, 306.9^\circ, 3)$

و برای بردار A داریم

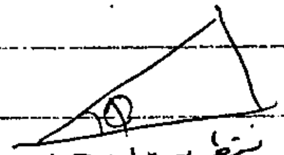
$$A_\rho = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi = 2\cos\varphi - 3\sin\varphi$$

$$A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi = -2\sin\varphi - 3\cos\varphi \qquad A_z = 4$$

در نتیجه

$$A = (2\cos\varphi - 3\sin\varphi)\hat{a}_\rho - (2\sin\varphi + 3\cos\varphi)\hat{a}_\varphi + 4\hat{a}_z$$

φ ، $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$



φ را در صورتی می توانیم بدست آوریم که یک نقطه به ما بدهند

۳-۳-۱ دستگاه مختصات کروی

در تحلیل مسائل الکترومغناطیس بسیاری از شرایط منطبق بر محدوده های کروی هستند. در این دستگاه مختصات

سطوح متعامد شامل سطوح (R، θ، φ ثابت) می باشند $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \varphi)$

هر نقطه $P(R_1, \theta_1, \varphi_1)$ در مختصات کروی به عنوان محل تقاطع سه سطح زیر تعریف می شود: یک سطح کروی

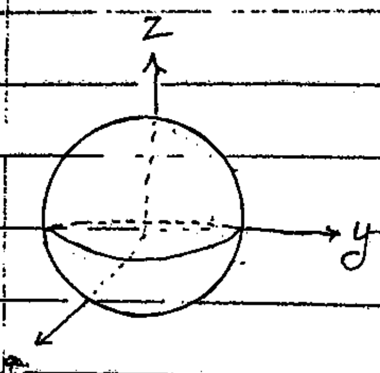
به مرکز مبدا و شعاع $R = R_1$، یک مخروط که محور آن محور $+z$ و دارای نیم زاویه $\theta = \theta_1$ و یک نیم صفحه

شامل محور z که با صفحه xz زاویه $\varphi = \varphi_1$ می سازد

بردارهای یکه: $\hat{a}_R$: بردار یکه عمود بر سطح R ثابت (کره)

$\hat{a}_\varphi$: بردار یکه عمود بر صفحه φ ثابت

$\hat{a}_\theta$: بردار یکه عمود بر مخروط θ ثابت



داریم: (راستگرد)

$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = a_\varphi$$
$$\hat{a}_\theta \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_R$$
$$\hat{a}_\varphi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta$$

تعامد
$$a_R \cdot a_\varphi = a_R \cdot a_\theta = a_\varphi \cdot a_\theta = 0$$

نکته: در دستگاه مختصات کروی بردارهای یکه $\hat{a}_R$ ، $\hat{a}_\theta$ و a_φ بردارهای یکه ثابتی نیستند و وابسته به θ و φ می باشند

دیفرانسیل های طولی، سطحی و حجمی:

در این دستگاه نیز θ و φ از جنس طول نمی باشند در نتیجه داریم:

$h_1 = 1$

$h_2 = R\,\cancel{\sin\theta}$ $\qquad h_3 = R\sin\theta$

	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
کارتزین	x	y	z	1	1	1
استوانه	ρ	φ	z	1	ρ	1
کروی	R	θ	φ	1	R	$R\sin\theta$

$$dl = dR\,\hat{a}_R + R\,d\theta\,\hat{a}_\theta + R\sin\theta\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

همچنین المان های سطح داریم

$$ds_R = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_R$$

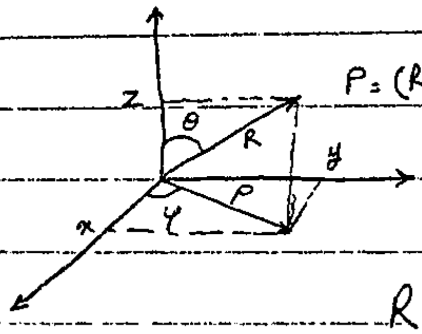
$$ds_\theta = R\sin\theta\, dR\, d\varphi\, \hat{a}_\theta \qquad ds_\varphi = R\, dR\, d\theta\, \hat{a}_\varphi$$

$$dv = R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

تبدیل بردارها از مختصات کروی به کارتزین

برای آنکه از مختصات کروی بردارها را به دستگاه کارتزین ببریم ابتدا آنها را به مختصات استوانه ای می بریم

بعد از ساده سازی به مختصات کارتزین خواهیم برد.



$$P = (R, \theta, \varphi) = (\rho, \varphi, z) = (x, y, z)$$

۱) تبدیل پارامترها

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\rho}{z} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

و بالعکس

$$x = R\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y = R\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = R\cos\theta$$

۲) تبدیل بردار یکه:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_\rho = |\hat{a}_R||\hat{a}_\rho| \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta \\ \hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_x = \cos\varphi \end{array}\right\} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_x = \sin\theta\cos\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_\rho = \sin\theta \\ \hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_y = \sin\varphi \end{array}\right\} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_y = (a_\rho \sin\theta) \cdot a_y = \sin\theta\sin\varphi$$

$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_z = \cos\theta$$

همچون مختصات استوانه ای:

$$\hat{a}_R = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y + \cos\theta\,\hat{a}_z$$

و به روش مشابه

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_x = \cos\theta\cos\varphi \\ \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_y = \cos\theta\sin\varphi \\ \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_z = -\sin\theta \end{array}\right\} \hat{a}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y - \sin\theta\,\hat{a}_z$$

۳) تبدیل مولفه های بردار: این ضرایب کاملاً مشابه تبدیل بردار یکه است

$$A_x = A_R \sin\theta\cos\varphi + A_\theta \cos\theta\cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$$

$$= \frac{A_R\, x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_\theta\, xz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} - \frac{A_\varphi\, y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A_y = A_R \sin\theta\sin\varphi + A_\theta \cos\theta\sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$$

$$= \frac{A_R\, y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_\theta\, yz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} + \frac{A_\varphi\, x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A_z = A_R\cos\theta - A_\theta \sin\theta = \frac{A_R\, z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{A_\theta \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

تمرین: ضرایب تبدیل کروی به کارتزین را اثبات نمایید

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{A} = \frac{1}{\rho}\hat{a}_\rho$ و $\vec{B} = \frac{1}{R}\hat{a}_R$ را در نقطه $(1,1,1)$ بدست آورید
و دو بردار را در دستگاه کارتزین بیان کنید

حل: $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} = 1 \rightarrow \varphi = \pi/4 \rightarrow \cos\varphi = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\vec{A} = \frac{1}{\rho}a_\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_y\right) = \frac{1}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_y$$

$$\vec{B} = \frac{1}{R}\hat{a}_R = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(\hat{a}_x \sin\theta\cos\varphi + \hat{a}_y \sin\theta\sin\varphi + \hat{a}_z\cos\theta)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{a}_x\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{a}_y\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_z\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\hat{a}_x + \frac{1}{3}\hat{a}_y + \frac{1}{3}\hat{a}_z$$

و برای محاسبه زاویه بین دو بردار از ضرب داخلی استفاده می کنیم

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{A\cdot B}{|A||B|} = \cos^{-1}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + 0}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \cos^{-1}\frac{1/3}{\sqrt{1/6}} = 35.3^\circ$$

نکته: برای یافتن زاویه بین دو بردار می توانستیم از همان ابتدا زاویه مابین دو بردار $\hat{a}_p$ و $\hat{a}_R$ را می یافتیم

که می شود

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad a_R\cdot a_p = \sin\theta$$

$$\rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} = 35.3^\circ$$

تمرین کامپیوتری:

بردارهای زیر را در دستگاه مختصات کارتزین رسم نمایید.

1) $\vec{A} = x\hat{a}_x \quad \text{for} \quad -10 \leq x \leq 10$

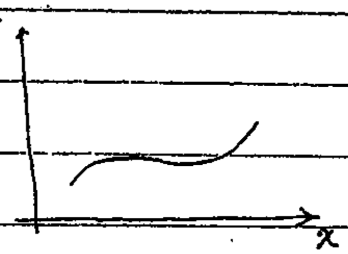
2) $\vec{A} = -\cos x \sin y\,\hat{a}_x + \sin x \cos y\,\hat{a}_y \quad \text{for} \quad -\pi \leq x, y \leq \pi$

3) $\vec{A} = \hat{x}\,xy + \hat{y}\,y^2 \quad \text{for} \quad -10 \leq x, y \leq 10$

۴- میدان های اسکالر و برداری

در این درس با دو نوع میدان و پتانسیل روبرو هستیم: ۱) میدان های اسکالر: این نوع میدان ها تنها با یک مقدار در فضا قابل بیان هستند مثل پتانسیل الکتریکی یا دمای اتاق. همانطور که مشخص است هر نقطه اتاق یک دما (یک عدد) مشخص دارد و دما دارای جهت نیست. برای بیان دماهای مختلف نیز به راحتی می توان با استفاده از یک نمودار که یک یا چند بعد آن بعد مکان و یک بعد آن بعد دما را نشان می دهد دما را بیان نمود:

نحوه نمایش میدان های اسکالر

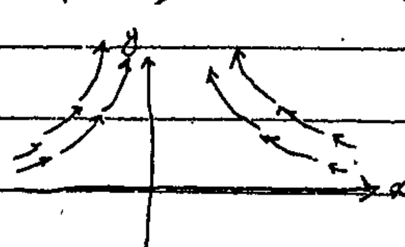


به عنوان مثال نمودار روبرو می تواند نمودار بیان تغییرات دما در نقاط مختلف باشد.

در صورتی که به جای تنها یک بعد (x) بخواهیم دو بعد را نمایش دهیم شکل ها سه بعدی ($\underbrace{T}_{\text{دما}}$ و $\underbrace{y \text{ و } x}_{\text{مکان}}$) می شود و به صورت یک رویه در می آید. اگر بخواهیم دمای نقاط یک اتاق (یعنی هر سه بعد z و y و x) را در نظر بگیریم شکل به چه صورتی می شود؟

۲) میدان های برداری: این نوع از میدان ها علاوه بر مقدار دارای جهت نیز می باشند و برای نمایش آنها از خطوط نیرو (خطوط برداری) استفاده می شود. در هر نقطه خط میدان را مماس در آن نقطه می کشیم که جهت بردار جهت میدان را و اندازه بردار اندازه میدان را نشان می دهد (البته گاهی برای نشان دادن میدان بیشتر در یک صفحه تعداد بردارهای بیشتر و پرحجم تری می کشند)

نحوه نمایش میدان های برداری



شکل روبرو نشان می دهد هر چه که میدان ها به x نزدیکتر می شوند قوی تر می گردند. مفهوم خطوط نیرو را ماکسول با ایده از مکانیک سیالات برای اولین بار در الکترومغناطیس بیان کرد.

۱-۵ انتگرال های مهم در الکترومغناطیس

در الکترومغناطیس سه نوع انتگرال مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار می گیرند یعنی انتگرال روی مسیر (طول)، یعنی انتگرال روی سطح و دیگری انتگرال روی حجم که البته انتگرال روی طول و سطح در دو حالت باز و بسته وجود داشته و هر کدام معنی فیزیکی خاصی دارند. به عنوان مثال $\int_c A.dl$ کار انجام شده توسط بردار $\vec{A}$ را در مسیر c نشان می دهد و $\oint A.ds$ معرف فلوی خارج شونده توسط بردار $\vec{A}$ از سطح بسته S می باشد. البته در این بخش قصد داریم صرفاً راه حل مورد ریاضیات این نوع از انتگرال را بیان کنیم که قطعاً کاربرد و نحوه استفاده از این انتگرال ها به صورت مبسوط در بخش های آینده بحث می گردد.

انتگرال خط

انتگرال خط عموماً به صورت $\int_c A.dl$ ظاهر می شود که در آن dl بردار عنصر طول در امتداد مسیر c می باشد. برای حل این انتگرال ابتدا داریم:

$$\int_c A.dl = \int_c (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z).(dx\, a_x + dy\, a_y + dz\, a_z)$$

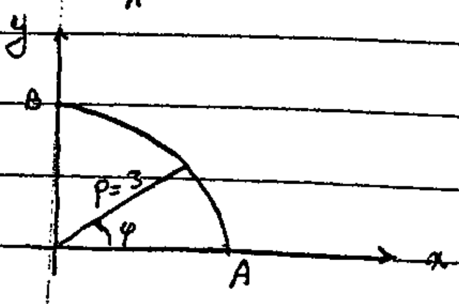
$$\int_c A.dl = \int_c A_x dx + \int_c A_y dy + \int_c A_z dz$$

هر کدام انتگرال ها بسیار راحت را باید جداگانه محاسبه نمود. به عنوان مثال اگر بخواهیم $\int_c A_x(x,y,z)dx$ را محاسبه بکنیم باید (از آنجا که فقط dx داریم) به جای y و z در $A_x(x,y,z)$ با استفاده از معادلات منحنی c برحسب x مقدار گذاشته و سپس عمل انتگرال گیری را انجام دهیم.

مثال: $F = xy\,a_x - 2x\,a_y$ داده شده است، انتگرال خطی برداری $\int_A^B F\cdot dl$

را در امتداد ربع دایره نشان داده شده در شکل

روبرو محاسبه نمایید



این مسئله را به دو روش حل می نماییم: در مختصات کارتزین و در مختصات استوانه ای

الف) در مختصات کارتزین: با توجه به بردار داده شده عبارت dl داریم $F\cdot dl = xy\,dx - 2x\,dy$

از طرفی معادله ربع دایره می شود $x^2+y^2=9$ ، $0 \le x,y \le 3$ ، $x=\sqrt{9-y^2}$ ، $y=\sqrt{9-x^2}$

$$\int_A^B F\cdot dl = \int_3^0 \underbrace{x\sqrt{9-x^2}}_{\text{فقط تابعی از x}}\,dx - 2\int_0^3 \underbrace{\sqrt{9-y^2}}_{\text{فقط تابعی از y}}\,dy$$

$$= -\tfrac{1}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_3^0 - \left[y\sqrt{9-y^2} + 9\sin^{-1}\tfrac{y}{3}\right]_0^3 = -9(1+\pi/2)$$

ب) مختصات استوانه ای: ابتدا بردار را به مختصات استوانه ای می بریم که داریم

$$F_\rho = F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi = xy\cos\varphi - 2x\sin\varphi$$

$$F_\varphi = -F_x\sin\varphi + F_y\cos\varphi = -xy\sin\varphi - 2x\cos\varphi$$

در مختصات استوانه ای $\overline{dl} = d\rho\,a_\rho + \rho\,d\varphi\,a_\varphi + dz\,a_z$

از آنجا که هیچ تغییری در ρ و z نداریم پس $d\rho = dz = 0$ $\rightarrow$ $dl = \rho\,d\varphi\,a_\varphi\Big|_{\rho=3} = 3d\varphi\,a_\varphi$

$$F\cdot dl = (F_\rho a_\rho + F_\varphi a_\varphi + F_z a_z)\cdot(3d\varphi\,a_\varphi) = -3(xy\sin\varphi + 2x\cos\varphi)\,d\varphi$$

چرا که می دانیم براساس قضیه تعامد $a_\varphi\cdot a_\varphi = 1$ ، $a_\rho\cdot a_\varphi = a_z\cdot a_\varphi = 0$

$$\int_A^B F\cdot dl = \int_0^{\pi/2} -3(xy\sin\varphi + 2x\cos\varphi)\,d\varphi$$

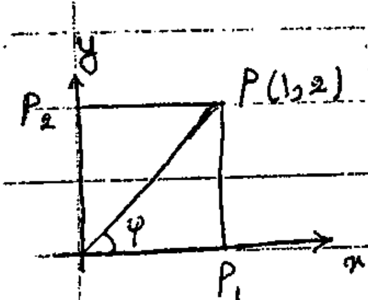
که بایستی از آنجایی که متغیر $d\varphi$ می باشد x و y را برحسب φ بنویسیم که داریم (ρ ثابت و برابر 3 می باشد)

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi = 3\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi = 3\sin\varphi \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} -3(9\sin^2\varphi\cos\varphi + 6\cos^2\varphi)\,d\varphi = -9(\sin^3\varphi+\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = -9(1+\pi/2)$$

گاهی نیز انتگرال خط به صورت $\int_c A\,dl$ می باشد که در آن A تابعی اسکالر است. یکی از راه های حل این مسئله آن است که هر یک از پارامترها (مثل x) را برحسب پارامتری دیگر (مثل y) براساس مسیر ربط دهیم.

مثال: انتگرال $\int \rho\, d\bar{\rho}$ برداری را روی مسیرهای زیر بیابید



الف) OP_1P ب) مسیر مستقیم OP

الف) روی مسیر OP_1 مقدار $y=0$ و $dy=0$ است لذا بردار $\bar{\rho} = x$ می شود و در نتیجه $d\bar{\rho} = dx\,a_x$

و روی مسیر P_1P ، $dx=0$ و $\boxed{\rho=\sqrt{1+y^2}}$ و $d\bar{\rho} = dy\,\hat{a}_y$ بنابراین

$$\int_{OP_1P}\rho\, d\bar{\rho} = \int_0^{P_1} x\,dx\,\hat{a}_x + \int_{P_1}^{P}\sqrt{1+y^2}\,dy\,\hat{a}_y = \int_0^1 x\,dx\,\hat{a}_x + \int_0^2 \sqrt{1+y^2}\,dy\,\hat{a}_y$$

$$= \frac12 x^2\, \hat{a}_x\Big|_0^1 + \left[\frac12\sinh^{-1}y + \frac{y}{2}\sqrt{1+y^2}\right]_0^2\hat{a}_y = \frac12\hat{a}_x + 2.96\,\hat{a}_y$$

ب) روی مسیر OP داریم

$$\int_{OP}^{P}\rho\, d\bar{\rho} = \int_0^{\sqrt5}\rho\, d\rho\, \bar{a}_\rho = \frac12\rho^2\Big]_0^{\sqrt5}(a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi)$$

که $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt5}$ و $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt5}$ $\longrightarrow \int = \frac{\sqrt5}{2}a_x + \sqrt5\, a_y$

سوال: آیا هر بردار یکه ای را می توان از زیر انتگرال بیرون آورد؟ خیر

$\int \dots d\rho\, a_\rho$

$\int \dots d\varphi\, a_\rho$ $\qquad$ $\int \dots a_\varphi\, d\varphi$

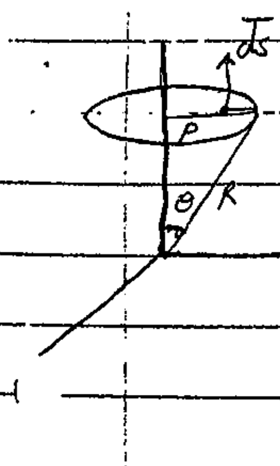
$\int \dots dx\, a_x$

هرجا $d\varphi$ و $d\theta$ داشته باشیم $\hat a_\theta$ و $\hat a_\rho$ و بردارهای یکه تغییر می کنند

انتگرال سطح: $\int_s A\cdot ds$ یک انتگرال سطحی است که ds برداری با اندازه عنصر ds و در جهت عمود بر آن می باشد به صورت $ds = a_n ds$ مشخص می گردد. در صورتی که سطح مورد نظر بر یکی از مختصات بررسی شده منطبق گردد a_n برابر یکه آن عنصر در مختصات مشخص شده می باشد در غیر این صورت می بایستی برای عنصر مورد نظر محاسبه گردد.

(a_n را می توان از گرادیان آن سطح محاسبه نمود $a_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$)

جهت مثبت ds یا a_n براساس قرارداد زیر است: ۱) اگر سطح انتگرال گیری، بسته و حاوی حجم باشد، جهت مثبت a_n همواره به سمت خارج حجم است ۲) اگر سطح باز باشد جهت مثبت a_n را از قضیه دست راست حاصل می کنیم.



مثال: بردار $\bar A = 2R\hat a_R - \frac{4}{R\sin\theta} a_\theta$ داده شده است. مقدار $\int_s A\cdot ds$ را روی سطح دایره ای به شعاع ۳ که در صفحه $z=4$ قرار دارد و در جهت مثبت a_z است بیابید؟

$$\int A\cdot ds = \int_0^3\int_0^{2\pi}\left(2R\hat a_R - \frac{4}{R\sin\theta}a_\theta\right)\cdot\left(\rho\, d\rho\, d\varphi\, \hat a_z\right)$$

ds براساس آنچه در سوال آمده ds_z در مختصات استوانه ای می باشد

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \Big[2R \underbrace{\hat{a}_R \cdot \hat{a}_z}_{\cos\theta} - \frac{4}{R\sin\theta} \underbrace{\hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_z}_{-\sin\theta} \Big] \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \Big[2 \underbrace{R\cos\theta}_{z} - \frac{4}{R\,\cancel{\sin\theta}} (-\cancel{\sin\theta}) \Big] \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(2z + \frac{4}{R}\right) \rho\, d\rho\, d\varphi$$

مقدار $z=4$ را در انتگرال قرار می‌دهیم. $R=\sqrt{\rho^2+z^2}$

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(8 + \frac{4}{\sqrt{16+\rho^2}}\right) \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^3 \left(8\rho + \frac{4\rho}{\sqrt{16+\rho^2}}\right) d\rho = 2\pi \Big[4\rho^2 + 4\sqrt{16+\rho^2}\Big]_0^3 = 80\pi$$

انتگرال حجم: مثال: بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = \rho_0 R^2/a^2$ برای $R \le a$ در کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مقدار کل بار الکتریکی را حساب نمایید.

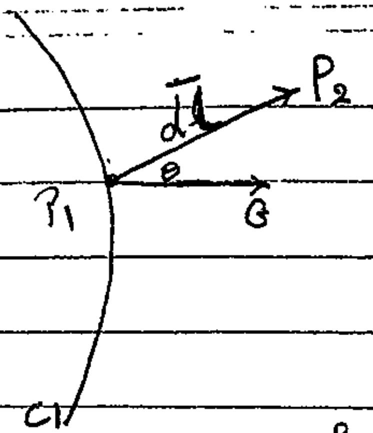
$$Q = \int_V \rho\, dv = \int_V \rho_0 \frac{R^2}{a^2} \left(R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi\right) = \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a R^4 dR \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\frac{4}{5}\rho_0 \pi a^3$$

۶-۱ گرادیان (∇)

درصورتی که یک میدان اسکالر مانند پتانسیل داشته باشیم می‌دانیم این میدان در هر نقطه دلخواهی تنها با استفاده از مقدار آن (بدون داشتن جهت) مشخص می‌گردد. درصورتی که $\Phi(x,y,z)$ تابع پتانسیل باشد ما در فضا نقاطی را داریم که تشکیل یک سری سطوح می‌دهند که این سطوح هم پتانسیل هستند. به سادگی می‌توان معادله سطح هم پتانسیل را بیان کرد $\Phi(x,y,z) = c$ (یک مقدار ثابت)

تعیین سطوحی که دارای یک پتانسیل با مقدار ثابتند (سطوح هم پتانسیل):



در صورتی که سطح c_1 یک سطح هم پتانسیل در نظر گرفته شود و دو نقطه

P_1 (روی سطح c_1) و P_2 (خارج از سطح c_1) را در نظر می‌گیریم که

$$P_1=(x,y,z) \qquad P_2=(x+dx,\, y+dy,\, z+dz)$$

که جابه‌جایی ما بین P_1 و P_2 را می‌توان با بردار $\vec{dl}$ نمایش داد

$$\vec{dl}=dx\,\hat{a}_x+dy\,\hat{a}_y+dz\,\hat{a}_z$$

می‌توان اختلاف پتانسیل بین نقاط P_1 و P_2 را (بر اساس مشتق توابع چند متغیره) به صورت زیر نوشت

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$$

که در واقع می‌توان رابطه $d\Phi$ را به این صورت باز کرد

$$d\Phi=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{a}_x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{a}_y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{a}_z\right)\cdot\left(dx\,\hat{a}_x+dy\,\hat{a}_y+dz\,\hat{a}_z\right)$$

$$d\Phi=(\vec{\nabla\Phi})\cdot\vec{dl}$$

که بردار $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{a}_x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{a}_y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{a}_z$ را گرادیان میدان اسکالر Φ می‌نامند و با علامت ∇ نمایش می‌دهند

همین نکته در مورد گرادیان:

در صورتی که نقطه P_2 را بر روی سطح c_1 در نظر می‌گرفتیم در نتیجه بردار $\vec{dl}$ مماس بر سطح c_1 می‌شد

از طرفی چون هر دو نقطه P_1 و P_2 روی سطح c_1 قرار می‌گرفتند باید بگوییم هم پتانسیل می‌شدند در نتیجه اختلاف پتانسیل

آنجا متغیر نمی شد یعنی $d\Phi = 0$ که در این صورت داشتیم $d\Phi = \nabla\Phi \cdot dl = 0$

$\nabla\Phi \cdot dl = 0 \longrightarrow \nabla\Phi \perp dl$ (که مماس بر سطح باشد)

پس بردار گرادیان عمود بر سطح پتانسیل است. همواره برای بدست آوردن بردار نرمال یک سطح (بردار واحد عمود بر سطح) از آن سطح گرادیان گرفته و بر بزرگی آن تقسیم می کنند

نکته دیگر آن است که بر اساس تعریف داشتیم

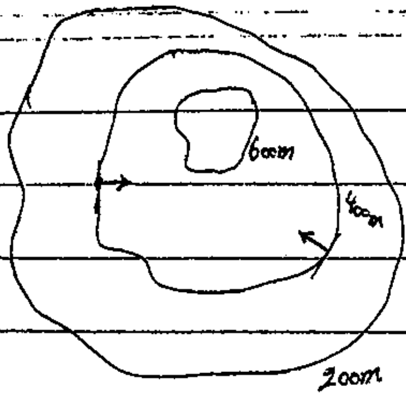
$$d\Phi = (\nabla\Phi) \cdot \overline{dl} = \nabla\Phi \cos\theta \, dl \longrightarrow \frac{d\Phi}{dl} = \nabla\Phi \cos\theta$$

برای آنکه میزان تغییرات پتانسیل ماکزیمم شود می بایستی $\cos\theta$ به مقدار ماکزیمم خود یعنی یک برسد در نتیجه $\theta = 0$ می شود که به معنای آن است که برای ماکزیمم تغییرات جهت dl باید در جهت بردار نرمال (گرادیان) باشد و به عبارتی در گرادیان یک تابع اسکالر را به برداری تبدیل می کند که اندازه آن حداکثر افزایش تابع در آن نقطه بوده و جهت آن عمود بر سطح می باشد. [همواره گرادیان به یک تابع اسکالر اعمال می شود و خروجی هم طبق تعریف بردار است). می توان عملگر ∇ (گرادیان) را نیز بدین صورت نوشت :

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z}$$

مثال : شکل زیر نقاط هم ارتفاع (هم پتانسیل) یک تپه را نشان می دهد. گرادیان هر نقطه از این سطوح هم پتانسیل برداری است عمود بر آن سطح و در جهت افزایش ارتفاع (پتانسیل) حال تصور کنید که باران بر این تپه ببارد و جریانی از

آب از بالای تپه به پایین به وجود آید بدیهی است که آب با آن در امتداد



حداکثر شیب تپه‌های خواهد شد. به زبان آنالیز برداری آب در جهت $-\nabla$

جاری می‌شود. در فصل بعد خواهیم دید که شدت میدان الکتریکی برابر منهای

گرادیان پتانسیل است

$\int_{P_1}^{P_2} \nabla\Phi \cdot dl$ مستقل از مسیر است یعنی

$$\int_{P_1}^{P_2} \nabla\Phi \cdot dl = \Phi(P_2) - \Phi(P_1)$$

در نتیجه اگر مسیر بسته باشد $P_1 = P_2$ در نتیجه انتگرال برابر صفر می‌شود

از تعریف $d\Phi$ استفاده می‌کنیم ← اثبات: $\int_{P_1}^{P_2} \nabla\Phi \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} d\Phi = \Phi(P_2) - \Phi(P_1)$

برای تعریف گرادیان در دستگاه‌های مختصات مختلف از تعریف عمومی که در ابتدای این بخش داشتیم

استفاده می‌کنیم: داشتیم $\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial l} \longrightarrow \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{h\,\partial u}$

$$\boxed{\nabla\Phi = \frac{\hat{a}_{u_1}}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\hat{a}_{u_2}}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\hat{a}_{u_3}}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}}$$

که برای مختصات استوانه‌ای داریم: $(u_1, u_2, u_3) = (\rho, \varphi, z)$ $\quad (h_1, h_2, h_3) = (1, \rho, 1)$

$$\nabla \equiv \hat{a}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\hat{a}_\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

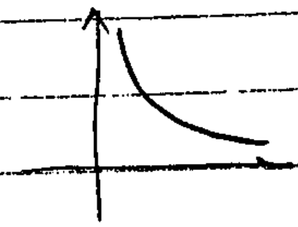
برای مختصات کروی $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \varphi)$ $\quad (h_1, h_2, h_3) = (1, R, R\sin\theta)$

$$\nabla \equiv \hat{a}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\hat{a}_\theta}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{a}_\varphi}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

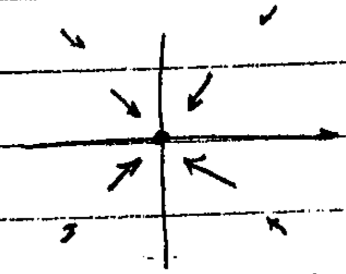
مثال: چنانچه توان تشعشعی یک ستاره (یا میدان الکتریکی یک بار) با R رابطه $E(R)=\frac{E_0}{R^2}$ را دارد.

نمودار $E(R)$ را رسم نموده و سپس گرادیان آن را حساب و رسم نمایید و در مورد مفهوم فیزیکی آن بحث کنید.

$$E(R)=\frac{E_0}{R^2}$$



$$\nabla E=\frac{-2E_0}{R^3}\hat{a}_R$$



جهت در هر نقطه تمام بردارها جذب می شوند

مثال: شدت میدان الکتریکی رابطه اش با پتانسیل الکتریکی به صورت $E=-\nabla V$ می باشد. $\vec{E}$ را در نقطه (۱،۱،۰) بیابید اگر: $V=E_0R\cos\theta$

در مختصات کروی و بر اساس تعریف گرادیان در این مختصات داریم

$$E=-\nabla V=-\left(a_R\frac{\partial}{\partial R}+a_\theta\frac{\partial}{R\partial\theta}+a_\varphi\frac{\partial}{R\sin\theta\partial\varphi}\right)E_0R\cos\theta$$

$$=-\underbrace{(a_R\cos\theta-a_\theta\sin\theta)}_{a_z}E_0=-\hat{a}_zE_0$$

از ابتدا می توانستیم با یک تغییر متغیر مسئله را در مختصات دکارتی حل کنیم چرا که

$z=R\cos\theta$

$$\rightarrow V=E_0z\rightarrow E=-\nabla V=-a_z\frac{\partial}{\partial z}(E_0z)=-a_zE_0$$

* تعبیر فیزیکی ؟

۷. دیورژانس ($\nabla \cdot$) ← مشخص کننده منابع ما در فضا

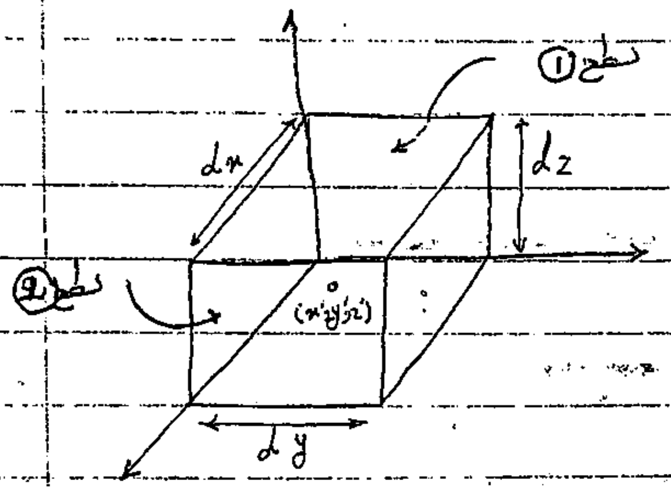
در این بخش می‌خواهیم ببینیم به دنبال آن هستیم که با مشتقات میدان آشنا شویم که به کمک آن ما بتوانیم منابع را تشخیص دهیم. در ابتدا برای سادگی کار مثالی از مکانیک سیالات می‌زنیم. همانطور که می‌دانیم در یک کانال آب، حجم‌های شار ورودی و خروجی با یکدیگر برابر است مگر آنکه از نقطه‌ای در کانال آب خارج شود (sink) یا اینکه در مسیر یک منبع دیگر نیز وجود داشته باشد. در واقع تغییر در حجم‌های شار خروجی نسبت به ورودی نشان دهنده وجود یک source یا sink در مسیر است. در الکترومغناطیس نیز برای تشخیص منابع در یک فضای خاص (حجم مشخص) مقدار شار ورودی و خروجی به سطوح بیرونی آن حجم را محاسبه می‌نماییم و از اختلاف آنها متوجه می‌شویم که در آن محیط منبعی وجود دارد یا خیر؟ به این عملیات ریاضی **دیورژانس** گویند.

برای سادگی کار ابتدا به مفاهیم دیورژانس در مختصات دکارتی می‌پردازیم. ابتدا همچون شکل صفحه بعد یک منبع در نقطه (x_0, y_0, z_0) را در نظر بگیرید و یک حجم بسیار کوچک با اضلاع dx و dy و dz در اطراف آن فرض می‌کنیم. مقدار F را میدان برداری در نظر بگیریم شار خروجی از سطح می‌شود $\oint F \cdot ds$

این انتگرال مجموع (یا انتگرال) میدان برداری F عبوری از تمامی سطوح جزیی (کل) را نشان می دهد. مثلاً مکعب دلخواه

نیز به آن علت است که ما میدان برداری هم راستای بردار نرمال سطح (عمود بر سطح) را فقط نیاز داریم. پس می بایستی این انتگرال

را برای تمامی ۶ سطح محاسبه و با یکدیگر جمع کنیم تا شار خروجی از همه سطوح بدست آید



$$F = F_x \hat{a}_x + F_y \hat{a}_y + F_z \hat{a}_z$$

برای سطح روبرو (سطح ۲) داریم

$$ds_x = dy\, dz\, \hat{a}_x$$

در نتیجه

$$F \cdot ds_x = (F_x a_x + \dots) \cdot (dy\, dz\, \hat{a}_x) = F_x\, dy\, dz$$

که طبق بسط تیلور داریم: مشتق مرتبه بالاتر +

$$\underbrace{F_x\left(x' + \frac{dx}{2}, y', z'\right)}_{\text{موقعیت صفحه ۲}} = F_x(x', y', z') + \frac{dx}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x}\Big|_{(x',y',z')} +$$

و سطح ۱ می شود

$$F \cdot ds_x = (F_x a_x + \dots) \cdot (dy\, dz\, (-\hat{a}_x)) = -F_x\, dy\, dz$$

$$F_x\left(x' - \frac{dx}{2}, y', z'\right) = F_x(x', y', z') - \frac{dx}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x}\Big|_{(x',y',z')} +$$ مشتق مرتبه بالاتر

حال اگر از این دو جمله انتگرال بگیریم داریم

$$\int_{①} F \cdot ds + \int_{②} F \cdot ds = \int_{②} F_x\, dy\, dz - \int_{①} F_x\, dy\, dz$$

از آنجایی که حدود تغییرات روی انتگرال حال (dx و) و (dy و) می باشد داریم (با جایگذاری روابط بدست آمده از F_x)

و همچنین صرف نظر از ضرایب مرتبه بالاتر چرا که

$$\underbrace{(dx)^2 = (dx)}_{\text{مقدار ناچیز}}\underbrace{(dx)}_{\text{مقدار ناچیز}} \longrightarrow$$ قابل صرف نظر

$$\left[-\left(F_x(x',y',z')-\frac{dx}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)+\left(F_x(x',y',z')+\frac{dx}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)\right]dy\,dz=\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}dx\,dy\,dz\right)$$

با پیروی از همین روش در مورد دو وجه سمت راست و چپ که در آن تغییرات مختصات به صورت $\frac{dy}{2}$ و $-\frac{dy}{2}$ بوده و

می باشد $ds_y = dx\,dy(\pm\hat{a}_y)$ داریم

$$\left[\int_{\text{وجه راست}}+\int_{\text{وجه چپ}}\right]F\cdot ds=\frac{\partial F_y}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

و همچنین برای وجه بالا و پایین

$$\left[\int_{\text{وجه بالا}}+\int_{\text{وجه پایین}}\right]F\cdot ds=\frac{\partial F_z}{\partial z}dx\,dy\,dz$$

حال با جمع نتایج هر یک از وجه ها می توانیم کل شار خروجی از این حجم مشخص را بیابیم که می شود

$$\oint_s F\cdot ds=\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

برای آنکه این رابطه یک رابطه عمومی گردد (برای هر حجم هر چند نامتقارن) می بایستی آن را در هر واحد حجم حساب کنیم

که برای این کار طرفین این رابطه را بر dv (در مختصات کارتزین $dx\,dy\,dz$) تقسیم نماییم که به آن دیورژانس می گویند

$$\operatorname{div}F=\nabla\cdot F=\lim_{dv\to 0}\frac{\oint F\cdot ds}{dv}$$

دیورژانس میدان برداری F در یک نقطه که با علامت $\nabla\cdot F$ نمایش داده می شود را به صورت شار خالص خروجی F در واحد حجم به صورت بالا تعریف می کنند و در مختصات دکارتی برابر است با

$$\boxed{\nabla\cdot F=\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)}$$

دیورژانس یک میدان برداری را به یک اسکالر تبدیل می کند

در صورتی که دیورژانس یک بردار مثبت باشد نشان دهنده آن است که درون آن محیط یک source (همانند بار مثبت) وجود دارد. در صورتی که منفی باشد می‌گویند درون آن محیط یک sink (همانند بار منفی) وجود دارد. در صورتی که دیورژانس صفر باشد درآن محیط هیچ منبعی ندارد یا اینکه یک چاه یا منبع (vorotic) مغناطیسی دارد، یک میدان بدون دیورژانس را یک میدان سلونوئیدی می‌نامند.

محاسبه دیورژانس در دستگاه مختصات متعامد:

از همان روند اثبات در مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم.

$$ds_1 = h_2 h_3 \, du_2 \, du_3 \, \hat{a}_{u_1}$$

$$F = F_{u_1} \hat{a}_{u_1} + F_{u_2} \hat{a}_{u_2} + F_{u_3} a_{u_3}$$

با در نظر گرفتن جز دار سطح در دو سطح روبرو نیز عکس یکدیگر است در نتیجه داریم

$$Flux_{s_1} = \int_{s_1} F \cdot ds_1 = +(F_{u_1} h_2 h_3 \, du_2 du_3) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_{u_1} h_2 h_3) \, du_1 du_1 du_3$$

و برای سطح مقابل آن یک منفی ضرب می‌شود و داریم

$$Flux_{s_2} = \int_{s_2} F \cdot ds_1 = -(F_{u_1} h_2 h_3 \, du_2 du_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_{u_1} h_2 h_3) \, du_1 du_2 du_3$$

که طبیعتاً ضریب F_{u_1} حذف می‌شود. حال اگر بقیه وجه‌ها را هم بدست آوریم مجموع آنها خواهد شد

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 F_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 F_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 F_{u_3}) \right] du_1 du_2 du_3$$

اگر آنرا بر dv تقسیم کنیم $dv = h_1 h_2 h_3 \, du_1 du_2 du_3$

$$* \quad \boxed{\nabla\cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 F_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 F_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 F_{u_3})\right]}$$

در منزل اثبات شود

که در مختصات استوانه‌ای داریم $(u_1, u_2, u_3) = (\rho, \varphi, z) \qquad (h_1, h_2, h_3) = (1, \rho, 1)$

$$\nabla\cdot F = \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

در مختصات کروی $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \varphi) \qquad (h_1, h_2, h_3) = (1, R, R\sin\theta)$

$$\boxed{\nabla\cdot A = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R^2\sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(R\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(R A_\varphi)\right]}$$

مثال: دیورژانس بردار زیر را در نقطهٔ مشخص شده بدست آورید

$$\vec{E} = \hat{a}_R\,(a^3\cos\theta/R^2) - \hat{a}_\theta\,(a^3\sin\theta/R^2) \qquad at \quad (a/2, 0, \pi)$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(a^3\cos\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{a^3\sin^2\theta}{R^2}\right) = 0 - \frac{2a^3\cos\theta}{R^3}$$

برای $R = a/2 \,,\; \theta = 0 \longrightarrow \nabla\cdot E = -16$

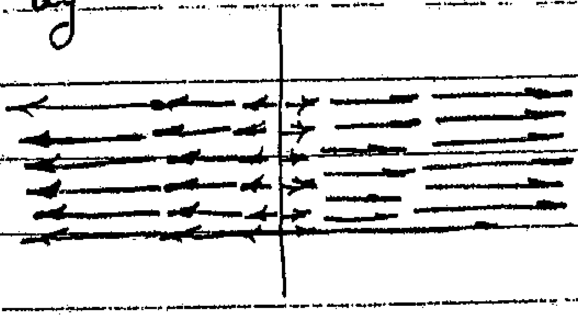
مثال: دیورژانس بردارهای زیر را بدست آورید (سعی نمایید ابتدا بردارها را رسم نمایید و در مورد تغییر فکر کنید

1) $\vec{A} = x\,\hat{a}_x$ (دیورژانس آنها عجیب نباشد)

2) $\vec{A} = -\cos x \sin y\,\hat{a}_x + \sin x \cos y\,\hat{a}_y$

3) $\vec{A} = -xy\,\hat{a}_x + y^2 a_y$

$\vec{A} = x\,\hat{a}_x$



$\boxed{\nabla \cdot x = \frac{\partial (x)}{\partial x} = 1}$ $-\sin$

2) $\vec{A} = -\cos x \sin y\,\hat{a}_x + \sin x \cos y\,\hat{a}_y$

$\frac{\partial}{\partial x}(-\cos x \sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin x \cos y) = \sin y \sin x - \sin x \sin y = \boxed{0}$

3) $\vec{A} = -xy\,\hat{a}_x + y^2\,\hat{a}_y$

$\frac{\partial}{\partial x}(-xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = -y + 2y = \boxed{y}$

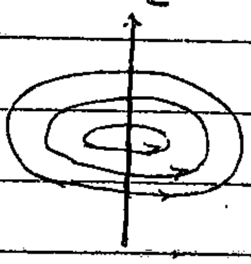
مثال: چگالی شار مغناطیسی B در بیرون یک سیم بینهایت طویل حامل جریان به صورت دایره ای و متناسب با معکوس فاصله از محور سیم است. $\nabla\cdot B$ را بدست آورید؟

در صورتی که سیم در جهت محور z در دستگاه مختصات استوانه ای باشد بردار شکل آن که در فرمول آمده: $B=\hat{a}_\phi \dfrac{K}{\rho}$

$$\nabla\cdot B=\dots+\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}+\dots=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{K}{\rho}\right)=0 \longrightarrow \nabla\cdot B=0$$

منبع برداری است و به صورت گردابی است

مثال:



میدان های مغناطیسی به صورت چرخشی در اطراف سیم حامل جریان اند. نتیجه این که منبع (حجم)

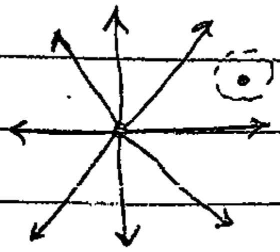
این میدان ها را قطع کند شار ورودی و خروجی به آن یکسان است و در نتیجه $\nabla\cdot B=0$

مثال: میدان الکتریکی یک بار را می توان به صورت رو به رو در مختصات کروی بیان نمود. دیورژانس آن را بیابید

$$E=\frac{E_0}{R^2}\hat{a}_R$$

$$E_R=\frac{E_0}{R^2}\longrightarrow \nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2E_R\right)+0=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{E_0}{R^2}\right)=0$$

$$\nabla\cdot E=0 \quad for \quad r\neq 0$$



همانطور که مشخص است در هر نقطه ای غیر از مبدا صفر است (چون در حجم مشخص شده هیچ منبعی (بار) وجود ندارد) دیورژانس صفر

در سمت راست بیان شد خواهیم دید که در نقطه صفر $\nabla\cdot E=4\pi E_0$

از آنجایی که $E_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ در مثال بالا است پس $\nabla\cdot E=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

کاملا مشخص است که دیورژانس E در مرکز چون منبع (بار) داریم غیر صفر و وابسته به مقدار آن است

دیورژانس میدان های الکتریکی و مغناطیسی

مطابق مثال های قبل، دریافتیم که از آن جائیکه B از جریان بدست می آید و خطوط میدان مغناطیسی همواره خطوط بسته ای هستند گردابی (سیم لوله مانند)

این امر موجب می شود که میدان مغناطیسی سلونوئیدال باشد

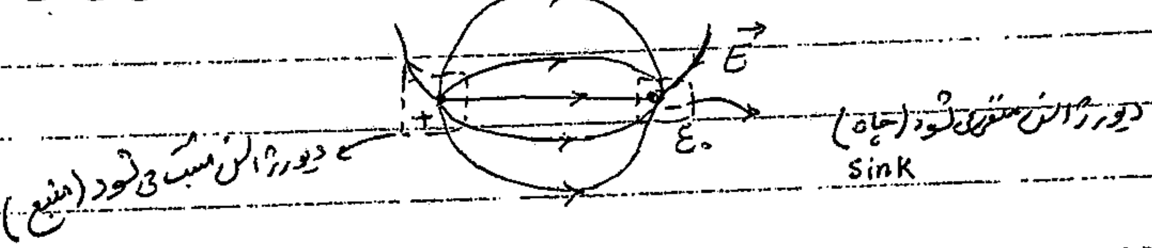
$$\nabla\cdot B=0$$

ولی در مورد میدان الکتریکی، این میدان ناشی از بارهای الکتریکی است و خطوط میدان از جایی شروع شده و به جایی ختم می شوند یا به بی نهایت می روند در نتیجه داریم:

$$\nabla\cdot E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

چگالی بار

قانون نقطه ای گوس



قضیه گوس یا دیورژانس:

بر اساس تعریف ریاضی که از دیورژانس ارائه کردیم می توانیم بنویسیم

$$\nabla\cdot F=\frac{\oint F\cdot ds}{dv}$$

که برای حجم محدود dv محاسبه شده

حال اگر یک حجم مشخص V داشته باشیم می توانیم از انتگرال حجمی

دیورژانس یک میدان برداری (یعنی دیورژانس در تمام حجم V) با شار کل خروجی بردار از سطح دربرگیرنده حجم برابر است

که دیورژانس کل حجم را به صورت $\int_v \nabla\cdot F\,dv$ نشان می دهند و داریم

$$\boxed{\int_v \nabla\cdot F\,dv=\oint_s F\cdot ds} *$$

که می بایستی برای انتگرال سمت راست مجموع تمام سطوح بیرونی دربرگیرنده حجم را بنویسیم

با استفاده از این قضیه می توان یک انتگرال سه گانه را به یک انتگرال دوگانه تبدیل کرد.

مثال: میدان برداری $A=\rho\cos\varphi\,\hat{a}_\rho+\rho\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi+\hat{a}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است.

مطلوبست محاسبه کل شار عبوری از سطح خارجی (یا به عبارتی $\oint_S A\cdot ds$) سطح بسته محدود به صفحات

$z=0$ و $z=l$ و سطح استوانه‌ای $\rho=a$ ب) الف را براساس قضیه دیورژانس حل نمایید

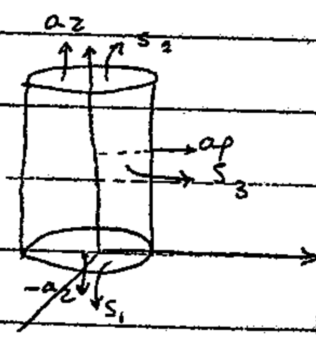
$$\oint A\cdot ds=\int_{S_1}A\cdot ds+\int_{S_2}A\cdot ds+\int_{S_3}A\cdot ds$$

برای $0\leq\varphi\leq 2\pi$

$S_1:\ z=0$ و $0\leq\rho\leq a$ ، $ds=-\rho\,d\rho\,d\varphi\,\hat{a}_z$

$S_2:\ z=l$ و $0\leq\rho\leq a$ ، $ds=\rho\,d\rho\,d\varphi\,\hat{a}_z$

$S_3:\ \rho=a$ و $0\leq z\leq l$ ، $ds=a\,d\varphi\,dz\,\hat{a}_\rho$



$$I_1=\int_{S_1}A\cdot ds=-\int_0^a\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi=-\pi a^2$$

$$I_2=\int_{S_2}A\cdot ds=\int_0^a\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi=\pi a^2$$

$$I_3=\int_{S_3}A\cdot ds=a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^l dz=0$$

$$\oint A\cdot \overline{ds}=I_1+I_2+I_3=-\pi a^2+\pi a^2+0=0$$

ب) $$\nabla\cdot A=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=2\cos\varphi+\cos\varphi+0=3\cos\varphi$$

$$\oint A\cdot ds=\int_V\nabla\cdot A\,dV=\int_V 3\cos\varphi\;\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=3\int_0^a\rho\,d\rho\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{\text{صفر}}\int_0^l dz=0$$

مثال: محاسبه $\nabla \cdot E$ برای میدان برداری $E = \frac{E_0}{R^2}\hat{a}_R$ در مرکز (مبداء) مختصات؟ این سؤال را برای تمامی نقاط که

به غیر از مبداء مختصات حل نمودیم. اکنون با کمک تئوری دیورژانس داریم:

$$\oint_s E \cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{E_0}{R^2}\hat{a}_R\right)\cdot\left(R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{a}_R\right) = 4\pi E_0$$

$\int_v \nabla \cdot E \, dv = 4\pi E_0$ و بر اساس تئوری دیورژانس داریم

این رابطه مستقل از R می باشد حال اگر R را به سمت صفر میل دهیم می توانیم برای آنکه $\int_v \nabla \cdot E \, dv$ مقدارش $4\pi E_0$ شود

بنویسیم $\nabla \cdot E = E_0 4\pi \delta_3(r) = 4\pi E_0 \delta(x)\delta(y)\delta(z) = 4\pi E_0 \delta_3(\vec{r})$

چرا که
$$\int_v \delta(x)\delta(y)\delta(z) dv = \int_v \delta_3(r) dv = \begin{cases} 0 & \text{نقطه صفر} \\ 1 & \text{در } dv \text{ محل صفر} \end{cases}$$

۱-۸ کرل ($\nabla \times$)

در بخش قبل برای محاسبه منابع میدان هایی که به صورت خطوط جریان (خطوط مستقیم) هستند از دیورژانس استفاده نمودیم ولی برخی از منابع هستند که تولید میدان های چرخشی (گردابی) می کنند و با استفاده از دیورژانس نمی توان آنها را یافت. برای یافتن این میدانها از کرل (curl) استفاده می کنیم. از این نوع میدان ها می توان به میدان های مغناطیسی که به وسیله جریان تولید می شوند و به صورت دایره ای و چرخشی در اطراف خطوط جریان هستند نام برد.

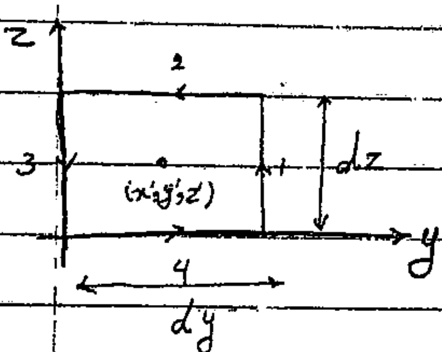
گردش خالص یک میدان برداری به دور یک مسیر بسته، انتگرال آن بر روی مسیر بسته تعریف می گردد.

$\oint_c A\cdot dl \triangleq$ گردش A به دور مسیر C

چون گردش تعریف شده در معادله ۸، انتگرال خطی یک حاصلضرب داخلی است، مقدار آن به جهت مسیر نسبت به بردار A وابسته است (چرا که در حاصلضرب داخلی، اندازه حاصلضرب وابسته به کسینوس زاویه بین بردار و مسیر است)

ابتدا این انتگرال را برای دستگاه مختصات کارتزین محاسبه می کنیم سپس آن را به کلیه دستگاه‌های مختصات گسترش می دهیم

برای سادگی کار ابتدا در دستگاه مختصات کارتزین مقدار این انتگرال را در صفحه yz (x ثابت) بدست می آوریم



فرض می کنیم منبع در وسط این مسیر که چرخشی است در نقطه (x', y', z')

برای مسیر ۱

$$dl = a_z\, dz$$

$$A\cdot dl = A_z\left(x', y'+\frac{dy}{2}, z'\right) dz$$

چرا که داریم

$$A\cdot dl = \left(A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z\right)\Big|_{(x', y'+\frac{dy}{2}, z')} \cdot \hat{a}_z = A_z\, dz$$

A_z را در بسط تیلور می دهیم

$$A_z\left(x', y'+\frac{dy}{2}, z'\right) = A_z(x', y', z') + \frac{dy}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\Big|_{(x',y',z')} + \text{مشتق مراتب بالاتر}$$

پس انتگرال روی این مسیر می شود

$$\int_{\text{ضلع ۱}} A\cdot dl = \left[A_z(x', y', z') + \frac{dy}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\Big|_{(x',y',z')}\right] dz$$

ضلع سوم:

$$dl = -a_z\, dz \qquad A\cdot dl = -A_z\left(x', y'-\frac{dy}{2}, z'\right) dz$$

به جهت بردار پایین است

بسط تیلور A_z

$$A_z\left(x', y'-\frac{dy}{2}, z'\right) = A_z(x', y', z') - \frac{dy}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\Big|_{(x',y',z')} + \text{مشتق مراتب بالاتر}$$

در نتیجه از جمع مقادیر این دو ضلع داریم

$$\int_{\text{اضلاع ۱ و ۳}} A\cdot d\bar{l} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\, dy\, dz$$

به طریق مشابه برای اضلاع ۲ و ۴ داریم

ضلع ۲: $d\bar{l} = -\hat{a}_y\, dy \qquad A\cdot dl = -A_y\, dy$

$$A_y\left(x', y', z' + \frac{dz}{2}\right) = \left(A_y + \frac{dz}{2}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Big|_{(x', y', z')}$$

ضلع ۴: $d\bar{l} = \hat{a}_y\, dy \qquad A\cdot dl = A_y\, dy$

$$A_y\left(x', y', z' - dz/2\right) = \left(A_y - \frac{dz}{2}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Big|_{(x', y', z')}$$

$$\int_{\text{اضلاع ۲ و ۴}} A\cdot d l = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\, dy\, dz$$

حال اگر ۴ ضلع را باهم جمع کنیم خواهیم داشت

$$\oint_c A\cdot d\bar{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy\, dz$$

همانطور که گفته شد انتگرال فوق وابسته به مسیر است برای آن که آن را مستقل از مسیر کنیم بر واحد سطح تقسیم می کنیم

که مسیر انتخابی وابسته به سطح نباشد که این کار تعریف کرل می گردد

$$\nabla\times A = \lim_{ds\to 0} \frac{\oint A\cdot d\bar{l}}{ds}\, \hat{a}_x$$

که کرل اپراتوری است که یک بردار را به برداری تبدیل می کند که اندازه آن حداکثر گردش خالص A در واحد

سطح است و مثل که سطح به سمت چپ میل می کند و جهت آن مثبت عمود سطح است و طبق قاعده دست راست مشخص می گردد.

در مختصات کارتزین که صفحه x ثابت را بررسی می کردیم کرل را بر $ds = dy\,dz$ تقسیم کردیم و خواهیم داشت

$$(\nabla \times A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

با همین روش می توان کرل را در صفحه‌ای z ثابت و y ثابت نیز محاسبه کرد. که عبارت کامل کرل در مختصات کارتزین می شود:

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

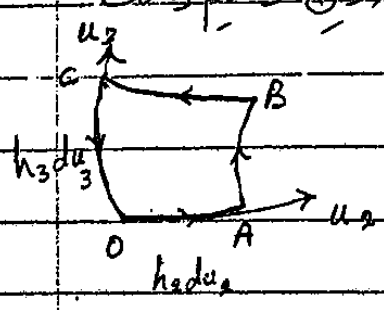
که برای سادگی در حفظ کردن می توان از شکل دترمینان آن، که به صورت ضرب خارجی است، استفاده کرد

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

در صورتی که کرل یک بردار صفر شود، میدان غیرگردشی یا میدان ذخیره شونده می باشد.

محاسبه کرل در دستگاه مختصات متعامد

در صورتی که یک صفحه دلخواه در مختصات متعامد را مانند روبرو انتخاب کنیم مانند مختصات کارتزین خواهیم داشت:



$$OA:\ dl = h_2 du_2\, \hat{a}_{u_2} \qquad A\cdot dl = (A_{u_2})(h_2 du_2)$$

$$BC\ \ dl = -h_2 du_2\, \hat{a}_{u_2} \qquad A\cdot dl = -(A_{u_2})(h_2 du_2)$$

که می بایست A_{u_2} بسط تیلور داده شود که در نهایت داریم:

$$\left(\int_{o}^{A}+\int_{B}^{C}\right) A\cdot d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial u_3}(A_{u_2}h_2)\,du_2\,du_3$$

وهمچنین داریم

$$\left(\int_{A}^{B}+\int_{C}^{o}\right) A\cdot d\bar{l} = \frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3)\,du_2\,du_3$$

در نتیجه کرل در جهت $\hat{a}_{u_1}$ می شود (می بایستی بر سطح du_2du_3 روابط بالا را تقسیم و با هم جمع کنیم)

$$(\nabla\times A)_{u_1} = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right]$$

که البته می توان این معادله را برای هر سه سطح متعامد گسترش داد که رابطه دترمینانی آن می شود

$$\boxed{\nabla\times A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{a}_{u_1} & h_2\hat{a}_{u_2} & h_3\hat{a}_{u_3} \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}}$$

که برای مختصات استوانه ای داریم

$$\nabla\times A = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times A = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\hat{a}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{a}_z$$

و در مختصات کروی:

$$\nabla\times A = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\theta & R\sin\theta\,\hat{a}_\varphi \\ \partial/\partial R & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_R & RA_\theta & R\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

مثال: $\nabla\times A$ را بیابید

$$A = \rho\cos\varphi\,\hat a_\rho - \rho\sin\varphi\,\hat a_\varphi$$

$$\nabla\times A = [0-0]\,\hat a_\rho + [0-0]\,\hat a_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(-\rho^2\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho\cos\varphi)\right]a_z$$

$$= -\sin\varphi\,\hat a_z$$

مثال: کرل توابع زیر را بیابید (از روی نمودار آنها نیز تعبیر فیزیکی لازم را از مفهوم کرل دریابید)

1) $A = x\,\hat a_x$ 2) $A = -\cos x\sin y\,\hat a_x + \sin x\cos y\,\hat a_y$

$$1)\quad \begin{vmatrix} \hat a_x & \hat a_y & \hat a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} \hat a_x & \hat a_y & \hat a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{2}{\partial z} \\ -\cos x\sin y & \sin x\cos y & 0 \end{vmatrix} = 2\cos x\cos y\,\hat a_z$$

مثال: چگالی شار مغناطیسی B به صورت چرخشی مطابق فرمول روبرو است کرل آن را بیابید

$$B = \hat a_\varphi \frac{K}{\rho}$$

$$\nabla\times B = 0$$

کرل این بردار در تمامی نقاط غیر محوری صفر می گردد که البته مقدار آن به وسیله

قضیه استوکس محاسبه می گردد.

مثال: کرل میدان الکتریکی یک بار را بیابید

$$E = \frac{E_0}{R^2}\,a_R$$

کرل صفر است چرا که برای بار الکتریکی میدانها به صورت  $\nabla\times E=0$
چرخشی نیست و در نتیجه $\nabla\times E$

کرل میدان های الکتریکی و مغناطیسی

میدان الکتریکی ناشی از بار های الکتریکی است و خطوط میدان از جایی شروع به جایی پایان می یابند و چرخشی نیستند در نتیجه در حالت (الکترواستاتیک و مغناطواستاتیک) میدان الکتریکی غیر چرخشی است

$$\boxed{\nabla\times E=0}$$

در حالیکه میدان مغناطیسی یک میدان چرخشی و به صورت خطوط بسته است

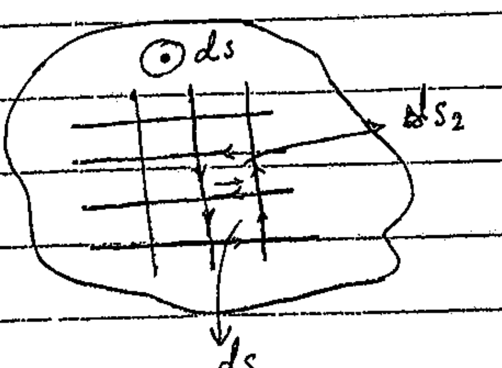
$\nabla\times B=\mu_0\vec{J}$ یا $\oint_c B\cdot dl=\mu_0 I$ (طبق قضیه استوکس)

قضیه استوکس Stokes's Theorem

همچون قضیه گوس به ما نیاز میدهیم که این کرل نه بر یک $ds\to$ کاهش بلکه بر یک سطح S گرفته شود که در صورتی که S را مجموعی از ds که در نظر بگیریم (انتگرال گیری) خواهیم داشت:

$$\boxed{\int_s(\nabla\times A)\cdot ds=\oint_c B\cdot dl}$$

اثبات



طبق کرل برای سطح ds داریم

$$\oint A\cdot dl=(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s}_1$$

که در صورتی که سطح را مجموع ds_i که برابریم داریم

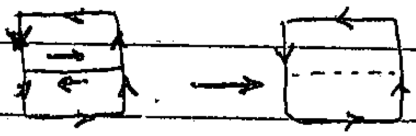
$$\sum_{\substack{i=1\\ ds_i\to 0}}^{N}(\nabla\times A)_i\cdot ds_i=\int_s\nabla\times A\cdot ds$$

حال با جمع کردن یک انتگرال سمت راست معادله $(\oint A\cdot dl)$ ها برای هرکدام از سطوح (جمع کنیم)، چون بخش مشترک مسیرهای دو جزء کوچک مجاور توسط دو مسیر در جهات مخالف طی می شود، سهم خالص تمامی بخش های مشترک درونی در کل انتگرال خطی صفر است و تنها سهم مسیر خارجی c که کل سطح S را احاطه کرده است، پس از جمع باقی می ماند

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\oint_{c_i} A\cdot dl\right)=\oint_c A\cdot dl$$

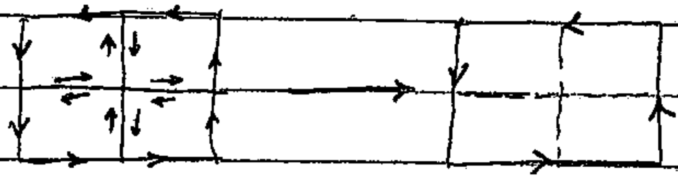
برای درک بهتر به شکل های زیر که ترکیب مسیرها را نشان می دهد دقت کنید

دو مسیر مجاور



یعنی همه مسیرها در کنار هم تبدیل به خارجی ترین مسیر می شود

چهار مسیر



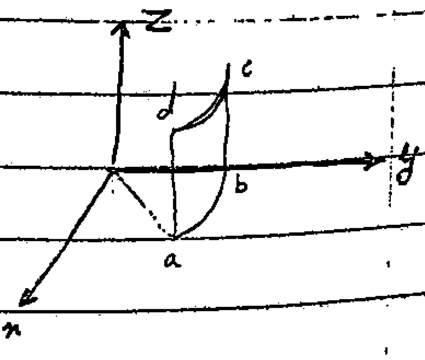
که در نتیجه داریم

$$\boxed{\int_S (\nabla\times A)\cdot ds=\oint_c A\cdot dl}$$

یعنی: انتگرال سطحی کرل یک میدان برداری، روی یک سطح باز برابر انتگرال خطی بسته بردار روی مسیری است که سطح را دربر می گیرد.

مثال: برای میدان برداری $B=\frac{\cos\varphi}{\rho}\hat{a}_z$ قضیه استوکس را روی سطح استوانه ای زیر تحقیق نمایید

$\rho=2$ و $\pi/3\le\varphi\le\pi/2$ و $0\le z\le 3$



قضیه استوکس $\int_S (\nabla\times B)\cdot ds=\oint_c B\cdot dl$

سمت چپ:

$$\nabla\times B=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \frac{\cos\varphi}{\rho}\end{vmatrix} = -\frac{\sin\varphi}{\rho^2}a_\rho+\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\hat{a}_\varphi$$

$$\int_s \nabla\times B\cdot ds=\int_0^3\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho^2}\hat{a}_\rho+\frac{\cos\varphi}{\rho^2}a_\varphi\right)\cdot\left(\rho\, d\varphi\, dz\,\hat{a}_\rho\right)$$

$$=\int_0^3\int_{\pi/3}^{\pi/2}-\frac{\sin\varphi}{\rho}d\varphi\, dz=-\frac{3}{2\rho}=-\frac{3}{4}$$

سمت راست:

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl}=\left[\int_a^b+\int_b^c+\int_c^d+\int_d^a\right]B\cdot\vec{dl}=$$

$$\int_a^b\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\hat{a}_z\right)\cdot\underbrace{\left(\rho\, d\varphi\,\hat{a}_\varphi\right)}_{0}+\int_b^c\left(\frac{\cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}}}{\rho}\hat{a}_z\right)\cdot\left(dz\,\hat{a}_z\right)+\int_c^d\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\hat{a}_z\right)\cdot\underbrace{\left(-\rho\, d\varphi\,\hat{a}_\rho\right)}_{0}+\int_d^a\left(\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{2}\hat{a}_z\right)\cdot\left(dz\,\hat{a}_z\right)$$

$$=0+0+0+\int_3^0\frac{1}{4}dz=-3/4$$

که همانطور که انتظار داشتیم دو نتیجه باهم برابر شدند.

۱-۹ مشتق های چندگانه:

تاکنون سه نوع مشتق را تعریف کردیم: ۱) $\nabla\Phi$ که به یک میدان اسکالر اعمال می شود و حاصل بردار است

۲) $\nabla\cdot\vec{F}$: که به یک میدان برداری اعمال می شود و حاصل اسکالر است

۳) $\nabla\times\vec{F}$: که به یک میدان برداری اعمال می شود و حاصل بردار است

که بر این اساس ۵ مدل مشتق چندگانه خواهیم داشت که به بررسی آنها می پردازیم:

$$\nabla\cdot\nabla\Phi,\quad \nabla\times\nabla\Phi,\quad \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}),\quad \nabla\times(\nabla\times\vec{F}),\quad \nabla(\nabla\cdot\vec{F})$$

۱) لاپلاسین تابع اسکالر

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi)$$

ابتدا گرادیان تابع اسکالر Φ را در مختصات کارتزین می نویسیم

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{a}_z\right)$$

حال دیورژانس تابع برداری حاصل را می نویسیم

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

تمرین: رابطه لاپلاسین تابع اسکالر را در دستگاه مختصات متعامد یافته و آن را برای دستگاه های مختصات استوانه ای و کروی بسط دهید

۲) لاپلاسین تابع برداری

لاپلاسین یک تابع برداری بدین صورت تعریف می شود

$$\nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times \nabla \times \vec{F}$$

a2) محاسبه $\nabla(\nabla \cdot \vec{F})$:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z}\right)\hat{a}_y$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial^2 z}\right)\hat{a}_z$$

b2) $\nabla \times \nabla \times \vec{F}$: $\nabla \times \vec{F}$ را محاسبه می کنیم

محاسبه به ترتیب قبل را هم داریم:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & a_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} & \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 F_z}{\partial z\partial x}\right)\right)\hat{a}_x$$

$$+\left(-\left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right)\right)\hat{a}_y$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F_y}{\partial y\partial z}\right)\right)\hat{a}_z$$

حال اگر بخواهیم رابطه لاپلاسین را بیابیم خواهیم داشت

$$\nabla^2\vec{F}=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla\times\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right)\hat{a}_x$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right)\hat{a}_z$$

$$\nabla^2\vec{F}=(\nabla^2 F_x)\hat{a}_x+(\nabla^2 F_y)\hat{a}_y+(\nabla^2 F_z)\hat{a}_z$$

برداری

اسکالر

که رابطه بالا نحوه محاسبه لاپلاسین برداری را از طریق لاپلاسین اسکالر نمایش می دهد.

3) کرل گرادیان هر میدان اسکالر برابر صفر است.

$$\nabla\times\nabla\Phi=0$$

به عبارتی در صورتی که از یک میدان اسکالر گرادیان بگیریم (یعنی نرخ تغییرات یک میدان را بدست آوریم یا بردار نرمالش را محاسبه کنیم) بردار حاصله قطعاً غیر چرخشی (کرل آن برابر صفر) است.

راه های اثبات این قضیه به دو صورت است a) با بسط گرادیان Φ در دستگاه مختصات و کرل گرفتن (که آن را به دانشجویان واگذار کردیم) b) استفاده از قضیه استوکس و خواص گرادیان

بر اساس قضیه استوکس داریم

$$\int_s [\nabla\times(\nabla\Phi)]\cdot ds = \oint_c \nabla\Phi\cdot dl$$

که بر اساس تعریف گرادیان داریم (که در این تعریف $d\Phi \to 0$)

$$d\Phi = \nabla\Phi\cdot dl$$

$$\oint_c \nabla\Phi\cdot dl = \oint_c d\Phi = 0$$

البته $\oint \nabla\Phi\cdot dl$ را قبلاً در مثالی حل کرده بودیم و اثبات کردیم این انتگرال

وابسته به مسیر نیست و وابسته به نقاط ابتدایی و انتهایی است و در مسیر بسته نقاط ابتدایی و انتهایی یکی است در نتیجه اختلاف آن صفر است

پس در نتیجه از آنجائیکه انتگرال سمت راست قضیه استوکس برابر صفر شد، برای صفر شدن انتگرال سمت چپ می بایستی:

$$\nabla\times\nabla\Phi = 0$$

این رابطه نشان می دهد که در صورتیکه کرل یک میدان برداری برابر صفر بود ($\nabla\times E = 0$)

می توان آن میدان برداری را بر اساس گرادیان یک میدان اسکالر نوشت ($\vec{E} = -\nabla V$) چرا که

$$\nabla\times\vec{E} = 0 \xrightarrow{\text{از آنجائیکه}} \nabla\times(\nabla V) = 0$$

۴) دیورژانس کرل هر میدان برداری برابر صفر است

$$\nabla\cdot(\nabla\times F) = 0$$

$\nabla\cdot(\ )$ $\nabla\times F$

به عبارتی منبع یک میدان چرخشی خود نمی تواند منبع باشد

این قضیه را هم می توان با استفاده از قضیه گوس اثبات نمود و هم از طریق بسط این معادلات.

حال در یک حالت خاص این مشتقات را در دستگاه مختصات دکارتی بسط می دهیم

$$\nabla\cdot\nabla\times F = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)}_{(\nabla\times F)_x} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)}_{(\nabla\times F)_y} + \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)}_{(\nabla\times F)_z}$$

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} = 0$$

پس اگر یک میدان برداری بدون دیورژانس ـ سلونوئیدی ـ باشد ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$) آنگاه می توان آن بردار را

به صورت کرل میدان برداری دیگر نوشت. $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

۱۰-۱ قضیه هلمولتز Helmholtz's Theorem

می دانیم برخی بردارها دارای دیورژانس صفر هستند یعنی شار خالص گذرنده از هر سطح دلخواهی برابر صفر می شود به این

بردارها سلونوئیدی گویند. برخی از بردارها که دارای کرل صفرند یعنی چرخش چنین برداری روی هر مسیر بسته ای نداریم

همچنین برداری غیر چرخشی گویند. بردارها را بر این اساس می توان به چهار دسته تقسیم کرد

۱) سلونوئیدی و غیر چرخشی ($\nabla \cdot F = \nabla \times F = 0$) مانند میدان الکتریکی ساکن در ناحیه بدون بار

۲) سلونوئیدی و چرخشی ($\nabla \cdot F = 0$ و $\nabla \times F \neq 0$) مانند یک میدان مغناطیسی ناشی از جریان

۳) غیر سلونوئیدی و غیر چرخشی ($\nabla \cdot F \neq 0$ و $\nabla \times F = 0$) مانند میدان الکتریکی ناشی از بار

۴) غیر سلونوئیدی و چرخشی ($\nabla \cdot F \neq 0$ و $\nabla \times F \neq 0$) مانند میدان الکتریکی ناشی از بار به همراه میدان مغناطیسی متغیر با زمان

می دانیم که دیورژانس مشخص کننده منبع جریانی (مثل بار الکتریکی) و کرل مشخص کننده منبع چرخشی برداری (مثل جریان الکتریکی) است

قضیه هلمولتز بیان می دارد که اگر دیورژانس و کرل یک بردار مشخص باشد آن بردار را می توان تعیین کرد.

در واقع مشخص بودن دیورژانس و کرل به معنی مشخص بودن کلیه منابع است.

از این رو می توان برداری مثل F را به یک بخش غیرچرخشی F_i و یک بخش سلونوئیدی F_s تجزیه کرد $\vec{F} = \vec{F}_i + \vec{F}_s$

که طبق اثبات‌های بخش قبل هفته که دیورژانس و کرل صفر می شوند داریم:

غیرچرخشی
$$\begin{cases} \nabla \times F_i = 0 \longrightarrow F_i = -\nabla V & (1) \\ \nabla \cdot F_i = g \end{cases}$$

سلونوئیدی
$$\begin{cases} \nabla \cdot F_s = 0 \longrightarrow F_s = \nabla \times A & (2) \\ \nabla \times F_s = G \end{cases}$$

که در اینجا g و G به عنوان شرایط مرزی مشخص هستند و

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot F_i + \nabla \cdot F_s = g$$
$$\nabla \times F = \nabla \times F_i + \nabla \times F_s = G$$

در نتیجه بر اساس قضیه هلمهولتز می توانیم برداری مثل $\vec{F}$ را که دیورژانس و کرل آن مشخص است به صورت زیر

$$\vec{F} = -\nabla \vec{V} + \nabla \times \vec{A}$$

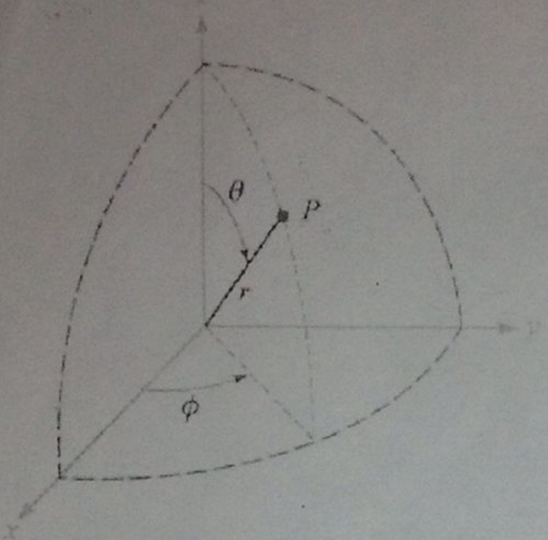
و بر اساس شرایط مرزی بدست آورد

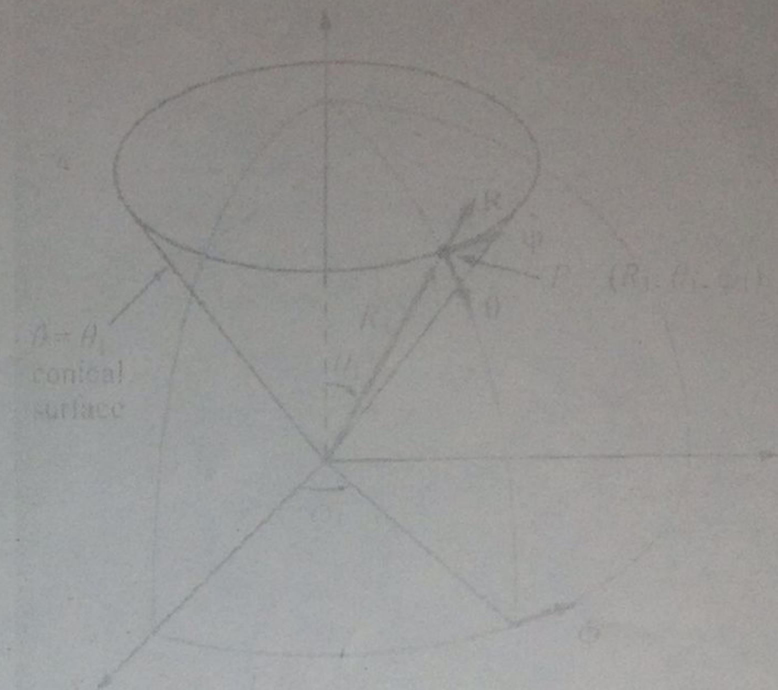
به عبارتی در صورتی که یک میدان برداری داشته باشیم که بر اساس منابع عوامل و گردش تولید شده باشد برای

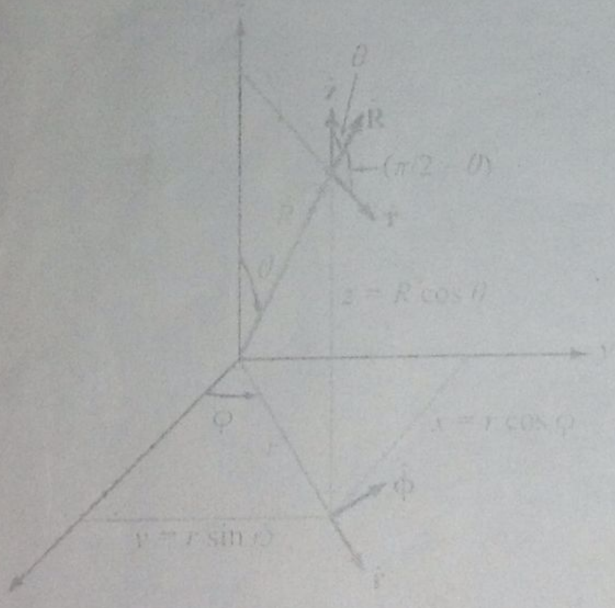
محاسبه این بردار ابتدا از منبع چرخشی صرف‌نظر می کنیم که رابطه مثل (1) محاسبه می شود ($\nabla \times F_i = 0$) سپس با وجود منبع

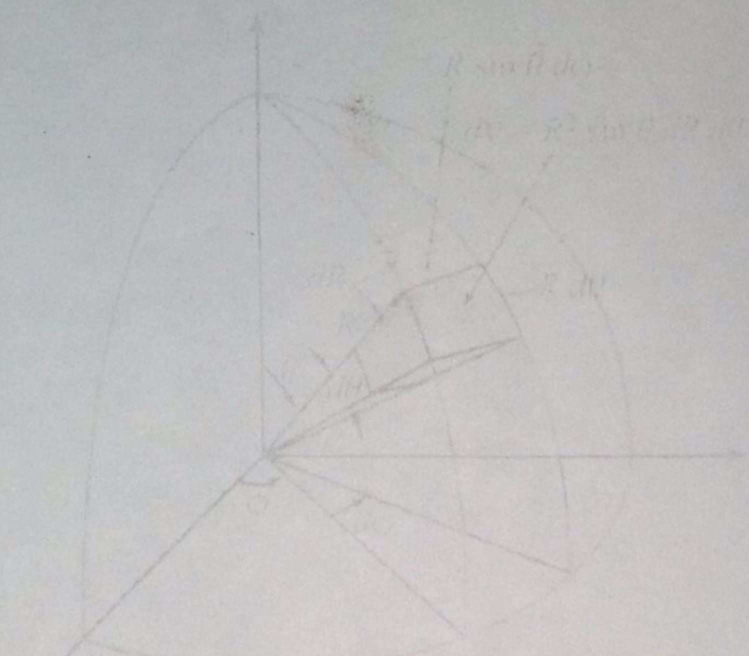
چرخشی از منبع شارانی صرف‌نظر می کنیم و رابطه‌ای مثل (2) برقرار خواهد شد ($\nabla \cdot F_s = 0$). از جمع آثار این دو رابطه، قضیه

هلمهولتز بدست می آید

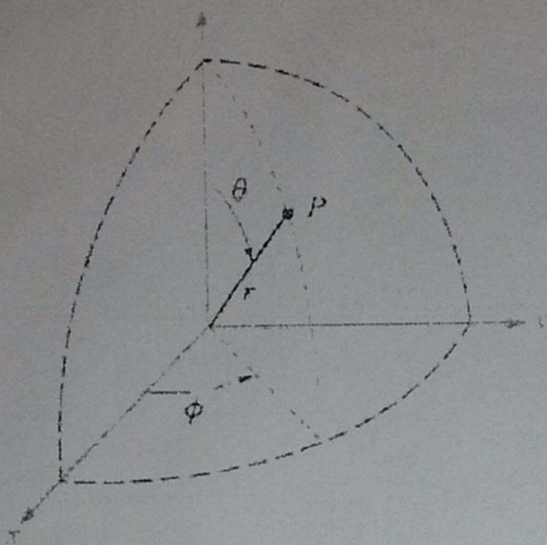

θ
P
r
φ

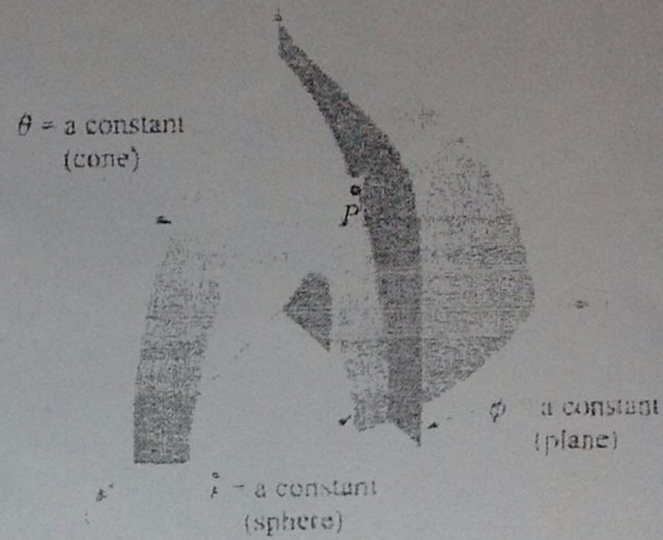

conical
surface

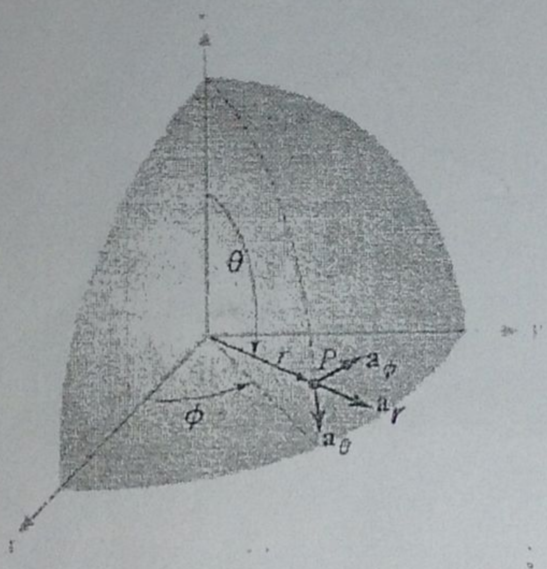

R
(π/2 − θ)
z = R cos θ
x = r cos φ
y = r sin φ

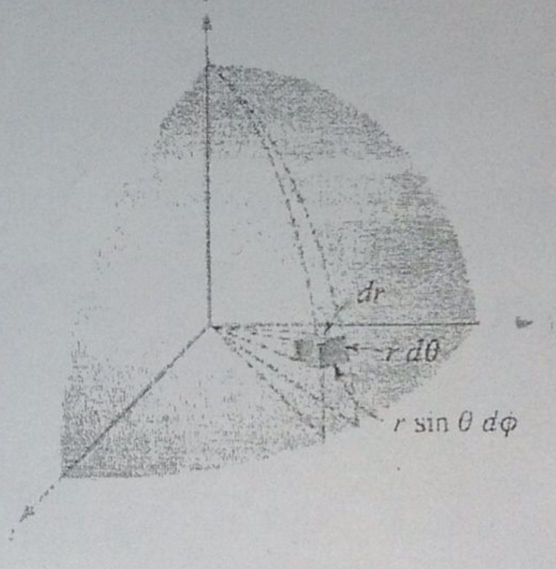


دستگاه مختصات کروی

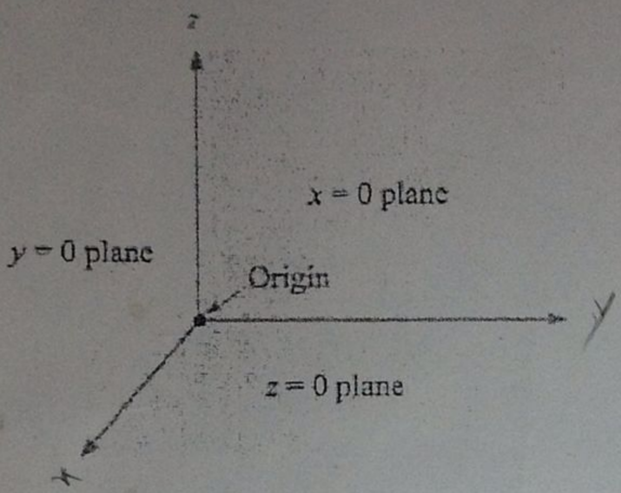


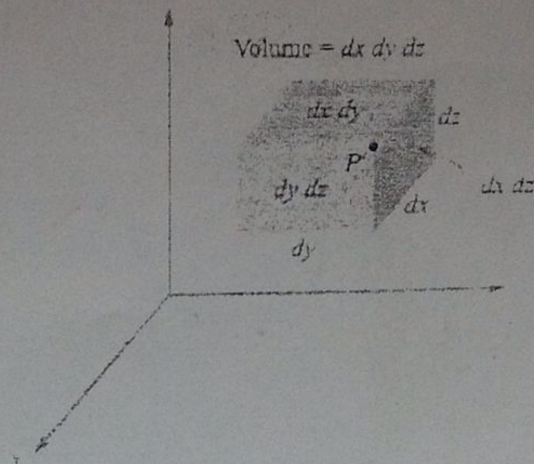


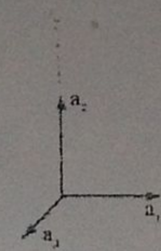




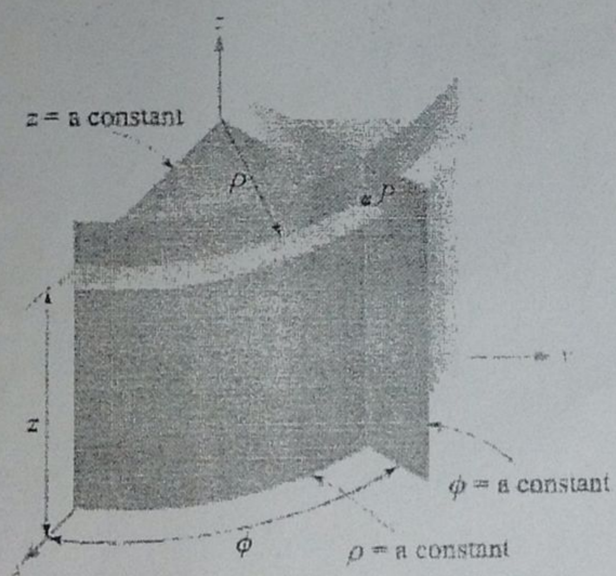
دستگاه مختصات کارتزین

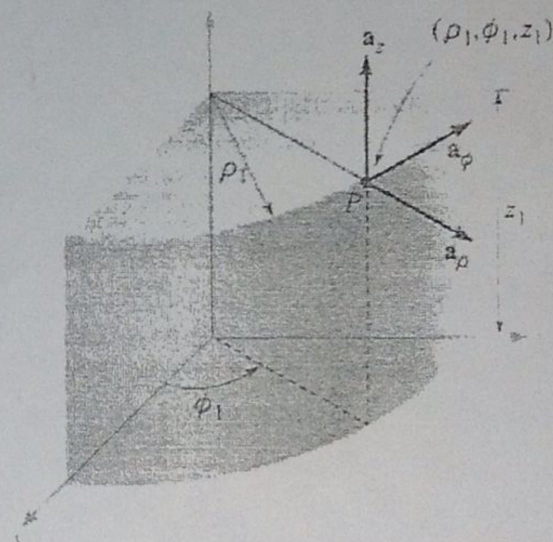


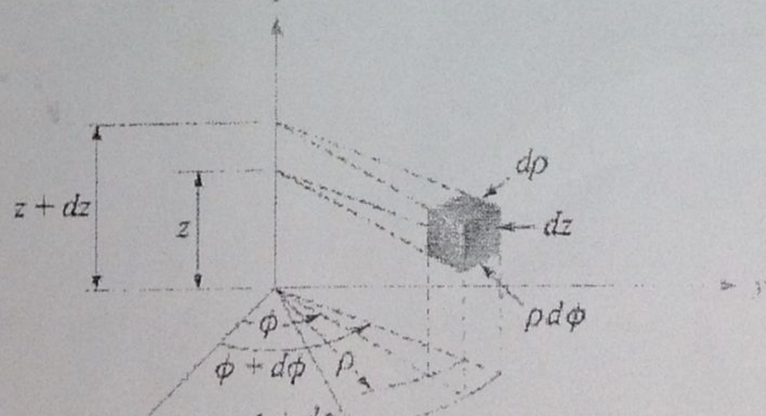


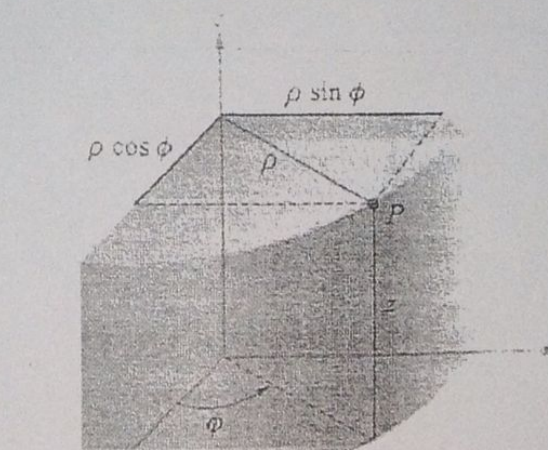


دستگاه مختصات استوانه ای









①

فصل دوم:

میدان الکتریکی در فضای آزاد

۲-۱ معادلات ماکسول

معادلات کلی حاکم بر میدان های الکترومغناطیسی بر اساس معادلات ماکسول می باشند. این معادلات به قرار زیر است:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$

که $\vec{E}$ و D به ترتیب چگالی میدان الکتریکی و چگالی شار الکتریکی هستند و

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

همچنین $\vec{H}$ و $\vec{B}$ نیز چگالی میدان مغناطیسی و چگالی شار مغناطیسی هستند و

که ε و μ ضرایب نفوذپذیری الکتریکی و مغناطیسی اند که از مشخصات محیط هستند که میدان ها در آن منتشر می شوند.

همانطور که از روابط بالا مشخص است این روابط برای اولین بار توسط آقای ماکسول ارائه شد و تمامی قوانین تجربی

در این زمینه را تحت پوشش قرار می داد که رابطه متقابل ما بین $\vec{E}$ و $\vec{H}$ را که وابسته به زمان t می باشد نشان می دهد

هرگاه معادلات بالا وابستگی به زمان نداشته باشند به این شرایط، شرایط استاتیک گفته می شود.

این شرایط زمانی رخ می دهد که یا بارها در فضا ثابت باشند یا در حرکت می کنند مقدار ρ_v (چگالی بار حجمی) یا J (چگالی جریان)

(2)

ثابت نسبت به زمان باشند. در این صورت معادلات بالا را به دو حالت می توان تقسیم کرد

a) الکترواستاتیک: $\nabla \cdot D = \rho_v \quad (\text{یا } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}) \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = 0$

b) مگنتواستاتیک: $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{H} = J$

اتفاق مهمی که می افتد این است که در این شکل از معادلات دیگر $\vec{E}$ و $\vec{H}$ با یکدیگر کوپلینگ ندارند و هر کدام را می توان به صورت مستقل بدست آورد (در حالت کلی معادلات ماکسول برای یافتن $\vec{E}$ می بایستی $\vec{H}$ را می داشتیم از طرفی برای یافتن $\vec{H}$ نیز بایستی $\vec{E}$ را می داشتیم که این کار را کمی مشکل می نمود).

در واقع در این حالت، این امکان را بدست می آوریم که الکتریسیته و مغناطیس را به صورت مجزا بررسی کنیم یعنی فضایی را در نظر بگیریم که یا بار الکتریکی (به عنوان منبع الکتریسیته) یا جریان (به عنوان منبع مغناطیس) وجود داشته باشد. این بررسی در حالت ساده به ما کمک می کند که هنگامی که حالت کلی یعنی وجود میدان الکتریکی و مغناطیسی به صورت همزمان را بررسی می کنیم دید بهتری نسبت به آن داشته باشیم.

در این فصل به بررسی میدان های الکترواستاتیک می پردازیم. بسیاری از دستگاه ها و سیستم ها دارای پایه ای بر اساس قوانین الکترواستاتیک هستند همچون: ماشین های X-ray، اسیلوسکوپ، دستگاه کپی، سوئیچ های ماشین های میکروالکترونیک ...

و ......

۲-۲ قانون کولن و محاسبه میدان الکتریکی

مقدمه: برای نخستین بار کولمب از طریق آزمایش های متعدد توانست نیروی وارد مابین دو بار الکتریکی را با دقت بسیار خوبی بدست آورد. این رابطه صرفاً از طریق آزمایش های تجربی بدست آمد بدین سبب در این بخش سعی داریم این رابطه را بر اساس قوانین ماکسول اثبات نموده و در محاسبه میدان الکتریکی (که ناشی از بار الکتریکی می باشد) استفاده کنیم.

برای یافتن شدت میدان الکتریکی ناشی از q، سطح کروی فرضی به شعاع R و مرکز q را در نظر می گیریم. همانطور که می دانیم میدان الکتریکی بار نقطه ای در همه جا شعاعی بوده و در همه نقاط روی سطح کره دارای شدت یکسان می باشد.

که طبق قضیه دیورژانس (گوس) داریم

$$\boxed{\oint E\cdot ds = \int_v \nabla\cdot E\, dv = \int \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}\, dv = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

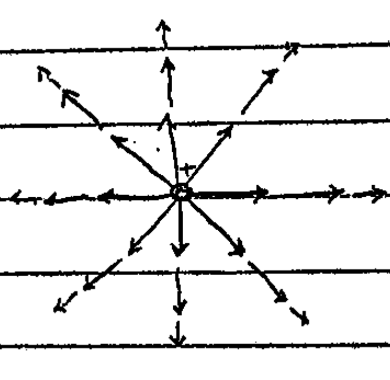
طبق معادله ماکسول

$$\oint_s E\cdot ds = \oint_s (\underbrace{\hat{a}_R E_R}_{\text{میدان شعاعی}})\cdot \underbrace{a_R\, ds}_{\text{سطح کره}} = E_R \oint_s ds = E_R \underbrace{(4\pi R^2)}_{\text{مساحت کره}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

در نتیجه خواهیم داشت

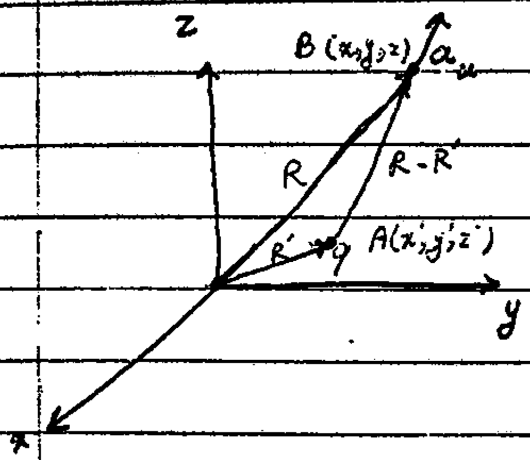
$$\vec{E} = \hat{a}_R E_R = \hat{a}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad (V/m)$$

این معادله بیان می دارد که شدت میدان الکتریکی یک بار نقطه ای مثبت در جهت شعاعی و به سمت خارج بوده، اندازه ای متناسب با بار و متناسب با عکس مربع فاصله از بار دارد.



خطوط شار شدت میدان الکتریکی به صورت روبرو بدست آمد. این خطوط (و در واقع معادله بدست آمده) نشان می دهد که $\nabla\times\vec{E}=0$

④ در ادامه اگر بار q در نقطه ای غیر از مبدا مختصات واقع باشد دیگر تقارن کروی وجود نخواهد داشت با توجه به شکل زیر



شدت میدان الکتریکی ناشی از بار q واقع در نقطه A را بدست می آوریم

$$E_B = \hat{a}_u \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |R-R'|^2}$$

در بردار یکه

$$\hat{a}_u = \frac{\vec{R}-\vec{R'}}{|R-R'|}$$

$$\boxed{E_B = \frac{q(\vec{R}-\vec{R'})}{4\pi\varepsilon_0 |R-R'|^3}}$$

تذکر: البته پس از این تمامی تلاش ما آن خواهد که از روابط پیچیده دوری نمائیم بدین صورت که با کمی دقت سعی کنیم معادلات و بردارها را ساده سازی نمائیم یا اینکه ابتدا اندازه میدان را بیابیم و پس بر اساس مسیر تشعشع جهت را اعمال کنیم.

توجه: $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0} \xrightarrow{\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^{9}\ m/F$

نیروی الکتریکی: هنگامیکه بار نقطه ای q_2 در میدان الکتریکی بار نقطه ای q_1 در فضا قرار می گیرد نیروی F_{12} ناشی از E_{12} (شدت میدان الکتریکی q_1 در محل q_2) بصورت روبرو است:

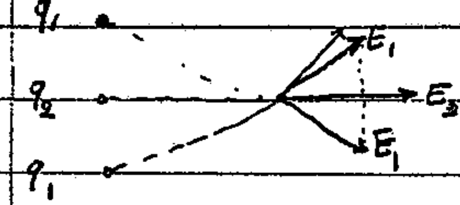
$$\boxed{F_{12} = q_2 E_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R \ (N)$$

که این رابطه همان قانون کولن می باشد

میدان الکتریکی ناشی از چندین بار گسسته

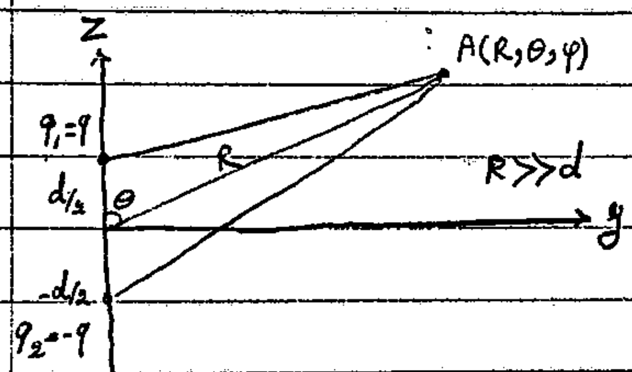
در صورتیکه به جای یک بار چندین بار الکتریکی در فضا داشته باشیم برای یافتن میدان الکتریکی در یک نقطه

می بایستی اثر همه بارهای الکتریکی را در نظر بگیریم. که بر اساس اصل جمع آثار، میدان کل $\vec{E}$ در هر نقطه جمع برداری میدان های ناشی از بارهای منفرد است.



$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(R-R'_k)}{|R-R'_k|^3}}$$

مثال: (دوقطبی الکتریکی) یک جفت بار مساوی و مختلف العلامت $+q$ و $-q$ به فاصله $d/2$ مطابق شکل زیر در نظر بگیرید فرض کنید می خواهیم میدان الکتریکی را در فواصل دور از دوقطبی (یعنی $R>>d$) به دست آوریم



حل: میدان هر یک را در نقطه A به دست آورده و با هم جمع می کنیم

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q(R\hat{a}_R - \frac{d}{2}\hat{a}_z)}{|R\hat{a}_R - \frac{d}{2}\hat{a}_z|^3} + \frac{-q(R\hat{a}_R + d/2\,\hat{a}_z)}{|R\hat{a}_R + \frac{d}{2}\hat{a}_z|^3}\right]$$

که در رابطه بالا فاصله بار q_1 تا نقطه A برابر $R\hat{a}_R - \frac{d}{2}\hat{a}_z$ است و فاصله بار q_2 تا نقطه A برابر $R\hat{a}_R + d/2\,\hat{a}_z$ می باشد. حال به ساده سازی رابطه بالا می پردازیم

$$\left|R\hat{a}_R \pm \frac{d}{2}\hat{a}_z\right|^{-3} = \left|(R\hat{a}_R \pm d/2\,\hat{a}_z)\cdot(R\hat{a}_R \pm d/2\,\hat{a}_z)\right|^{-3/2} = \Big[R^2 + \frac{d^2}{4} \pm Rd\underbrace{\cos\theta}_{a_R\cdot a_z}\Big]^{-3/2}$$

و از آنجایی که $d<<r$ است این رابطه برقرار است

$$\simeq [R^2 \pm Rd\cos\theta]^{-3/2} = R^{-3}\left[1 \pm \frac{d\cos\theta}{R}\right]^{-3/2}$$

که بر اساس بسط تیلور داریم:

$$\left|R\hat{a}_R \pm \frac{d}{2}\hat{a}_z\right| \simeq R^{-3}\left[1 \pm \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{d\cos\theta}{R}\right]$$

با جایگذاری این رابطه در معادله اصلی داریم

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1+\frac{3}{2}\frac{d}{R}\cos\theta}{R^3}\left(R\hat{a}_R - \frac{d}{2}\hat{a}_z\right) - \frac{R\hat{a}_R+\frac{d}{2}\hat{a}_z}{R^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{d}{R}\cos\theta\right)\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\left(\cancel{R\hat{a}_R} - \frac{d}{2}a_z - \cancel{R\hat{a}_R} - \frac{d}{2}a_z\right) + \frac{3}{2}\frac{d}{R}\cos\theta\left[R\hat{a}_R - \cancel{\frac{d}{2}\hat{a}_z} + R\hat{a}_R + \cancel{\frac{d}{2}\hat{a}_z}\right]\right]$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[3d\cos\theta\,\hat{a}_R - d\hat{a}_z\right]$$

که در دستگاه مختصات کروی داریم

$$\hat{a}_z = \cos\theta\,\hat{a}_R - \sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

و با جایگذاری این رابطه داریم:

$$E = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_R + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

میدان الکتریکی دوقطبی با عکس مکعب فاصله (R^{-3}) متناسب است در حالیکه هر بار با R^{-2} متناسب است،

چرا که دو بار نقطه ای $+q$ و $-q$ در فواصل دور، میدان های یکدیگر را تضعیف کرده و تمایل به حذف کامل یکدیگر دارند.

رابطه بالا را بدین صورت می توان در نظر گرفت که d به سمت صفر میل کند در حالیکه qd مقدار ثابتی باقی بماند در این

حالت $P = qd$ را گشتاور دوقطبی الکتریکی می نامند و برای آن جهتی از بار منفی به بار مثبت در نظر می گیرند

$$\vec{E} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_R + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

مثال: باری برابر با $+10^{-9}C$ در مبدأ مختصات در فضای آزاد قرار گرفته است. چه باری در نقطه

(4,0,0) باید قرار گیرد تا E_y در نقطه (2,3,4) برابر با صفر گردد (ارشد برق 78)

$+0.3nc\ (4 \qquad +0.25nc\ (3 \qquad -0.25nc\ (2 \qquad -0.3nc\ (1$

می بایستی مجموع میدان الکتریکی در آن نقطه صفر شود ($E_{1y}+E_{2y}=0$)

$$\vec{E}=\frac{q(R-R')}{4\pi\varepsilon_0 |R-R'|^3}$$

برای بار در مبدأ مختصات $R'=0$

نقطه ای که میدان را می خواهیم $R=4a_x+3a_y+2a_z$

$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{|R^3|}=\frac{q(4a_x+3a_y+2a_z)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{4^2+3^2+2^2}\right)^3}$$

$$E_2=\frac{q(R-R')}{4\pi\varepsilon_0|R-R'|^3}=\frac{q_x((4,3,2)-(4,0,0))}{4\pi\varepsilon_0|\quad|^2}=\frac{q_x(3a_y+2\hat{a}_z)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{3^2+2^2}\right)^3}$$

پس از جمع کردن E_1 و E_2 از آنجائیکه E کل در جهت y برابر صفر است بایستی جمع این دو بردار در جهت y ($\hat{a}_y$) صفر شود

$$\frac{3(q=10^{-9}c)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{4^2+3^2+2^2}\right)^3}+\frac{3q_x}{\left(\sqrt{3^2+2^2}\right)^3}=0\longrightarrow q_x=-0.39=-0.3nc$$

میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته بار:

مقدمه: نوعی از توزیع بار به صورت گسسته که در بخش قبل بررسی کردیم نیست. در واقع یک حجم، سطح یا خط داریم که بار در کل آن به صورت پیوسته توزیع شده (مقابل تفکیک و گسسته شدن نیست متراکب نیستند)

در این حالت با گرفتن انتگرال می توان کل بار روی حجم، سطح یا خط را بدست آورد. مثلاً برای یک حجم که دارای چگالی بار حجمی ρ_v است کل بار می شود

$$q=\int_v \rho_v\, dv$$

برای بدست آوردن میدان کل ناشی از این توزیع پیوسته بار، ابتدا به ازای یک جزء کوچک بار (بار در dv یا ds یا dl)

جزء ریز این میدان ($d\vec{E}$) را محاسبه می کنیم سپس کل $d\vec{E}$ ها را با هم جمع (انتگرال) می کنیم $\vec{E}$ کل بدست آید

مثلاً برای یک توزیع بار حجمی ρ_v ابتدا یک جزء کوچک از حجم که این بار را شامل شود در نظر (با ρ_v) میدان را محاسبه

می کنیم
$$d\vec{E} = \hat{a}_R \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

و در نتیجه برای کل حجم
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \hat{a}_R \frac{\rho_v dv}{R^2} \qquad (V/m)$$

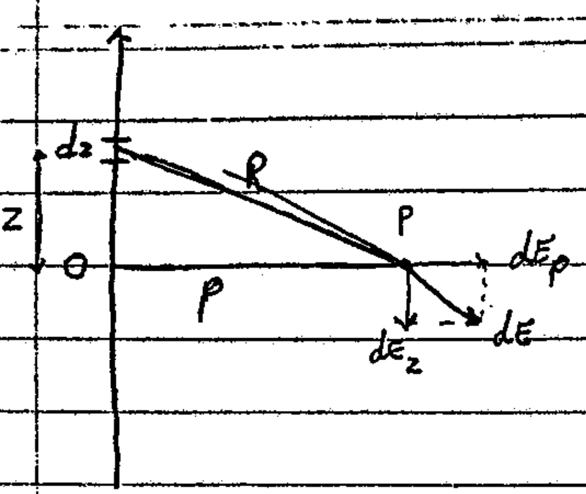
و در صورتی که این بار که در مبدأ مختصات نباشد
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho \frac{\vec{R}}{R^3} dv$$

- اگر بار روی یک سطح با چگالی بار سطحی ρ_s توزیع شده باشد، انتگرال گیری باید روی سطح انجام گیرد
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \hat{a}_R \frac{\rho_s ds}{R^2}$$

- اگر چگالی بار خطی ρ_l داشته باشیم
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \hat{a}_R \frac{\rho_l dl}{R^2}$$

نکته: برای حل مسائل از این دست برای یافتن میدان الکتریکی $\vec{E}$ دو راه پیش رو داریم: ۱) از ابتدا جهت میدان الکتریکی از جزءهای مختلف آن سطح یا خط مطلع باشیم و به دلیل تقارن برداری متوجه آن شویم که بردار نهایی نقطه در یک یا دو جهت میدان الکتریکی عملی صفر دارد و دیگر فقط همان جهت‌ها را از زیر انتگرال ببریم (روش تستی) ۲) تمامی مولفه‌های میدان را محاسبه کنیم و انتگرال بگیریم و در زیر انتگرال گیری برخی از مولفه‌ها صفر شوند

مثال: شدت میدان الکتریکی یک بار خطی مستقیم روی محور z و به طول بی نهایت را با چگالی یکنواخت ρ_l در هوا تعیین نمایید؟ برای حل این گونه مسائل یک جزء کوچک از بار خطی را در نظر می‌گیریم و میدان ناشی از آن را (تحلیلی) محاسبه



می‌کنیم پس از کل مسیر انتگرال می‌گیریم که در واقع همه میدانهای

جزئی که روی کل مسیر با هم جمع کرده‌ایم (چرا که بار در کل مسیر یکنواخت است)

از آنجایی که مسئله دارای تقارن استوانه‌ای است یعنی

اینکه میدان‌ها به زاویه φ بستگی ندارند (در جاهای φهای مختلف در

اطراف این بار خطی با فاصله یکسان اندازه میدان یکسان است) پس

$$d\vec{E} = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{R} = \vec{\rho}\,\vec{a}_\rho - z\,\vec{a}_z \longrightarrow d\vec{E} = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\hat{a}_\rho - \hat{a}_z z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = dE_\rho \hat{a}_\rho + dE_z \hat{a}_z$$

که $\quad dE_\rho = \dfrac{\rho_l\, \rho\, dz}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)^{3/2}} \qquad dE_z = \dfrac{-\rho_l\, z\, dz}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)^{3/2}}$

حال می‌بایستی از این تابع روی طول از ∞- تا ∞+ انتگرال گیری کنیم

که داریم

$$E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\,dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$$

$$E_\rho = \frac{\rho_l\,\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_l\,\rho}{4\pi\varepsilon_0}\boxed{\left(\frac{z}{\rho^2(z^2+\rho^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}} = \frac{\rho_l\,\rho}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2}{\rho^3} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho^2}$$

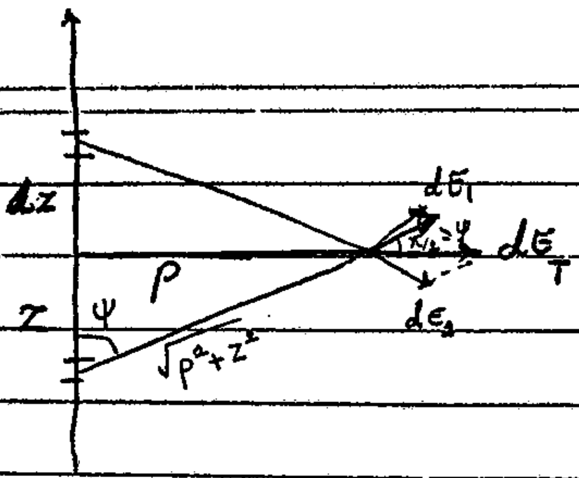
پس داریم

$$E = \hat{a}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

راه حل دوم: در حالیکه از ابتدا می‌توانستیم از تقارن استفاده کنیم. بدین صورت که همانطور که از شکل هم پیدا

مشخص است اگر از دو جزء بار خطی یکی در بخش مثبت و یکی در بخش منفی z مقدار میدان الکتریکی را بدست آوریم این

دو جزء مولفه‌ی z یکدیگر را خنثی می‌کنند و فقط در جهت محور ρ میدان الکتریکی داریم.



$$dE_T = dE_\rho = \frac{\rho_\ell\, dz\, \rho}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

اما چطور رابطه بالا را یافتیم؟

از آنجاییکه ما جهت را می‌دانیم دیگر نیاز به استفاده از رابطه $\frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0|R|^3}$

نداریم بلکه با توجه به مشخص بودن جهت از ابتدا از فرمول معروف کولن استفاده می‌کنیم ($\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$)

$$dE_1 = dE_2 = \frac{\rho_\ell\, dz}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)}$$

از آنجاییکه ما می‌دانیم این بردارها در نهایت فقط دارای مولفه ρ خواهند بود پس فقط مولفه‌ی ρ آنها را می‌نویسیم که می‌شود

$$\frac{\rho_\ell\, dz}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)}\cos(\pi/2-\psi) = \frac{\rho_\ell\, dz \sin\psi}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)}$$

که از روی شکل داریم

$$\sin\psi = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

در نتیجه

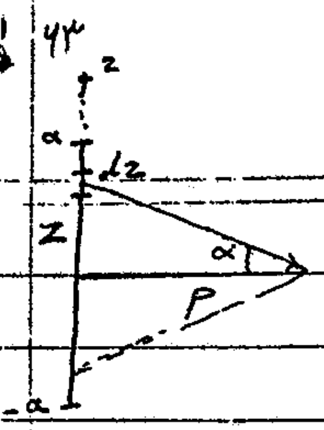
$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_\ell\, dz\, \rho}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\rho^2}\hat{a}_\rho$$

البته ما در حالت راه حل اول می‌توانستیم صرفاً مثل بالا به دو جواب dE_ρ و dE_z برسیم همانجا با توجه به استدلال بالا

که در جهت z میدان نداریم پس فقط dE_ρ داریم از عامل $\sin\psi$ نیز رهایی یابیم.

مثال: بار خطی یکنواخت با چگالی ρ_ℓ روی محور z در $-a<z<a$ توزیع شده است. $\vec{E}$ میدان الکتریکی

در نقطه‌ای با فاصله ρ از خط بار واقع در صفحه xy چقدر است؟ (ارشد برق ۸۵)



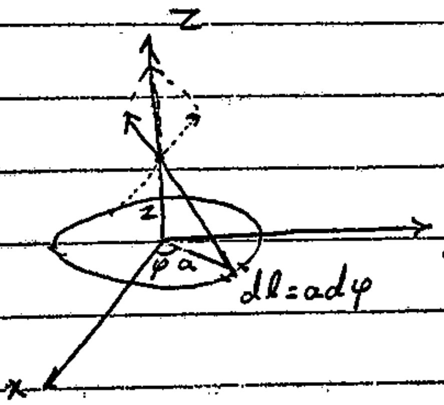
$$E = \int_{-a}^{a} \frac{\rho_l \overbrace{(-z\hat{a}_z + \rho\hat{a}_\rho)}^{R}}{4\pi\varepsilon_0 \underbrace{(z^2+\rho^2)^{3/2}}_{|R|^3}}$$

چون می‌دانیم میدانی در جهت z نداریم مولفه آن را حذف می‌کنیم پس

$$\vec{E} = \hat{a}_\rho \frac{\rho\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{dz'}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \hat{a}_\rho \frac{\rho\rho_l}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\rho^2(z^2+\rho^2)^{1/2}}\Bigg|_{-a}^{a} = \hat{a}_\rho \frac{\rho_l a}{2\pi\varepsilon_0\rho\sqrt{\rho^2+a^2}}$$

توجه: یکی از راه‌های حل انتگرال فوق استفاده از تغییر متغیر $z=\rho\tan\alpha$ می‌باشد

مثال: حلقه‌ای داریم به شعاع a و چگالی بار خطی $\rho_l\ (C/m)$، مطلوبست محاسبه میدان $\vec{E}$ روی محور میله به فاصله z:



با توجه به تقارنی که حل مسئله نسبت به φ دارد از دستگاه مختصات استوانه‌ای برای حل مسئله انتخاب می‌کنیم پس داریم

$$dE = \frac{\rho_l a\, d\varphi\, (\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0 |R-R'|^3}$$

که $R = z\hat{a}_z$ که R فاصله مبدأ تا نقطه مشاهده

$R' = a\, a_\rho$ ، R' فاصله منبع تا مبدأ

$$R - R' = z\hat{a}_z - a\hat{a}_\rho \rightarrow d\vec{E} = \frac{\rho_l\, d\varphi\, (z\hat{a}_z - a\hat{a}_\rho)}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}}$$

ولی باید دقت بشود که با توجه به تقارنی که وجود دارد مولفه‌ی a_ρ میدان همدیگر را خنثی می‌کنند و تنها مولفه‌ی در جهت z باقی می‌ماند

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l a\, d\varphi\, z\hat{a}_z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}=\frac{\rho_\ell a Z\,\hat{a}_z}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\rho_\ell\, a\, z}{2\varepsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}}\,a_z$$

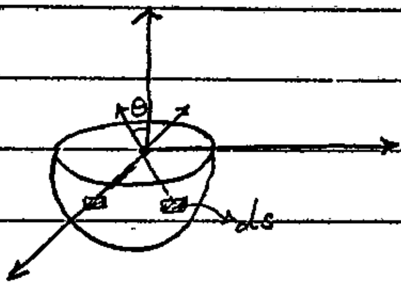
توجه: با توجه به اینکه $\hat{a}_z$ وابستگی به φ ندارد به راحتی از زیر انتگرال بیرون آمد

توجه: در صورتی که a_ρ را نیز (به عنوان ضریب dE_ρ) در درون انتگرال می‌بردیم، حاصل انتگرال آنها صفر می‌شد

و بدون در نظر گرفتن شکل و طرح برداری به همین جواب می‌رسیدیم.

تمرین: مثال قبل را برای یک چگالی بار $\rho_\ell \sin\varphi$ حل نمائید.

مثال: پوسته نیم‌کروی شکل مقابل دارای بار سطحی یکنواخت با چگالی $\rho_s \frac{c}{m^2}$ می‌باشد. یک ذره باردار با جرم m و بار Q هم‌نام با ρ_s را در مرکز این نیم‌کره قرار می‌دهیم. جرم m با چه مقداری باشد تا ذره تعلیق شود (ارشد برق ۷۶)



با توجه به شکل از مختصات کروی استفاده می‌کنیم $(R=a)$

$$ds=a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\vec{E}=\int\frac{\rho_s\, ds\, \hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\qquad \hat{a}_R=(\sin\theta\,\hat{a}_\rho+a_z\cos\theta)$$

$$=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z$$

ولی همانطور که از شکل مشخص است پاسخ فقط در جهت z وجود دارد

$$\vec{E}=\int\frac{\rho_s\, ds\, a_z\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=a_z\frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\cos\theta$$

$$\vec{E}=a_z\frac{\rho_s}{8\varepsilon_0}\cos 2\theta\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\hat{a}_z\frac{\rho_s}{4\varepsilon_0}$$

نکته: جالب آن است که میدان محاسبه شده بر حسب وجه به شعاع کره بستگی ندارد

حال نیرویی که این میدان بر بار Q در مرکز مختصات ایجاد می کند را مساوی نیروی ناشی از جاذبه قرار می دهیم

$$QE = mg \rightarrow \frac{\rho_s}{4\varepsilon_0} Q = mg \longrightarrow m = \frac{Q\rho_s}{4\varepsilon_0 g}$$

۲-۳ قانون گوس:

برای محاسبه شار خروجی از یک سطح داریم: $\phi = \oint_s E.ds$

اگر در صورتی که سطح را کروی فرض کرده و E را جایگذاری کنیم داریم

$$\oint E.ds = \oint \left(\frac{q a_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right).(R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{a}_R) = \oint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

البته این رابطه را در بخش قبل در جهت عکس برای یافتن $\vec{E}$ بر اساس فرم نقطه ای گوس $\nabla.E = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$ به کار برده بودیم.

قانون گوس ← $\oint \vec{E}.ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$ یا $\nabla.E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

قانون گوس بیان می دارد که شار خروجی میدان $\vec{E}$ از هر سطح بسته در فضای آزاد، برابر کل بار داخل سطح تقسیم بر ε_0 است.

کاربرد: برای بدست آوردن شار الکتریکی خروجی یک سطح بسته، تنها کافی بار الکتریکی موجود در آن حجم را بیابیم که

اگر بار گسسته داشتیم جمع بارها را انجام جمع می‌کنیم و اگر بار پیوسته بود روی سطح یا سطح یا حجم بار انتگرال می‌گیریم

در واقع برای محاسبه شار پس از این دیگر نیازی به محاسبه میدان و انتگرال روی سطح و... نیست فقط مقدار بار محصور در حجم را حساب می‌کنیم

کاربرد ۲: کاربرد مهم دیگر این قانون گوس، بدست آوردن میدان الکتریکی می‌باشد. سه روش برای بدست آوردن

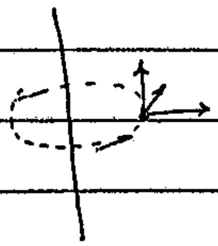
میدان الکتریکی وجود دارد: ۱) انتگرال‌گیری مستقیم از بارهای پیوسته و... (بخش قبل) ۲. استفاده از قانون گوس

۳. با استفاده از پتانسیل الکتریکی (بخش قبل). همواره ابتدا بررسی می‌شود که آیا می‌توان مسئله را با استفاده از قانون

گوس حل کرد چرا که ساده‌ترین روش از این روش‌هاست. ولی محاسبه میدان از روش قانون گوس یک محدودیت دارد

و آن این است که میدان را در این روش تنها برای سطوح متقارن می‌توان محاسبه کرد. سطوح متقارن سطوحی هستند

که بردار ~~عمود بر آنها~~ (بردار میدان) بردارهای آن عمودی (جهت‌دار) هیچ تغییری نمی‌کند مثلاً بار خطی بی‌نهایت را در نظر بگیرید



اگر نقطه مشاهده دارای یک شعاع ثابت باشد و φ آن تغییر کند یا z آن

تغییر کند میدان هیچ تغییری نمی‌کند و در واقع تغییر میدان تنها وابسته به شعاع r است

این تقارن را تقارن استوانه‌ای گویند. سه نوع معروف تقارن عبارتند از:

۱) تقارن کروی: نسبت به θ و φ متقارن است و تنها مولفه R داریم مثل میدان یک بار الکتریکی

۲) تقارن استوانه‌ای: نسبت به φ و z 〃 〃 ρ 〃 〃 مثل میدان یک خط بار بی‌نهایت

۳) تقارن مستطیلی: نسبت به x و y 〃 〃 z 〃 مثل میدان ناشی از یک بار سطحی بی‌نهایت

مثال: با استفاده از قانون گوس، شدت میدان الکتریکی یک بار خطی مستقیم و بی نهایت طولی را با چگالی یکنواخت ρ_l در هوا تعیین کنید. همانطور که می دانیم میدانها فقط مولفه در جهت $\hat{a}_\rho$ دارند و نسبت به φ و z متقارنند در نتیجه تقارن استوانه ای داریم پس یک سطح استوانه ای با طول L در اطراف خط در نظر می گیریم

$$\oint E.ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint E.ds = \int_0^L \int_0^{2\pi} E_\rho \rho d\varphi dz = 2\pi\rho L E_\rho \quad , \quad q = \int_0^L \rho_l dL = \rho_l L$$

$$2\pi\rho \cancel{L} E_\rho = \rho_l \cancel{L} \longrightarrow \boxed{E_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\hat{a}_\rho}$$

که همان پاسخی است که در بخش قبل بدست آوردیم.

مثال: شدت میدان الکتریکی یک بار سطحی بی نهایت با چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s را تعیین نمائید

از آنجائیکه سطح ما در جهت xy گسترش یافته و چگالی بار در کل آن ρ_s است می توانیم یک سطح مکعب در بالای سطح تشکیل دهیم. میدانها در جهت x و y یکدیگر را خنثی می کنند و تنها مولفه z خواهیم داشت پس

برای سطح بالایی:

$$\oint_S E.ds = \int_A a_z E_z ds = \int_A E_z a_z (ds\, a_z) = \int_A E_z ds = E_z A$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\int_A \rho_s ds}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_s A}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = a_z \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \quad z>0$$

اگر مکعب را در سطح پایینی تشکیل داده بودیم هم جواب می شد

$$\vec{E} = \hat{a}_z \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \quad z<0$$

که علامت مثبت و منفی وابسته به جهت بردار نرمال هستند

نکته جالب آن است که میدان الکتریکی حاصل از یک صفحه بی نهایت در تمامی نقاط فضا یکسان و برابر $\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$ است.

مثال: میدان الکتریکی ناشی از یک کره به شعاع $R=b$ با چگالی بار حجمی $\rho=-\rho_v$ در نواحی داخل و بیرون کره بیابید. تقارن کروی این مسئله کاملاً مشخص است چراکه میدان تنها به R بستگی دارد و مستقل از θ و φ است

در ناحیه درون کره هرچه به b نزدیکتر می‌شویم میزان بار در بر گرفته بیشتر می‌شود پس میدان در نقاط مختلف آن با توجه به میزان باری که در بر می‌گیرد متفاوت است

$$E=\hat{a}_R E_R \qquad ds = a_R\underbrace{(R^2\sin\theta\sin\varphi)}_{ds}$$

$$\oint_s E\, ds = E_R \underbrace{\int_s ds}_{\text{سطح کره}} = E_R(4\pi R^2)$$

در درون کره

میزان بار وابسته به شعاع کره در بر گرفته می‌شود

$$q=\int_v \rho_v\, dv = -\rho_v \underbrace{\int_v dv}_{\text{حجم کره}} = -\rho_v \frac{4\pi}{3}R^3 \quad \text{بار}$$

میدان هرچه شعاع بیشتر می‌شود افزایش می‌یابد.

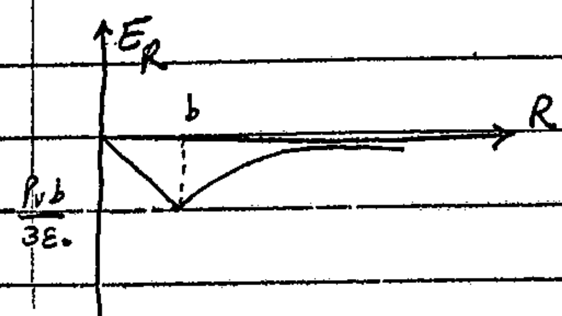
$$E=-\hat{a}_R \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}R \qquad 0<R<b$$

در حالیکه وقتی از کره خارج می‌شویم باری که در بر می‌گیرد مقدار ثابت است

$$Q=-\rho_v\frac{4\pi}{3}b^3$$

و میدان می‌شود

$$E=-\hat{a}_R\frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2} \qquad R\geq b$$



$|E_R|$

نمودار تغییرات E_R به صورت روبرو است که تا شعاع b به صورت خطی افزایش می‌یابد

و از b به بعد به صورت $\frac{1}{R^2}$ کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد.

(پایین بودن نمودار به خاطر آن است که بار را منفی گرفتیم)

مثال: بار حجمی یکنواخت ρ_v (C/m^3) در کره‌ای به قطر a توزیع شده است. اگر این کره در مرکز یک مکعب به ضلع $4a$ باشد، شار الکتریکی خارج شونده از سطوح مکعب را بیابید (ارشد برق ۸۱)

بر اساس قانون گوس، شار خارج شونده از سطح خارجی یک حجم برابر کل باری است که در بر گرفته است پس برای محاسبه شار ابتدا کل بار را محاسبه می کنیم ($q=\int \rho_v dv$)

$$q = \rho_v \underbrace{V}_{\text{حجم کره}} = \rho_v \times \frac{4}{3}\pi\left(\underbrace{\frac{a}{2}}_{\text{شعاع}}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}\rho_v$$

$$\phi = \oint E\cdot ds = \frac{\pi a^3}{6}\rho_v$$

(۴۰) q بررسی شود

تمرین: چگالی شار الکتریکی عبارتست از

$$D = \frac{20}{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\,\hat{a}_\varphi$$

کل بار را در ناحیه $1<\rho<3$ و $0<\varphi<\pi$ و $0<z<2$ بیابید (با استفاده از فرم نقطه ای قانون گوس)

$8\ln 3$

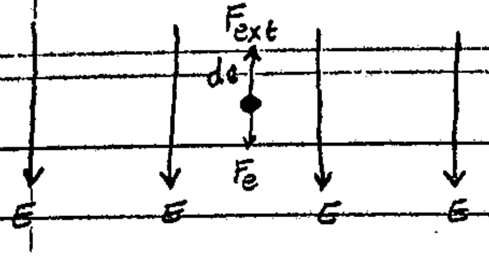
۴-۲ پتانسیل الکتریکی

مقدمه: در مباحث فیزیک دانستیم که اگر نیروی $\vec{F}$ را به جسمی وارد کنیم و آن را به اندازه $\vec{d}$ جابجا کنیم، کار برابر می شود با:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\alpha$$

اگر $0<\alpha<90$ کار نیرو مثبت می شود (نیروی محرک) و اگر $90<\alpha<180$ کار منفی است (نیروی مقاوم) و اگر $\alpha=90$ با آنکه نیرو وارد شده است و جسم جابجا شده است ولی کار صفر است.

وقتی کاری را انجام می دهیم مقابله با نیروی دیگری باشد مثلاً وقتی یک جسم را از زمین به ارتفاع h می بریم و با نیروی جاذبه مخالفت می کنیم، یک انرژی به صورت پتانسیل در جسم ذخیره می شود. همین مفاهیم نیز در قالب پتانسیل الکتریکی در مبحث الکترومغناطیس و برق وجود دارد.



همانطور که در شکل مقابل مشخص است در صورتیکه یک بار الکتریکی در میدان الکتریکی قرار گیرد به آن نیرویی برابر با $F_e = q\vec{E}$ وارد می شود. در صورتیکه بخواهیم بار را با سرعت ثابت رو به بالا حرکت دهیم می بایستی F_{ext} به اندازه F_e در جهت مخالف وارد کنیم که خواهیم داشت:

$$F_{ext} = -F_e = -q\vec{E}$$

در اینجا نیز همانند فیزیک مکانیک، هنگامیکه باری را برخلاف جهت میدان جابجا می کنیم انرژی پتانسیل (انرژی الکتریکی) در محیط ذخیره می شود. حال کار انجام شده یا انرژی ذخیره شده به صورت زیر برحسب ژول (J) بدست می آید

$$dw = F_{ext} \cdot dl = -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

در نتیجه کار انجام شده به ازای جابجایی بار از نقطه A به B خواهد شد

$$W_{AB} = -\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

حال اگر یک بار واحد $q=+1c$ را در آن نقطه قرار دهیم داریم

$$W_{AB} = -\int_A^B E \cdot dl$$

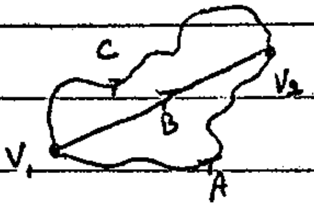
که این کار انجام شده همان انرژی پتانسیل الکتریکی می باشد. پس اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B خواهد شد

$$\boxed{V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

همانطور که از این معادله مشخص است پتانسیل یک کمیت عددی (اسکالر) است. در نتیجه محاسبه کردن آن از میدان برداری ساده تر است. در ادامه خواهیم دید که می توان با محاسبه پتانسیل (که کمیتی اسکالر است) میدان الکتریکی (که کمیتی برداری است) را یافت.

یکی از نکات مهم در مورد انتگرال بالا آن است که پتانسیل الکتریکی و انتگرال بالا مستقل از مسیر است و تنها

به نقاط ابتدا و انتها بستگی دارد. از آن جایی که پتانسیل برای هر نقطه یک مقدار ثابت است در صورتی که از پتانسیل V_1 به سمت V_2 می رفتیم بایستی که مقدار V_2 در هر مسیر یک مقدار متفاوت می شد



در حالیکه می دانیم پتانسیل در نقطه V_2 یک مقدار ثابت است پس انتگرال مستقل از مسیر است (در بخش کرل بعدی این موضوع اثبات می شود)

نکته مهم دیگر در مورد پتانسیل الکتریکی آن است که برای محاسبه پتانسیل هر نقطه می بایستی به نقطه (پتانسیل آن نقطه) به عنوان مرجع (غالباً پتانسیل صفر مرجع است) باشد. در این صورت است که فرمول قبل که اختلاف پتانسیل را نشان می دهد خواهد شد

$$V_{AB} = V_B - V_A \Big|_{\text{مرجع}} = V_B - 0 = V_B$$

معمولاً (نه همیشه) ∞ را به عنوان نقطه ای در نظر می گیرند که پتانسیل آن صفر است چرا که وقتی نقطه A بسیار دور باشد میدان بسیار ضعیف و در حدود صفر به آن می رسد پس می توان فرض کرد که در آن نقطه پتانسیل صفر است. پس پتانسیل هر نقطه می شود

$$V_{P\infty} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

مثال: اگر در سطح بسته ای هیچ گونه بار الکتریکی وجود نداشته باشد و تمامی نقاط این سطح بسته دارای پتانسیل معلوم V_0 باشند در مورد نقاط درون این سطح بسته می توان گفت: (تست ارشد برق ۸۲)

۱) پتانسیل برابر صفر است ۲) شدت میدان الکتریکی برابر صفر است

۳) در حالت کلی پتانسیل نقاط داخل سطح متفاوت است ۴) شدت میدان الکتریکی برابر مقدار ثابتی مخالف صفر است

حل) طبق قضیه گوس، از آنجا که هیچ باری درون سطح بسته وجود ندارد در نتیجه میدان الکتریکی درون آن صفر است

$$\oint_s E\cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \longrightarrow \vec{E} = 0$$

از طرف دیگر نیز می دانیم، از آنجا که میدان برابر صفر است در نتیجه طبق معادله $V_2 - V_1 = \int_2^1 E\cdot dl = 0$

$V_2 = V_1$ می گردد پس تمامی نقاط درون سطح بسته و روی سطح با هم، هم پتانسیل اند و پتانسیلشان برابر V_1 می گردد

مثال: در مختصات کروی، پتانسیل الکتریکی روی سطح کره ای به شعاع r به مرکز مبدا مختصات که هیچ باری درون آن نیست به صورت $V = \cos^2\theta$ تغییر می کند. پتانسیل الکتریکی در مبدا مختصات چقدر است؟ (ارشد برق ۸۴)

از آنجایی که پتانسیل روی سطح به صورت یکنواخت نبوده و وابسته به θ می باشد و از طرفی می خواهیم با نقطه ای درون سطح (مرکز) آن را برابر بدانیم (طبق مثال قبل چون باری درون سطح نیست $E = 0 \Leftarrow V_2 = V_1$)

پس میانگین پتانسیل روی سطح را محاسبه کرده برابر مقدار مبدا می گذاریم

$$V_0 = \frac{\int V ds}{S}$$

$$V_0 = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cancel{R^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \cdot \cos^2\theta}{4\pi \cancel{r^2}} = \frac{1}{4\pi}\times 2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\sin\theta\, d\theta$$

تغییر متغیر $\cos\theta = u \quad , \quad -\sin\theta\, d\theta = du$

$$V_0 = -\frac{1}{2}\int u^2 du = -\frac{1}{6}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}\ V$$

نکته: هر معادلات ماکسول برای حالت الکترواستاتیک داریم

$$\nabla\times E = 0$$

با توجه به قضیه استوکس

$$\int_s \nabla\times E\cdot ds = \oint E\cdot dl = 0$$

صفر شدن این انتگرال روی مسیر بسته در واقع برای ما اثبات می کند که این انتگرال وابسته به مسیر نیست به

همین خاطر در یک مسیر بسته که نقطه ابتدا و انتهای آن یکی بود مقدار انتگرال صفر شد

از طرفی وقتی $\nabla\times E=0$ باشد طبق قضیه هلمولتز می بایستی یک تابع اسکالر وجود داشته باشد که $E=-\nabla\Phi$

این تابع اسکالر (Φ) همان پتانسیل است چرا که در صفحات قبل داشتیم $dV=-E.dl$

از طرفی $\xrightarrow[\text{طبق تعریف گرادیان}]{}$ $dV=\nabla V.dl$ $\longrightarrow$ $\vec{E}=-\nabla V$

در بسیاری از موارد که میدان الکتریکی را از طریق قانون گوس یا انتگرال گیری مستقیم نمی توانیم اندازه گیری کنیم

از این رابطه برای محاسبه $\vec{E}$ استفاده می کنیم

بر اساس قضایای گرادیان می دانیم که گرادیان یک میدان عمود بر آن میدان است در واقع میدان الکتریکی $\vec{E}$

عمود بر سطوح هم پتانسیل می باشد (به عبارت دیگر اگر مسیر dl همه جا بر خطوط میدان عمود باشد

$E.dl$ برابر صفر می شود پس $dV=0$ یا $V_{AB}=0$ در نتیجه بین این نقاط اختلاف پتانسیل وجود ندارد و این نقاط با هم

هم پتانسیل می باشند)

توجه: چه میدانی می تواند میدان الکتریکی مناسب برای حالت الکترواستاتیک باشد؟ (طی در سوالات میدان

$\vec{E}$ داده می شود و می خواهند بررسی شود که آیا مناسب الکترواستاتیک می باشد یا نه) . کافی است $\nabla\times E$ را محاسبه

کنیم در صورتی که برابر صفر شود مناسب الکترواستاتیک هست.

پتانسیل الکتریکی ناشی از توزیع بار

پتانسیل الکتریکی یک نقطه به فاصله R از بار نقطه ای q (درصورتی که مرجع بی نهایت باشد) می شود

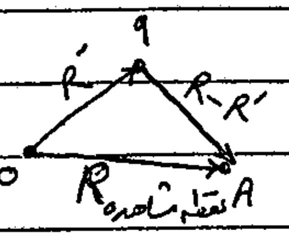
$$V=\int_R^{\infty}\underbrace{\left(a_R\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)}_{\vec E}\cdot\underbrace{(\hat a_R\, dR)}_{dl}\longrightarrow \boxed{V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\ (V)}$$

طبق رابطه بالا اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B که به ترتیب در فواصل R_2 و R_1 از بار q هستند می شود

$$V_A-V_B=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

از این رابطه می توان متوجه شد اختلاف پتانسیل تنها وابسته به فاصله ی شعاعی هر کدام از نقاط از بار q دارد و پارامترهای دیگر چون θ و φ اثری ندارند. به عبارتی سطح بسته خارجی یک کره به شعاع R همگی باید هم پتانسیل هستند

حال اگر بار الکتریکی در مبدأ مختصات نبود برای محاسبه فاصله بار از نقطه ای که می خواهیم پتانسیلش را محاسبه کنیم از رابطه روبرو استفاده می کنیم



$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|R-R'|}$$

در صورتی که به جای یک بار چند بار در محیط قرار داشت که هر یک در محل های R'_1، R'_2، ... و R'_n قرار داشتند از جمع آثار هم داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|R-R'_k|}$$

پتانسیل الکتریکی ناشی از توزیع بار پیوسته و محدود در یک ناحیه مشخص با انتگرال گیری از تاثیر اجزای کوچک بار روی ناحیه باردار به دست می آید. برای ρ_v چگالی بار حجمی

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho_v}{R}\,dv$$

برای ρ_s چگالی بار سطحی $\qquad V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_s}{R}ds$

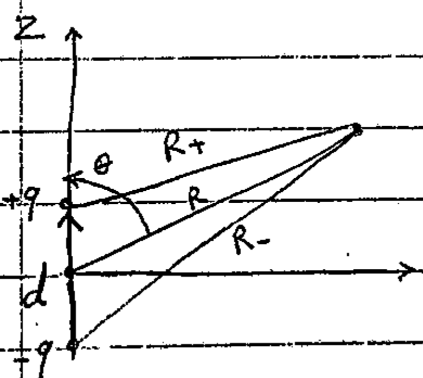
برای ρ_l چگالی بار خطی $\qquad V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\rho_l}{R}dl$

توجه: در توزیع بار پیوسته انتگرال گیری روی حجم، سطح یا خط مورد نظر صورت می گیرد نه مثل ابتدای این بخش از Σ

یا مثلاً خط و سطح و حجم نقطه ...... چرا؟

مثال: (دو قطبی الکتریکی) پتانسیل یک دو قطبی الکتریکی شامل بارهای $+q$ و $-q$ در فاصله ناچیز d از یکدیگر را بدست

آورید سپس بر اساس آن میدان الکتریکی را محاسبه کنید. $\qquad$ داریم $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+}-\frac{1}{R_-}\right)$



چون $d\ll R$ است $\qquad R_+=R-\frac{d}{2}\cos\theta$

بسط تیلور $\qquad \frac{1}{R_+}=\left(R-\frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1}\simeq R^{-1}\left(1+\frac{d}{2R}\cos\theta\right)$ * بسنده شود

بسط تیلور $\qquad \frac{1}{R_-}=\left(R+\frac{d}{2}\cos\theta\right)\simeq R^{-1}\left(1-\frac{d}{2R}\cos\theta\right)$

با جایگذاری این دو رابطه داریم $(p=qd)$

$$V=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}$$

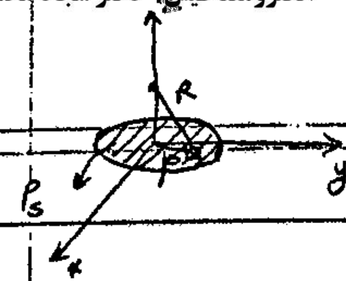
و برای محاسبه $\vec{E}$ داریم

$$\vec{E}=-\nabla V=-\left(\hat{a}_R\frac{\partial V}{\partial R}+\hat{a}_\theta\frac{\partial V}{R\partial\theta}+\hat{a}_\varphi\frac{\partial V}{R\sin\theta\partial\varphi}\right)$$

$$=\frac{(p=qd)}{4\pi\varepsilon_0R^3}\left(\hat{a}_R\,2\cos\theta+a_\theta\sin\theta\right)$$

مثال: یک صفحه دایروی که دارای بار با چگالی یکنواخت سطحی ρ_s را در نظر بگیرید. پتانسیل را روی محور آن

بدست آورید. مطابق شکل صفحه بر اساس فرمول پتانسیل داریم:



$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_s\,ds}{R}=\frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\overbrace{r\,dr\,d\varphi}^{ds}}{\underbrace{(\rho^2+z^2)^{1/2}}_{R}}$$

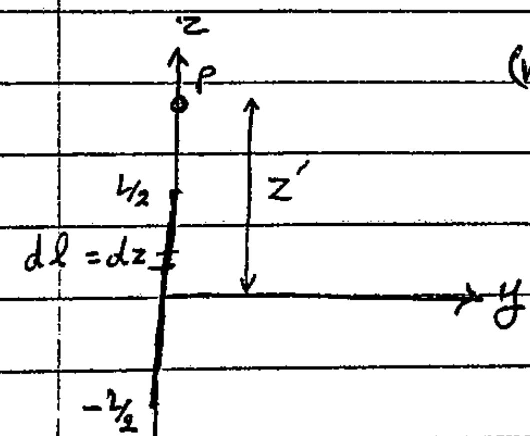
تغییر متغیر

$$\begin{cases}\rho^2+z^2=u\\ 2\rho\,d\rho=du\end{cases}$$

$$V=\frac{\rho_s}{8\pi\varepsilon_0}\int\frac{2\rho\,d\rho\,d\varphi}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}=\frac{\rho_s}{8\pi\varepsilon_0}\times\underset{\text{تغییرات }\varphi}{\underbrace{2\pi}}\int\frac{du}{u^{1/2}}=\frac{\rho_s}{8\pi\varepsilon_0}\times2\pi\times2\sqrt{u}$$

$$V=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{\rho^2+z^2}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=a}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2}-|z|\right)$$

مثال: پتانسیل الکتریکی بر روی محور z در نقطه $(0,0,z')$ وقتی که $z>\frac{L}{2}$ است برای یک توزیع بار خطی یکنواخت به طول L و چگالی بار خطی ρ_l شکل روبرو را بیابید (تست ارشد ۷۲)



اثر هر جزء بار را بر پتانسیل P بر اساس فرمول گفته شده داریم

$$V_p=\int_L\frac{\rho_l\,dl}{4\pi\varepsilon_0 R}=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\rho_l\overbrace{dz}^{dl}}{4\pi\varepsilon_0\underbrace{(z'-z)}_{R}}$$

R فاصله بار تا هر جزء از خط بار

$$V_p=\frac{-\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z'-z)\Big|_{-L/2}^{L/2}=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z'+L/2}{z'-L/2}\right)$$

حال اثر میدان را نیز به راحتی هم محاسبه کنیم داریم

$$E=-\nabla V=-\hat{a}_z\frac{dV_p}{dz}=\hat{a}_z\frac{\rho_l L}{4\pi\varepsilon_0\left[z'^2-(L/2)^2\right]}$$

مثال: بار q در مبدأ مختصات و بار $-q/2$ در روی محور x در $x=a$ قرار دارد. سطح هم پتانسیل $V=0$ را تعیین کنید. فاصله سطح تا مبدأ مختصات

$$|R_1|^2=x^2+y^2+z^2$$

فاصله نقطه تا نقطه ای در $x=a$

$$|R_2|^2 = (x-a)^2+y^2+z^2$$

تابع پتانسیل عبارتست از

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R_1} - \frac{q}{2R_2}\right]$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{2\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right]$$

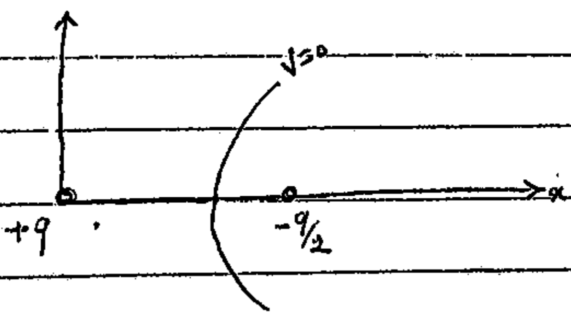
حال اگر $V=0$ شود داریم

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{2\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2+y^2+z^2 = 4\left((x-a)^2+y^2+z^2\right)$$

$$3y^2+3z^2+3x^2-8ax+4a^2=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 3} x^2+\frac{4}{3}a^2-\frac{8}{3}ax+y^2+z^2=0$$

$$\left(x-\frac{4}{3}a\right)^2+y^2+z^2 = \frac{4}{9}a^2$$

که این رابطه معادله کره ای است به شعاع $\frac{2a}{3}$ و به مرکز $\left(\frac{4a}{3}, 0, 0\right)$



تعبیر فیزیکی معادله؟

۲-۵ معادله پواسون

بر اساس فرم نقطه ای قانون گوس داریم (در فضای آزاد)

$$\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

از طرفی در این بخش نیز رابطه مابین $\vec{E}$ و ∇V بدین صورت تعریف شد

$$E = -\nabla V$$

حال بر اساس تعریف لاپلاسین در فصل اول داریم

$$\nabla\cdot(\nabla V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

(در فضای آزاد $\varepsilon=\varepsilon_0$)

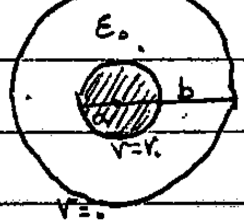
برای معادله ۴ معادله پواسن گفته می شود و در صورتی که در فضای مورد نظر هیچ باری نداشته باشیم به معادله حاصله زیر

معادله لاپلاس گویند $\nabla^2 V = 0$

از این معادلات در محاسبه پتانسیل الکتریکی یک محیط در صورت مشخص بودن شرایط مرزی آن محیط استفاده می گردد

که در فصول بعدی به صورت کامل بررسی خواهد شد.

مثال: میدان الکتریکی را در یک کابل هم محور بدست آورید؟



کابل های کواکسیال وظیفه انتقال میدان الکتریکی را بر عهده دارند. این کابل ها

از دو استوانه (توپر مرکزی و توخالی بیرونی) تشکیل شده اند این کابل را به منبع تغذیه

وصل می کنند در نتیجه استوانه توخالی (بیرونی) دارای پتانسیل صفر و استوانه داخلی دارای پتانسیل V_0 می گردد. ما بین این دو استوانه ی

فلزی به وسیله یک دی الکتریک پر شده است.

با توجه به اینکه هیچ باری وجود ندارد در نتیجه معادله لاپلاس صادق است و از طرفی به علت اینکه شکل ساختار استوانه ای است

رابطه استوانه ای لاپلاسین (که در فصل ۱ اثبات شد) را اعمال می کنیم $\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

با توجه به تقارن استوانه ای (پتانسیل وابسته به ارتفاع z یا تغییر زاویه φ نیست پس $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ و

تنها وابسته به تغییر شعاع ρ است)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0$$

با دوبار انتگرال گیری می توان این معادله دیفرانسیل معمولی را حل کرد

انتگرال اول $\longrightarrow \rho \dfrac{dV}{d\rho} = c_1 \longrightarrow \dfrac{dV}{d\rho} = \dfrac{c_1}{\rho}$

انتگرال دوم $\longrightarrow V = c_1 \ln \rho + c_2$

حال شرایط مرزی را به این رابطه اعمال می کنیم

$$\begin{cases} V(\rho = b) = 0 \longrightarrow c_1 \ln b + c_2 = 0 \\ V(\rho = a) = V_0 \longrightarrow c_1 \ln a + c_2 = V_0 \end{cases}$$

با حل همزمان این دو معادله داریم

$$c_1 = \frac{V}{\ln(a/b)} \quad , \quad c_2 = -\frac{V \ln b}{\ln(a/b)}$$

با جایگذاری در رابطه اصلی

$$V = \frac{V}{\ln(a/b)}(\ln \rho - \ln b) = \frac{V}{\ln(a/b)} \ln \frac{\rho}{b}$$

برای محاسبه میدان داریم

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \longleftarrow (\text{فقط وابسته به } \rho \text{ است } V)$$

$$E_\rho = -\frac{V}{\ln(a/b)} \frac{1}{\rho} = \frac{V}{\rho \ln(b/a)}$$

سری ... الکترومغناطیس

بار الکتریکی با چگالی بار خطی $\rho_l = 5\ (\mu C/m)$ روی قوس دایروی با شعاع $\rho = 2$ و $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ چه میدان الکتریکی را روی محور z ایجاد می نماید الف) در مبدأ ب) در $z=5$ ج) در $z=-5$

سه بار خطی یکنواخت ρ_{l1}، ρ_{l2} و ρ_{l3} هر یک به طول ۱، یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می دهند. با فرض $\rho_{l1} = 2\rho_{l2} = 2$، شدت میدان الکتریکی را در مرکز مثلث تعیین نمائید. $\frac{\rho_l}{2\varepsilon_0}$

دو سطح استوانه ای هم محور بی نهایت طویل $\rho = a$ و $\rho = b$ $(b>a)$ به ترتیب چگالی های بار سطحی ρ_{sa} و ρ_{sb} را حمل می کنند. الف) $\vec{E}$ را در تمام نقاط تعیین نمائید

ب) رابطه بین a و b چه باشد، تا اینکه $\vec{E}$ در $\rho > b$ صفر شود؟

در میدان الکتریکی تولید شده توسط یک بار خطی بی نهایت طویل واقع بر محور z با چگالی بار خطی $2\pi\ (\frac{C}{m})$، از سطحی با مختصات $r=1$، $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ و $0 \le \varphi \le 2\pi$ چه مقدار شار الکتریکی عبور می کند (ارشد برق ۸۸)

۱) $\pi(1-\sqrt{2}/2)$ ۲) $2\pi(\sqrt{2}-1)$ ۳) $\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ۴) $\pi(\sqrt{3}-1)$

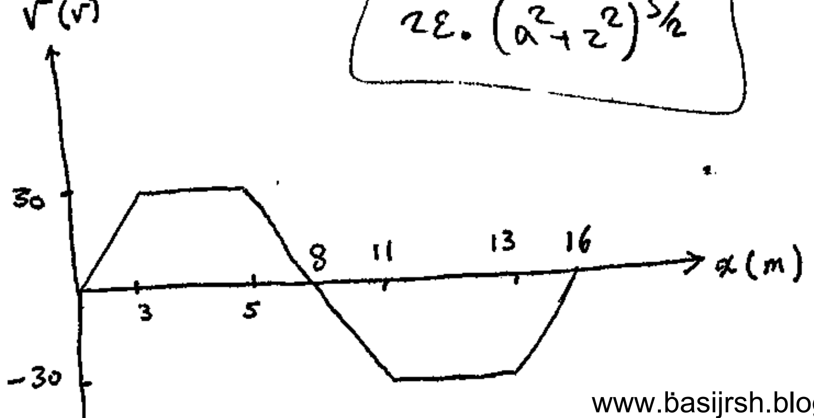
$\boxed{\pi(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

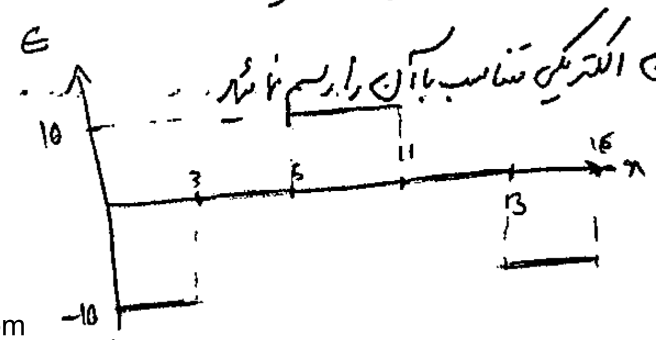
یک حلقه دایروی با شعاع a در صفحه x-y و با مرکز مبدأ مختصات داریم. اگر چگالی بار الکتریکی آن ρ_l باشد الف) پتانسیل الکتریکی را در $(0,0,z)$ بیابید ب) میدان الکتریکی را در این نقاط بیابید

$$V = \frac{\rho_l a}{2\varepsilon_0 \sqrt{a^2+z^2}}$$

$$E = \boxed{\frac{\rho_l a z}{2\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}}$$

بر اساس نمودار پتانسیل الکتریکی ارائه شده، میدان الکتریکی متناسب با آن را رسم نمائید.





فصل سوم

میدان الکتریکی در حضور اجسام

محاسبه میدان در: هادی / دی الکتریک / سطح مشترک

۱۰۱ ۹۱
۱۰۳ ۹۴
۱۰۵ ۹۶
۱۰۶ ۹۶
۱۰۶ ۱۰۰
۱۰۷ ۱۰۱

تئوری تصویر
خازن
انرژی الکتریکی

۱-۳ دسته بندی اجسام بر اساس هدایت الکتریکی

تحت تأثیر یک میدان الکتریکی خارجی، ذرات باردار اجسام مختلف از خود رفتارهای متفاوتی را بر اساس نوع ماده شان بروز می دهند و حتی میدان های جدیدی را تولید می کنند.

در یک اتم الکترون ها در لایه هایی به فواصل مختلف از هسته قرار دارند. الکترون های آخرین لایه ـ الکترون های ظرفیت ـ نقش اصلی را در فعل و انفعالات شیمیایی و هدایت الکتریکی دارند.

در برخی اجسام، الکترون های ظرفیت تحت تأثیر نیروی معینی از سوی هسته بوده و با دریافت انرژی اندکی به سادگی از اتم جدا می شوند. با اعمال یک میدان الکتریکی خارجی، الکترون های آزاد را با سرعت متوسطی به حرکت در آورده و در نتیجه جریانی ناشی از جابجایی الکترون ها بوجود می آید. چنین پدیده ای را هدایت الکتریکی و جسمی را که قابلیت هدایت آن زیاد باشد، مانند اکثر فلزات، هادی می نامند.

در برخی از اجسام، الکترون های ظرفیت را به سختی می توان از هسته دور نمود و اعمال یک میدان الکتریکی خارجی فقط مرکز ثقل ابر الکترونی را نسبت به هسته اندکی جابجا می کند. بنابراین الکترونها، الکترون های مقید نامیده و به علت عدم قابلیت

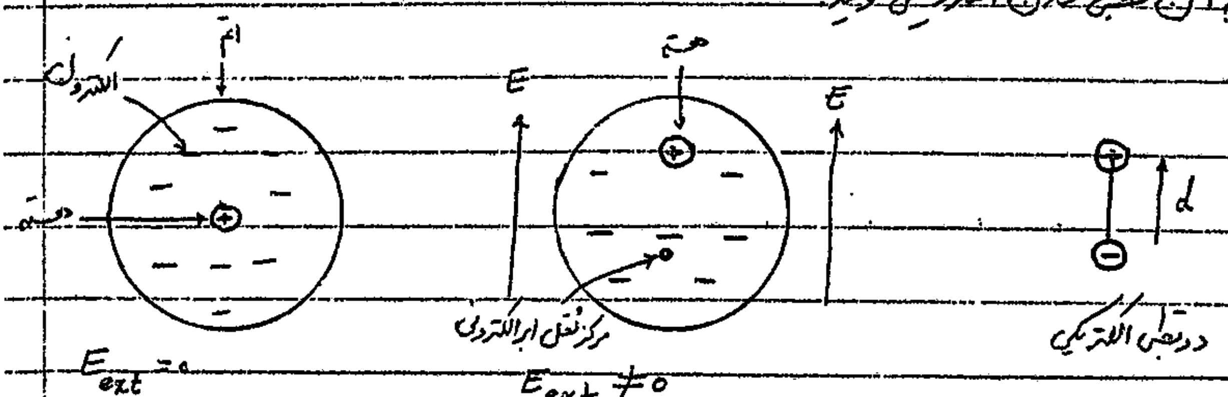
حرکت الکترون های مقید و ناچیز بودن تعداد الکترون های آزاد، هدایت الکتریکی در این قبیل اجسام بسیار اندک است و آنها را عایق نامند.

دسته دیگری از اجسام که در حد میانی بین رساناها و عایقها هستند به نام نیمه هادی شناخته می شوند.

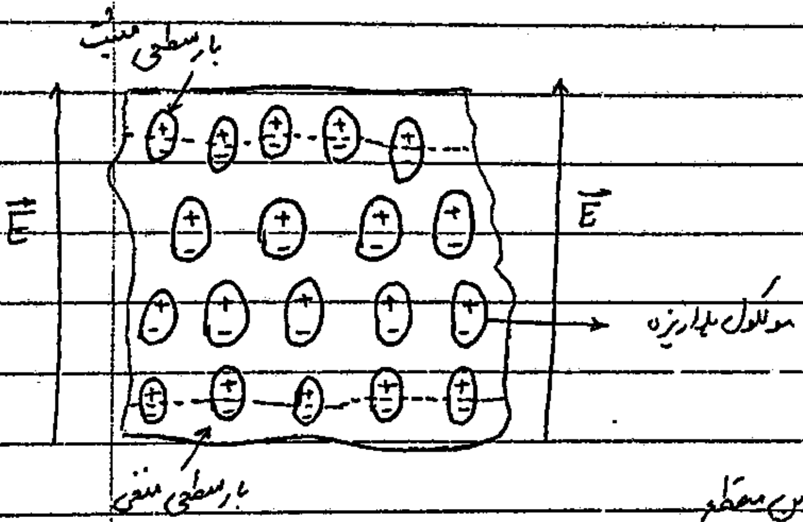
تاکنون به بررسی میدان الکتریکی در فضای آزاد پرداختیم. از این پس اثر میدان الکتریکی بر اجسام مختلف را بررسی می کنیم و در صورت وجود میدان اصلی اثر آن را روی میدان القایی که ایجاد می شود محاسبه می کنیم.

۴-۲ دی الکتریک در میدان الکتریکی ساکن

دی الکتریک ها (عایق ها) دارای بارهای مقید بوده و بارهای آزاد ندارند. در دی الکتریک تا زمانی که هیچ میدان الکتریکی خارجی به آن اعمال نشود، مرکز ثقل ابر الکترونی بر هسته منطبق بوده و اتم در فضای اطرافش به صورت یک ذره خنثی نمایان است. اعمال میدان الکتریکی $\vec{E}$ مرکز ثقل ابر الکترونی را، تحت تأثیر نیروی کولن، از هسته دور می کند و تعادل اولیه بر هم می خورد. اگر ابر الکترونی را با بار نقطه ای معادلی در مرکز ثقل آن جایگزین کنیم، اتم صورت یک دوقطبی را به خود می گیرد که به آن قطبی شدن الکترونی گویند.



البته برخی مواد عایق (دی الکتریک) هستند که به صورت طبیعی قطبی هستند مثل H_2O ولی دوقطبی های آنها انتظام لازم را ندارد. در هر صورت یک دی الکتریک چه ساختاری اتمی یا مولکولی داشته باشد و چه مولکولهایش قطبی یا غیر قطبی باشند تحت تاثیر یک میدان الکتریکی خارجی قطبی می شوند. و از آنجائیکه دوقطبی دی الکتریک دارای میدان الکتریکی غیر صفر هستند انتظار داریم که دوقطبی الکتریکی القاء شده، میدان الکتریکی را در داخل و خارج ماده دی الکتریک تغییر دهند. البته همانطور که از شکل زیر که نمای ماکروسکوپیک به دوقطبی شدن دی الکتریک در حضور میدان الکتریکی است، مشخص است که میدان الکتریکی حاصل از این دوقطبی ها در خلاف جهت میدان الکتریکی اولیه می باشد



نکته دیگر که می توان از این شکل متوجه شد بار کلی درون این مقطع برابر صفر شده و به عبارت دیگر اختصاصاً می توان تنها دو سطح بار منفی و مثبت را در سطح بیرونی آن در نظر گرفت

در مباحث بعد خواهیم دید که این بار سطحی (ρ_{sb}) را می توان به جای دوقطبی دی الکتریک ($\vec{P}$) بدست آمده بکار برد.

۱.۲.۳: بارهای معادل دی الکتریک قطبی شده

بردار قطبی شدگی $\vec{P}$ را می توان از مجموع مولکولهای قطبی در واحد حجم به صورت زیر نوشت

$$P = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} p_k}{\Delta v} \quad (C/m^2)$$

که همه، تعداد مولکول‌ها در واحد حجم هستند. پتانسیل الکتریکی ناشی از این دوقطبی می‌شود (در بخش پتانسیل محاسبه شده بود)

$$dV = \frac{P \cdot a_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dv' \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{v'} \frac{P \cdot a_R}{R^2} dv'$$

که در آن R فاصله‌ی هر نقطه از عنصر کوچک حجمی dv' شامل دوقطبی است

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

* به دنبال آن هستیم که P را به گونه‌ای معادل یک سری بار نماییم تا بتوانیم با استفاده از آن‌ها بر اساس داده‌های بدست آمده در بخش‌های قبل میدان الکتریکی را محاسبه کنیم. در واقع در این روش این بارهای معادل محاسبه شده جایگزین دی‌الکتریک می‌شوند و انگار که اصلاً دی‌الکتریک وجود نداشته و از ابتدا این بارها (که البته رابطه مستقیم با دی‌الکتریک دارند) وجود داشته‌اند.

در رابطه پتانسیل بالا می‌توان از این رابطه استفاده کرد

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\hat{a}_R}{R^2}$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{v'} P \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dv' \quad *$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\nabla \cdot (FA) = F\, \nabla \cdot A + A \cdot \nabla F$$

پس اگر A را P و F را $1/R$ در نظر بگیریم می‌توان رابطه * را نوشت

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{v'} \nabla \cdot \left(\frac{P}{R}\right) dv' - \int_{v'} \frac{\nabla \cdot P}{R} dv'\right]$$

طبق قضیه دیورژانس

$$\int_{s'} \frac{P \cdot a_n}{R} ds'$$

که داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{P\cdot a_n}{R}ds'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{(-\nabla'\cdot P)}{R}dv'$$

مشابه پتانسیل ناشی از بار سطحی — مشابه پتانسیل ناشی از بار حجمی

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\rho_s}{R}ds'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho}{R}dv'$$

پس می توان پتانسیل الکتریکی (میدان الکتریکی) ناشی از یک دی الکتریک قطبی شده را ناشی از دو بار سطحی و حجمی

در نظر گرفت که

$$\rho_{P_s}=P\cdot\hat{a}_n \qquad \rho_P=-\nabla\cdot P$$

این دو را اصطلاحا چگالی بار قطبی شدگی یا چگالی بار مقید می گویند.

که البته این بارها را می توان در شکل ماکروسکوپی که از تأثیر میدان بر دی الکتریک رسم کردیم هم دید. بارهای منفی و مثبتی که

در سطح دی الکتریک ایجاد شد.

البته چون جسم قطبی شده در مجموع از نظر بار الکتریکی خنثی است، مقدار کل بارهای مقید در درون و روی سطح

جسم برابر صفر باشد. برای اثبات این نکته می توان نوشت

$$Q_P=\int_{V'}\rho_P dv'+\oint_{S'}\rho_{P_s}ds'=\int_{V'}-\nabla\cdot P dv'+\oint_{S'}P\cdot\hat{a}_n ds'=0$$

چرا که طبق قضیه دیورژانس

$$\boxed{\oint_{S'}P\cdot a_n ds'=\int_{V'}\nabla\cdot P dv'}$$

؟؟!!!

۲-۲-۴ چگالی شار الکتریکی

مشاهده کردیم که میدان الکتریکی موجود در فضا موجب ایجاد بار الکتریکی مقید ناشی از قطبی شدن دی الکتریک می شود

در نتیجه کل بار موجود از جمع بار موجود در فضا و بار مقید حاصل می شود که در نتیجه داریم

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_v+\rho_b) \xrightarrow{\rho_b = -\nabla\cdot P} \nabla\cdot\varepsilon_0 E = \rho_v - \nabla\cdot P$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0 E+\vec{P}) = \rho_v$$

حال چگالی شار الکتریکی $\vec{D}$ را بدین صورت تعریف می کنیم

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

$$\rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$$

اهمیت بردار D در آن است که دیورژانس آن مستقل از بارهای مقید است و فقط به چگالی بار آزاد بستگی دارد.

بردار قطبی شدگی $\vec{P}$ تابع دو چیز است: ۱) میدان حاکم ($\vec{E}$) ۲) جنس محیط (X_e)

و می توان نوشت (این رابطه در بیوست (؟) تجربه اثبات شده است)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 X_e\vec{E}$$

که X_e پذیرندگی الکتریکی نامیده می شود. پس چگالی شار الکتریکی را می توان نوشت

$$D = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0\underbrace{(1+X_e)}_{\varepsilon_r}\vec{E} = \underbrace{\varepsilon_0\varepsilon_r}_{\varepsilon}\vec{E} \Rightarrow D = \varepsilon\vec{E}$$

$1+X_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ که ε_r را گذردهی نسبی یا ضریب دی الکتریک محیط گویند و ε را گذردهی مطلق محیط می نامند

چند نکته: ۱) شار دوقطبی را می توان از این رابطه نیز محاسبه نمود

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E} = \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\vec{D}$$

توجه کنید که اگر $\varepsilon_r = 1$ (گذردهی نسبی هوا) دیگر دوقطبی نداریم و $\vec{P} = 0$ می شود

۲) الف) می توان قانون گوس را برای چگالی شار الکتریکی بدین گونه نوشت

$$\nabla \cdot D = \rho_{\text{فضای آزاد}} \longrightarrow \oint D \cdot ds = q_{in}$$

یعنی فقط بارهای آزاد وارد می شوند و کاری به بارهای مقید نداریم

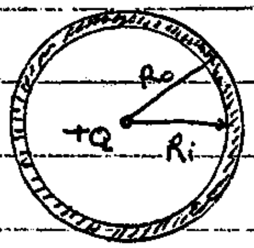
ب) قانون گوس برای میدان الکتریکی می شود $\nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho + \rho_b \longrightarrow \oint_s \vec{E} \cdot ds = \frac{q_{\text{فضای آزاد}} + q_{\text{مقید}}}{\varepsilon_0}$

پس ترجیحاً سعی می کنیم در عمل قانون گوس را برای $\vec{D}$ به کار ببریم تا فقط بارهای آزاد وارد شوند و نیازی به محاسبه بارهای مقید نداشته باشیم

۳) (Dielectric Breakdown) میدان الکتریکی باعث جابجایی کوچک بارهای مقید در دی الکتریک شده و موجب قطبی شدن آن می شود ولی اگر میدان خیلی قوی باشد ممکن است ماده تبدیل به رسانا شود و جریان های بزرگی به وجود آورد در واقع شکست دی الکتریک رخ دهد. به همین دلیل از یک حدی نمی توان میدان الکتریکی را بیشتر کرد. حداکثر شدت میدان الکتریکی که یک ماده دی الکتریک می تواند بدون شکست تحمل کند قدرت دی الکتریک گویند

۴) مسایل مرتبط با میدان الکتریکی در دی الکتریک ها یا ۱) ε_r را می دهند که مستقیماً از طریق آن می توان با فرمول های ارائه شده D و E و V و ... را یافت یا ۲) $\vec{P}$ را می دهند که مستقیم بر اساس فرمول های بالا یا با استفاده از ρ_{ps} و ρ_p می توان E و V و ... را یافت. در واقع ε_r و $\vec{P}$ (ρ_p و ρ_{ps}) هم ارز یکدیگرند. با داشتن اینها عایق را در محیط کنار گذاشته و فقط از این عوامل استفاده می کنیم

مثال: یک بار نقطه ای $+Q$ در مرکز پوسته ی دی الکتریک کروی با شعاع درونی R_i و شعاع بیرونی R_o قرار گرفته است. ضریب دی الکتریک پوسته ε_r است. $\vec{E}$، V، $\vec{D}$ و $\vec{P}$ را بیابید.



حل: چون ε_r داده از روابط مرتبط با آن استفاده می کنیم

چون شکل دارای تقارن کروی است از قانون گوس استفاده می کنیم. برای این کار مسئله را به ۳ ناحیه تقسیم می کنیم

الف) ناحیه اول $R>R_o$ (محیط بیرون کره) $\xrightarrow[\text{قانون گوس}]{\text{براساس}}$ $E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

$$V_1 = -\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$D_{R1} = \varepsilon_0 E_{R1} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$ چون بار در فضای آزاد بیرون کره

$$P_{R1} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = D - \varepsilon_0 E = 0$$

ب) ناحیه دوم $R_i<R<R_o$: در این ناحیه که عایق قرار دارد براساس قانون گوس داریم

$$E_{R2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} \longrightarrow D_{R2} = \varepsilon E = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$P_{R2} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$V_2 = \underbrace{-\int_{\infty}^{R_o} E_{R1}\, dR}_{\text{پتانسیل تا کره}} \underbrace{-\int_{R_o}^{R} E_{R2}\, dR}_{\text{پتانسیل در عایق}} = V_1\Big|_{R=R_o} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_o}^{R} \frac{1}{R^2}\, dR$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\varepsilon_r R}\right]$$

...

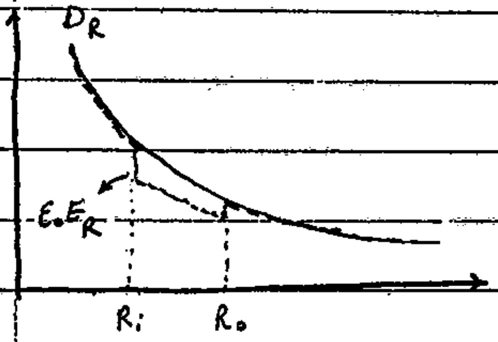
c) $R<R_i$ (درون کره)

$$E_{R3}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\ ,\ D_{R3}=\frac{Q}{4\pi R^2}\ ,\ P\Big|_{\epsilon_r=1\ (\text{هوا})}=0$$

$$V_3=V_2\Big|_{R=R_i}-\int_{R_i}^{R}E_{R3}\,dR=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_0}-\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R}\right]$$

همانطور که از جواب های بدست آمده مشخص است چگالی شار مغناطیسی $\vec{D}_R$ در هر سه حالت یکسان است و در درون و بیرون عایق (ϵ های متفاوت) برابر است ولی در محیط های مختلف تغییر می کنند در حالیکه $\vec{E}$ ($\vec{P}$) وابسته به ϵ هستند

توجه کنید وقتی در فضای آزاد $\vec{E}$ را اندازه گیری میکنیم (در حالت اول و سوم) با هم برابرند و نمودارهای زیر گویای این معادلات است



نمودار این نکته را تصدیق می کند

این کاهش مقدار E_R به علت ایجاد $\vec{P}$ و در نتیجه میدانی متناسب با آن است

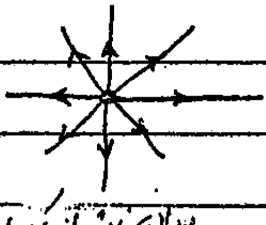
این میدان ایجاد شده در خلاف جهت E_R اولیه بوده و همچنان شکل روبرو

موجب کاهش آن می شود. این میدان به وسیله بارهای سطحی زیر حاصل می شود

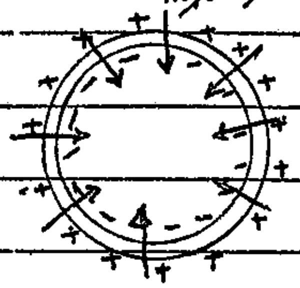
سطح داخلی پوسته: $\rho_{ps}\Big|_{R=R_i}=P\cdot(-a_R)=-\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_i^2}$

سطح خارجی پوسته: $\rho_{ps}\Big|_{R=R_0}=P\cdot a_R=\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_0^2}$

بار حجمی: $\rho_p=-\nabla\cdot P=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(\cancel{R^2}\frac{q}{4\pi \cancel{R^2}}\right)=0$



میدان ناشی از یک بار الکتریکی مثبت



میدان ناشی از پوسته عایق باردار
(ناشی از بار قطبی)

میدان الکتریکی به وجود آورده توسط بار سطحی به صورت شعاعی به سمت داخل جهت داشته و بنابراین میدان $\vec{E}$ ناشی از بار نقطه ای $+Q$ در مرکز را در ناحیه 2 کاهش می دهند.

مثال: یک پوسته استوانه ای طویل به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به صورت زیر دوقطبی شده است:

$$\vec{P} = \frac{3}{\rho^2}\hat{a}_\rho$$

میدان الکتریکی داخل و خارج پوسته را بیابید.

روش اول: محاسبه $\vec{E}$ با استفاده از چگالی بارهای سطحی و حجمی مقید

$$\rho_b = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(r\vec{P}) \Rightarrow \rho_b = 3/r^3$$

$$\rho_{sb}\Big|_{r=a} = \vec{P}\cdot(-\hat{a}_\rho) = -\frac{3}{a^2} \qquad \rho_{sb}\Big|_{r=b} = \vec{P}\cdot\hat{a}_\rho = \frac{3}{b^2}$$

حال بر اساس قضیه گوس و در سه مقطع داریم: الف) $\rho < a$

$$\oint E\cdot ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 2\pi r h\varepsilon_0 = q_{in} \xrightarrow[q_{in}=0]{\text{در فضای آزاد}} \underline{E=0}$$

ب) $a<\rho<b$، ولی در این بازه بارهای سطحی و حجمی قرار دارد، پس کل بار سطحی روی $\rho=a$ و بار حجمی تا شعاع ρ را حساب کنید.

(دقت کنید در این بازه فقط بارهای a شامل می شوند ولی به شعاع b و دیگر بارهای آن نمی رسیم)

$$q_s = \rho_{sb}\Big|_{r=a}\times \underset{\text{سطح}}{S} = -\frac{3}{a^2}\times 2\pi a h = -6\pi h/a$$

$$q_v = \int_v \rho_b\, dv = \int_v \frac{3}{\rho^3}(\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz) = \int_a^\rho \frac{d\rho}{\rho^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = 6\pi h\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\rho}\right)$$

بر اساس قضیه گوس:

$$q_{in} = q_s + q_v = \frac{-6\pi h}{\rho} \longrightarrow \underline{E = -\frac{3}{\varepsilon_0\rho^2}\hat{a}_\rho}$$

ج) $r>b$

$$q_{in} = q_{sa} + q_{sb} + q_v = \frac{-6\pi h}{a} + \frac{6\pi h}{b} + 6\pi h\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] = 0$$

قضیه گوس $\oint E \cdot ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E_0 (2\pi r h) = \frac{0}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{E} = 0$

روش دوم: روش ساده‌تر برای حل این مسئله آن است که از آنجائیکه $\vec{D}$ در عایق‌ها وابسته به ε نیست آن را محاسبه کنیم (نکته ۲)

قضیه گوس $\oint D \cdot ds = q_{in}$

$\boxed{\text{در بازه‌های } r<a \text{ و } r>b \text{ هیچ باری نداریم} \rightarrow E = P = 0 \quad D = 0}$
چون این محیط‌ها دی الکتریک نیستند $P = 0$ می‌شود

ولی در بازه $a<r<b$

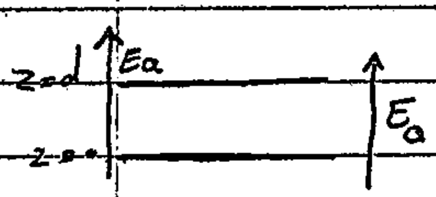
$$\oint D \cdot ds = \underbrace{q}_{\text{فضای آزاد}} = 0 \longrightarrow D = 0$$

$$D = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \longrightarrow -\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{P} \rightsquigarrow E = \frac{-\vec{P}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = -\frac{3}{\varepsilon_0 \rho^2} \hat{a}_\rho$$

به نکته دیگری نیز که باید توجه کنید در روش اول بارهای سطحی و حجمی مقید تنها در میدان درون عایق اثر گذار بودند همانطور

که اثبات کردیم: مقدار کل بارهای مقید در درون و روی سطح حجم برابر صفر می‌شود (بخش ج) $r>b$ را ببینید)

۵) فضای بین دو صفحه موازی از ماده عایقی با ثابت گذردهی نسبی ε_r پر شده است. میدان الکتریکی یکنواخت
سه برقرار می‌شود



$E_a = E_0 \hat{a}_z$ مطابق شکل روبرو به ماده عایق اعمال می‌شود. بردار پلاریزاسیون $\vec{P}$

و چگالی بارهای مقید و نیز میدان الکتریکی کل در تمام نقاط فضا را بدست آورید.

بهترین و ساده‌ترین راه برای حل مسائل مرتبط به عایق از $\vec{D}$ است زیرا در کل فضا ثابت است استفاده می‌کنیم در فضای آزاد

$D = \varepsilon_0 E$ ← از آنجائیکه $E = E_0 \hat{a}_z$ پس $D = \varepsilon_0 E_0 \hat{a}_z$ خواهد شد که در کل فضا (درون و بیرون عایق) یکسان است

پس میدان الکتریکی می‌شود

$$E=\begin{cases} \frac{D}{\varepsilon_0}\hat a_z = \frac{E_0\varepsilon_0}{\varepsilon_0}a_z = E_0\hat a_z & z<0\\ \frac{D}{\varepsilon}\hat a_z=\frac{E_0}{\varepsilon_r}\hat a_z & 0<z<d \\ E_0\hat a_z & z>d\end{cases}$$

که بردار پلاریزاسیون می‌شود

$$\vec P = \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec E$$

که با توجه به اینکه در $z<0$ و $z>d$، $\varepsilon_r=1$ است $\vec P=0$ می‌شود و برای $0<z<d$ (درون عایق) داریم

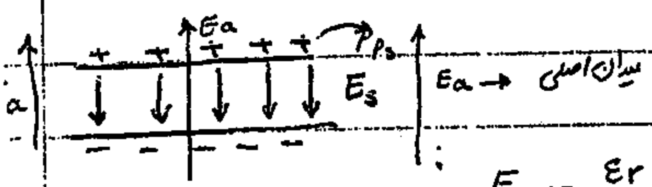
$$\vec P = \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{E_0}{\varepsilon_r}\hat a_z$$

بارهای مقید:

$$\rho_p = \nabla\cdot P = 0 \qquad \rho_{ps} = P\cdot a_n = \begin{cases} \varepsilon_0\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}E_0 & z=d\\ -\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}E_0 & z=0\end{cases}$$

توجه: که البته این بارهای سطحی هستند که میدانی برابر با مقدار زیر تولید می‌کنند که در جهت عکس میدان الکتریکی اصلی است و موجب کاهش آن می‌شود

$$E_s = \begin{cases} \frac{-\rho_{ps}}{\varepsilon_0}\hat a_z = -\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}E_0 & 0<z<d\\ \text{صفر} & \text{غیره}\end{cases}$$



که میدان کل می‌شود (که همان جواب بالا است)

$$E_0 - \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}E_0 = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

تمرین: بین کره‌ی رسانای به شعاع a و پوسته کروی هم مرکز با آن به شعاع b عایقی با گذردهی غیر یکنواخت $\varepsilon = \varepsilon_0 (c-\alpha R)$ قرار دارد. اگر روی کره‌ی وسطی بار Q قرار داشته باشد، چگالی بارهای مقید داخل عایق چقدر است؟

$$\frac{-Q\alpha}{4\pi R^2}$$

برای بیان توزیع میدان الکتریکی در اجسام رسانا نیازمند بررسی جریان الکتریکی در رسانا به عنوان مقدمه هستیم (البته این بحث مقدمه‌ای برای میدانهای غیر الکترواستاتیک که در فصل‌های آینده ارائه می‌شود نیز می‌باشد)

۴-۳ جریان های الکتریکی دائم

جریان های الکتریکی ناشی از حرکت بارهای آزاد بر چند نوع هستند ۱) جریان هدایتی: در رساناها و نیمه رساناها توسط حرکت رانشی الکترون ها و / یا حفره های هدایتی به وجود می آیند ۲) جریان های الکترولیتی: نتیجه نقل و انتقال مکان یون های مثبت و منفی هستند ۳) جریان های انتقالی: از حرکت الکترون ها و / یا یون ها در خلا نتیجه می شوند (مثل اشعه الکترونی در لامپ پرتو کاتدی و حرکت های مغشوش ذرات باردار در طوفان همراه با رعد و برق)

البته تمرکز این بخش بر روی جریان های هدایتی که غالباً در فلزات و عایق ها وجود دارد می باشد.

۴-۳-۱ جریان الکتریکی و قانون اهم

وقتی که یک جسم هادی در میدان الکتریکی قرار می گیرد، الکترون های آزاد آن تحت تأثیر نیروی کولن به حرکت در می آیند و با سرعت متوسطی متناسب با شدت میدان الکتریکی اعمال شده در امتداد آن جابجا می شوند که در مورد هادی های فلزی می شود

$$V = -\mu_e \vec{E} \qquad (m/s)$$

(μ_e: ضریب تحرک الکترونی)

در واحد زمان

که در اثر این سرعت متوسط، بارها به میزان $\Delta l = V\Delta t$ جابجا می شوند که این جابجایی در اثر میدان همان جریان می باشد. که اگر تعداد الکترون های آزاد (e) در واحد حجم ($\Delta V = \Delta S\,\Delta l = \Delta S\,V\Delta t$) برابر N باشد، میزان بار الکتریکی که در فاصله زمانی Δt از سطح ΔS می گذرد برابر است با:

$$\Delta Q = \rho\Delta V = (Ne)(\Delta S \cdot V\Delta t)$$

چون جریان، نرخ زمانی تغییر بار است داریم

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Ne\Delta S \cdot V = \Delta S(NeV)$$

از طرفی برای یک تعریف جریان سطحی داریم (J: چگالی جریان سطحی) $I = \int_s J \cdot ds$ یا $\Delta I = \Delta S \cdot J$

پس $J = NeV \xrightarrow[V = -\mu_e E]{} J = -Ne\mu_e \vec{E}$

با تعریف ضریب $Ne\mu_e = \sigma$ رابطه ساده ولی مهم زیر را بین J و E داریم (از این پس همواره از این رابطه استفاده می‌کنیم)

فرم نقطه‌ای قانون اهم $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

σ را رسانایی یا قابلیت هدایت الکتریکی می‌نامند. این ضریب برای اکثر فلزات حدود 10^7 ، برای آب دریا برابر 4 و برای یک عایق خوب حدود 10^{-15} می‌باشد پس

عادی $\sigma \to \infty$

عایق $\sigma \to 0$

نکته: $\nabla \times E = 0 \longrightarrow \nabla \times \left(\frac{J}{\sigma}\right) = 0 \xrightarrow[\text{ذرات همگن}]{\sigma\ \text{ثابت}} \nabla \times J = 0$

یا به عبارتی $\oint_c E \cdot dl = 0 \longrightarrow \oint_c \frac{1}{\sigma} J \cdot dl = 0$

۳-۳-۳ قانون ژول

تحت تأثیر میدان الکتریکی، الکترون‌ها در تحت حرکت رانشی قرار می‌گیرند. از این رو انرژی از میدان الکتریکی به اتم‌های تحت ارتعاش حرارتی منتقل می‌شود. کار انجام شده ΔW توسط میدان الکتریکی E در حرکت دادن بار q تا فاصله Δl برابر $qE \cdot \Delta l$ است پس توان:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{qE \cdot \Delta l}{\Delta t} = qE \cdot V$$

و برای تمام بارها در حجم dv داریم

$$dP = \sum p_i = E \cdot (\underbrace{\sum N_i q_i V_i}_{J})\, dv$$

پس $dP = E\cdot J\,dv$ $\quad \frac{dP}{dv} = E\cdot J$ (چگالی توان)

کل توان الکتریکی تبدیل شده به حرارت $\quad P = \int_v E\cdot J\,dv \quad (W)$

و طبق تعریف $6E = J$

$$P = \frac{1}{6}\int_v J\cdot J\,dv = \int 6E\cdot E\,dv$$

که با این معادله، قانون ژول گوییم. این معادله را به این صورت هم می شود باز نویسی کرد ($dv = ds\,dl$)

$$P = \int_v E\cdot J\,dv = \underbrace{\int_L E\cdot dl}_{V}\,\underbrace{\int_s J\cdot ds}_{I} = VI \xrightarrow{V=RI} P = I^2R$$

۴-۳-۳ مقاومت الکتریکی

میدان الکتریکی $\vec{E}$ در یک جسم رسانا جریانی متناسب با 6 آن ایجاد می کند. اجسام مختلف دارای رسانایی های متفاوتی هستند و به بیان دیگر مقاومت الکتریکی آنها در مقابل عبور بار الکتریکی متفاوت است. مقاومت اجسام نه تنها به رسانایی آنها بلکه به شکل و ابعاد هندسی آن نیز بستگی دارد. در رابطه ای که به آن مقاومت می شود:

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_a^b E\cdot dl}{\int_s J\cdot ds} = \frac{\int_a^b E\cdot dl}{\int_s 6E\cdot ds}$$

که a تا b طول در راستای جریان است و S سطح عمود بر مسیر جریان.

وجود $\vec{E}$ در صورت و مخرج کسر مربوط به مقاومت حاکی از آن است که مقاومت یک جسم مستقل از جریان گذرنده از آن و ولتاژ اعمالی به آن می باشد.

مثال: مقاومت یک سیم مستقیم به طول l و سطح مقطع S و رسانایی σ را محاسبه کنید؟

$$V_{ab}=\int_a^b E\cdot dl = El \quad \text{و} \quad I=\int_S \sigma E\cdot ds = \sigma E S \quad \text{و} \quad R=\frac{V_{ab}}{I}$$

$$R=\frac{l}{\sigma S}$$

که همان رابطه معروف مقاومت یک سیم است.

$$\boxed{R=\frac{l}{\sigma S}}$$

البته در این سوال میدان $\vec{E}$ حذف شد ولی در غالب سوالات مرتبط با این مبحث ابتدا می بایستی میدان $\vec{E}$ را محاسبه و انتگرال ها را محاسبه کنیم که در ساختارهای نامتقارن، مساله بغرنج می باشد. البته با استفاده از رابطه کلی زیر در مورد مقاومت می توان به صورت مستقیم و بدون نیاز به محاسبه $\vec{E}$ (مقاومت اساساً وابسته به میدان $\vec{E}$ نیست)، آن را محاسبه کرد

(اثبات در پیوست ۲ ارائه شده است)

$$\boxed{R=\int_{u_1}\frac{du_1}{\int_{u_2}\int_{u_3}\frac{\sigma h_2 h_3\, du_2\, du_3}{h_1}}}$$

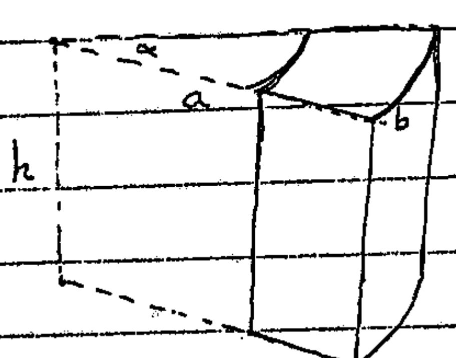
که رابطه ساده شده آن به قرار زیر است:

$$\boxed{R=\int_{l}\frac{dl}{\int_S \sigma\, ds}}$$

راستای جریان

سطح عمود در جریان

مثال: مقاومت بین دو سطح استوانه ای یک قطاع، با زاویه مرکزی α چقدر است؟



$$R=\frac{1}{\sigma}\int_a^b\frac{d\rho}{\iint \rho\, d\varphi\, dz}$$

$$R=\frac{1}{\sigma}\int_a^b\frac{d\rho}{\int_0^h\int_0^\alpha \rho\, d\varphi\, dz}$$

$$\frac{\int E\cdot dl}{\int E\cdot ds}$$

$$R=\frac{1}{\alpha h\sigma}\int_a^b\frac{d\rho}{\rho}=\frac{\ln b/a}{\sigma h\alpha}$$

$$\frac{\cancel{E}\cdot\int dl}{\sigma\cancel{E}\cdot\int ds}=\frac{\int d\rho}{\sigma\iint \rho\, d\varphi\, dz}=\frac{}{2\pi h}$$

این مسئله را بر اساس فرمول اصلی R را نیز محاسبه کنید ← [illegible] شود؟

مثال: چنانچه رسانایی یک عایق بین دو هادی یک کابل هم محور غیر یکنواخت و به صورت $\sigma = \frac{\sigma_0}{1+a/\rho}$ باشد، مقاومت

در واحد طول کابل کدام است؟ (a و b به ترتیب شعاع داخلی و بیرونی کابل است.) (ارشد برق ۱۳۸۵)

[illegible]

$$R=\int \frac{d\rho}{\iint \frac{\sigma_0}{1+a/\rho}\cdot \rho\, d\varphi\, dz} = \frac{1}{\sigma_0 2\pi}\int \frac{d\rho}{\int \frac{\rho\, dz}{\frac{\rho+a}{\rho}}} = \frac{1}{2\pi\sigma_0}\int \frac{\rho+a}{\rho^2}\, d\rho$$

$$R=\frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[\int \frac{d\rho}{\rho}+\int \frac{a}{\rho^2}\, d\rho\right] = \frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[\ln\rho\Big|_a^b + a\left(-\frac{1}{\rho}\right)\Big|_a^b\right]$$

$$\boxed{R=\frac{1}{2\pi\sigma_0}\left(\ln b/a + \frac{b-a}{b}\right)}\ \checkmark$$

۳-۳-۵ قانون جریان کیرشهف (اصل بقای بار) و معادله پیوستگی

طبق اصل بقای بار، بار الکتریکی نمی‌تواند تولید یا نابود شود. حجم دلخواه V_0 را که با سطح S احاطه شده است در نظر بگیرید.

بار خالص Q در درون این ناحیه وجود دارد. اگر جریان خالص I از سطح به سمت بیرون ناحیه عبور کند، بار درون حجم

باید با نرخی برابر جریان کاهش یابد و بر عکس، اگر جریان خالص از سطح به سمت درون ناحیه عبور کند، بار درون حجم

باید با نرخی برابر جریان افزایش یابد

$$I_{\text{خروجی}} = -\frac{dQ}{dt}$$

از طرف دیگر

$$I=\oint J\cdot ds = \oint \nabla\cdot J\, dV \quad \text{(قضیه دیورژانس)} \qquad , \qquad Q=\int_V \rho\, dV$$

$$\oint \nabla\cdot J\, dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV \longrightarrow \boxed{\nabla\cdot J = -\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

به این معادله، معادله پیوستگی می گویند.

در جریان های دائم، چگالی بار با زمان تغییر نمی کند ($\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$) در نتیجه $\nabla\cdot J=0$

یعنی خطوط جریان حالت سلونوئیدی دارند و روی خودشان بسته می شوند $\oint J\cdot ds=0$

یا

قانون جریان کیرشف $\sum_j I_j=0$

یعنی جمع جبری جریانهایی که از یک گره مدار الکتریکی خارج می شوند، صفر است.

۶-۳-۳ بار آزاد در اجسام رسانا و نحوه توزیع آن

فرض کنید در لحظه $t=0$ باری با چگالی ρ_0 در بخشی از یک جسم رسانا با رسانایی ثابت σ ظاهر شود داریم:

طبق قانون گوس $\nabla\cdot E=\rho/\varepsilon_0$ ، طبق معادله پیوستگی $\nabla\cdot J=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\nabla\cdot\vec{J}=\nabla\cdot(\sigma\vec{E})=\sigma\nabla\cdot E=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \nabla\cdot E=-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

با مرتب کردن این معادله دیفرانسیل داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho=0$$

حل این معادله دیفرانسیل با شرط اولیه $\rho(t=0)=\rho_0$:

$$\rho(t)=\rho_0 e^{-t/\tau} \quad \text{که} \quad \tau=\frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

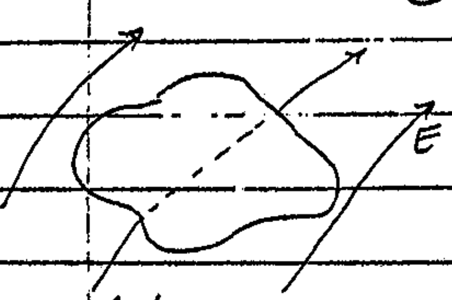
چگالی بار به صورت نمایی و با ثابت زمانی $\tau=\varepsilon_0/\sigma$ کاهش می یابد و سرانجام به صفر می رسد. به τ زمان آسایش (Relaxation time) می گویند. پس از گذشت τ، میزان بار در رسانا به ٪۳۷ مقدار اولیه کاهش می یابد. در یک رسانای خوب این زمان حدود 10^{-19} ثانیه و در آب حدود

پس بار در درون جسم هادی به سرعت به سطح میل می کند و طبق اصل بقای بار بار در حال کاهش در درون جسم باید در جای دیگری از جسم ظاهر شود و این جای دیگر جز سطح جسم نمی تواند باشد.

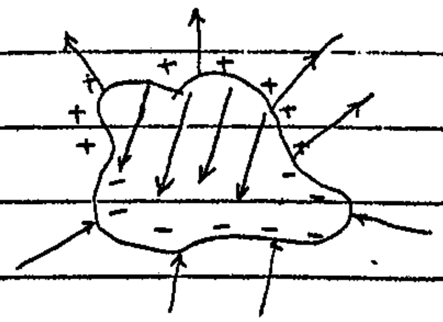
۴-۳ هادی ها در میدان الکتریکی ساکن

چنانچه هادی را بار دار کنیم و چه تحت تأثیر میدان الکتریکی قرار گیرد، بارهای آزاد آن در جهت میدان جریان یابند طبق مباحث بخش قبل هیچ باری درون هادی نمی ماند و همه بر روی سطح آن می آیند. در نتیجه با توجه به قضیه گوس و اینکه $\rho=0$ است پس درون هادی همواره $E=0$ می شود.

به عبارتی وقتی یک جسم هادی درون یک میدان قرار می گیرد الکترونهای آزاد به سطح هادی می آیند و از آنجا که جسم از نظر بار الکتریکی خنثی است پس روی آن سمتی که خطوط میدان می خواهند وارد جسم شوند بار منفی ایجاد می شود و در طرف مقابل آن که میدان ها از آن خارج می شوند بار مثبت (میدان از آن خارج می شود) [این بار مثبت فقط می تواند در سطح جسم ایجاد شود چرا که درون هادی $\rho=0$ است] بار سطحی ایجاد شده موجب ایجاد یک میدان الکتریکی در درون هادی می کند دقیقاً برابر میدان الکتریکی بیرونی ولی در خلاف جهت آن. به همین خاطر میدان الکتریکی مجموع درون هادی صفر می شود.



هادی در میدان الکتریکی خارجی



میدان کل ورودی به هادی و میدان تولیدی در هادی که موجب صفر شدن میدان کل در هادی می کند

اگر شدت میدان الکتریکی دارای مولفه مماسی باشد، تولید یک نیروی مماسی بر بارها کرده و موجب حرکت بارها می شود. پس تحت شرایط سکون، میدان E روی سطح یک هادی همه جا عمود بر سطح است. به عبارت دیگر سطح هادی یک سطح هم پتانسیل است و چون در تمام نقاط درون هادی $\vec{E}=0$ است، ($V_{ab}=\int E.dl$ اختلاف پتانسیل) [اختلاف پتانسیل دو نقطه درون هادی صفر است] کل هادی دارای پتانسیل الکتریکی ساکن یکسانی است.

توجه: به وجود آمدن میدان جدید بر اساس بارهای سطحی روی هادی، جمع آن با میدان اولیه موجب تغییر میدان اولیه به مقدار جدیدی می شود. در واقع میدان های الکتریکی در فضای آزاد باید در مجاورت عایق ها و هادی ها پس از جمع برداری این میدان و میدان ثانویه ناشی از این اجسام محاسبه نمود.

مثال: بار q درون پوسته هادی به شعاع های داخلی و خارجی a و b قرار دارد. میدان و پتانسیل الکتریکی و چگالی بارهای القایی روی سطوح هادی را بیابید. میدان درون هادی ($a<R<b$) برابر صفر است $\vec{E}_2=0$.

و در خارج آن ($R<a$ و $R>b$) از قانون گوس داریم

$$E_{R1}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad E_{R3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

(توزیع بارهای سطحی (مثبت و منفی) باید صفر شود چون هادی خنثی است و در مرکز فقط بار q است)

کل باری که روی سطح داخلی کره است برابر $-q$ می باشد و روی سطح بیرونی هم $+q$ چرا که اگر یک سطح گوسی در محدوده پوسته $a<R<b$ بگیریم باید کل بار ($+q$ در مرکز و $-q$ در سطح داخلی) برابر صفر شود و چون پوسته هادی باید از نظر بار الکتریکی خنثی باشد (از آنجا که روی سطح داخلی بار $-q$ القا شده) پس بار $+q$ روی سطح بیرونی القا می شود.

سطح داخلی $\rho_{s1} = -\frac{q}{s_1} = -\frac{q}{4\pi a^2}$ سطح بیرونی $\rho_{s2} = \frac{q}{s_2} = \frac{q}{4\pi b^2}$

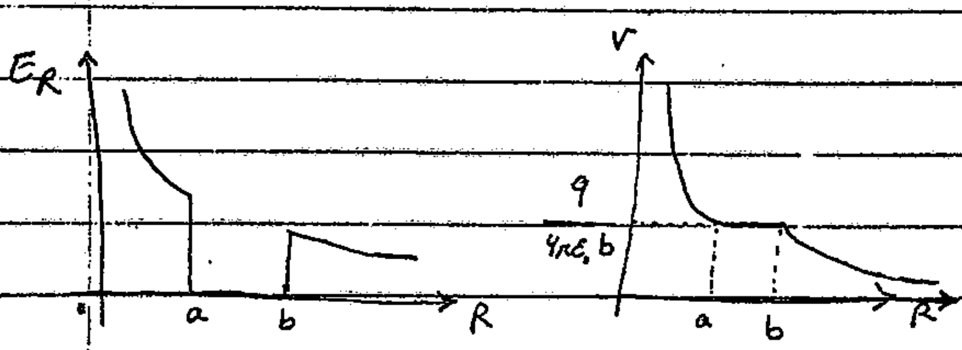
در واقع این بارها میدانی خلاف میدان ناشی از بار در وسط پوسته ایجاد می کنند که کل میدان در هادی صفر می شود.

پتانسیل: برای $R>b$ داریم $V_1 = -\int_{\infty}^{R} (E_{R1})\, dR = \int_{\infty}^{R} \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dR = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$a<R<b$ (از آنجائیکه در این فاصله هادی قرار دارد $E=0$ بوده و تمامی نقاط هم پتانسیل هستند) $V_2 = V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$R<a$ $V_3 = V_2 - \int_R^a E_{R1}\cdot dl = V_2 - \int_R^a \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]$

که نمودار میدان و پتانسیل می شود



مثال: میدان الکتریکی در فضای اطراف یک کره هادی به شعاع a که مرکز آن منطبق بر مبدا مختصات فرض می شود عبارتست از: $R>a$:

$$E = E_0\left(1+\frac{2a^3}{R^3}\right)\cos\theta\,\hat{a}_R - E_0\left(1-\frac{a^3}{R^3}\right)\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

الف) آیا میدان مزبور ویژگی یک میدان الکتریکی ساکن را دارا است؟ ب) نشان دهید که مولفه معاسی میدان الکتریکی روی سطح کره هادی صفر است؟ ج) چگالی توزیع بار الکتریکی القا شده روی سطح کره هادی را بدست آورید

جدا شود

د) میدان کره اولیه و ثانویه را از عبارت فوق که برای میدان کل می باشد جدا کنید.

حل: الف) هنگامی یک میدان الکترواستاتیک است که $\nabla\times E=0$ باشد یعنی کرل میدان داده شده برابر

می‌کنیم

$$\nabla\times E = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} a_R & Ra_\theta & R\sin\theta\, a_\phi \\ \partial/\partial R & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ E_0\left(1+\frac{2a^3}{R^3}\right)\cos\theta & -RE_0\left(1-\frac{a^3}{R^3}\right)\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

پس $\vec{E}$ ویژگی لازم را برای یک میدان الکتریکی ساکن دارد.

ب) مولفه مماسی میدان بر روی یک کره، همان مولفه $\hat{a}_\theta$ است (بردار $\vec{E}$ داده شده که اصلاً مولفه ϕ ندارد و مولفه R آن که عمود بر کره است). مقدار این مولفه روی سطح کره می‌شود

$$E_t = E_\theta = -E_0\left(1-\frac{a^3}{a^3}\right)\sin\theta = 0$$

$$\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

ج) $\rho_s = \varepsilon_0 E\cdot\hat{a}_n$ که $\hat{a}_n = \hat{a}_R$ $\quad \oint E\cdot ds = Q/\varepsilon = \frac{\int \rho_s ds}{\varepsilon}$

$$\rho_s = \varepsilon_0 E_R\Big|_{R=a} = \varepsilon_0\left(1+\frac{2a^3}{a^3}\right)E_0\cos\theta = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

د) اگر E_a میدان اولیه و E_s میدان ثانویه باشد:

$$E = E_a + E_s$$

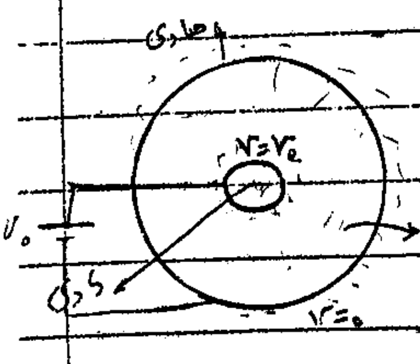
برای آن که میدان اولیه را بدست آوریم، کره کوچک را به سمت صفر میل می‌دهیم (شعاع) در این صورت میدان ثانویه (ناشی از حضور کره) باید صفر شود پس

$$E_a = \lim_{a\to 0}\vec{E} = E_0\cos\theta\,\hat{a}_R - E_0\sin\theta\,\hat{a}_\theta = E_0\hat{a}_z$$

$$E_s = E - E_a = E_0\frac{a^3}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_R + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)$$

$\varepsilon = \varepsilon_0$

تمرین: میدان الکتریکی را در یک کابل کواکسیال بیابید



$V_0 =$

$\nabla\cdot D = \rho_v$

$\nabla\cdot D = \rho_v$

$\oint D\cdot ds = q_{free}$

برگرده

$2\pi rL|\vec{D}| = q_f$

$V_0 = \int$

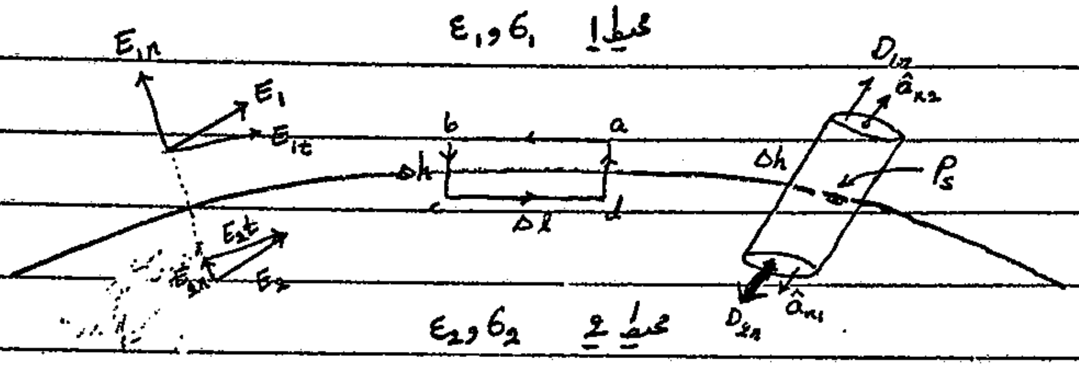
$|\varepsilon\vec{E}| = \frac{q}{2\pi rL}$

$$\vec{E} = \frac{q_{free}}{2\pi rL\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

مبانی ۱۲

۳-۱ شرایط مرزی در سطح مشترک اجسام

مسائل الکترومغناطیس، غالباً شامل محیط هایی با خواص فیزیکی متفاوت هستند و لازم است اطلاعاتی در مورد روابط کمیات میدان و جریان الکتریکی در فصل مشترک بین دو سطح بدست آید



مسیر کد میدان را با طول Δl و عرض Δh در نظر می گیریم و $\oint E.dl=0$ را به آن اعمال می کنیم چون

می خواهیم میدان را در هر روی مرز بدست آوریم Δh را به صفر میل می دهیم پس داریم

$$\oint_{abcda} E.dl = -E_1 . \Delta l + E_2 . \Delta l = -E_{1t}\,\Delta l + E_{2t}\,\Delta l = 0$$

در نتیجه داریم

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad \text{و} \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \quad \text{و} \quad \frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$

یعنی: مولفه مماسی میدان $\vec{E}$ در سرتاسر فصل مشترک پیوسته است.

در صورتی که یکی از محیط ها رسانا باشد از آنجایی که میدان الکتریکی درون آن صفر است پس $E_{1t} = E_{2t} = 0$

که در مبحث قبل نیز داشتیم که مولفه مماسی میدان E روی سطح رسانا صفر است.

برای یافتن روابط بین مولفه های عمودی میدان در مرز، همچون شکل بالا، یک استوانه کوچک در نظر می گیریم که وجه بالایی ...

آن در محیط ۱ و وجه پائین آن در محیط ۲ باشد. مساحت وجره ΔS و $\Delta h \to 0$ داریم (طبق قانون گوس)

$$\oint_s D\cdot ds = (D_1\cdot a_{n2} + D_2\, a_{n1})\Delta S = a_{n2}\cdot(D_1 - D_2)\Delta S = Q = \rho_s \Delta S$$

$$a_{n2}\cdot(D_1 - D_2) = \rho_s \longrightarrow D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

یعنی: مولفه عمودی میدان $\vec{D}$ در سرتاسر مرز مشترکی که در آن بار سطحی وجود داشته باشد، ناپیوسته است

و مقدار این ناپیوستگی معادل چگالی بار سطحی است.

رابطه مولفه عمودی میدان الکتریکی نیز می شود:

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \rho_s$$

و در صورتی که یکی از سطوح هادی باشد میدان در آن سطح صفر است پس (اگر محیط 2 هادی باشد):

$$D_2 = D_{2t} = D_{2n} = 0 \qquad D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_s$$

در صورتی که دو محیط در مرز مشترک خود بار آزادی نداشته باشند

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

در مورد مولفه های عمودی توزیع جریان نیز در صورتی که صفحه شامل abcd را در نظر بگیریم، آنگاه با تحلیله در جریان های دائم داشتیم

$\nabla\cdot J = 0$ و طبق قضیه دیورژانس داریم

$$\int_v \nabla\cdot J\, dv = \oint_s J\cdot ds = 0$$

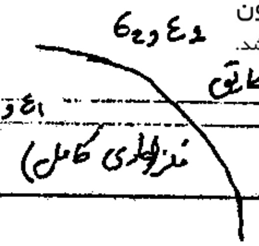
در صورتی که $\Delta h \to 0$ جریان عبوری از خطوط ab و cd صفر خواهد شد

$$(J_{1n} - J_{2n})\Delta S = 0$$

$$J_{1n} = J_{2n}$$

یعنی: مولفه عمودی جریان در مرز مشترک دو محیط پیوسته است

انواع مرز: ۱) مرز هادی - عایق

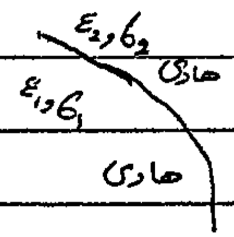


$$\boxed{E_{t1}=E_{t2}=0}$$

$$\boxed{D_{n2}=\rho_s}$$

میدانهای عایق در مرز عمود بر هادی هستند

۲) مرز هادی - هادی



$$\left.\begin{array}{l}\boxed{E_{1t}=E_{2t}=0}\\ \boxed{D_{1n}=D_{2n}=0}\end{array}\right\}\ \text{هادی کامل}\ \sigma\to\infty$$

حال اگر هر یک از σ مقدار مشخص داشته باشد داریم

$$E_{1t}=E_{2t}$$

$$D_{1n}-D_{2n}=\rho_s \longrightarrow \varepsilon_1E_{1n}-\varepsilon_2E_{2n}=\rho_s$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1}=\frac{J_{2t}}{\sigma_2}\ ,\ \varepsilon_1\frac{J_{1n}}{\sigma_1}-\varepsilon_2\frac{J_{2n}}{\sigma_2}=\rho_s$$

$$J_n\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)=\rho_s$$

در الکترواستاتیک $J_{n1}=J_{n2}$ (چرا؟)

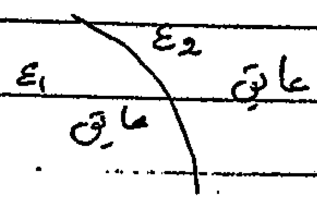
$$J_{n1}-J_{n2}=\rho_s$$

طبق معادله پیوستگی

۳) عایق عایق: که همان حالت کلی است

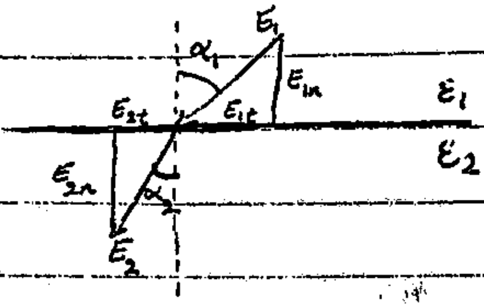
$$\boxed{E_{t1}=E_{t2}}$$

$$\boxed{D_{n2}-D_{n1}=\rho_s}$$



نکته: در مرزهایی که می‌دانیم میدان مماس بر مرز مشترک است معمولاً از رابطه $E_{t1}=E_{t2}$ استفاده کنیم تا اینکه از رابطه بهتر است از ε باشد و همچنین دلیل دیگر میدان عمود بر مرز مشترک است از رابطه $D_{2n}-D_{1n}=\rho_s$ استفاده می‌کنیم

مثال: مسلست میدان از محیطی به محیط دیگر - دو محیط با گذردهی ε_1 و ε_2 مطابق شکل زیر توسط یک مرز بدون بار از همدیگر جدا شده اند. اندازه و جهت میدان الکتریکی را در دو محیط مقایسه کنید.



بر اساس روابط میدان که در شرایط مرزی داریم

$$E_{2t} = E_{1t} \longrightarrow E_2 \sin\alpha_2 = E_1 \sin\alpha_1$$

چون $\rho_s = 0$ است پس

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \longrightarrow \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 = \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1$$

با تقسیم دو معادله بر هم داریم:

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

حال اگر میدان E_1 را داشته باشیم (بر اساس ε_1 و ε_2) زاویه E_2 را از رابطه بالا یافت و اندازه اش را:

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \sin\alpha_2)^2 + (E_2 \cos\alpha_2)^2}$$

از جایگذاری روابطی که بر اساس شرایط مرزی به دست آوردیم داریم

$$= \left[(E_1 \sin\alpha_1)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 \cos\alpha_1\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$E_2 = E_1 \left[\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos\alpha_1\right)^2 \right]^{1/2}$$

پس در محیطی که ε بزرگتری داریم $\vec{E}$ کوچکتری از محیط دیگر داریم

مثال: مثال قبل را برای دو محیط با رسانایی σ_1 و σ_2 و برای محاسبه رابطه میان جریان های الکتریکی میان آن دو

عبداً حل نمایید

$$J_1 \cos\alpha_1 = J_2 \cos\alpha_2$$
$$\sigma_2 J_1 \sin\alpha_1 = \sigma_1 J_2 \sin\alpha_2$$

$$\longrightarrow \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

در حالت ماندگار داریم

$$J_2 = J_1\left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sin\alpha_1\right)^2 + \cos^2\alpha_1\right]^{1/2}$$

اگر محیطی رسانای بهتری باشد جریان آن نسبت به محیط دیگر چگونه خواهد بود؟ بیشتر خواهد بود

مثال: صفحه $y=0$ یک رسانای کامل است و در $y>0$ برای پتانسیل الکتریکی داریم: $V(x,y) = V_0 e^{-ax}\sin ay$

بار موجود روی صفحه xz برای ناحیه $0<x<\infty$ و $0<z<1$ چقدر است؟ (ارشد برق ۱۳۸۵)

1) $-V_0\varepsilon_0$ 2) $\frac{1}{2}\varepsilon_0 V_0$ 3) $V_0\varepsilon_0$ 4) $-2V_0\varepsilon_0$

برای یافتن q (ρ_s) از قضایای شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

$$E_y = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial y} = -V_0 e^{-ax} a\cos ay \xrightarrow[\text{سر رسانا}]{y=0} E_y = -V_0 e^{-ax} a$$

$$D_y = \varepsilon_0 E_y \rightarrow D_y = -V_0 a\varepsilon_0 e^{-ax}$$

$$\boxed{D_{2y} - D_{1y} = \rho_s} \xrightarrow[\text{در رسانا}]{D_{1y}=0} \rho_s = -V_0 a e^{-ax}$$

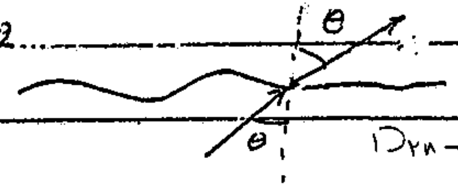
$$q = \int \rho_s\, ds = \int_0^\infty\int_0^1 -V_0 e^{-ax}\varepsilon_0 a\, dz\, dx = V_0\varepsilon_0\left[e^{-\infty} - e^0\right] = -V_0\varepsilon_0$$

مثال: خطوط میدان D نسبت به سطح آزاد روی مرز بین دو محیط

در شکل مقابل: (ارشد برق ۱۳۸۷) چه بر سر خواهد آمد؟

$\varepsilon_{r2} = 2$

$\varepsilon_{r1} = 4$



$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

در این نوع مسائل به جهت ورود یا خروج میدان به محیط توجه کنید تا متوجه شوید کدام میدان را از کدام محیط کم کنید

$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \longrightarrow 2\varepsilon_0 E_{2n} - 4\varepsilon_0 E_{1n} = \rho_s$

$\rho_s = 2\varepsilon_0 |E_0| \cos\theta - 4\varepsilon_0 |E_0| \cos\theta = -2\varepsilon_0 |E_0| \cos\theta$

تمرین: رویه $6 = y - 2x + 2z$ مرز بین دو ناحیه با گذردهی نسبی $\varepsilon_{r1} = 3$ و $\varepsilon_{r2} = 4.5$ است. مبدا در ناحیه یک قرار دارد. اگر در نقطه $P(1,3,0)$ میدان ناحیه یک به صورت مقابل باشد: $E_1 = -4\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 6\hat{a}_z$

میدان ناحیه ۲ در نقطه P را بیابید (راهنمایی: با استفاده از رابطه رویه بردار نرمال (گرادیان آن) را بیابید و بر اساس آن E_{1t} و E_{1n} را محاسبه کنید.)

$\nabla(y - 2x + 2z) = -2\hat{a}_x + \hat{a}_y + 2\hat{a}_z$ بردار عمود

$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-2}{3}\hat{a}_x + \frac{\hat{a}_y}{3} + \frac{2}{3}\hat{a}_z$

$E_{1n} = (E_1 \cdot n) n = 7n = -4\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$

$D_{1n} = D_{2n} = \rho_s = 0 \longrightarrow E_{2n} = -4\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$

$E_{t1} = E_1 - E_{1n} = -4\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$

$E_{1t} = E_{2t} = -4\hat{a}_y + 2\hat{a}_z \longrightarrow E_2 = E_{t2} + E_{2n} = \boxed{-4\hat{a}_x - \hat{a}_y + 4\hat{a}_z}$

۶۳ دوگانی میان J و D

در علوم مختلف همواره به دنبال یافتن تشابه‌های میان پارامترهای مختلف هستیم تا بتوانیم با محاسبه یکی به دنبال حل آن دیگری را محاسبه کنیم در واقع با یک تغییر متغیر ساده جواب مسئله‌مان را بیابیم.

J و D هر دو رابطه مستقیم با E دارند همین امر موجب می‌شود دارای رفتارها و فرمول‌های مشابهی باشند لذا با داشتن یکی از آنها دیگری به راحتی محاسبه می‌شود.

محیط هادی	محیط دی الکتریک
$\nabla \times E = 0$	$\nabla \times E = 0$
$J = \sigma E$	$D = \varepsilon E$
$\nabla \cdot J = 0$	$\nabla \cdot D = 0$
$\nabla \times J = 0$	$\nabla \times D = 0$

(محیط‌ها بدون بار هستند)
خطی
همگن

این دوگانی که در روابط بالا بود نشان می دهد در صورتی که یک مسئله با شرایط مرزی مشخص را برای J حل نموده ایم

مسئله می تواند برای بدست آوردن D با جایگذاری زیر تغییر کند

$$J \longleftrightarrow D$$
$$\sigma \longleftrightarrow \varepsilon$$

یعنی کافی است به جای J بنویسیم D و به جای σ بنویسیم ε و برعکس

بدین صورت تنها کافی است جواب یکی از اینها (J یا D) را داشته باشیم دیگری محاسبه می شود. مثلاً در شرایط مرزی که جمع کنید

محیط هادی	محیط دی الکتریک
$J_{1n} = J_{2n}$	$D_{1n} = D_{2n}$
$\dfrac{J_{1t}}{\sigma_1} = \dfrac{J_{2t}}{\sigma_2}$	$\dfrac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$

بعداً خواهیم دید بر اساس همین تعریف مقاومت R و خازن C نیز دارای دوگانی یکدیگر هستند

7.3 تئوری تصویر

در فصل قبل میدانهای یک بار نقطه یا پیوسته را در فضای آزاد به راحتی با استفاده از قضایای مطرح شده مثل گوس محاسبه نمودیم

ولی وقتی این منابع میدان در کنار اجسام قرار می گیرند، نمی توان آنها را به همان روش گذشته حل کرد، بلکه باید با استفاده از روشهایی

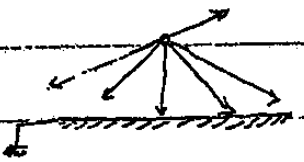
همچون حل معادله لاپلاس بر اساس شرایط مرزی حل گردند (در فصل بعد ارائه می شود) یا در صورتی که دارای تقارن باشد

به راحتی با استفاده از روشهایی همچون روش تصاویر حل گردد

میدان و پتانسیل الکتریکی یک بار در فضای آزاد می شود

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\hat{a}_R \quad , \quad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

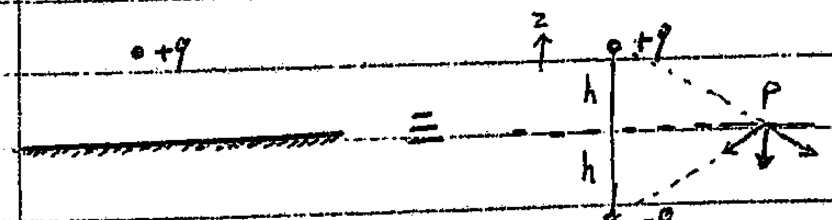
حال اگر بار نقطه ای q در مجاورت یک صفحه رسانا (مثلاً زمین) قرار گرفته باشد میدان و پتانسیل را در فاصله R از همان بار q بیابید؟ دیگر نمی توانیم همان روابط را به کار ببریم چرا که ۱) میدان باید عمود بر رسانا باشد حال آن که میدانی که قبلاً برای بار نقطه ای بدست آوردیم شعاعی است و بر رسانا عمود نیست



۲) پتانسیل روی رسانا (که در اینجا زمین است) باید صفر باشد در حالیکه در فرمول پتانسیل بار در فضای آزاد در یک فاصله مثلاً h پتانسیل صفر نمی شود.

این مثال در یک مقدمه برای این بحث کمک می کند که میدان در کنار اجسام تغییر می کند.

حال برای حل این مسئله باید تغییری ایجاد کنیم که شرایط مرزی که در بالا عنوان شد تأمین شود و از طرفی هم رسانا را حذف کنیم تا تشعشع فقط در فضای آزاد صورت بگیرد. برای حل این مسئله به جای رسانا یک بار $-q$ را در زیر صفحه رسانا و به همان فاصله از صفحه رسانا قرار می دهیم



وقتی صفحه رسانا را برداریم و بار $-q$ را قرار دهیم ۱) میدان برآیند در نقطه P، فقط مولفه عمودی دارد

۲) از آنجایی که مولفه مماسی میدان نیز صفر می شود پتانسیل در آن نقطه نیز صفر می گردد

جمع بندی: در سیستم هایی که بار در مقابل صفحه رسانا قرار دارد، اگر از روش های معمول استفاده کنیم شرایط مرزی به راحتی برآورده نمی شود لذا براساس تئوری تصویر (در این مسئله) در نظر می گیریم که اثر صفحه رسانا معادل است با بار تصویر $-q$

در فاصله برابر با فاصله بار اصلی تا صفحه گذری. در نتیجه مسئله را از روش های تصویر (المثل) در فضای ۲ را نیز راحتی حل می کنیم

حال همین مسئله را به صورت ریاضی هم بررسی می کنیم. در صورتی که بار $-q$ را در زیر گذری قرار دهیم. شکل مسئله به یک

دو قطبی با فاصله $2h$ تبدیل می شود. برای دو قطبی داشتیم

$$\begin{cases} V_d = \dfrac{q(2h)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta \\ \vec{E} = \dfrac{q(2h)}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_R + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right) \end{cases}$$

حال مقدار پتانسیل و میدان را بر صفحه گذری $(\theta = \pi/2)$ بررسی می کنیم

$$\theta = \pi/2 \rightarrow \begin{cases} V_p = 0 \\ \vec{E} = \dfrac{2qh\,(-\hat{a}_z)}{4\pi R^3} \end{cases}$$

$(\hat{a}_\theta = -a_z$ داریم $\theta = \pi/2$ در$)$

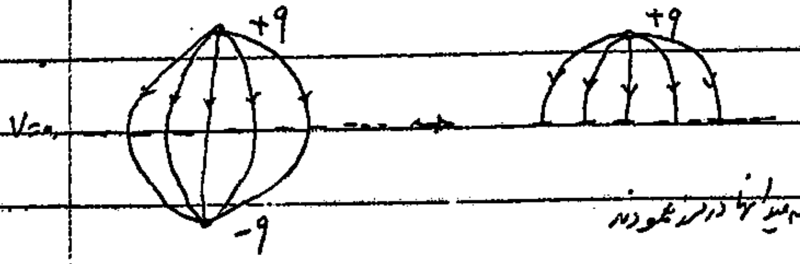
هم پتانسیل صفر شد و هم بردار میدان الکتریکی عمود بر صفحه گذری (که البته الزون در نظر گرفته شده) بدست آمد

بار القایی روی سطح

$$\rho_s = D_n = \varepsilon_0 E_n = \frac{-qh}{2\pi(\rho^2+h^2)^{3/2}}$$

$$Q_{\text{القایی}} = \int_s \rho_s\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-qh}{2\pi(\rho^2+h^2)^{3/2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = -q$$

به اندازه $q-$ بار روی صفحه القا شده است.

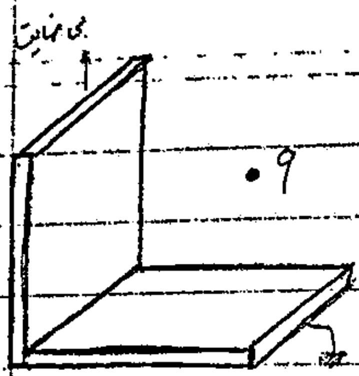


چند نکته: شکل میدان های مابین دو بار را توجه کنید

- در ناحیه پایین میدان صفر است (در زیر گذری قرار دارد) پس از روش تصویر تنها برای محاسبه میدان بالا استفاده می کنیم

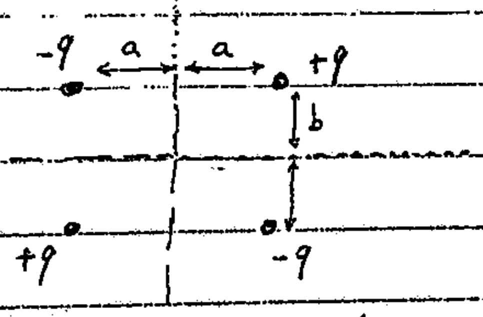
یک بار تنها در بی نهایت پتانسیلش با سرعت $\frac{1}{r}$ تغییر می کند و یک بار در مجاورت یک رسانا با سرعت $\frac{1}{r^2}$ کاهش می یابد

مثال: یک گوشه ۹۰ از یک مادهٔ رسانا با ابعاد بی‌نهایت داریم



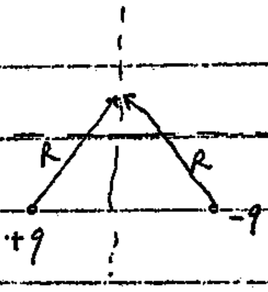
بار q در محلی مشخص قرار گرفته است. بارهای تصویر را بیابید.

همانند شکل زیر بار تصویر q- را در ربع چهارم می‌دهیم تا پتانسیل نیم صفحهٔ افقی را صفر کند. به همین ترتیب بار تصویر q- را هم در ربع دوم قرار می‌دهیم تا پتانسیل نیم صفحهٔ عمودی را صفر نماید. ولی هر کدام از این بارهای q- تنها به نیم صفحه‌ای به عنوان شده میدان اعمال می‌کنند (بلکه در کل فضا میدان دارند) پس وجود تنها دو بار کافی نیست بلکه بار سومی به صورت q+ در ربع سوم در نظر می‌گیریم تا اثر بار موجود در ربع چهارم را بر نیم صفحهٔ عمودی و اثر q- در ربع دوم را بر نیم صفحهٔ افقی حذف نماید

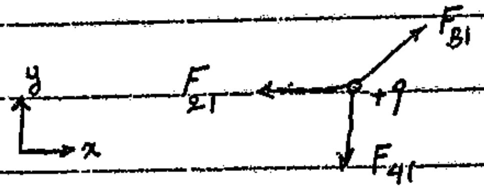


دقت کنید

چگونه اثر ناخواسته بار q- در ربع چهارم را خنثی می‌کند



وقتی بار q+ در این محل قرار می‌گیرد بار q بر صفحات این گوشه ۹۰ اعمال می‌کند که موجب می‌شود یک نیروی جاذبه به بار اعمال شود. برای محاسبه این نیرو نیز می‌توان از تئوری تصویر کمک گرفت بدین صورت که نیروی کولن وارده بر بار q از سوی هر کدام از بارها را بیابیم و جمع می‌کنیم



(F_{31}: نیروی بار q+ در ربع سوم به بار q و F_{21} ......)

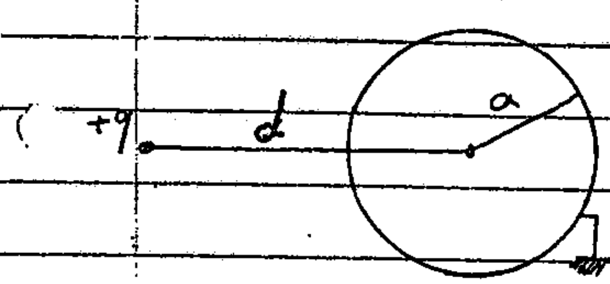
$$F = F_{21} + F_{31} + F_{41} \Rightarrow \begin{cases} F_{21} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2a)^2}(-\hat{a}_x) \\ F_{31} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \left[(2a)^2+(2b)^2\right]^{3/2}}(2a\,\hat{a}_x + 2b\,\hat{a}_y) \\ F_{41} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2b)^2}(-\hat{a}_y) \end{cases}$$

نکته: برای بارها در مقابل صفحات هادی با زاویه α هستند داریم $\frac{360}{\alpha} - 1 =$ تعداد تصاویر

که بارها به صورت یکی در میان مثبت و منفی می شوند

مثلاً برای صفحه تخت ($\alpha = 180$) تعداد تصاویر $= 1$ و $\alpha = 90°$ ← تعداد تصاویر $= 3$

مثال: (تصویر یک بار حول یک کره هادی) یک کره رسانا به شعاع a داریم که به پتانسیل صفر وصل شده است. در نظر

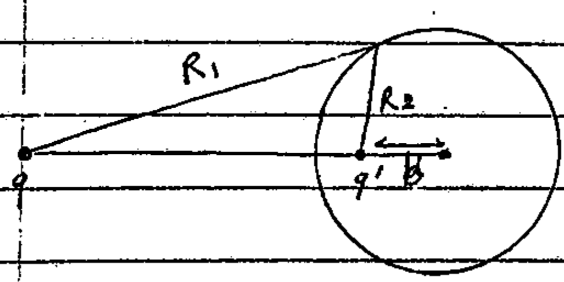


این کره یک توزیع بار داریم. در حالت خاص یک بار نقطه ای را در نظر

بگیرید که در فاصله d از مرکز آن واقع است. پتانسیل در فضای بیرون کره چقدر است.

بار $+q$ به تنهایی و با بکارگیری قانون کولن شرایط مرزی را نقض می کند. باید یک بار نقطه ای q' را در موقعیتی

قرار دهیم که پتانسیل برآیند را روی کره برابر صفر کند. به علت تقارن بار q' را روی خط واصل مرکز می گذاریم در فاصله b

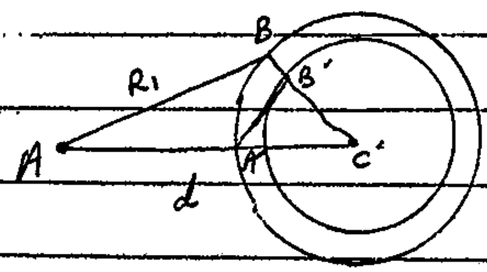


از مرکز (در غیر این صورت پتانسیل در کره صفر نمی شود)

باید $V = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = 0$

برای بدست آوردن فاصله b و مقدار q' می توان پتانسیل را در چند نقطه روی کره بدست آورد و هم را مساوی صفر قرار داد ......!!!!!

یا اینکه از تقارن هندسی زیر استفاده کرد ($AB \parallel A'B'$ باشد)



$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC'} \rightarrow \frac{A'B'}{a} = \frac{R_1}{d}$$

اگر $A'B'$ را برابر R_2 قرار دهیم نسبت ثابت خواهد ماند

حال قرار گرفتن بار q' بر روی دایره داخلی در شکل $B'C'$ می باشد

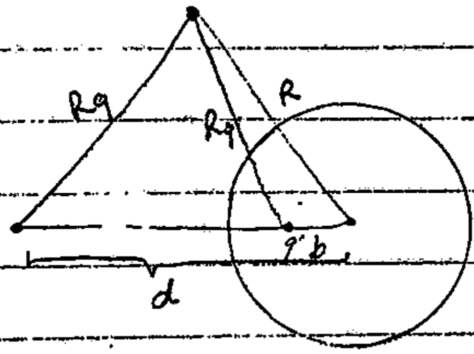
$$\begin{cases} b = B'C' \\ \dfrac{B'C'}{a} = \dfrac{a}{d} \end{cases} \longrightarrow b = \frac{a^2}{d} \quad , \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{d}{a}$$

حال روابط بالا را در رابطه پتانسیل روی سطح کره می گذاریم تا بار q' را بیابیم

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\frac{q'}{q}\right) = 0 \longrightarrow q' = -\frac{R_2}{R_1} q \longrightarrow q' = -\frac{a}{d} q$$

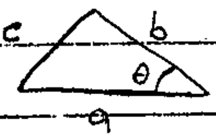
پس می توان به جای کره که زمین شده بار q' را در فاصله b از مرکز کره قرار داد.

و برای محاسبه پتانسیل در هر نقطه از فضا داریم:



$$V(R,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_q} - \frac{a}{d R_{q'}}\right)$$

$$R_q = \left[R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta\right]^{1/2}$$



$$R_{q'} = \left[R^2 + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2R\left(\frac{a^2}{d}\right)\cos\theta\right]^{1/2}$$

$E = -\nabla V$, $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$

در صورتی که محاسبه کنیم بار القا شده بر روی کره برابر $-q$ خواهد بود.

توضیح

نکته: در صورتی که کره ای زمین نشده باشد و دارای پتانسیل V_0 باشد یا اینکه دارای بار Q_0 باشد

آنگاه بار q' را در سر جایی که در بالا توضیح دادیم قرار می دهیم (آن نقاط روی مرز را هم پتانسیل کند) و بار q'' را در مرکز

کره قرار می دهیم تا شرط مرزی را تأمین کند. اگر پتانسیل V روی سطح کره V_0 بود داریم

$$\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 a} = V_0 \longrightarrow q'' = 4\pi\varepsilon_0 a V_0$$

اگر بار Q روی کره وجود داشت (با توجه به: بار القایی روی هر سطح بسته = جمع جبری بارهای درون آن سطح)

$$Q_0 = q'' + q' \qquad \boxed{q'' = Q_0 - q'}$$

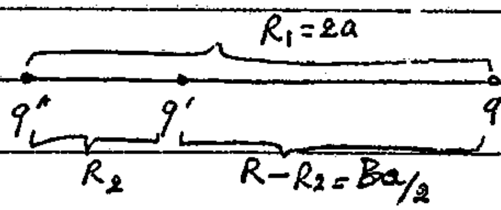
مثال: به یک کره رسانا به شعاع a، بار Q را اعمال کردیم. سپس بار نقطه‌ای Q دیگر را به فاصله 2a از مرکز ... قرار دهیم
کره رسانا در نظر می‌گیریم. اندازه‌ی نیروی وارد بر این بار نقطه‌ای برابر است با: (ارشد برق ۱۳۸۵)

ابتدا تصویر بار Q را می‌یابیم

$$\begin{cases} q' = -Q\dfrac{a}{2a} = -Q/2 \\ R_2 = \dfrac{a^2}{2a} \longrightarrow b = a/2 \end{cases}$$

حال برای آن که کل بار روی سطح کره Q شود بار q'' را در مرکز آن در نظر می‌گیریم

$$q'' = Q - (-Q/2) = \frac{3Q}{2}$$

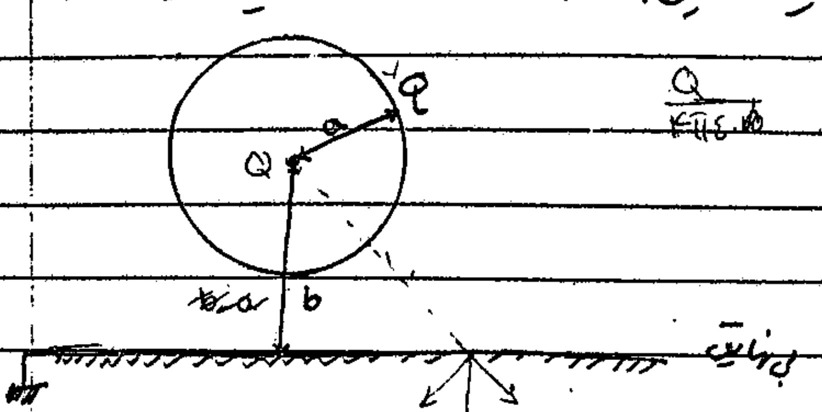


پس نیروی وارده از دو بار q' و q'' به q می‌شود

$$\vec{F} = \vec{F'} + \vec{F''}$$

$$\vec{F} = \frac{-Q^2/2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{3a}{2}\right)^2} + \frac{3Q^2/2}{4\pi\varepsilon_0 (2a)^2} = \frac{11Q^2}{288\pi\varepsilon_0 a^2}$$

تمرین: در صورتی که یک کره باردار روی یک سطح زمین باشد با استفاده از تئوری تصویر معادل آن را بیابید

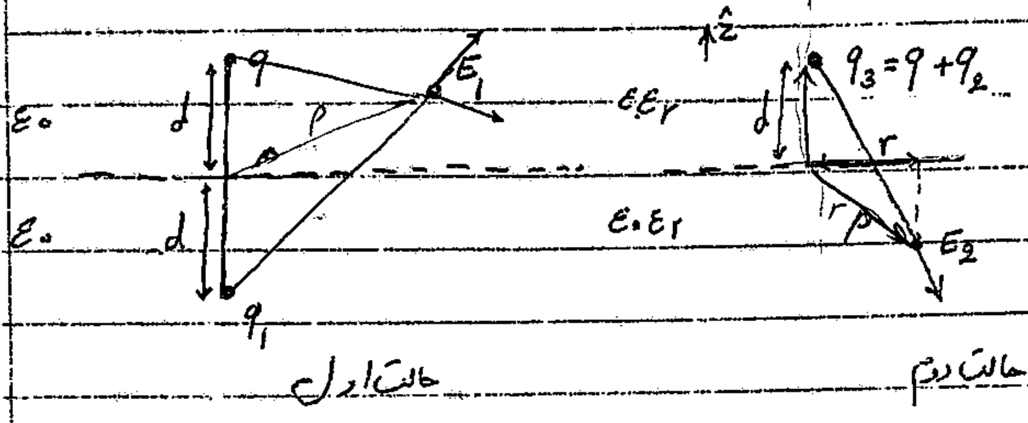


مثال: در صورتی که بار الکتریکی در مجاورت یک عایق قرار گیرد چگونه می توان از تئوری تصویر استفاده نمود (چگونه می توان عایق را حذف کرد و یک شکل معادل در فضای آزاد برای آن ایجاد نمود)

$\bullet q$

ε_r

حل این مسائل نیاز به بررسی دو حالت متفاوت است (می بایستی در هر حالت میدان E را محاسبه کرد و سپس شرایط مرزی را به وسیله ی آن ارضا نمود)



در حالت اول فرض می شود که عایق حذف شده و به جای آن بار q_1 در فاصله d در محلی که عایق قرار دارد جای می گیرد و میدان در نیمه بالایی صفحه محاسبه می شود

$$E_1 = \frac{q(\rho\hat{a}_\rho - d\hat{a}_z)}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+d^2)^{3/2}} + \frac{q_1(\rho\hat{a}_\rho + d\hat{a}_z)}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

در حالت دوم کل فضا را عایق با ε در نظر می گیریم و در نتیجه با بار اصلی بار به مقدار q_2 جمع می شود که داریم (میدان در محل اصلی عایق)

$$E_2 = \frac{q_3(\vec{r} - d\hat{a}_z)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r|r - d\hat{a}_z|^3}$$

این میدان ها باید شرایط مرزی را تأمین کنند که عبارتند از:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\cancel{\varepsilon_0} E_{1n} = \cancel{\varepsilon_0}\varepsilon_r E_{2n} \rightarrow E_1 \cdot \hat{a}_z = \varepsilon_r E_2 \hat{a}_z$$

$$E_{1t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+d^2)} \cdot \frac{r}{(r^2+d^2)^{1/2}}\hat{a}_r + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(r^2+d^2)} \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}\hat{a}_r \quad (1)$$

$$E_{2t} = \frac{q+q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(r^2+d^2)} \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}} \hat{a}_r \quad (2)$$

اشتباه در نظر گرفته شده

$$E_{1t}=E_{2t} \xrightarrow{(1),(2)} q+q_1=\frac{q+q_2}{\varepsilon_r}$$

$$E_1\cdot\hat{a}_z=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0(r^2+d^2)^{3/2}}-\frac{q_1 d}{4\pi\varepsilon_0(r^2+d^2)^{3/2}}$$ وبرداری عمود

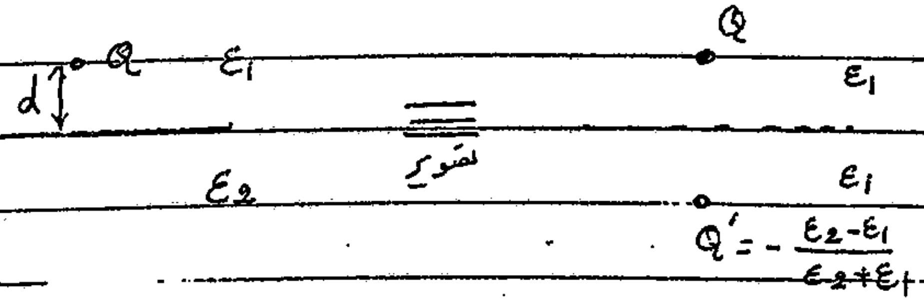
$$E_2\cdot\hat{a}_z=\frac{(q+q_2)d}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$E_{1n}=\varepsilon_r E_{2n} \longrightarrow q-q_1=q+q_2$$

$$\begin{cases} q-q_1=q+q_2 \\ q+q_1=(q+q_2)/\varepsilon_r \end{cases} \longrightarrow q_1=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}q$$

یعنی می‌توان عایق را کنار گذاشت و به جای آن در فضای آزاد زیر بار q_1 را در فاصله‌ی d قرار داد. توجه کنید در این حالت (برخلاف تئوری تصویر) هم میدان بالای صفحه عایق و هم میدان پایین صفحه عایق پس از اعمال بار q_2 با حالت وجود عایق هم ارز می‌باشد.

نکته: در حالت کلی، اگر دو محیط با گذردهی ε_1 و ε_2 مطابق شکل زیر داشته باشیم تئوری تصویر می‌شود

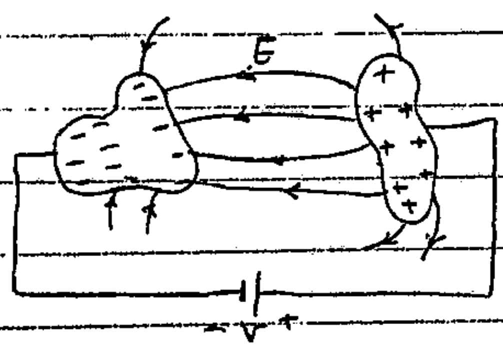


۸-۳ ظرفیت و خازن

می دانیم که هادی در میدان الکتریکی ساکن، یک جسم هم پتانسیل است و بارهای قرار داده شده روی آن روی سطح آن توزیع می شوند. اگر اختلاف پتانسیل V بین دو جسم هادی به وجود آوریم که در اثر آن میدان الکتریکی ($E=-\nabla V$) بین دو هادی ایجاد می شود که بر سطحشان عمود است و بار سطحی بر روی هادیها ایجاد می گردد ($E=\frac{\rho_s}{\varepsilon}$). مقدار کل بار به وجود آمده روی سطح هادی متناسب با ولتاژ بین دو هادی است:

$$Q=CV$$

ضریب تناسب C را ظرفیت قطعه متشکل از دو جسم هادی، که معمولاً از آن به عنوان خازن نام برده می شود، خوانند.



داریم

$$D=\varepsilon E$$

$$\rho_s=\varepsilon E \rightarrow Q=\int \rho_s\, ds=\int \varepsilon E\, ds$$

فرمول ظرفیت خازن را می توان چنین نوشت:

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\int_s \varepsilon \vec{E}\cdot d\vec{s}}{\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

برای محاسبه ظرفیت یک خازن باید ابتدا بار Q را روی سطوح دو هادی به دست آورد و سپس میدان $\vec{E}$ را نمایش داد. توزیع بار سطحی را محاسبه کرد و در رابطه بالا قرار داد یا اینکه اگر اختلاف پتانسیل دو هادی مشخص است از معادله لاپلاس ابتدا تابع پتانسیل را یافت و بر اساس آن $\vec{E}$ را به دست آورد. (این مبحث در فصل آینده ارائه می شود)

البته می توان با فرمول زیر به صورت مستقیم C را حساب کرد:

$$\frac{1}{C}=\int_{u_1}\frac{du_1}{\int_{u_2}\int_{u_3}\frac{\varepsilon h_2 h_3\, du_2\, du_3}{h_1}}$$

(اثبات آن مثل به دست آوردن R در تمرینات ۲ می باشد) : یا به صورت ساده شده می توان از این رابطه استفاده کرد:

$$\frac{1}{C} = \int_{\text{ابتدا تا پایان}} \frac{dl}{\iint_{\text{سطح عمود بر جریان}} \varepsilon\, ds}$$

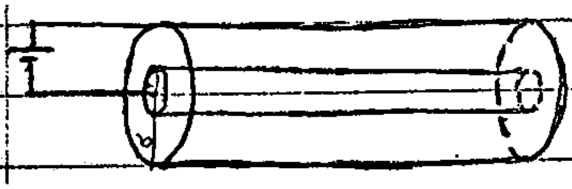
۳-۸-۱ خازن مسطح

ظرفیت این خازن برابر است با

$$C = \frac{\varepsilon \oint E\cdot ds}{\int_l E\cdot dl} = \frac{\varepsilon E\cdot S}{E\cdot d} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

(E یکنواخت، ε همگن)

۳-۸-۲ خازن استوانه ای



اگر سیم ها به صورت استوانه هم مرکز باشند به آن خازن استوانه ای گویند

با اعمال اختلاف پتانسیل V میان دو لایه استوانه ای میدانی شعاعی به صورت عمود بر لایه ها تشکیل ایجاد می گردد

با بکارگیری قانون گوس داریم

$$E = \hat{a}_\rho E_\rho = a_\rho \frac{Q}{2\pi\varepsilon L\rho}$$

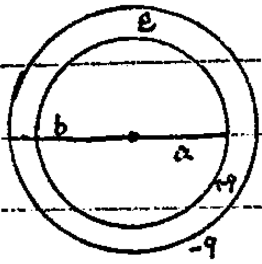
(Q بار الکتریکی است که در اثر اختلاف پتانسیل ایجاد شده است)

$$V_{ab} = -\int_b^a E\cdot dl$$

$$= -\int_b^a \left(a_\rho \frac{Q}{2\pi\varepsilon L\rho}\right)\cdot(a_\rho d\rho) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln(b/a)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \varepsilon L}{\ln(b/a)}$$

۳-۸-۳- خازن کروی

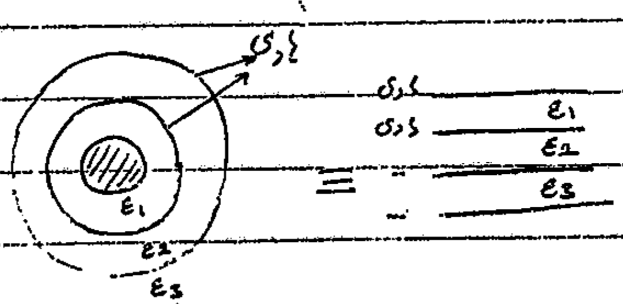


این مسئله را هم می توان با استفاده از معادله E بدست آورد و هم روش مستقیم

$$\frac{1}{C} = \int \frac{dR}{\iint_S \varepsilon R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi} = \int \frac{dR}{\varepsilon R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}$$

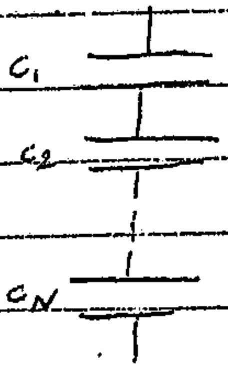
$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{dR}{4\pi\varepsilon R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Longrightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - 1/b}$$

۴-۸-۳- خازن های چند لایه



خازن چند لایه سری

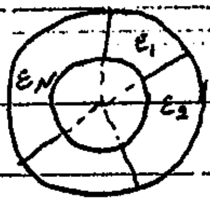
اگر مرز مشترک دی الکتریک ها با سطوح هادی موازی باشد آنگاه خازن ها با هم سری هستند و مدار معادل آنها می شود (در واقع هر کدام از لایه ها بین دو خازن مرز جوش مشترک است)



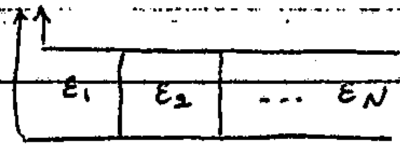
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

خازن چند لایه موازی: اگر مرز مشترک بر سطوح هادی عمود باشد خازن ها با هم موازی هستند

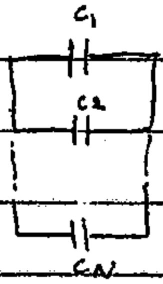
(مرز با جوش)



$=$



دقت کنید تمام خازن ها دارای جوش مشترکند



$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

اگر پیوسته باشد (تغییر ε پیوسته باشد)

$$C = \int dC$$

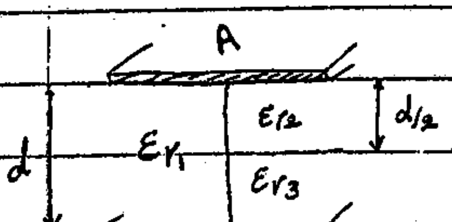
مثال: بین صفحات سطح خازنی که در $z=0$ و $z=d$ قرار دارند، ماده ای عایق با $\varepsilon = \varepsilon_0\left(1+\frac{z^2}{d^2}\right)$ قرار دارد. اگر چگالی بار سطحی روی صفحات این خازن $\pm\rho_s\,(C/m^2)$ باشد، اختلاف پتانسیل ولتاژ بین صفحات خازن چقدر است (ارشد برق ۱۳۸۸)

حل: با داشتن C و Q به راحتی می توان V را یافت

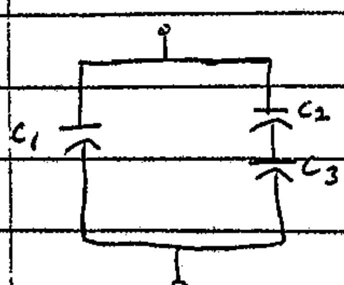
$$\frac{1}{C} = \int_0^d \frac{dz}{\iint \varepsilon_0\left(1+\frac{z^2}{d^2}\right)dx\,dy} = \frac{1}{A\varepsilon_0}\int_0^d \frac{dz}{1+\frac{z^2}{d^2}} = \frac{d}{A\varepsilon_0}\tan^{-1}\left(\frac{z}{d}\right)\Big|_0^d$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d\pi}{4A\varepsilon_0} \qquad V = \frac{Q}{C} = Q\times\frac{1}{C} = (\rho_s \cancel{A})\frac{d\pi}{4\cancel{A}\varepsilon_0} = \frac{\rho_s d\pi}{4\varepsilon_0}$$

مثال: ظرفیت خازن شکل روبرو را بیابید



مدار معادل این شکل می شود



$$C_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0\frac{A}{2d} \qquad C_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0\frac{A/2}{d/2} = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

$$C_3 = \varepsilon_{r3}\varepsilon_0\frac{A}{d} \qquad C_{\text{کل}} = C_1 + \underbrace{\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}}_{\text{سری}} = \varepsilon_0\frac{A}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1}}{2} + \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2}+\varepsilon_{r3}}\right)$$

۳-۸-۵ رابطه بین خازن و مقاومت

در صورتی که به روابط R و C دقت کنیم

$$R = \frac{-\int_L E.dl}{\oint_S \sigma E.ds} \qquad \frac{1}{C} = \frac{-\oint E.dl}{\oint_S \varepsilon E.ds}$$

در حالی یا بین رابطه ای R و $\frac{1}{C}$ وجود دارد و کافی است

در رابطه R به جای σ از ε استفاده کنیم و این رابطه را می توان به صورت زیر نشان داد (در صورتی که محیط همگن باشد)

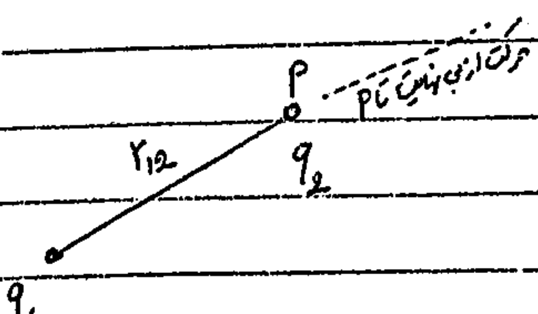
$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

۳-۹ انرژی در الکتریسیته ساکن

در بحث پتانسیل الکتریکی داشتیم که اگر برای انتقال بار q از نقطه ای به نقطه دیگر کار انجام شود، این کار به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در سیستم ذخیره می شود. به عبارت دیگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه، کار لازم برای جابجایی بار مثبت واحد است ($V = \frac{W}{q}$). پس برای اینکه دو بار نقطه ای q_1 و q_2 که در فاصله ی r_{12} از یکدیگر قرار دارند، این قدر کار لازم است:

$$W = q_2 V_1 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

در واقع میزان کاری که انجام می دهیم به صورت انرژی الکتریکی در فضا (در میدان الکتریکی) ذخیره می شود.



توجه داشته باشید در صورتی که بار q به تنهایی در فضا باشد

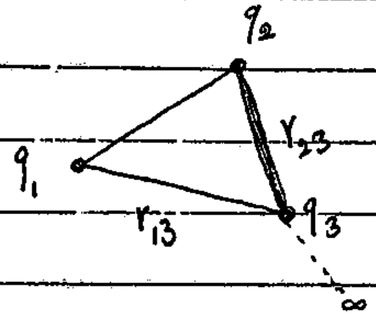
چون هیچ بار دیگری در فضا نیست (هیچ پتانسیلی نیست) $\Delta W_1 = 0$

برای جابجایی آن هیچ کاری انجام نمی شود و تغییرات انرژی در میدان نداریم. ولی وقتی می خواهیم بار (q_2) را در فاصله

V_2 از آن قرار دهیم میزان کار (در واقع تغییرات انرژی الکتریکی) انجام شده می شود $\Delta W_2 = q_2 V_1$

یعنی بار q_2 را در پتانسیل (V_1) بار q_1 در آن نقطه قرار دادیم $\Delta W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$

حال اگر یک بار سومی را بخواهیم به این مجموعه اضافه کنیم (یعنی از بی نهایت بیاوریم و در یک نقطه نزدیک دو بار دیگر



قرار دهیم داریم: میزان کار انجام شده در این حالت

$$\Delta W_3 = q_3 [V_2 + V_1]$$

$$\Delta W_3 = \frac{q_3 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

حال این میزان افزایش انرژیها را با هم جمع می کنیم تا کل انرژی ذخیره شده بدست آید

$$W_T = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right]$$

حال اگر این سیستم را به N بار تعمیم دهیم می شود

$$W_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \qquad i \neq j$$

علت وجود ضریب $\frac{1}{2}$ این است که تمام عبارات پتانسیل متقابل بارها را دوبار حساب کرده ایم (در واقع در این Σ ها

هم $q_1 q_2$ و هم $q_2 q_1$ داریم درحالیکه در فرمول اصلی فقط یکی از این دو هستند)

وبسادگی می توان نوشت

$$W_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

در اینجا V_i حاصل جمع پتانسیل بارهای دیگر در نقطه ای است که بار q_i است مثلاً برای q_3 پتانسیل می شود $V_3 = V_2 + V_1$

در صورتی که توزیع بار پیوسته (خطی، سطحی یا حجمی) داشته باشیم نیز می توان نوشت:

$$W = \frac{1}{2}\int_l \rho_l V\,dl \quad \text{یا} \quad W = \frac{1}{2}\int_s \rho_s V\,ds \quad \text{یا} \quad W = \frac{1}{2}\int_v \rho_v V\,dv$$

نکته مهم آن است که این روابط (گسسته و پیوسته) انرژی ذخیره شده در کل فضا را محاسبه می کنند و به وسیلهٔ آن نمی توان انرژی الکتریکی در بخشی از فضا را محاسبه کرد.

۳-۱۹ چگالی انرژی الکتریسیته ساکن (برحسب میدان)

معادلات انرژی الکتریکی را می توان این چنین بازنویسی کرد: $W_e = \frac{1}{2}\int_v \rho_v V\,dv$

$$\nabla\cdot D = \rho \longrightarrow W_e = \frac{1}{2}\int_{v'} (\nabla\cdot D)\, V\,dv \quad *$$

اتحاد برداری: $\nabla\cdot(VD) = V\nabla\cdot D + D\cdot\nabla V \quad \circ$

$$*, \circ \longrightarrow W_e = \frac{1}{2}\int_{v'} \nabla\cdot(VD)\,dv - \frac{1}{2}\int_{v'} D\cdot\nabla V\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{s'} V D\cdot a_n\,ds - \frac{1}{2}\int_{v'} D\cdot\nabla V\,dv$$ طبق قضیه دیورژانس

از طرفی داریم $V \sim \frac{1}{R}$ ، $D \sim \frac{1}{R^2}$ و $ds \sim R^2$

$V\cdot D\,ds \sim \frac{1}{R}$ که اگر $R \to \infty$ در نتیجه این حاصلضرب به سمت صفر میل می کند

پس انتگرال اول برابر صفر می شود (با داشتن $E = -\nabla V$) داریم

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{v'} D\cdot E\,dv = \frac{1}{2}\int_{v'} \varepsilon E^2\,dv = \frac{1}{2}\int_{v'} \frac{D^2}{\varepsilon}\,dv} \quad (J)$$

که انرژی الکتریکی را بدین صورت تعریف کنیم $W_e=\int_{v'} w_e\, dv$

داریم $w_e = \frac{1}{2} D\cdot E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D}{\varepsilon}$ (J/m^3)

نکته مهم آن است که از روابط بالا می توان در محاسبه انرژی ذخیره شده در بخشی از فضا استفاده نمود.

مثال: در محیطی با گذردهی ε_0 تابع پتانسیل به صورت مقابل داده شده است $V=\frac{4}{\varepsilon_0}\ln\rho$

انرژی ذخیره شده در فضای $a<\rho<b$ ، $0<z<h$ و $0<\varphi<2\pi$ را بیابید

* توجه: چون انرژی را در بخشی از فضا می خواهیم نمی توانیم از روابط انرژی که برحسب بار و ρ بود استفاده کنیم و پاسخ حاصل از آن اشتباه است.

$$E=-\nabla V=-\frac{4}{\varepsilon_0\rho}\hat{a}_\rho$$

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0|E|^2=\frac{8}{\varepsilon_0\rho^2}\ J/m^3 \longrightarrow W_e=\int w_e\, dv$$

$$W_e=\int_v \frac{8}{\varepsilon_0\rho^2}\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz=\frac{8}{\varepsilon_0}\int_a^b\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h dz=\frac{16\pi h}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}\quad (J)$$

مثال: انرژی لازم برای تشکیل یک کره باردار یکنواخت به شعاع b و چگالی بار حجمی ρ_v را بیابید

به دلیل تقارن ساده تر است فرض کنیم که کره باردار از کنار هم قرار دادن لایه های متوالی کروی به ضخامت dR

تشکیل یافته است، پس کل بار موجود در کره می شود $Q_R=\rho_v\frac{4}{3}\pi R^3$

که بار موجود در لایه ای با ضخامت dR $\quad dQ_R=\rho_v 4\pi R^2 dR$

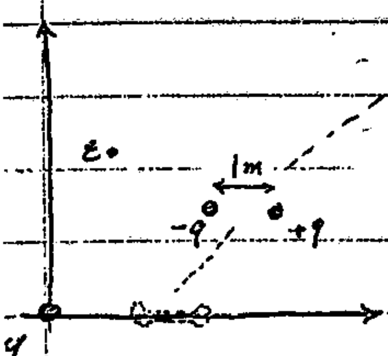
از طرفی پتانسیل ناشی از بار Q_R می شود

$$V_R = \frac{Q_R}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

کار یا انرژی برای گرد آوردن dQ (در واقع این مسئله‌ها تند مثل اول این بخش در نزدیک کردن و اضافه کردن آن یکسان است)

$$dW = V_R\, dQ_R = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho_v^2 R^4 dR$$

$$W = \int dW = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho_v^2 \int_0^b R^4 dR = \frac{4\pi\rho_v^2 b^5}{15\varepsilon_0} \quad (J)$$



مثال: دوقطبی نشان داده شده در شکل توسط عامل خارجی از بی نهایت به مجاورت بار نقطه ای q واقع در مبدأ مختصات آورده می شود (شکل زیر)

دوقطبی به قسمی است که بار $+q$ در $x=+2m$ و بار $-q$ در $x=1m$ قرار می گیرد. اگر $q=1\mu C$ باشد آنگاه کار انجام شده عامل خارجی چند میلی ژول است (ارشد برق ۱۳۸۸)

در واقع این سوال همان انرژی الکتریکی را می خواهد (دقت کنید علامت بار q در این فرمول مهم است (چرا؟))

$$W = qV = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-1+\frac{1}{2}\right) = \frac{-1\times10^{-12}}{4\pi}\times 36\pi\times10^{9}\times \frac{1}{2} = -4.5\,mJ$$

($v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ می باشد)

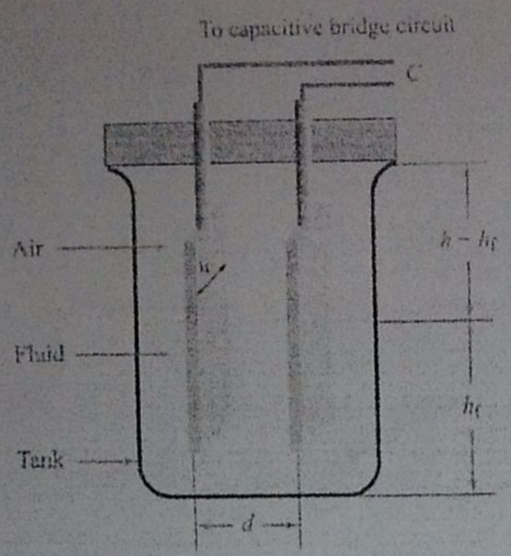
۲-۹-۳ انرژی الکتریکی در خازن

از دیدگاه دو سر خازن‌ها (اختلاف پتانسیلشان) با حجم تغییر نکند داریم

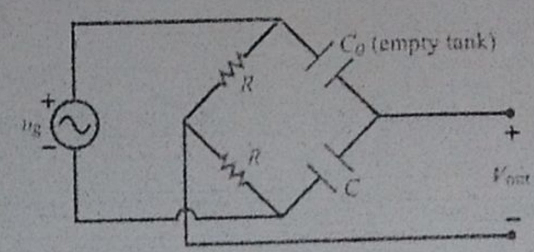
$$W = \frac{1}{2}\int \rho V \, dv = \frac{1}{2} V \int \rho \, dv = \frac{1}{2} Q V$$

$$W_e = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{Q^2}{2C} \leftarrow (Q = CV)$$

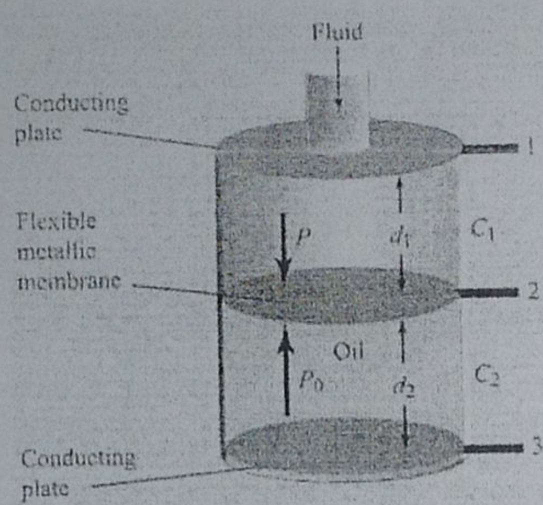
پس می‌توان با بدست آوردن انرژی از روابط دیگر و متعاقب با این معادله مقدار ظرفیت یک خازن را یافت



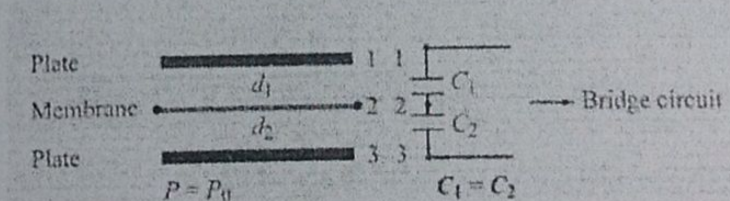
(a) Fluid tank



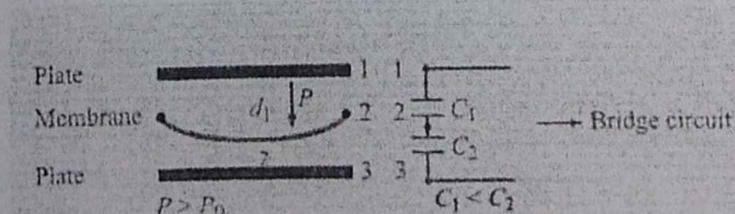
(b) Bridge circuit with 150 kHz ac source



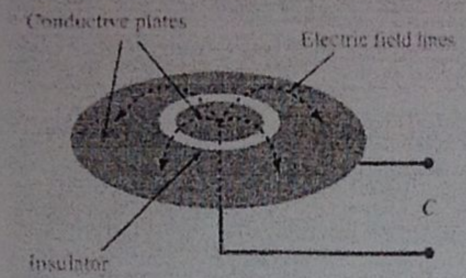
(a) Pressure sensor

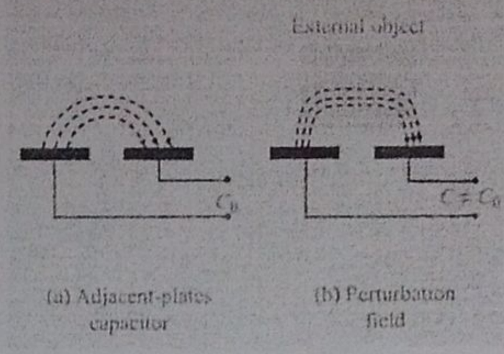


(b) $C_1 = C_2$



(c) $C_1 < C_2$

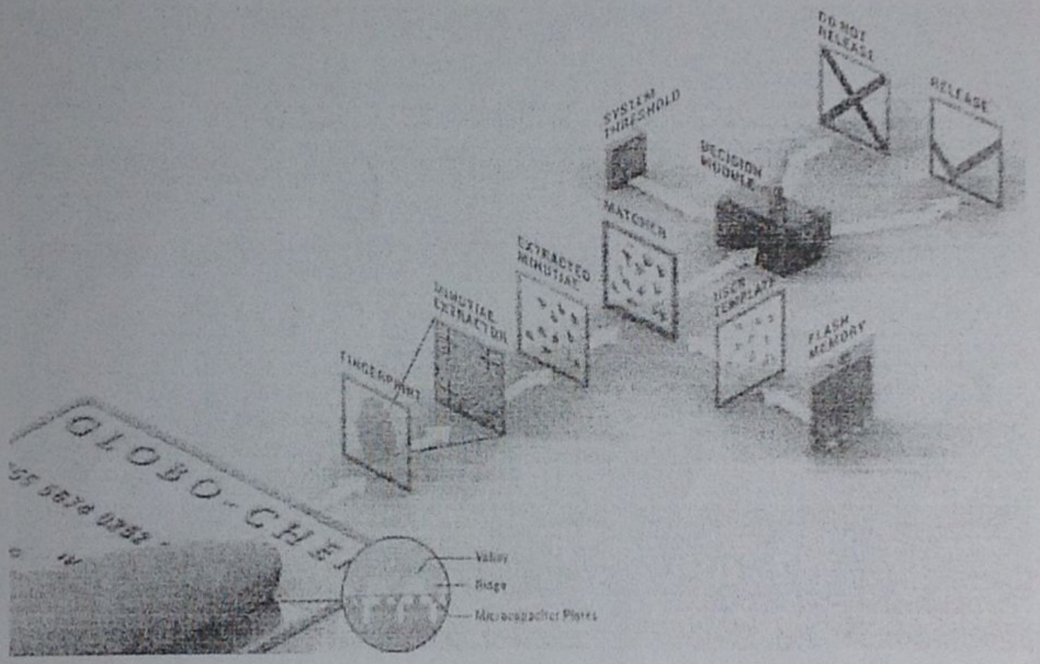


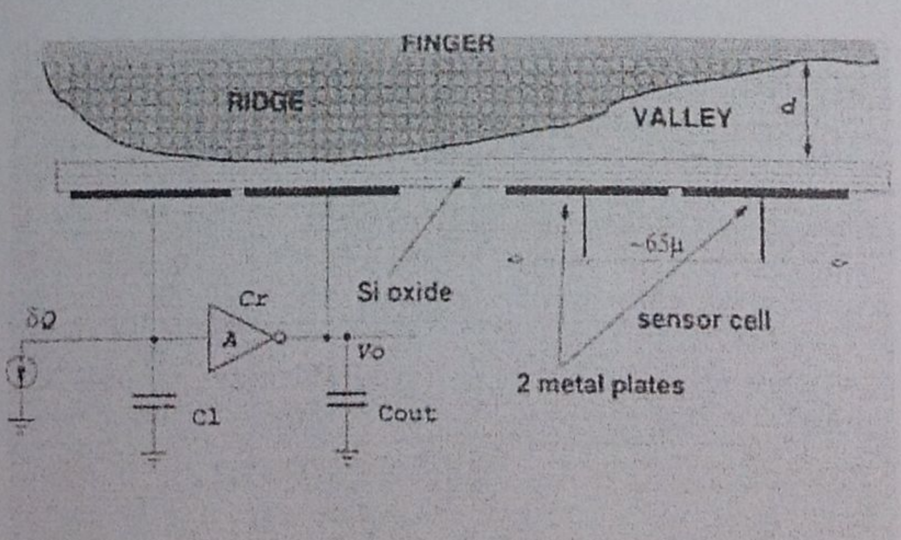


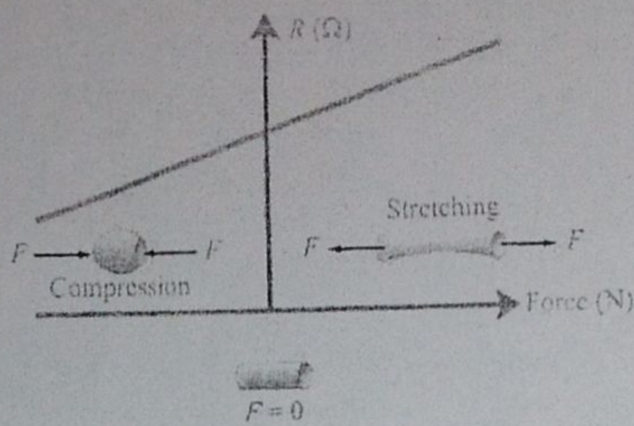
(a) Adjacent-plates capacitor

(b) Perturbation field

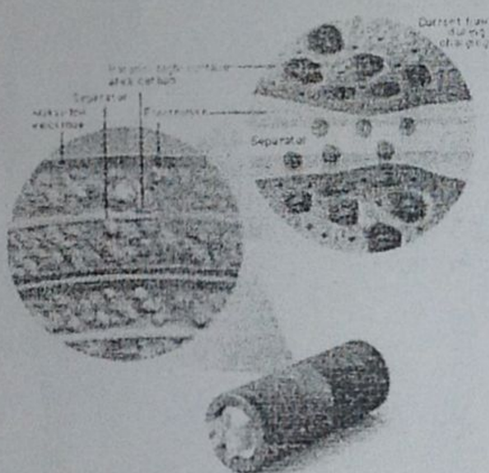
Fingerprint Imager

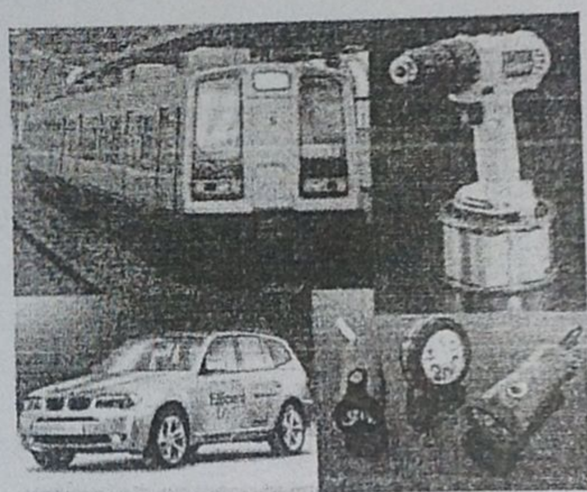






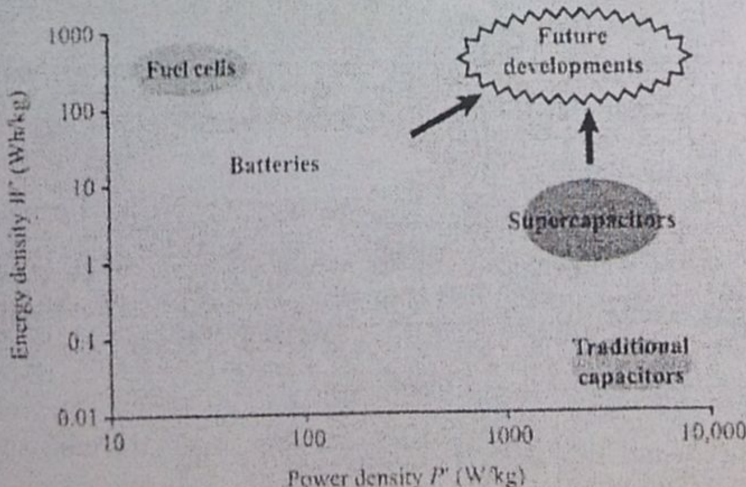
electrochemical double-layer capacitor (EDLC). supercapacitor

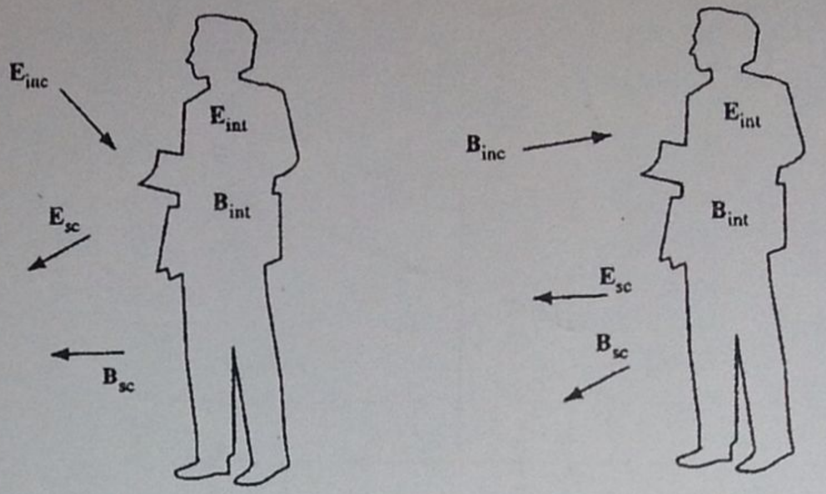




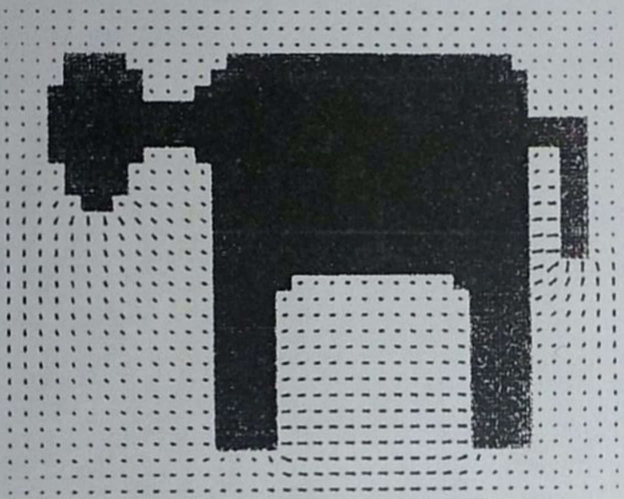
Energy Storage Devices

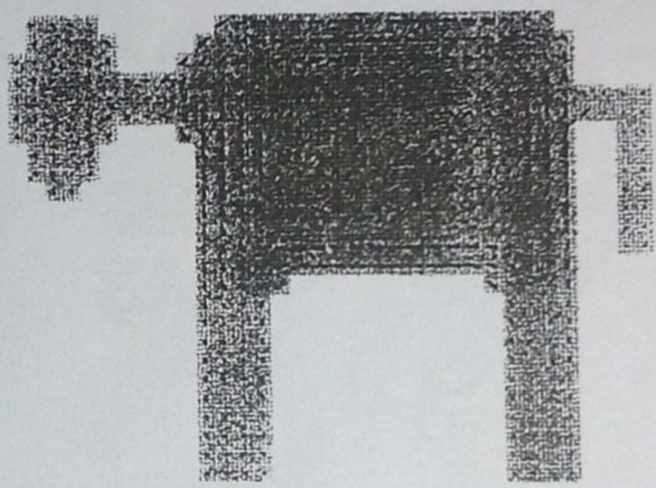
Feature	Traditional Capacitor	Supercapacitor	Battery
Energy density W' (Wh/kg)	$\sim 10^{-2}$	1 to 10	5 to 150
Power density P' (W/kg)	1,000 to 10,000	1,000 to 5,000	10 to 500
Charge and discharge rate T	10^{-3} sec	~ 1 sec to 1 min	~ 1 to 5 hrs
Cycle life N_c	∞	$\sim 10^6$	$\sim 10^3$

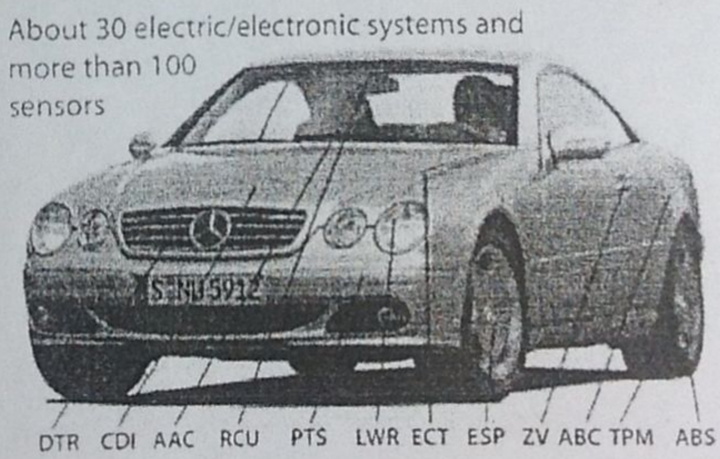




(a) (b)







System	Abbrev.	Sensors	System	Abbrev.	Sensors
Distronic	DTR	3	Common-rail diesel injection	CDI	17
Electronic controlled transmission	ECT	9	Automatic air condition	AAC	13
Roof control unit	RCU	7	Active body control	ABC	12
Antilock braking system	ABS	4	Tire pressure monitoring	TPM	11
Central locking system	ZV	3	Elektron. stability program	ESP	14
Dyn. beam levelling	LWR	6	Parktronic system	PTS	12

بسم الله الرحمن الرحیم

سری سوم سوالات الکترومغناطیس

۱) یک استوانه‌ی مدور هادی با شعاع a دارای بار سطحی ρ_s می‌باشد. دور تا دور استوانه محیطی با $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ قرار دارد که هیچ بار آزادی ندارد. در صورتی میدان مماسی در $r>a$ برابر باشد با $E_t = \cos^2\varphi/\rho^2 \, \hat{a}_\varphi$ ، ρ_s را بیابید.

۲) برای یک کابل کواکسیال با شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b، مقاومت الکتریکی را محاسبه نمائید.

۳) یک کره هادی با مجموع بار سطحی q تا نیمه در یک مایع دی‌الکتریک با ضریب ثابت ε قرار گرفته است. میدان الکتریکی بیرون کره و چگالی بار سطحی کره را بیابید.

۴) ناحیه $z<d$ از فضا را یک ماده عایق غیرهمگن با قابلیت گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_0 \left[2 + e^{-(z-d)/d}\right]$ در برگرفته است و ناحیه $z>d$ فضای آزاد فرض شده است. یک صفحه بینهایت با بار با چگالی توزیع ثابت ρ_s در $z=0$ قرار داده می‌شود. مطلوبست محاسبه

الف) میدان دی‌الکتریکی $\vec{E}$ و $\vec{D}$ در تمام فضا

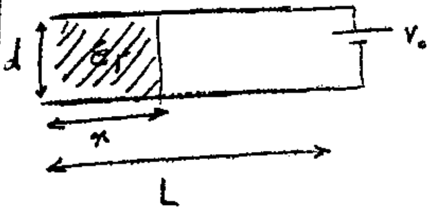
ب) چگالی حجمی بار القایی مقید در ناحیه $z<d$

ج) چگالی سطحی بار القایی مقید روی سطح $z=d$

۵) یک کابل کواکسیال به وسیله دو دی‌الکتریک با ضرایب ثابت گذردهی ε_1 و ε_2 پر شده است به صورتیکه برای $0<\varphi<\pi$ دی‌الکتریک با گذردهی ε_1 و برای نیمه دیگر دی‌الکتریک با گذردهی ε_2 قرار دارد. ظرفیت خازنی را مابین دو هادی با اختلاف پتانسیل V_0 بیابید.

۶) ظرفیت خازنی مابین دو صفحه را که یکی در زاویه $\varphi=0$ و دیگری در $\varphi=\varphi_0$ قرار دارد بیابید.

خازن صفحه‌ای موازی [illegible] به طول L و فاصله d مطابق شکل زیر به طور جزئی توسط محیط دی‌الکتریک به ضریب دی‌الکتریک ε پر شده است. یک باطری V_0 ولتی بین صفحات متصل شده است.



الف) $\vec{D}$ ، $\vec{E}$ و ρ_s را در هر ناحیه پیدا کنید.

ب) فاصله x را چنان بیابید که انرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده در هر دو ناحیه یکی باشد.

۸) یک سیم ایده‌آل مستقیم به شعاع a به موازات سطح زمین و در فاصله h بالای آن قرار دارد. با فرض اینکه زمین کاملاً ایده‌آل است ظرفیت و نیروی بین سیم و زمین را در واحد طول بیابید.

۹) دو کره ایده‌آل با شعاع‌های مساوی a، به ترتیب در پتانسیل‌های V و صفر نگه داشته شده‌اند. مراکز آن که در فاصله D از یکدیگر قرار دارد.

الف) بارهای تصویر و محل آن‌ها را که می‌توانند از نظر الکتریکی جانشین این دو کره شوند، بدست آورید.

ب) ظرفیت بین دو کره را بیابید.

۱۰) بار الکتریکی Q در بالای صفحه ایده‌آل بی‌نهایت به فاصله d از آن قرار گرفته است. فرض کنید نقطه O در صفحه ایده‌آل در محل کوتاهترین فاصله نسبت به بار باشد. به مرکز O دایره‌ای در صفحه ایده‌آل ترسیم می‌کنیم. اگر شعاع دایره a باشد، مطلوبست محاسبه a به قسمی که داخل دایره یک چهارم کل بار القایی صفحه ایده‌آل بی‌نهایت وجود داشته باشد.

۱۱) نسبت انرژی الکتریکی W لازم برای تشکیل یک بار الکتریکی در فضای خالی بین دو سطح کروی $R=a$ و $R=2a$ با چگالی حجمی ρ_0 به کل بار الکتریکی Q موجود در لایه حقیقی را است.

فصل چهارم:

حل مسائل مقدار مرزی

مقدمه:

در حل مسائل الکتریسیته ساکن در صورتی که توزیع بار مشخص باشد (در فضای آزاد) پتانسیل و میدان الکتریکی را از طریق روشهای ساده و مشخص در فصل دوم محاسبه می کنیم یا حتی اگر این بار که توزیع به اجسام هادی نیز باشد با استفاده از تئوری تصویر مسئله را می توان حل کرد. ولی در نوعی از مسائل الکتریسیته ساکن، پتانسیل تمام اجسام هادی معلوم است و می خواهیم پتانسیل و شدت میدان فضای اطراف و همچنین توزیع بار را روی مرزهای هادی بیابیم. برای حل این مسائل از معادلات لاپلاس و پواسن که از نوع دیفرانسیل جزئی بوده و بر تابع پتانسیل حاکم است، استفاده می کنیم. در این روش حل مسئله وابسته به یافتن پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر پتانسیل است که شرایط مرزی معین را برآورده می سازد.

۴-۱ معادلات پواسن و لاپلاس

همانطور که در بخش ۲-۵ اثبات شد معادله لاپلاس و پواسن می شود: پواسن $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

در صورتی که در فضا $\rho = 0$ باشد معادله پواسن به لاپلاس تبدیل می شود: $\nabla^2 V = 0$

معادلات لاپلاس و پواسن معادلات دیفرانسیل پاره ای هستند که توأم با شرایط مرزی معین باید حل شوند.

شرایط مرزی معمولاً به صورت پتانسیل های معلوم روی سطوح هادی و صفر بودن پتانسیل در بی نهایت برای توزیع های بار

محدود میدان ج می شود.

لاپلاسین یک کمیت عددی در مختصات مختلف در فصل اول ارائه شده است که داریم:

در مختصات کارتزین
$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(a_x \frac{\partial V}{\partial x} + a_y \frac{\partial V}{\partial y} + a_z \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

در مختصات استوانه ای
$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

در مختصات کروی
$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

نکته: اگر پاسخی یافت شود که در معادله لاپلاس یا پواسن صدق کند و شرایط مرزی را نیز برآورده کند، آن پاسخ تنها پاسخ ممکن مسئله است. با اثبات این قضیه در پیوست ۳ که آن را قضیه یکتایی پاسخ می نامیم، می توان اطمینان حاصل کرد که هرگاه پاسخی به هر ترتیب، حتی از روی حدس، برای معادله لاپلاس و پواسن بیابیم که شرایط مرزی را نیز برآورده کند، آن تنها پاسخ ممکن مسئله است و اگر پاسخ های دیگری به روش های دیگر یافت شوند با این پاسخ مساوی خواهند بود.

توجه: معمولاً در مسائلی که از طریق معادله لاپلاس یا پواسن حل می شوند با توجه به خواست مسئله، مراحل زیر را به این ترتیب طی می کنیم: ۱) حل معادله پواسن یا لاپلاس و یافتن جواب عمومی با توجه به شکل مسئله

۲) اعمال شرایط مرزی و یافتن تابع پتانسیل V

۳) محاسبه میدان از $\vec{E} = -\nabla V$ (در حالت کلی)

۴) یافتن چگالی بار سطحی و کل بار از طریق $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \longrightarrow Q = \int_s \rho_s \, ds$

البته توجه داشته باشید معمولاً هنگامی از حل معادله لاپلاس برای یافتن میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی استفاده می‌شود که دیگر نمی‌توانیم براساس روش‌های دیگری که در فصول قبل ارائه شد این کمیت‌ها را محاسبه کنیم (چون آن روش‌ها ساده‌ترند).

** مثلاً هنگامیکه شکل مسئله دارای تقارن‌های φ و θ باشد **

۴-۲ معادله لاپلاس

در صورتی که در فضای حل مسئله مرا برای یافتن پتانسیل الکتریکی ناحیه بدون بار باشد پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می‌کند و بنابراین حل مسئله، پاسخ معادله لاپلاس براساس شرایط مرزی مشخص شده می‌باشد

۴-۲-۱ حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین:

معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین برابراست با

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

یک روش معمول برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده از روش تکنیک تفکیک متغیرها است. در این روش تابع V به صورت حاصلضرب سه تابع $X(x)$، $Y(y)$ و $Z(z)$ که به ترتیب توابعی فقط از x، y و z هستند در نظر گرفته می‌شود

$$V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

با جایگذاری این رابطه در معادله لاپلاس داریم:

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + ZX\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

این معادله را بر XYZ تقسیم می‌کنیم خواهد شد

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{K_x}+\underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{K_y}+\underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{K_z}=0$$

در این معادله لاپلاس هر کدام از عبارت‌هایی که با هم جمع شده‌اند تنها وابسته به یک متغیر یا x یا y یا z هستند و لذا برای آن که مجموع این‌ها برابر صفر شود تنها می‌توانند برابر یک مقدار ثابت (K_x یا K_y یا K_z) باشند زیرا که در صورتی که $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$ مساوی یک تابعی از x باشد یعنی حالتی به دست می‌آید برابر بشود آن تابع از x باشد در حالی که آنها وابسته به y یا z خواهند بود)

پس داریم:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=K_x \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=K_y$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=K_z \qquad K_x+K_y+K_z=0$$

(K_x و K_y و K_z = مقادیر ثابت)

پس ما توانستیم معادله دیفرانسیل جزئی را بدین صورت به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کنیم حال پاسخ این معادلات را که مشابه یکدیگر هستند بررسی می‌کنیم. (برای توابع وابسته به x) این پاسخ براساس صفر، مثبت و منفی بودن K می‌باشد

(نکته: هر گاه در یک مسئله پتانسیل وابسته به یک متغیر نباشد K متناظر با آن وجود ندارد)

1) $K_x=0$: در مسائل یک بعدی (در صورتی که پتانسیل تابعی فقط از x باشد چون تابعی از y و z نیست پس K_y و K_z نداریم. و تنها K_x خواهیم داشت) که $K_x=0$ خواهد بود پس معادله لاپلاس می‌شود

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{d^2X}{dx^2}=0 \longrightarrow \boxed{V(x)=Ax+B}$$

که A و B ضرایب ثابتی هستند که به وسیله اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌گردند. البته ذکر است که حالت $K_x=0$ می‌تواند در حالات دو بعدی و سه بعدی نیز رخ دهد.

۲) $K_x < 0$: برای سادگی می نویسیم $K_x = -K^2$ پس معادله لاپلاس می شود

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = K_x \longrightarrow \frac{d^2X}{dx^2} = -K^2 X$$

طبیعتاً توابعی که پس از دوبار مشتق گرفتن، منفی خود تابع بشود از جنس سینوس و کسینوس هستند پس داریم

$$X(x) = A_1 \sin(Kx) + B_1 \cos(Kx)$$

۳) $K_x > 0$: برای سادگی می نویسیم $K_x = K^2$ پس معادله لاپلاس می شود

$$\frac{d^2X}{dx^2} = K^2 X$$

توابعی که با n بار مشتق گرفتن، خود تابع حاصل بشود توابع نمایی (یا هایپربولیک) می باشد.

$$X(x) = A_2 e^{Kx} + B_2 e^{-Kx} = A_3 \sinh(Kx) + B_3 \cosh(Kx)$$

پس در یک مسئله دو بعدی، تابع پتانسیل $V(x,y)$ با توجه به شرط $K_x + K_y = 0$ جواب به یکی از صورتهای زیر خواهد بود

$$V(x,y) = \begin{cases} (A_1 x + B_1)(C_1 y + D_1) & K_x = -K_y = 0 \\ (A_2 \sin Kx + B_2 \cos Kx)(C_2 e^{Ky} + D_2 e^{-Ky}) & K_x = -K_y = -K^2 < 0 \\ (A_3 e^{Kx} + B_3 e^{-Kx})(C_3 \sin Ky + D_3 \cos Ky) & K_x = -K_y = K^2 > 0 \end{cases}$$

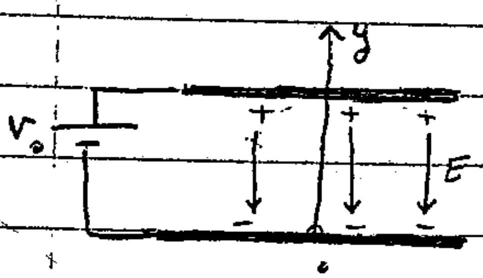
می توان توابع نمایی را با توابع هیپربولیک جایگزین کرد.

توجه: انتخاب اینکه K_x مقدار منفی یا مثبت است (و به تبع آن K_y مثبت یا منفی) براساس شرایط مرزی مسئله است

به عنوان مثال وقتی متغیر x دارای مقدار در بی نهایت است یقیناً k_x را می توان منفی گرفت چرا که پاسخ آن سینوس یا کسینوس است در حالیکه اساساً مقدار سینوس یا کسینوس در بی نهایت مشخص نیست پس پاسخ حتماً باید به صورت e^{-kx} یا مشابه (هیپربلیک) آن خواهد بود. (برای مطالعه بیشتر به پیوست ۳ مراجعه شود)

نکته: شرایط مرزی یا در صورت سوال ارائه می شود یا باید بعضی از آنها را بر اساس شرایط مرزی میدان های الکتریکی سال کن (بخش ۳-۵) محاسبه نمائیم

مثال: دو صفحه هادی صفحه ای موازی به فاصله d از یکدیگر قرار دارند و مطابق شکل زیر در پتانسیل های صفر و V_0 نگه داشته می شوند. الف) پتانسیل را در تمام نقاط بین صفحات



ب) چگالی بار سطحی را روی صفحات، تعیین نمایید.

الف: از آن جایی که میدان و پتانسیل الکتریکی تنها وابسته به y می باشند (یعنی k_x و k_z نداریم) پس مسئله یک بعدی بوده و داریم

$$\frac{d^2V}{dy^2}=0 \longrightarrow V=Ay+B$$

شرایط مرزی را اعمال می کنیم

$$V(y=0)=0 \longrightarrow B=0$$

$$V(y=d)=V_0 \longrightarrow A=\frac{V_0}{d} \qquad \boxed{V=\frac{V_0}{d}y}$$

که این رابطه نشان می دهد که پتانسیل از صفر تا d به طور خطی افزایش می یابد

ب) برای محاسبه چگالی بار کلی سطحی ابتدا می بایستی میدان را محاسبه کنیم

$$E=-\nabla V=-a_y\frac{\partial V}{\partial y}=-a_y\frac{V_0}{d}$$

که چگالی بار سطحی روی صفحه‌ای که رسانا هستند براساس شرایط مرزی می‌شود $D_n = \rho_s = a_n \cdot E$

در صفحه پایینی $a_n = \hat{a}_y$ ——— $\rho_s = -\frac{\varepsilon V_0}{d}$

در صفحه بالایی $a_n = -\hat{a}_y$ ——— $\rho_s = \frac{\varepsilon V_0}{d}$

دقت کنید که در روابط بدست آمده: ۱) جهت E مخالف جهت افزایش V است ۲) میدان الکتریکی از بارهای مثبت آغاز شده و به بارهای منفی ختم شده است.

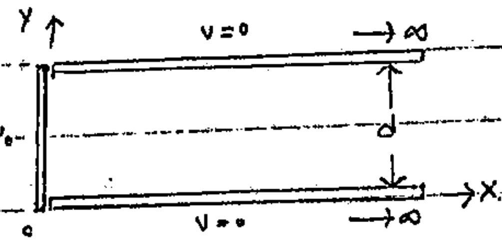
حال اگر بخواهیم ظرفیت این خازن را بیابیم داریم (A سطح جوشن)

$$Q = \int_s \rho_s \, ds = \frac{V_0 \varepsilon A}{d}$$

(که در بخش خازن نیز به همین رابطه رسیدیم)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

مثال: شکل زیر سطح مقطع سیستمی متشکل از سه رسانا را نشان می‌دهد. هر سه سطح در امتداد محور z از دو طرف و دو سطح موازی در امتداد x و در جهت مثبت تا بی‌نهایت ادامه دارند. پتانسیل را در ناحیه محصور بین سه سطح رسانا محاسبه نمایید.



تابع مستقل از z است و k_z نداریم

ولی باید تحقیق بکنیم که K_x (K_y) مثبت است یا منفی یعنی آن را براساس کل توابع سینوسی بنویسیم یا هیپربولیک.

چون پتانسیل در امتداد y دارای دو مقدار صفر است معقول‌تر است که پاسخ برگزیده شده برحسب y سینوسی باشد

از طرفی چون x به سمت بی‌نهایت می‌رود بهتر است پاسخ برگزیده شده برحسب x نمایی (هیپربولیک) باشد

$$Y(y) = A_1 \sin ky + B_1 \cos ky \quad \text{و} \quad X(x) = A_2 e^{kx} + B_2 e^{-kx}$$

اکنون برای یافتن ضرایب بایستی شرایط مرزی را اعمال کنیم:

$$V(x, y=0)=0 \longrightarrow \underbrace{X(x)}_{\text{صفر نیست}} Y(y=0) = 0 \longrightarrow Y(y=0)=0 \longrightarrow B_1 = 0$$

$$V(x, y=d)=0 \longrightarrow Y(d)=0 \longrightarrow \underbrace{A_1}_{\text{نمی‌تواند صفر باشد}} \sin kd = 0 = \sin n\pi \longrightarrow K = \frac{n\pi}{d}$$

$$V(x\to\infty, y)=0 \longrightarrow A_2 = 0 \quad \left(\lim_{x\to\infty} e^{kx} = \infty \quad \text{چون} \right)$$

پس از حاصلضرب XY خواهیم داشت

$$V'(x,y) = A \sin ky\, e^{-kx} \qquad K=\frac{n\pi}{d}$$

که $A = A_1 B_2$. از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌دانیم که ترکیب خطی پاسخ‌های یک مسئله نیز پاسخ مسئله خواهد بود

پس خواهیم داشت

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin ky\, e^{-kx} \qquad k=\frac{n\pi}{d}$$

این پاسخ بسیار شبیه سری فوریه می‌باشد و می‌توان با اعمال شرایط مرزی و بر اساس مفاهیم آنالیز فوریه

c_n را یافت

$$V(x=0, y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{d} y$$

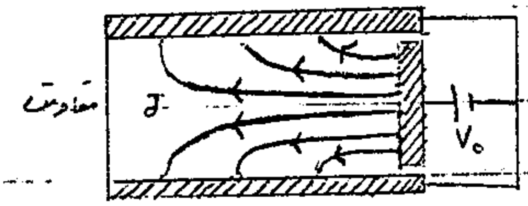
از فوریه داریم:

$$c_n = \frac{2}{d}\int_0^d V_0 \sin \frac{n\pi}{d} y\, dy = \frac{2}{d}\left(-V_0 \frac{d}{n\pi}\right)\left[\cos \frac{n\pi}{d} y\right]_0^d$$

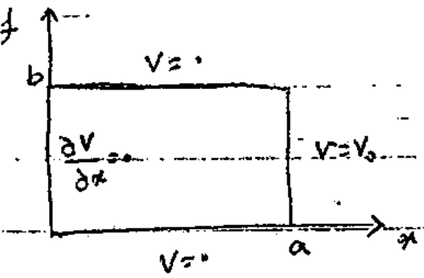
$$= -2V_0/(n\pi)\,(\cos n\pi - 1) \longrightarrow c_n = \begin{cases} 4V_0/n\pi & n \text{ فرد} \\ \text{صفر} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$V(x,y) = \sum_{n=1,\ n \text{ فرد}}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{d} y\, e^{-\frac{n\pi}{d} x}$$

مثال : درصورتی که ساختاری با شکل مقابل داشته باشیم، پتانسیل الکتریکی را در این محفظه بیابید؟ (جریان در ساختار ثابت است)



می توان شکل مسئله را به صورت مقابل (برای درنظرگرفتن شرایط مرزی) درنظر بگیریم



توجه کنید که درصورتی که جریان ثابتی داشته باشیم داریم $V=RI \rightarrow \partial V/\partial x=0$

با توجه به آن که دو صفر در جهت y داریم می توان $(K_y=-K^2)$ پاسخ را در این جهت به صورت سینوسی قرار داد و از آن جایی که $K_x+K_y=0 \rightarrow K_x=-K_y$ پس باید پاسخ در جهت x به صورت هیپربولیک (نمایی) باشد پس داریم (K_z نداریم)

$$X(x)=A_1\cosh Kx+B_1\sinh Kx \qquad Y(y)=A_2\cos Ky+B_2\sin Ky$$

$$y=0 \rightarrow V(x,0)=0 \rightarrow Y(0)=0 \rightarrow A_2=0$$

$$V(x,b)=0 \rightarrow B_2\sin Kb=0=\sin n\pi \rightarrow K=\frac{n\pi}{b}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x=0)=0 \rightarrow \left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \rightarrow A_1K\sinh Kx0+B_1K\cosh K0=0 \rightarrow B_1=0$$

پس داریم

$$V(x,y)=A\cosh\frac{n\pi}{b}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y$$

که $A=A_1B_2$

ترکیب خطی جوابها:

$$\rightarrow V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh Kx\sin Ky$$

با اعمال شرایط مرزی داریم

$$V(x=a, y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh\frac{n\pi}{b}a \, \sin\frac{n\pi}{b}y$$

که بر اساس سری فوریه داریم

$$A_n \cosh\frac{n\pi}{b}a = \frac{2}{b}\int_0^b V_0 \sin\frac{n\pi}{b}y \, dy$$

$$\longrightarrow A_n = \frac{2V_0}{b\cosh(n\pi a/b)} \frac{b}{n\pi}(1-\cos n\pi) =$$

$$A_n = \frac{4V_0}{n\pi \cosh(n\pi a/b)} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

با جایگذاری A_n در فرمول داریم

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\text{فرد}} \frac{1}{n} \frac{\cosh(n\pi x/b)}{\cosh(n\pi a/b)} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

توجه: در صورتی که مسئله سه بعدی نیز باشد روند حل مسئله مانند مثال های بالاست

۴_۲_۲ حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه ای

معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه ای بدین صورت می باشد

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

برخلاف حالت معادله لاپلاس در مختصات کارتزین که حل معادله لاپلاس در یک متغیر با متغیرهای دیگر یکسان است همانطور که

از معادله بالا مشخص است باید یک متغیر را جدا نمود. حالات معمول در مختصات استوانه ای به قرار زیر است:

الف) حالات یک بعدی: ۱) پتانسیل فقط تابعی از ρ می باشد یعنی $\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ می شود و داریم

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0 \xrightarrow[\text{نسبت به } \rho]{\text{یکبار انتگرال گیری}} \rho\frac{\partial V}{\partial\rho} = A = \text{مقدار ثابت}$$

$\xrightarrow[\text{دوم}]{\text{انتگرال گیری}}$ $\boxed{V = A \ln \rho + B}$

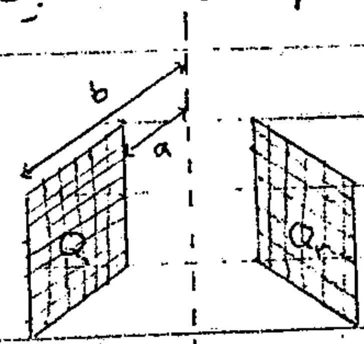
۲) پتانسیل فقط تابعی از φ می باشد $\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0\right)$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \longrightarrow \boxed{V(\varphi) = A\varphi + B}$$

۳) پتانسیل تابعی از z باشد:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \longrightarrow V(z) = Az + B$$

مثال: در صورتی که دو صفحه ثابت عایقی بر روی زاویای $\varphi_1 = 0$ و $\varphi_2 = \varphi_0$ داشته باشیم ظرفیت خازنی مابین دو صفحه را بیابید. پتانسیل الکتریکی تنها وابسته به φ می باشد پس داریم



$$\nabla^2 V = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \longrightarrow V = A\varphi + B$$

$V(Q_1) = 0 \quad V(Q_2) = V_0$

$$V(\varphi_1 = 0) = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$V(\varphi_2 = \varphi_0) = V_0 \longrightarrow V = \frac{V_0}{\varphi_0}\varphi \longrightarrow \vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi = -\frac{V_0}{\varphi_0 \rho}\hat{a}_\varphi$$

روی کردن شرایط مرزی می شود

$$E = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \longrightarrow \rho_s = \frac{V_0 \varepsilon}{\rho \varphi_0}$$

$$Q = \int_s \rho_s \, ds = \frac{\varepsilon V_0}{\varphi_0}\int_s \frac{1}{\rho}\, dz\, d\rho = \frac{V_0 \varepsilon h}{\varphi}\ln b/a$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon h}{\varphi_0}\ln b/a}$$

که در اینجا نیز اگر از فرمول کلی استفاده می کردیم راحتتر به جواب می رسیدیم

$$\frac{1}{C} = \int_{u_1} \frac{du_1}{\iint_{u_2 u_3} \frac{\varepsilon h_2 h_3 \, du_2 du_3}{h_1}} \qquad \frac{1}{C} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\underbrace{\int_0^h\int_a^b \frac{\varepsilon\, dz\, d\rho}{\rho}}_{\varepsilon h \ln b/a}} \longrightarrow C = \frac{\varepsilon h \ln b/a}{\varphi_0}$$

ب) پتانسیل مستقل از z (یعنی $\frac{\partial V}{\partial z}=0$) پس معادله لاپلاس می شود

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0$$

حال از روش تفکیک متغیرها استفاده می کنیم

$$V=R(\rho)\,\Phi(\varphi)$$

این رابطه را در معادله لاپلاس جایگزین می کردیم

$$\frac{1}{\rho}\Phi(\varphi)\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial \rho}\right)+\frac{R}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}=0$$

پس از جاگذاری رابطه با تقسیم بر $\frac{R\Phi}{\rho^2}$ داریم

$$\underbrace{\left[\frac{1}{R}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}+\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}\right)\right]}_{\text{تابعی فقط از } \rho}+\underbrace{\left[\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right]}_{\text{تابعی فقط از } \varphi}=0$$

برای برقراری معادله فوق به ازای تمام مقادیر ρ و φ، هر جمله باید برابر مقدار ثابت و منفی جمله دیگر باشد.

$$1)\quad \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-K^2$$

این عبارت بایستی برابر یک مقدار منفی ($-K^2$) باشد

چون که اگر برابر K^2 شود جواب یک مقدار نمایی می شود درحالیکه φ در این مسئله حالت تناوبی دارد و می بایستی پاسخ شامل آن نیز متناوب باشد به همین علت نیز K می بایستی عدد ثابتی چون n باشد پس جواب این معادله

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases}A_1\varphi+B_1 & n=0\\ A_2\sin n\varphi+B_2\cos n\varphi & n\neq 0\end{cases}$$

دیفرانسیل معمولی می شود

$$2)\quad \rho^2\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}-n^2R(\rho)=0$$

ضریب برای R باید مثبت باشد تا مجموع آن با حالت قبل صفر شود

$$R(\rho)=\begin{cases}C_1\ln\rho+D_1 & n=0\\ C_2\rho^n+D_2\rho^{-n} & n\neq 0\end{cases}$$

که پاسخ پیشنهادی برای آن خواهد بود

که دیگر از حاصلضرب پاسخها خواهیم داشت

$$V(\rho,\varphi)=\begin{cases}(A\varphi+B_1)(c_1\ln\rho+D_1) & n=0\\ (A_2\sin n\varphi+B_2\cos n\varphi)(c_2\rho^{n}+D_2\rho^{-n}) & n\neq 0\end{cases}$$

پس پاسخ نهایی می شود

$$V(\rho,\varphi)=(A_1\varphi+B_1)(c_1\ln\rho+D_1)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_2\sin n\varphi+B_2\cos n\varphi)(c_2\rho^{n}+D_2\rho^{-n})$$

توجه: اگر ناحیه مورد نظر در مسئله شامل محور استوانه (جایی که $\rho=0$ است) باشد جملات شامل ρ^{-n} نمی توانند وجود داشته باشند. و همچنین اگر ناحیه مورد نظر شامل بی نهایت باشد، جملات شامل ρ^{n} نمی توانند وجود داشته باشند زیرا پتانسیل در $\rho\to\infty$ باید صفر باشد.

مثال: روی استوانه ای به شعاع R و طول بی نهایت باری با چگالی $\rho_s=R\cos 5\varphi$ قرار دارد. V را درون و بیرون استوانه بیابید. تابع پتانسیل مستقل از z است. پتانسیل درون استوانه را V_1 و بیرون آن را V_2 می نامیم. پس:

$$V_1=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\rho^{n}$$

$$V_2=\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n\cos n\varphi+B'_n\sin n\varphi)\rho^{-n}$$

شرایط مرزی عبارتست از:

$$1)\ V_1(\rho=R)=V_2(\rho=R) \quad , \quad 2)\ \varepsilon_0(E_{\rho_2}-E_{\rho_1})\Big|_{\rho=R}=\rho_s$$

چرا که مولفه عمودی میدان الکتریکی روی استوانه E_ρ است $(E=-\nabla V)$

$$2)\rightarrow -\frac{\partial V_2}{\partial\rho}+\frac{\partial V_1}{\partial\rho}=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}=\frac{R}{\varepsilon_0}\cos 5\varphi$$

به سادگی می توان دید که برای برقراری تساوی فوق تمام ضرایب $\sin n\varphi$ باید صفر شود (درست است فقط $\cos 5\varphi$ داریم) $n=5$

$V_1 = A_5 \cos 5\varphi \, \rho^5$

$V_2 = A'_5 \cos 5\varphi \, \rho^{-5}$

همچنین برای $n \neq 5 \Longrightarrow A_n = A'_n = 0$ پس

از شرط مرزی اول $(V_1 = V_2)\big|_{\rho = R}$ داریم

$A_5 R^5 = A'_5 R^{-5}$

همچنین شرط مرزی دوم نتیجه می دهد

$5 A_5 R^4 + 5 A'_5 R^{-6} = \frac{R}{\varepsilon_0}$

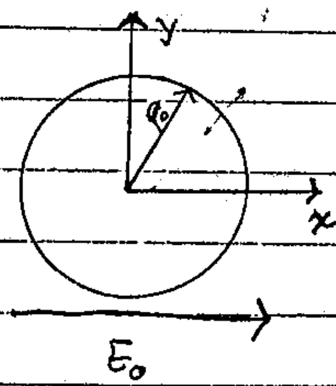
حل همزمان دو عبارت بالا A_5 و A'_5 را می دهد

$A_5 = \frac{1}{10 \varepsilon_0 R^3}$, $A'_5 = \frac{R^7}{10 \varepsilon_0}$

پس: $V_1 = \frac{1}{10\varepsilon_0} \cos 5\varphi \, \frac{\rho^5}{R^3}$, $V_2 = \frac{1}{10\varepsilon_0} \cos 5\varphi \, \frac{R^7}{\rho^5}$

پرسیده شود

مثال: یک استوانه عایق بی نهایت طویل و به شعاع ρ_0 مطابق شکل زیر به صورت عمودی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $E = E_0 \hat{a}_x$ قرار داده می شود. با فرض اینکه ثابت دی الکتریک استوانه عایق برابر ε_r فرض می شود، پتانسیل و میدان الکتریکی درون و بیرون استوانه عایق را بیابید.



حل:

می دانیم در مختصات استوانه ای: $x = \rho \cos\varphi$ پس داریم:

$E = -\nabla V \rightarrow V = -E_0 x$

V را به صورت بالا در نظر می گیریم تا بعد از گرادیان گرفتن $E = E_0 \hat{a}_x$ شود پس

$V' = -E_0 x = -E_0 \rho \cos\varphi$

در واقع این پتانسیل هر نقطه در فضا قبل از قرار گرفتن استوانه عایق در فضا می باشد که طبیعتاً با قرار گرفتن استوانه در فضا میدان و در نتیجه پتانسیل تغییر می کند به غیر از نواحی دور از استوانه پس

$V\big|_{\rho \to \infty} = -E_0 \rho \cos\varphi$

$\sum (\rho^n + \rho^{-n})(A_n \sin + B_n \cos)$

پاسخهای پیشنهادی برای این مسئله خواهد بود

$$V(\rho,\varphi) = \begin{cases} \rho^{n}(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi) & \rho < \rho_0 \\ \rho^{-n}(C_n \sin n\varphi + D_n \cos n\varphi) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

(این روابط را به صورت کلی قبلاً مطالعه نموده بودیم)

این رابطه مربوط به پتانسیل الکتریکی القائی ناشی از حضور دی الکتریک است. از آنجائیکه پتانسیل می بایستی در مرز دی الکتریک پیوسته باشد. این پتانسیل (پتانسیل کل) از مجموع این دو پتانسیل حاصل می شود. از آنجائیکه V' دارای $n=1$ است

برای پیوستگی V نیز باید $n=1$ باشد پس

چرا؟ ⟵ کجا رفت sin

$$V = \begin{cases} A\rho\cos\varphi & \rho < \rho_0 \\ B\rho^{-1}\cos\varphi & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

پس در $\rho=\rho_0$ داریم

$$A\rho_0\cos\varphi + V'_0(\rho_0) = B\rho_0^{-1}\cos\varphi + V'(\rho_0) \longrightarrow B = \rho_0^2 A \quad ○$$

و در $\rho=\rho_0$ نیز براساس شرایط مرزی داریم:

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{\rho 1} = \varepsilon_2 E_{\rho 2}} \longrightarrow$$ باید بررسی شود

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial\rho}(A\rho\cos\varphi - E_0\rho\cos\varphi) = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\rho}(B\rho^{-1}\cos\varphi - E_0\rho\cos\varphi)$$

$$\cancel{\varepsilon_0}\varepsilon_r \cancel{\cos\varphi}(A - E_0) = -\cancel{\varepsilon_0}\cancel{\cos\varphi}\left(\frac{-B}{\rho^2} - E_0\right)$$

در $\rho=\rho_0$

$$\varepsilon_r(A - E_0) = \left(\frac{B}{\rho_0^2} - E_0\right) \quad □$$

$$○ \text{ و } □ \Longrightarrow A = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0 \quad \text{و} \quad B = \rho_0^2 A = \rho_0^2\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0$$

کجا؟

$$V + V_0 = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\rho\cos\varphi$$

کل پتانسیل الکتریکی می شود ← بررسی شود

از میدان الکتریکی درون و بیرون دی الکتریک متفاوت است و باید هر یک را از گرادیان پتانسیل الکتریکی این دو جدا حساب شود

در نتیجه: $V_i = -\frac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\rho\cos\varphi \longrightarrow E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{a}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi$

توضیح — برای $\rho < \rho_0$

$$E_i = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}(\cos\varphi\,\hat{a}_\rho - \sin\varphi\,\hat{a}_\varphi) = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\bar{E}_0$$

و به همین صورت برای $\rho > \rho_0$

$$E_e = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2(\hat{a}_\rho\cos\varphi + \hat{a}_\varphi\sin\varphi)$$

حالت ۲) با وجود K_z ($K_z \neq 0$)

در این صورت مسئله به صورت سه بعدی در می آید در این صورت اگر معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای را بر

$R\Phi Z/\rho^2$ تقسیم کنیم سه معادله تفکیک شده به صورت زیر خواهیم داشت

$A\sin nx + B\cos nx$

1) $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -n^2$ 2) $\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = K^2 \rightarrow A\sinh(Kx) + B\cosh(Kx)$ (k عدد ثابت)

3) $\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + R[(K\rho)^2 - n^2] = 0$ پرسیده بشود

معادله دیفرانسیل ۳، معادله دیفرانسیل بسل است و پاسخ آن به قرار زیر است

$$R(\rho) = A J_n(K\rho) + B Y_n(K\rho) \qquad J_0' = -J_1$$

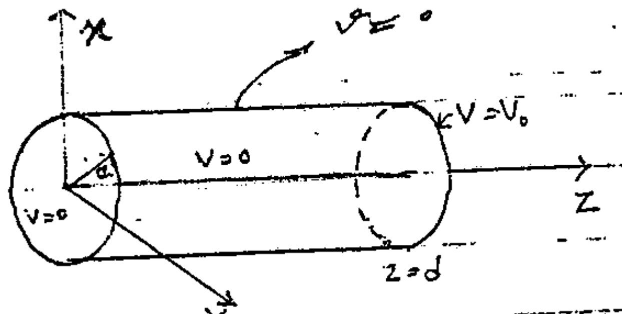
که J_n و Y_n به ترتیب توابع بسل از نوع اول و دوم هستند (این توابع به صورت مبسوط در پیوست ۴ ارائه شده است)

معادلات ۱ و ۲ نیز همانند بخش های قبل حل می شود.

* $\boxed{\text{مثال}}$ پتانسیل الکتریکی را در درون استوانه ای مطابق شکل بیابید

پرسیده بشود

۳
۱۴



نکته: I_n بیرون کراندار و J_n درون کراندار است. براساس روابطی که در پیوست داریم می‌دانیم با توجه به آن که مسئله شامل $\rho=0$ می‌باشد.

پس فقط $J_n(K\rho)$ داریم از طرفی به علت تقارن و عدم وابستگی شرایط مرزی به φ در نتیجه $K_\varphi = n^2 = 0$ است پس

جواب عمومی بیشتر ساده‌تر می‌شود

برابر صفر شود

$$R(\rho) = J_{\boxed{0}}(K\rho)$$

شرایط مرزی $\quad R(\rho=a) = 0 = V(\rho=a) \longrightarrow J_0(k_z a) = 0 \xrightarrow{\text{برابر صفر شود}} K_z = \frac{\Gamma_{0m}}{a}$

برابر می‌شود

$$\to V(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\Gamma_{0m}}{a}\rho\right) \sinh \frac{\Gamma_{0m}}{a} z$$

که هم می‌توان پاسخ متغیر z را $\sinh \Gamma_{0m} z$ نوشت هم می‌توان به صورت $e^{-\frac{x_{0m}}{a}z}$

$$V(z=d) = V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\Gamma_{0m}\rho) \sinh \Gamma_{0m} d$$

نکته: تابع متعامد بسل‌ها خود بسل‌ها هستند.

دو طرف معادله را در $\rho J_0(\Gamma_{0n}\rho)$ ضرب کرده و روی ρ که بین 0 تا a انتگرال بگیریم (توابع متعامد) داریم

$$V_0 \int_0^a \rho J_0(\Gamma_{0n}\rho)\, d\rho = A_n \sinh \Gamma_{0n} d \int_0^a \rho J_0^2(\Gamma_{0n}\rho)\, d\rho$$

$$\int_0^a \rho J_0^2(\Gamma_{0n}\rho)\, d\rho = \frac{\rho^2}{2}\left\{\left[\frac{dJ_0(\Gamma_{0n}\rho)}{d(\Gamma_{0n}\rho)}\right]^2 + J_0^2(\Gamma_{0n}\rho)\right\}\Bigg|_0^a$$

نکته: براساس روابط بسل داریم

صفر می‌شود ρ

$$= \frac{a^2}{2} J_0'^2(\Gamma_{0n}a) = \frac{a^2}{2} J_1^2(\Gamma_{0n}a)$$

و

$$\int (\Gamma x)^{n+1} J_n(\Gamma x)\, d(\Gamma x) = (\Gamma x)^{n+1} J_{n+1}(\Gamma x)$$

پس به رابطه میل تا زیر می رسیم

$$V_0\int_0^a \rho J_0(\Gamma_{0n}\rho)\,d\rho = \frac{V_0}{\Gamma_{0n}^2}(\Gamma_{0n}\rho)J_1(\Gamma_{0n}\rho)\Big|_0^a = \frac{V_0}{\Gamma_{0n}}aJ_1(\Gamma_{0n}a)$$

پس از روابط و انتگرال گیری بالا داریم

$$A_n = \frac{2V_0}{\Gamma_{0n}aJ_1(\Gamma_{0n}a)\sinh\Gamma_{0n}d}$$

پس جواب نهایی می شود

$$V(\rho,\varphi) = 2V_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\Gamma_{0n}\rho)\sinh\Gamma_{0n}Z}{\Gamma_{0n}aJ_1(\Gamma_{0n}a)\sinh\Gamma_{0n}d}$$

۴-۲-۳ معادله لاپلاس در مختصات کروی

معادله لاپلاس در مختصات کروی عبارتست از

$$\nabla^2V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2} = 0$$

در حالت یک بعدی که V تابعی فقط از R و θ یا φ است، معادله لاپلاس فقط از یکی از جملات سمت راست این رابطه تشکیل می شود، داریم: ۱) تابعی از R $\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0\right)$: پس معادله لاپلاس می شود

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)=0 \xrightarrow{\text{یک انتگرال}} R^2\frac{\partial V}{\partial R}=B_1 \xrightarrow{\text{انتگرال دیگر}} \boxed{V(R)=A_1+B_1/R}$$

۲) تابعی از φ:

$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=0 \longrightarrow V(\varphi)=A_2+B_2\varphi$$

۳) تابعی از θ:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0 \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{B_3}{\sin\theta} \longrightarrow \boxed{V(\theta)=A_3+B_3\ln(\tan\theta/2)}$$

می دانیم $\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\ln(\tan\theta/2)$

البته در صورتی که تمامی متغیرها وجود داشته باشند باید از روش تفکیک متغیرها استفاده نمود

$$V(R,\theta,\varphi)=\Gamma(R)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

این رابطه را در معادله لاپلاس جایگزین نموده سپس آن را بر $\Gamma\Theta\Phi/(R^2\sin^2\theta)$ تقسیم می‌کنیم داریم

$$\frac{\sin^2\theta}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Gamma}{\partial R}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0$$

هرکدام از بخش‌ها رابطه صورت مجزا بررسی می‌کنیم. همانند بخش قبل برای متغیر φ با توجه به متناوب بودن داریم $(0<\varphi<2\pi)$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-n^2\Phi \quad \oplus \longrightarrow \Phi(\varphi)=c_1\cos n\varphi+c_2\sin n\varphi \longleftarrow \Phi(2\pi)=\Phi(0)$$

حال با جایگذاری $\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-n^2$ در معادله لاپلاس داریم:

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Gamma}{\partial R}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{n^2}{\sin^2\theta}=0$$

بخش اول فقط تابعی از R و بخش دوم فقط تابعی از θ می‌باشد. این دو بخش برای صفر شدن باید مقدار ثابتی باشند

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Gamma}{\partial R}\right)=k^2=m(m+1) \quad \circledast$$

(انتخاب $m(m+1)$ بخاطر محاسبات بعدی است)

$$\longrightarrow \Gamma(R)=B_1R^m+B_2R^{-(m+1)}$$

حال با جایگزین کردن $\circledast$ و $\oplus$ در معادله لاپلاس داریم

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[m(m+1)\sin\theta-\frac{n^2}{\sin\theta}\right]\Theta=0$$

که در واقع این معادله لژاندر $P_n^m(u)$ می‌باشد، که فرم استاندارد آن با تغییر متغیر $u=\cos\theta$ بدست می‌آید

$$\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{du}\frac{du}{d\theta}=-(1-u^2)^{1/2}\frac{d}{du}$$

پس معادله لژاندر با جایگذاری این رابطه می شود

$$\frac{d}{du}(1-u^2)\frac{d\Theta(u)}{du}+\left[m(m+1)-\frac{n^2}{1-u^2}\right]\Theta(u)=0$$

که با حل این معادله لژاندر حاصل می شود

$$\Theta(\theta)=A_1P_m^n(\cos\theta)+A_2Q_m^n(\cos\theta)$$

که $P_n^m(\cos\theta)$ و $Q_n^m(\cos\theta)$ به ترتیب توابع لژاندر از نوع اول و دوم گویند. $(m\le n)$ (معمولاً لژاندر نوع دوم

به دلیل آن که در π و $\theta=0$ نامحدود هستند وارد محاسبات نمی شوند) این توابع در پیوست 4 مفصل بحث شده اند.

پس جواب عمومی مسئله عبارت خواهد بود:

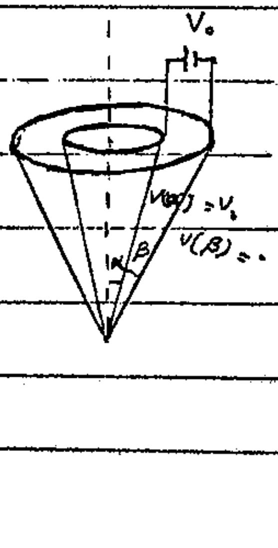
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad P_0=1 \quad P_1=x \quad P_2=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}x^2 \quad P_3=\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x$$

$$V(R,\theta,\varphi)=\sum_n\sum_m(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\left(C_mR^m+D_mR^{-(m+1)}\right)P_m^n(\cos\theta)$$

البته در بسیاری از موارد به خاطر تقارن محوری موجود تابع پتانسیل مستقل از φ بوده و $n=0$ می شود که داریم:

$$V(R,\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(C_mR^m+D_mR^{-(m+1)}\right)P_m^0(\cos\theta)$$

مثال: پتانسیل مابین دو مخروط هادی که با زوایای باز شوندگی α و β می باشند را بیابید



داریم

$$\nabla^2V=0\longrightarrow\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0$$

$$V=A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+B$$

حال باید شرایط مرزی را اعمال کنیم

$$V(\beta)=0 \longrightarrow V = A\ln(\tan\beta/2) + B = 0$$

$$V(\alpha)=V_0 \longrightarrow A\ln(\tan\alpha/2) + B = V_0$$

با حل این دو معادله دو مجهول داریم

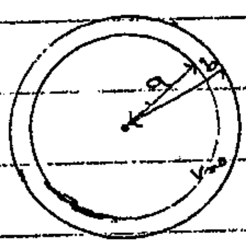
که در نهایت خواهیم داشت

$$A=\frac{V_0}{\ln((\tan\alpha/2)/\tan\beta/2)} \qquad B=-A\ln(\tan\beta/2)$$

پس

$$V=\frac{V_0\ln\left(\frac{\tan\theta/2}{\tan\beta/2}\right)}{\ln\left(\frac{\tan\alpha/2}{\tan\beta/2}\right)}$$

مثال: دو سطح کروی هم مرکز به شعاع a و b ($b>a$) همانند شکل زیر داریم. پتانسیل کره داخلی صفر و پتانسیل کره بیرونی $V_0\cos\theta$ است. پتانسیل در فضای بین دو کره را بیابید.



این دو کره مستقل از φ هستند پس

$$V(R,\theta)=\sum_n \left(A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

در $R=a$، $V=0$، پس باید داشته باشیم

$$A_n a^n + B_n a^{-(n+1)} = 0$$

پس $B_n = -a^{2n+1}$ در $R=b$ داریم

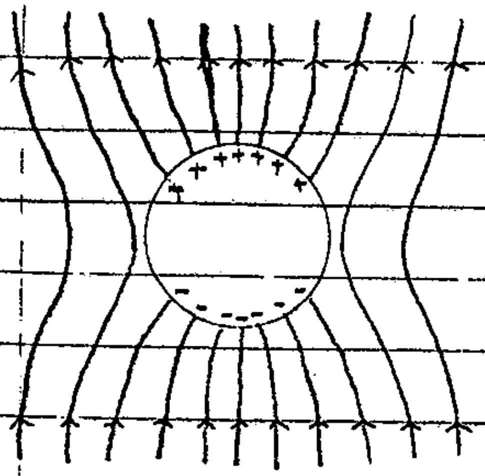
$$V=\left(A_0+\frac{B_0}{b}\right)+\left(A_1 b+\frac{B_1}{b^2}\right)\cos\theta+\dots = V_0\cos\theta$$

که نتیجه می دهد $A_0=B_0=0$ و $A_1 b + B_1/b^2 = V_0$، و برای $n\neq 1$، $A_n=B_n=0$ چون شرط مرزی

حل $B_1=-a^3A_1$ را نتیجه می دهد بدست می آوریم

$$A_1=\frac{V_0 b^2}{b^3-a^3} \longrightarrow \boxed{V=\frac{V_0 b^2}{b^3-a^3}\left(R-\frac{a^3}{R^2}\right)\cos\theta}$$

مثال: یک کره رسانای بدون بار به شعاع b در میدان الکتریکی یکنواخت اولیه $E = E_0 \hat{a}_z$ قرار دارد، توزیع پتانسیل $V(R,\theta)$ را پس از قرار دادن کره، تعیین نمایید



پس از قرار گرفتن کره رسانا در میدان الکتریکی، توزیع دوباره بار به صورتی خواهد بود که سطح کره هم پتانسیل، میدان درون رسانا در جهت میدان محیط (تا میدان الکتریکی درون رسانا صفر شود) و خطوط میدان را در سطح رسانا عمود بر آن ساخت

برای توزیع پتانسیل V در ناحیه $R \geq b$ شرط مرزی می‌شود

$$V(b,\theta) = 0$$

$$V(R,\theta) = -E_0 z = -E_0 R\cos\theta \qquad R >> b \qquad (z = R\cos\theta)$$

با استفاده از جواب عمومی معادله لاپلاس (بدون ϕ) داریم

$$V(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta) \qquad R \geq b$$

این معادله باید با $-E_0 R\cos\theta$ برابر باشد (برای فاصله زیاد از کره) پس تمام مقادیر A_n به جز A_1 صفر می‌شود و

$A_1 = -E_0$ ، $R^{-(n+1)}$ در ∞ چون به سمت صفر می‌رود، پس

$$V(R,\theta) = -E_0 R P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

با باز کردن $\sum$ داریم

$$= B_0 R^{-1} + (B_1 R^{-2} - E_0 R)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

$\frac{B_0}{R}$ در واقع تغییر پتانسیل یک کره باردار است و چون کره ما بدون بار است، پس B_0 صفر می‌شود علاوه بر

$$V(b,\theta) = 0$$

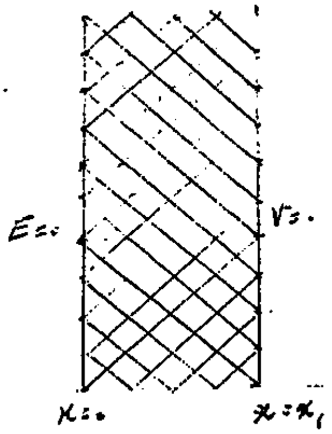
پس با اعمال این شرایط مرزی

$$\frac{B_1}{b^2} - E_0 b = 0 \quad , \quad B_n = 0$$

پس داریم $V(R,\theta) = -E_0\left[1-\left(\frac{b}{R}\right)^3\right] R\cos\theta$

۳-۴ حل معادله پواسن

درصورتی که محاسبه پتانسیل در ناحیه‌ای از فضا که حاوی بار الکتریکی است مورد نظر باشد از معادله پواسن استفاده می‌کنیم. درواقع علاوه بر جواب عمومی (جواب معادله لاپلاس) بایستی برای عامل ناهمگن کننده $\frac{\rho}{\varepsilon}$ یک جواب خصوصی نیز بدست آورد. البته در بسیاری از کاربردهای معادله پواسن، حالت مسئله به صورت یک بعدی بوده و به راحتی حل می‌شود.



مثال: معادله پواسن را به ازای $\rho=\rho_0 x/x_1$ و با شرایط مرزی $E=0$ در $x=0$ و $V=0$ در $x=x_1$ بدست آورید.

تغییراتی در جهت‌های y و z نداریم پس معادله لاپلاس می‌شود

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon x_1}x \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon x_1}x^2 + C_1$$

و چون $E=-\partial V/\partial x$ و در $x=0$ داریم $E=0$، پس $C_1=0$ ← $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon x_1}x^2$

$$V = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon x_1}x^3 + C_2 \xrightarrow[V=0]{x=x_1} 0 = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon}x_1^2 + C \rightsquigarrow V=\frac{\rho_0}{6\varepsilon x_1}\left(x_1^3-x^3\right)$$

فصل پنجم

میدان مغناطیسی مگنتواستاتیک در فضای آزاد

در بخش های قبل به بررسی میدان های الکتریکی در حالت الکترواستاتیک پرداختیم که در این بخش نیز به بررسی میدان های مغناطیسی در حالت مگنتواستاتیک می پردازیم در این حالت جریان متغیر با زمان نداریم در نتیجه روابط حاکم بر شار مغناطیسی B در معادلات ماکسول می شود $\nabla \times B = \mu_0 J$ و $\nabla \cdot B = 0$

که در این معادله μ_0 نفوذپذیری فضای آزاد $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ بر حسب H/m می باشد و J چگالی جریان است.

روش های محاسبه میدان مغناطیسی در مگنتواستاتیک مشابه روش های محاسبه میدان الکتریکی در الکترواستاتیک می باشد به همین دلیل با استفاده از تشابه سازی بسیاری از فرمول ها و پاسخ ها را می یابیم

۵-۱:

هنگامیکه بار آزمون کوچک q در میدان الکتریکی E قرار می گیرد، نیروی الکتریکی F_e به آن وارد می شود.

که داریم $\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (N)$

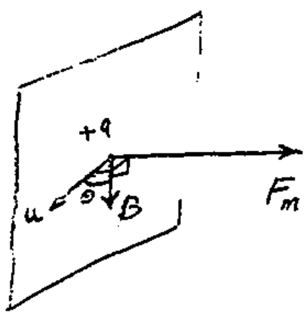
حال اگر این بار آزمون در یک میدان مغناطیسی در حال حرکت باشد، آزمایش نشان می دهد که نیروی

دیگر F_m بر آن اعمال می شود. نیروی F_m، یک نیروی مغناطیسی است و برحسب چگالی شار مغناطیسی B توصیف می گردد:

$$\vec{F}_m = q\,\vec{u} \times \vec{B}$$

در این رابطه $\vec{u}$ (m/s) بردار سرعت است و $\vec{B}$ برحسب وبر بر متر مربع (Wb/m^2) یا تسلا (T) می باشد.

در صورتی که بار q مثبت باشد، راستای F_m به صورت عمود بر صفحه دربرگیرنده ی $\vec{B}$ و $\vec{u}$ می باشد و با استفاده از قانون دست راست قابل محاسبه است. در صورتی که بار منفی نیز باشد بردار F_m معکوس می شود (با توجه به تعریف ضرب داخلی)



مقدار F_m برابر است با:

$$F_m = quB\sin\theta$$

که θ زاویه مابین B و u است. واضح است ماکزیمم F_m زمانی رخ می دهد که $\vec{u}$ عمود بر $\vec{B}$ باشد ($\theta=90^\circ$)

و F_m برابر صفر می شود اگر $\vec{u}$ موازی $\vec{B}$ باشد ($\theta=0^\circ$ یا 180°).

نیروی الکترومغناطیسی کل وارد بر بار q برابر می شود با:

$$F = F_e + F_m = q(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})$$

که معادله لورنتس نامیده می شود. نیروهای مغناطیسی و الکتریکی دارای تفاوت های زیر هستند

۱- نیروی الکتریکی همواره در جهت میدان الکتریکی است درحالیکه نیروی مغناطیسی همواره عمود بر میدان مغناطیسی است

۲- نیروی الکتریکی روی ذره باردار چه متحرک چه ثابت اعمال می شود درحالیکه نیروی مغناطیسی تنها روی بار متحرک اعمال می گردد

در توضیح ضمت ۳ تفاوتها: نیروی مغناطیسی همواره عمود بر $\vec{u}$ می باشد در نتیجه $\vec{F}_m \cdot \vec{u} = 0$. از طرفی بر اساس

تعریف کار انجام شده و با توجه به اینکه تغییرات مکانی می شود $(dl = u\,dt)$ داریم

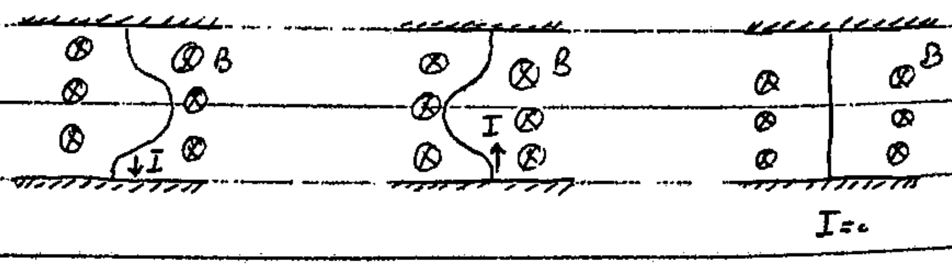
$$dW = F_m \cdot dl = (F_m \cdot u)\,dt = 0$$

در نتیجه هیچ کاری انجام نشده است. میدان مغناطیسی نمی تواند انرژی جنبشی یک عنصر باردار را تغییر دهد.

میدان مغناطیسی می تواند جهت حرکت عنصر باردار را تغییر دهد ولی نمی تواند سرعتش را تغییر دهد.

۵-۱-۱ نیروی مغناطیسی روی کدی حامل جریان

وقتی جریانی در یک سیم کدی وجود داشته باشد و در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد متناسب با میدان مغناطیسی بر آن سیم نیروی مغناطیسی وارد می شود. همانطور که در شکل زیر مشاهده می کنید در صورتی که سیم بدون جریان در میدان مغناطیسی مطابق شکل قرار گرفته است و در نتیجه $F_m = 0$ می باشد و میدان مغناطیسی نیرویی بر سیم وارد نمی کند. حال اگر جریانی در سیم وجود داشته باشد میدان متناسب با جریان نیرویی بر سیم وارد می کند که جهت نیرو نیز متناسب با جهت میدان و جریان با استفاده از قانون دست راست بدست می آید.



یک جزء کوچک dl از یک رسانا را با سطح مقطع S در نظر می‌گیریم. اگر N حامل بار (الکترون‌ها) در واحد حجم با سرعت u_e در جهت dl حرکت می‌کنند، داریم

$$dQ = \rho_{ve} S\, dl = -NeS\, dl$$

نیروی مغناطیسی وارد بر جزء کوچک dl برابر می‌شود

$$dF_m = dQ\, \vec{u}_e \times \vec{B} = -NeS\, dl\, \vec{u}_e \times \vec{B}$$

$\vec{u}_e$ و dl با یکدیگر هم جهت هستند پس می‌توان در رابطه بالا یک جابجایی انجام داد

$$dF_m = -NeS\, u\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

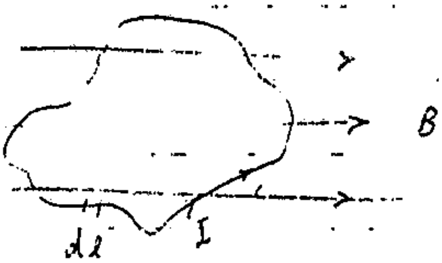
از آن جائیکه $S \rho_{ve} u_e$ - برابر جریان عبوری از سیم با سطح مقطع S می‌باشد داریم

$$dF_m = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \qquad (N)$$

پس، نیروی مغناطیسی وارد بر یک مدار کامل (بسته)، به صورتی که حامل جریان I در میدان مغناطیسی B است برابر می‌شود با:

$$F_m = I \oint_c d\vec{l} \times \vec{B}$$

بر اساس رابطه بالا می‌توان نتایج زیر را گرفت:



- نیروی مغناطیسی وارد بر یک حلقه بسته برابر صفر می‌شود

چرا که $\oint d\vec{l} = 0$ می‌گردد (البته در صورتیکه میدان مغناطیسی ثابت باشد)

- برای یک میدان مغناطیسی یکنواخت داریم

در واقع نیروی وارده به مسیر مستقیم از ابتدا به انتها بستگی دارد. از طرفی در حالت قبل که مسیر بسته بود a و b روی هم منطبق

افتاده بودند و در نتیجه $\oint dl = 0$ شده و $F_m = 0$ شده است.

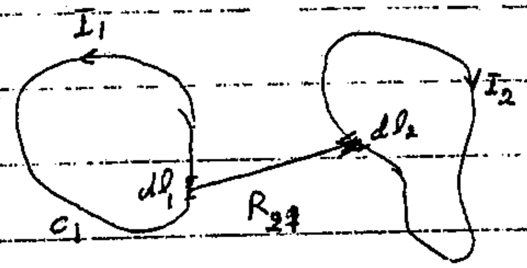
۲-۵ قانون بیوساوار

همانطور که در بررسی میدان های الکتریکی ساکن با استفاده از قانون کولن میدان الکتریکی ناشی از بار را یافتیم

در این بخش نیز با استفاده از قانون تجربی موسوم به قانون نیروی آمپر می توان میدان مغناطیسی ناشی

از جریان را یافت.

نیرویی که عنصر جریان $I_1 dl_1$ بر عنصر جریان $I_2 dl_2$ وارد می سازد برابر است با:



$$dF_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 \overline{dl_2} \times (I_1 \overline{dl_1} \times \hat{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2}$$

که R_{21} فاصله بین دو عنصر طول و $\hat{a}_{R_{21}}$ نیز بردار واحد

در جهت dl_1 به dl_2 می باشد.

حال با استفاده از رابطه بدست آمده در بخش قبل و مقایسه آن با نیروی وارد بر جزء جریان در این قسمت داریم

$$dF_{21} = I_2 \, dl_2 \times \overline{B}_1 \longrightarrow \overline{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I_1 \overline{dl_1} \times \hat{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2}$$

B_1 را می توان میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 در محل عنصر طول dl_2 دانست. با حذف اندیس ها از رابطه بالا

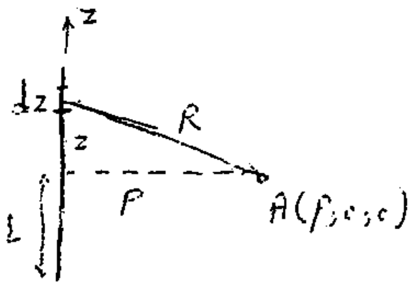
میدان مغناطیسی حاصل از جریان I در نقطه دلخواه P خواهد شد

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_c \frac{I\,dl\times\hat{a}_R}{R^2}$$

به این رابطه قانون بیو-ساوار می‌گویند، حال اگر بخواهیم یک رابطه کلی برای B بنویسیم داریم

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_c \frac{I\,d\vec{l}\times\vec{R}}{|R|^3} \qquad (T)$$

مثال: جریان مستقیم I از سیم مستقیمی به طول $2L$ می‌گذرد، چگالی شار مغناطیسی B را در نقطه‌ای به فاصله ρ از سیم در صفحه عمود منصف آن را بیابید



$$R=\rho\hat{a}_\rho - z\hat{a}_z$$

$$d\bar{l}\times\bar{R}=\hat{a}_z\,dz\times(\rho\hat{a}_\rho - z\hat{a}_z)=\hat{a}_\varphi\,\rho\,dz$$

در نتیجه داریم

$$\bar{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\bar{l}\times\bar{R}}{|R|^3}=\hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\rho\,dz}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}=\hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 I\,l}{2\pi\rho\sqrt{l^2+\rho^2}}$$

اگر طول سیم بی‌نهایت باشد در نتیجه داریم

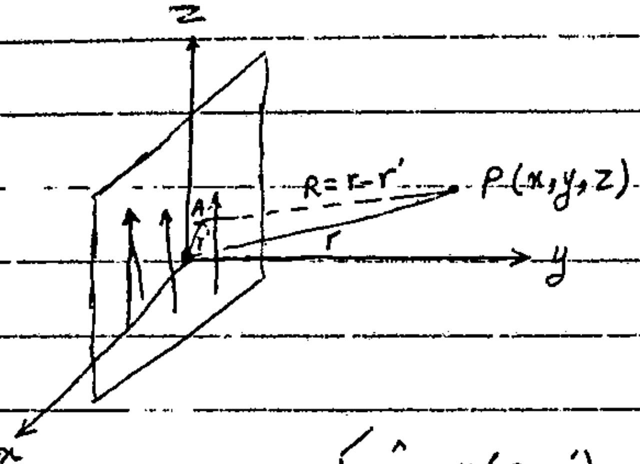
$$\bar{B}=\lim_{l\to\infty}\frac{\mu_0 I\,l\,\hat{a}_\varphi}{2\pi\rho\sqrt{l^2+\rho^2}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{a}_\varphi$$

نکته: درصورتی که به جای جریان خطی I، دارای جریان سطحی یا جریان حجمی باشیم، میدان مغناطیسی

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{s'}\frac{\bar{J}_s\times\hat{a}_R}{R^2}\,ds' \qquad B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J_v\,dv\times\bar{R}}{|R|^3}$$

می‌شود.

مثال ۷: یک صفحه ی نامتناهی جریان با چگالی توزیع $J = J_{s0}\hat{a}_z$ مفروض است. صفحه جریان را مطابق شکل منطبق بر صفحه xz در نظر می گیریم. میدان مغناطیسی ناشی از این صفحه جریان را در تمام نقاط فضا محاسبه نمائید.



عنصر جریانی در نقطه $A(x', y')$ واقع در صفحه جریان در نظر می گیریم در نتیجه

$$dB = \frac{\mu_0 J_{s0}}{4\pi}\frac{\hat{a}_z \times R}{|R|^3}dx'dy'$$

که $\hat{a}_z \times (r - r') = \hat{a}_z \times [(x-x')a_x + (y-y')a_y + (z-z')a_z]$

$$= -y\,\hat{a}_x + (x-x')\,a_y \qquad (y'=0)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_{s0}}{4\pi}\left\{\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{-y\hat{a}_x\, dx'dz'}{[(x-x')^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}} + \iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-x')\hat{a}_y\, dx\,dz}{[(x-x')^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}}\right\}$$

در جمله دوم برای اینکه عبارت زیر انتگرال تابع فردی از $x-x'$ می باشد، انتگرال صفر است. پس انتگرال اول می شود

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} -y\,\hat{a}_x\, dz'(u) \quad \text{که} \quad u = \left.\frac{-(x-x')}{[y^2+(z-z')^2][(x-x')^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}}\right|_{-\infty}^{\infty}$$

$$u = \frac{2}{y^2+(z-z')^2}$$

$$I_1 = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-y\,\hat{a}_x}{y^2+(z-z')^2}dz' = \hat{a}_x\frac{2y}{|y|}\tan^{-1}\left(\frac{z-z'}{|y|}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{2\pi y}{|y|}\hat{a}_x$$

پس

$$B = \begin{cases}(-\mu_0 J_{s0}/2)\,\hat{a}_x & y>0\\ (\mu_0 J_{s0}/2)\,\hat{a}_x & y<0\end{cases}$$

میدان مغناطیسی یک صفحه بینهایت جریان با چگالی ثابت همواره یکنواخت ولی در دو جهت مخالف در طرفین صفحه می باشد

۳.۵ معادلات مگنتواستاتیک ماکسول

در صورتیکه در معادلات ماکسول تغییرات نسبت به زمان را صفر کنیم معادلات مگنتواستاتیک حاصل می شود.

۵-۳-۱ قانون گوس برای مغناطیس

در فصل پیش قانون گوس را برای چگالی شار الکتریکی ارائه نمودیم که فرم نقطه ای و انتگرالی آن بدین صورت بود که:

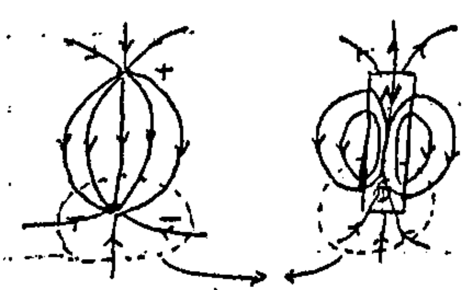
$$\nabla \cdot D = \rho_v \quad \longleftrightarrow \quad \oint_s D \cdot ds = Q$$

ولی در مغناطیس فرم نقطه ای این قانون می شود $\nabla \cdot B = 0$

با گرفتن انتگرال حجمی از این معادله و بکارگیری قضیه دیورژانس داریم $\oint_s B \cdot ds = 0$

که در آن، انتگرال سطحی روی سطح مرزی یک حجم دلخواه انجام می گیرد. این معادلات نشان می دهد که هیچ منبع نقطه ای برای شار مغناطیسی نداریم و خطوط شار مغناطیسی همیشه در خود بسته می شوند. این معادله را رابطه قانون بقای شار مغناطیسی نیز می نامند چرا که نشان می دهد که شار مغناطیسی خروجی کل از هر سطح بسته صفر است.

تفاوت قانون گوس برای الکتریسته و مغناطیس تفاوت در خطوط میدان است. خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت شروع و به بار منفی ختم می شوند و در اطراف یک بار حلقه ای از میدان تشکیل نمی شود، درحالیکه خطوط میدان مغناطیسی



درنتیجه در یک حلقه بسته کل شار مغناطیسی ورودی و خروجی برابر شده و صفر می گردد.

۵-۳-۲ قانون آمپر

در مگنتواستاتیک داریم (J چگالی جریان) $\nabla \times B = \mu_0 J$

شکل انتگرالی رابطه بالا را می توان با انتگرال گیری از دو طرف آن روی یک سطح باز و اعمال قضیه استوکس

بدست آورد. $\int_s (\nabla \times B) \cdot ds = \mu_0 \int_s J \cdot ds \longrightarrow \oint_c B \cdot dl = \mu_0 I$

که در آن c مسیر در انتگرال خطی، مسیر محصور کننده سطح s، و I کل جریان گذرنده از s می باشد. جهت مسیر و جهت جریان از قاعده دست راست تبعیت می کنند. به این رابطه قانون مداری آمپر گویند که بیان می دارد که گردش چگالی شار مغناطیسی در فضای آزاد، به دور هر مسیر بسته، برابر با حاصلضرب μ در کل جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است.

ساده ترین روش برای محاسبه میدان مغناطیسی استفاده از قانون آمپر می باشد البته در صورتیکه مسئله دارای تقارن باشد:

۱) در دستگاه مختصات مستطیلی اگر چگالی توزیع جریان فقط تابعی از یک مختصه مثلاً y، باشد میدان مغناطیسی حاصل از مولفه $\hat{a}_z$ چنین جریانی فقط دارای مولفه $\hat{a}_x$ خواهد بود.

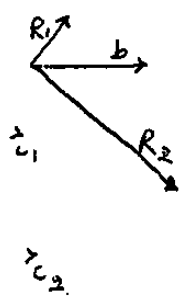
۲) در دستگاه مختصات استوانه ای اگر چگالی توزیع جریان مستقل از ϕ و z باشد یا به عبارتی فقط تابعی از ρ باشد

میدان مغناطیسی حاصل از مولفه $\hat{a}_z$ چنین جریانی فقط دارای مولفه $\hat{a}_\varphi$ خواهد بود

۳) در دستگاه مختصات کروی اگر چگالی توزیع جریان مستقل از θ و φ یا به عبارت دیگر فقط تابعی از R باشد،

میدان مغناطیسی حاصل از مولفه $\hat{a}_R$ چنین جریانی فقط دارای مولفه $\hat{a}_\varphi$ خواهد بود.

مثال: یک هادی مستقیم بی نهایت طویل، با مقطع مدور به شعاع b، جریان دائم I را حمل می کند. چگالی شار مغناطیسی را درون و بیرون هادی تعیین کنید.



این مسئله دارای تقارن استوانه ای است و استفاده از قانون آمپر دارای مزیت است. اگر هادی را در امتداد محور z قرار دهیم، چگالی شار مغناطیسی B در جهت φ بوده و در امتداد هر مسیر دایره ای به دور محور z، ثابت خواهد بود

الف) در درون هادی:

$$B_1 = a_\varphi B_{\varphi_1} \quad , \quad dl = a_\varphi R_1 d\varphi$$

$$\oint_{c_1} B_1 \cdot dl = \int_0^{2\pi} B_{\varphi_1} R_1 d\varphi = 2\pi R_1 B_{\varphi_1}$$

و کل جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط c_1:

$$I_1 = \frac{\pi R_1^2}{\pi b^2} I = \left(\frac{R_1}{b}\right)^2 I$$

و طبق قانون آمپر داریم

$$B_1 = a_\varphi B_{\varphi_1} = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 R_1 I}{2\pi b^2} \qquad R_1 < b$$

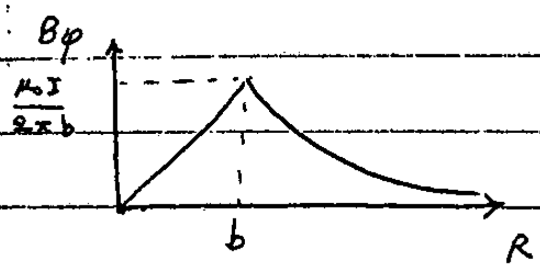
ب) بیرون هادی:

$$B_2 = a_\varphi B_{\varphi_2} \quad , \quad dl = a_\varphi R_2 d\varphi$$

که مسیر C_2 در بیرون کل جریان را در بر می گیرد.

$$B_2 = a_\varphi B_{\varphi_2} = a_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

نمودار B_φ بر حسب R می شود



توجه ۱: اگر یک لوله مدور بسیار نازک حامل جریان سطحی داشته باشیم طبق قانون آمپر میدان درون لوله می شود $B=0$

در بیرون لوله هم مشابه همین رابطه خواهد بود.

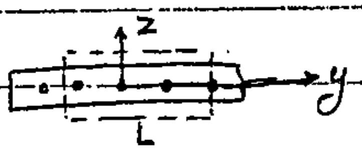
$$B_2 = \hat a_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2} = \hat a_\varphi \frac{\mu_0 (\overbrace{2\pi b J_s}^{I})}{2\pi R}$$

(J_s چگالی جریان سطحی)

$$B = \begin{cases} 0 & R < b \\ \hat a_\varphi \dfrac{\mu_0 b}{R} J_s & R > b \end{cases}$$

توجه ۲: جواب محاسبه شده در این مثال مشابه جواب محاسبه چگالی شار مغناطیسی برای سیم مستقیم I با طول بینهایت که در بخش قانون بیو-ساوار ارائه شده، می باشد.

مثال: صفحه x-y شامل جریان صفحه ای با چگالی جریان سطحی $J_s = \hat a_x J_s$ می باشد. میدان مغناطیسی H را در هر نقطه ای از فضا بیابید



طبق قاعده دست راست برای جریان ای در جهت x داریم

$$H = \begin{cases} -\hat a_y H & z > 0 \\ \hat a_y H & z < 0 \end{cases}$$

با درنظر حلقه جریان در بالا داریم

$$\oint_c H \cdot dl = 2HL = J_s L$$

$$H = \begin{cases} -\dfrac{J_s}{2} \hat a_y & z > 0 \end{cases}$$

۴-۵ پتانسیل مغناطیسی برداری

چون دیورژانس B برابر صفر است، B سلونوئیدی است و در نتیجه B را می توان به صورت کرل یک میدان برداری دیگر چون A بیان کرد.

$$B = \nabla \times A \quad (T)$$

میدان برداری A، پتانسیل مغناطیسی برداری نامیده می شود. بدین سبب اگر در مورد یک توزیع جریان، A را بیابیم با کرل گرفتن از آن می توان B را محاسبه نمود. (این مسئله شبیه میدان الکتریکی است که کرل آن صفر بود و برابر $E = -\nabla V$ می شد). طبق قضیه هلمولتز برای تعریف یک بردار باید کرل و دیورژانس آن را مشخص کنیم. پس باید یک رابطه ای برای $\nabla \cdot A$ نیز ($\nabla \times A$ که برابر B است) بدست آوریم.

ابتدا از طرفین معادله بالا کرل می گیریم

$$\nabla \times B = \nabla \times \nabla \times A = \mu_0 J \quad *$$

طبق تعریف لاپلاسین یک بردار

$$\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times \nabla \times A$$

که $\nabla^2 A = \nabla^2 A_x \hat{a}_x + \nabla^2 A_y \hat{a}_y + \nabla^2 A_z \hat{a}_z \quad \square$

پس * می شود

$$\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \mu_0 J$$

برای ساده کردن این معادله فرض می کنیم

$$\nabla \cdot A = 0 \longrightarrow \nabla^2 A = -\mu_0 J$$

این رابطه، معادله برداری پواسن است. که به صورت زیر با توجه به □ می شود

هرکدام از این سه معادله از نظر ریاضی مشابه معادله پواسن در الکتریسیته ساکن می باشد $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

که دارای جواب خاص روبرو بود $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} \frac{\rho}{R} dv'$

پس می توان نوشت (قضیه دوگان) $A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J_x}{R} dv'$

در واقع به جای حل مسئله از جوابهای بدست آمده در بخش ای تبل استفاده نمودیم. جواب کلی می شود

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J}{R} dv' \quad (Wb/m) \quad A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J_s\, ds}{R} \quad * \quad A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, dl}{R}$$

پس با کرل گرفتن از این رابطه چگالی شار مغناطیسی بدست می آید. شار مغناطیسی Φ می شود

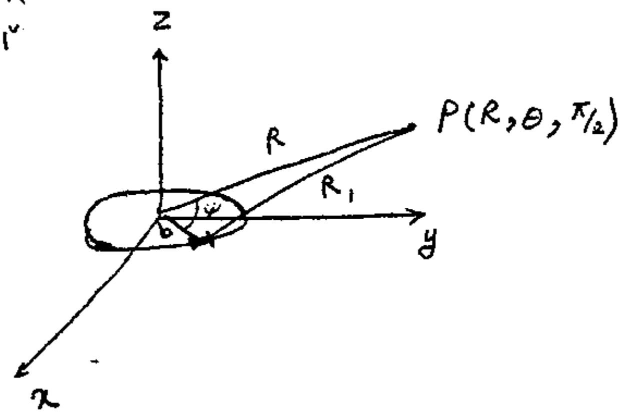
$$\Phi = \int_s B \cdot ds = \int_s (\nabla \times A) \cdot ds = \oint_c A \cdot dl$$

یعنی انتگرال خطی پتانسیل مغناطیسی برداری به دور مسیر بسته برابر کل شار مغناطیسی که از درون از سطح محصور شده توسط آن میر است.

مثال: چگالی شار مغناطیسی در فاصله‌ی دور از یک حلقه دایره ای کوچک به شعاع b و حامل جریان I (یک دو قطبی مغناطیسی) را پیدا کنید؟

مرکز حلقه را مبدأ مختصات کروی انتخاب می کنیم. مختصات منبع را پریم دار نشان می دهیم. A را حساب و با کرل گرفتن از آن B را بدست می آوریم. می دانیم $A = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} \frac{dl'}{R_1}$

R_1 فاصله عنصر کوچک از حلقه تا نقطه مشاهده P است.



به دلیل تقارن، میدان مغناطیسی مستقل از φ است که

برای راحتی نقطه مشاهده را در صفحه yz در نظر می‌گیریم

نکته مهم آن است که $\hat{a}_{\varphi'}$ در dl' مشابه $\hat{a}_\varphi$ در نقطه P نیست. $\hat{a}_\varphi$ در P برابر $-\hat{a}_x$ است

$$dl' = (-a_x \sin\varphi' + a_y \cos\varphi')\, b\, d\varphi'$$

به ازای هر $I\,dl'$، جزء کوچک جریان دیفرانسیلی متقارن آن، در طرف دیگر محور y وجود دارد که در جهت $-\hat{a}_x$

به مقدار برابری روی A اثر می‌گذارد، ولی سهم $I\,dl'$ را در جهت $\hat{a}_y$ خنثی می‌نماید. پس

$$A = -a_x \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{b \sin\varphi'}{R_1}\, d\varphi' = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\varphi'}{R_1}\, d\varphi'$$

که

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\psi = R^2 + b^2 - 2bR \sin\theta \sin\varphi'$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)^{-1/2}$$

از آنجائیکه $R^2 >> b^2$ است پس $\frac{b^2}{R^2} << 1$ می‌شود پس

$$\frac{1}{R_1} \simeq \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)$$

پس با جایگذاری این عبارت در A داریم

$$A = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 I b}{2\pi R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)\sin\varphi'\, d\varphi'$$

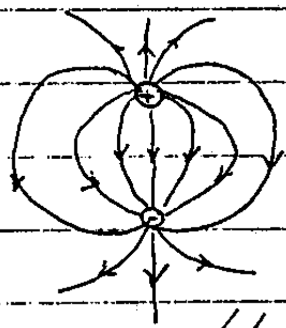
که می‌شود

$$A = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2}\sin\theta$$

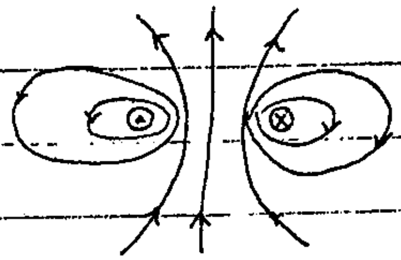
چگالی شار مغناطیسی برابر $B=\nabla\times A$ است پس داریم

$$B=\frac{\mu_0 I b^2}{4R^3}\left(\hat a_R 2\cos\theta+\hat a_\theta \sin\theta\right)$$

چگالی شار مغناطیسی محاسبه شده توسط این دوقطبی مغناطیسی مانند چگالی شار الکتریکی ناشی از دوقطبی الکتریکی است که در فصول قبل محاسبه شده است. البته در نزدیکی دوقطبی، خطوط شار مغناطیسی پیوسته هستند در حالیکه خطوط میدان یک دوقطبی الکتریکی در بار ختم می شوند و همیشه از بار مثبت به بار منفی می روند.



دوقطبی الکتریکی



دوقطبی مغناطیسی

پتانسیل مغناطیسی برداری را می توان بدین صورت نوشت

$$\boxed{A=\hat a_\phi\frac{\mu_0(I\pi b^2)}{4\pi R^2}\sin\theta}$$

که $A=\frac{\mu_0\, m\times\hat a_R}{4\pi R^2}$ wb/m $\qquad \bar m=a_z I\pi b^2=a_z IS=a_z m$

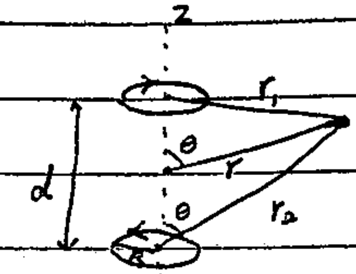
که $\bar m$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی است و برداری است که اندازه آن برابر با حاصلضرب جریان وارده در سطح حلقه بوده و جهتش هم سو با شست دست راست است وقتی که چهار انگشتان جهت جریان را دنبال نمایند.

بر اساس m می توان نوشت

$$B=\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(\hat a_R 2\cos\theta+\hat a_\theta \sin\theta\right)\quad (T)$$

که مشابه میدان الکتریکی برای دوقطبی الکتریکی است

سؤال: فاصله مرکز دو حلقه سیم دایروی مشابه از یکدیگر d بوده و جریان حلقه ها نظیر شکل مساوی و مختلف الجهت است. در فواصل بسیار دور از d، $r \gg R$، بردار پتانسیل با کدام گزینه متناسب است (ارشد برق ۸۰)



1) r^{-2} 2) r^{-3} 3) $r^{-3/2}$ 4) $r^{-5/2}$

چون در سؤال فاصله بسیار دور است پس با توجه به تقریب میدان دور r_1 و r_2 این زوایا را می توان θ گرفت. با توجه به اینکه جهت جریان حلقه ها مخالف است و نیز با استفاده از رابطه پتانسیل برداری دو قطبی مغناطیسی داریم

$$A=\frac{\mu_0 I \pi R^2}{4\pi r_2^2}\sin\theta-\frac{\mu_0 I \pi R^2}{4\pi r_1^2}\sin\theta$$

با تقریب $r_1^2=\left(r-\frac{d}{2}\cos\theta\right)^2$ و $r_2^2=\left(r+\frac{d}{2}\cos\theta\right)^2$ از طرفی

پس از ساده سازی و جایگذاری داریم

$$A=\frac{\mu_0 I \pi R^2 \sin\theta}{4\pi}\,\frac{4r\,\frac{d}{2}\cos\theta}{\left(r^2-\frac{d^2}{4}\cancel{\cos^2\theta}\right)^2}\propto\frac{r}{r^4}\propto r^{-3}$$

0

اگر در همین تست جهت جریان حلقه ها یکی بود، پاسخ چه می شد؟ در عبارت بالا برای A به جای منفی، مثبت می گذاریم و در نتیجه آن $A\propto r^{-2}$ می شود. انتظار وقتی خیلی دور می شویم، دو حلقه مشابه به هم چسبیده و تشکیل یک حلقه می دهند و برای یک حلقه نیز پتانسیل مغناطیسی برداری متناسب $\frac{1}{r^2}$ می باشد.

تمرین: با استفاده از پتانسیل مغناطیسی برداری، قانون بیوساوار را اثبات کنید.
صفحه ۲۸۲ و ۲۸۳ چنگ

فصل ۶:

میدان مغناطیسی در مجاورت اجسام

در مغناطیس نیز وقتی میدان مغناطیسی را به اجسام اعمال می کنیم با توجه به خواص مغناطیسی اجسام الکترون ها و اتم ها تحت تأثیر میدان قرار می گیرند در این بخش به بررسی ماکروسکوپی و میکروسکوپی خواص مغناطیسی اجسام می پردازیم

۶-۱ خواص مغناطیسی اجسام

برای تشریح خواص مغناطیسی اجسام از مدل ساده شده اتم استفاده می کنیم. براساس چنین مدلی، در هر اتم الکترونها در مدارهای دایره شکلی به دور هسته گردش می کنند و در عین حال هر الکترون حول محوری به دور خود نیز می چرخد این حرکات الکترون که به شبیه حرکات انتقالی و وضعی کره زمین هستند را به ترتیب حرکت مداری و حرکت چرخشی می نامیم علاوه بر الکترون ها، هسته نیز به نوبه خود حرکت چرخشی دارد، از آن جا که حرکات ذرات باردار ایجاد جریان الکتریکی می کند، حرکات مداری و چرخشی ذرات اتم را می توان به منزله حلقه های جریان و به تعبیر دیگر به عنوان دوقطبی های مغناطیسی با گشتاورهایی در مقیاس اتمی دانست

هسته اتم به دلیل جرم سنگینش دارای سرعت چرخشی به مراتب کوچکتر از سرعت چرخش الکترون است و در نتیجه از گشتاور مغناطیسی هسته در مقابل گشتاور چرخشی الکترون می توان صرفنظر کرد.

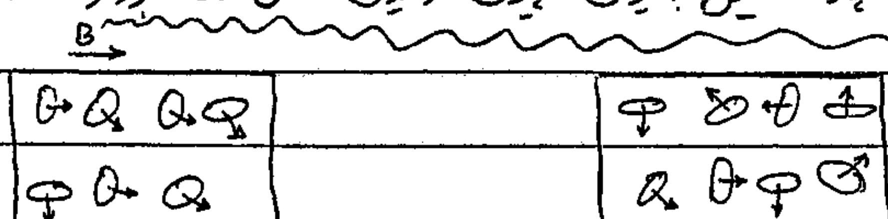
وقتی جسمی تحت یک میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرد پدیده‌ای مغناطیسی با توجه به خواص جسم می‌تواند در آن بروز نماید که جسم را از نظر خاصیت مغناطیسی به اسم آن پدیده نامگذاری می‌کنند

۶-۱-۱ دیامغناطیس

- میدان مغناطیسی کل هر اتم در غیاب میدان خارجی صفر است.
- اعمال میدان خارجی، تغییرات در حرکت مداری و حرکت الکترون به دور هسته را ایجاد می‌کند
- میدان خارجی موجب مغناطیس شدن جسم در اتم می‌شود
- این مغناطیس شدن اتم‌ها، منشأ میدان مغناطیسی ثانویه برخلاف جهت میدان خارجی است
- میدان در اجسام دیامغناطیس، به میزان بسیار ناچیزی از میدان اعمال شده کوچکتر است $\mu_r < 1$

۶-۱-۲ پارامغناطیس

- هریک از اتم‌ها حتی در غیاب میدان مغناطیسی خارجی دارای ممان خالص غیرصفر هستند
- این ممان غیرصفر ناشی از فردی ممان‌های چرخشی و حرکت الکترون به دور خودش و ممان مداری الکترون ...
- اعمال میدان خارجی، به طور نسبی این ممان‌ها را هم‌جهت میدان اعمالی می‌کنند
- میدان در اجسام پارامغناطیس به میزان ناچیزی از میدان اعمالی شده بزرگتر است $\mu_r > 1$

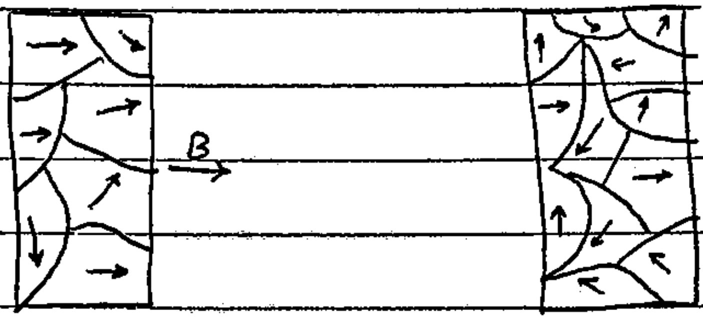


۶-۱-۳ فرومغناطیس

- تحت تاثیر میدان خارجی به میزان بسیار زیادی در جهت میدان اعمال شده مغناطیسی می شوند !!!

- میدان مغناطیسی در این اجسام به مراتب بزرگتر از میدان اعمالی است.

پس از برداشتن میدان خارجی نیز این اجسام دارای حالت حفظ مغناطیس شدگی خودی می باشند مانند آهن ربا



۶-۱-۴ ضد فرومغناطیس و فری مغناطیس

این اجسام در مجاورت میدان مغناطیسی نیز تاثیری نمی پذیرند

در نتیجه به جز در اجسام ضد فرومغناطیسی، اعمال میدان به پیدایش یک گشتاور مغناطیسی با مقدار متوسط غیرصفر در جسم می انجامد. پیدایش گشتاور مغناطیسی در جسم را تحت تاثیر یک میدان خارجی مغناطیس شدن یا قطبی شدن مغناطیسی جسم می نامیم. مغناطیس شدن یک جسم در میدان مغناطیسی نظیر قطبی شدن یک عایق در میدان الکتریکی است

۶-۲ میدان مغناطیسی در حضور اجسام

همچون مباحث الکترواستاتیک که از مفهوم میدان الکتریکی، بار سطحی و حجمی ناشی از قطبش های الکتریکی در جسم تولید می شد در مگنتواستاتیک هم نظیر آن گفته شد تحت تاثیر میدان مغناطیسی جسم به دو قطبی حالت قطبی شدن مغناطیسی می گیرد که تاثیر بردار مغناطیس شدگی $\bar{M}$ معادل چگالی جریان حجمی و سطحی زیر می باشد

$$\boxed{J_m = \nabla \times \bar{M}} \qquad (A/m^2)$$

$$\boxed{J_{ms} = M \times \hat{a}_n} \qquad (A/m)$$

جریان های مقید مغناطیسی همانند جریان های آزاد الکتریکی تولید میدان مغناطیسی می کنند. بنابراین شکل نقطه ای قانون آمپر می شود

$$\nabla \times B = \mu_0 (J + J_m)$$

که J چگالی جریان آزاد و $J_m = \nabla \times M$ می باشد

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \nabla \times \bar{M}$$

$$\text{یا} \quad \nabla \times \left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) = J$$

اکنون یک کمیت اساسی میدان، شدت میدان مغناطیسی $\bar{H}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\boxed{\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}} \qquad (A/m) \longrightarrow \boxed{\nabla \times H = J}$$

یا تعریف انتگرالی آن می شود

$$\oint H \cdot dl = I$$

اهمیت H در آن است که فقط به چگالی جریان آزاد بستگی دارد.

در اجسام خطی و همسانگرد بردار M را می توان برحسب $\bar{H}$ یا $\bar{B}$ توسط یک رابطه خطی بیان کرد.

$$\bar{M} = \chi_m H = \frac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}\bar{B}$$

که χ_m ضریب حساسیت مغناطیسی جسم نامیده می‌شود. پس داریم

$$B = \mu_0(\bar{H}+\bar{M}) = \mu_0 \underbrace{(1+\chi_m)}_{\mu_r} H = \boxed{\mu_0\mu_r\bar{H} = \mu\bar{H}}$$

که μ_r را قابلیت نفوذ نسبی و μ را قابلیت نفوذ جسم می‌نامند.

نکته:

برای اجسام دیامغناطیس $\chi_m < 0$ $\mu_r < 1$

" " پارامغناطیس $\chi_m > 0$ $\mu_r > 1$

" " فرومغناطیس $\chi_m \gg 1$ $\mu_r \gg 1$

مثال: ناحیه $a < \rho < b$ در مختصات استوانه‌ای که یک ماده مغناطیسی که قابلیت نفوذپذیری نسبی آن μ_r است پر شده است. یک رشته سیم حامل جریان I در امتداد محور استوانه (محور z) قرار داده می‌شود. میدان‌های B و H را در تمام نقاط فضا و چگالی‌های جریان‌های مغناطیسی را در درون و روی سطوح ماده مغناطیسی حساب کنید.

به دلیل وجود تقارن استوانه‌ای نسبت به محور z و بی‌نهایت بودن طول استوانه، میدان مغناطیسی مستقل از φ و z بوده و در هر نقطه دارای مولفه $\hat{a}_\varphi$ می‌باشد، یعنی $H = H_\varphi \hat{a}_\varphi$. قانون آمپر می‌دهد

$$\oint H \cdot dl = I = H_\varphi(2\pi\rho)$$

$$H = H_\varphi \hat{a}_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{a}_\varphi$$

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}$$ (H مستقل از μ_r می باشد)

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \mu_r}{2\pi\rho} I \hat{a}_\varphi & a<\rho<b \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{a}_\varphi & 0<\rho<a ,\ \rho>b \end{cases}$$

بر اساس B و H به راحتی می توان چگالی گشتاور دو قطبی مغناطیسی M را در ناحیه $a<\rho<b$ به دست آورد

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \left(\frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi\rho\mu_0} - \frac{I}{2\pi\rho}\right)\hat{a}_\varphi = \frac{(\mu_r - 1)}{2\pi\rho} I \hat{a}_\varphi$$

با داشتن M، چگالی های جریان های مغناطیسی می شوند

$$J_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n = \begin{cases} \dfrac{(\mu_r-1)}{2\pi a} I \hat{a}_\varphi \times (-\hat{a}_\rho) = \dfrac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a}\hat{a}_z & \rho = a \\ \dfrac{(\mu_r-1)}{2\pi b}\hat{a}_\varphi \times (\hat{a}_\rho) = -\dfrac{(\mu_r-1)}{2\pi b}\hat{a}_z & \rho = b \end{cases}$$

$$J_m = \nabla \times M = -\frac{\partial M_\varphi}{\partial z}\hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho M_\varphi)\hat{a}_z = 0$$

مثال: بردار مغناطیس شدگی در حجم کره ای به شعاع R به صورت $M = M_0 \hat{a}_z$ (M_0 ثابت است) داده شده است. میدان $\bar{H}$ در مرکز کره حقیقی است؟ (ارشد برق ۸۴)

1) $\dfrac{M_0}{3}\hat{a}_z$ 2) $-\dfrac{M_0}{3}\hat{a}_z$ 3) $-\dfrac{2M_0}{3}\hat{a}_z$ 4) $\dfrac{2M_0}{3}\hat{a}_z$

چگالی جریان های مقید می شود

$\bar{J}_m = 0$

$J_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_R = M_0\, \hat{a}_z \times \hat{a}_R = M_0 \sin\theta\, \hat{a}_\varphi$

اکنون با استفاده از قانون بیوساوار و میدان ناشی از حلقه جریان، میدان را پیدا می کنیم.

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{J_s \times R}{R^3}\,ds = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{M_0 \sin\theta\,(2\pi R\, d\theta)}{R^3}\,(R\sin\theta)^2\,\hat{a}_z$$

$$\bar{B} = \hat{a}_z\,\mu_0\,\frac{M_0}{2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{2\mu_0 M_0}{3}\,\hat{a}_z$$

$$\bar{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{2}{3} M_0 \hat{a}_z - M_0 \hat{a}_z = -\frac{1}{3} M_0 \hat{a}_z$$

چگونه می توان در فضای کروی بالا میدان یکنواختی ایجاد نمود؟

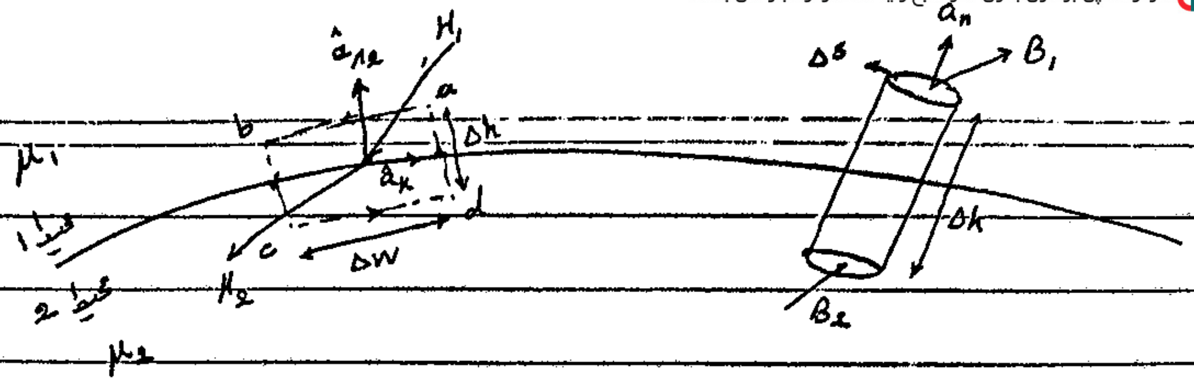
۶-۳- شرایط مرزی میدان های مغناطیسی ساکن

برای بررسی رفتار میدان مغناطیسی در مجاورت مرز مشترک دو ناحیه با قابلیت های نفوذ متفاوت از روشی مشابه آن چه در مورد میدان های الکتریکی داشتیم استفاده می کنیم.

شرط مرزی مولفه های مماسی میدان مغناطیسی ساکن از شکل انتگرالی معادله کرل H بدست می آید

$$\oint H \cdot dl = I$$

مطابق شکل صفحه بعد در صورتی که روی مسیر بسته $abcda$ انتگرال بگیریم و $\Delta h \to 0$ (یک روی مرز داخل سطح باشیم)



$$\oint_{abcda} H\cdot dl = H_1\cdot \Delta W + H_2\cdot(-\Delta W) = J_{sn}\,\Delta W$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{sn} \qquad (A/m)$$

که در آن J_{sn} چگالی جریان سطحی روی فصل مشترک، عمود بر مسیر بسته است. جهت J_{sn}، جهت شست دست راست است اگر سایر انگشتان دست جهت مسیر را دنبال کنند. مطابق شکل، جهت مثبت J_{sn}، به ازای مسیر انتخاب شده، به سمت خارج از صفحه کاغذ است. رابطه زیر عبارت جامع تری برای شرط مرزی مولفه های مماسی H، شامل روابط مربوط به اندازه و جهت، هر دو می باشد

$$a_{n2}\times(\bar H_1 - \bar H_2) = J_s$$

(برای حالت کلی این رابطه داریم

$$(H_1 - H_2)\cdot \Delta W = J_s\cdot \hat a_m\,\Delta W$$

که داریم

$$\overline{\Delta L} = \Delta L\,\hat a_k \quad , \quad \hat a_k = \hat a_n \times \hat a_n$$

$$(\hat a_n \times \hat a_{n_2})\cdot(H_1 - H_2)\,\Delta W = J_s\cdot \hat a_m\,\Delta L$$

بر اساس اتحاد $(A\times B)\cdot C = (B\times C)\cdot A$ داریم

$$[a_{n_2}\times(H_1 - H_2)]\cdot \hat a_n = J_s\cdot \hat a_n \longrightarrow \hat a_{n_2}\times(\bar H_1 - \bar H_2) = J_s$$

پس مولفه مماسی میدان H در عبور از فصل مشترکی که یک جریان سطحی آزاد در آن وجود دارد، ناپیوسته است.

معمولاً، مولفه‌ی مماسی H در عبور از مرز تقریباً تمامی محیط‌های فیزیکی پیوسته است (چراکه غالباً J برابر صفر است) و تنها وقتی ناپیوسته است که فصل مشترک بین دو رسانای کامل ایده‌آل یا ابررسانا در نظر گرفته شود.

برای تعیین رابطه بین مولفه‌ی عمودی میدان B در مرز دو ناحیه، یک سطح استوانه‌ای شکل با ارتفاع Δh و مساحت قاعده ΔS در نظر می‌گیریم، داریم

$$\oint B \cdot dS = 0$$

$\Delta h \to 0$ (تا قاعده‌ها روی مرز قرار بگیرند)

$$B_2 \cdot \Delta S - B_1 \cdot \Delta S = 0 \quad \text{یا} \quad \hat{a}_n \cdot (B_2 - B_1)\Delta S = 0$$

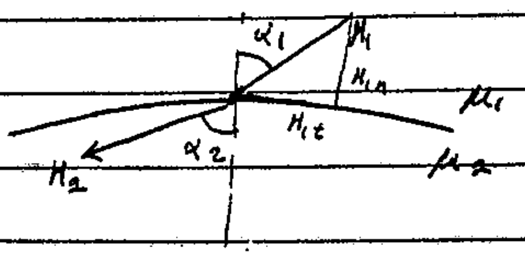
$$\hat{a}_n \cdot (B_2 - B_1) = 0 \quad \text{یا} \quad B_{2n} = B_{1n}$$

پس در هر نقطه روی مرز مشترک دو ناحیه، مولفه عمودی چگالی شار مغناطیسی همواره پیوسته است.

در محیط‌های خطی $\bar{B}_1 = \mu_1 \bar{H}_1$ و $\bar{B}_2 = \mu_2 \bar{H}_2$ می‌باشد، پس

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

مثال: دو محیط مغناطیسی با نفوذپذیری μ_1 و μ_2 مطابق شکل دارای مرز مشترکی هستند. اندازه و جهت شدت میدان مغناطیسی را در نقطه P_2 بر اساس H_1 تعیین کنید.



داریم

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$$

$$\mu_2 H_2 \cos\alpha_2 = \mu_1 H_1 \cos\alpha_1 \quad *$$

و برای مولفه ی مماسی هم داریم (چون J_s صفر است) $H_2 \sin\alpha_2 = H_1 \sin\alpha_1$ □

از تقسیم □ بر * داریم

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

برای محاسبه اندازه هم داریم

$$H_2 = \sqrt{H_{2t}^2 + H_{2n}^2} = \sqrt{(H_2\sin\alpha_2)^2 + (H_2\cos\alpha_2)^2}$$

با جایگذاری روابط * و □ داریم

$$H_2 = H_1\left[\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\cos\alpha_1\right)^2\right]^{1/2}$$

- روابط بالا کاملاً مشابه روابط مربوط به میدان های الکتریکی در محیط های دی الکتریک هستند فقط ε و μ جابجا شده اند

اگر محیط ۱، هوا و محیط ۲، فرومغناطیس (مثل آهن) باشد) آنگاه $\mu_2 \gg \mu_1$ خواهد شد و α_2 نزدیک به 90° می شود. یعنی به ازای هر زاویه دلخواه α_1 میدان مغناطیسی در محیط فرومغناطیس تقریباً به صورت موازی با مرز مشترک است.

- اگر محیط ۱ فرومغناطیس و محیط ۲ هوا باشد ($\mu_1 \gg \mu_2$) آنگاه α_2 به صفر میل خواهد کرد یعنی اگر میدان مغناطیسی از محیط فرومغناطیس آغاز شود، خطوط آن در هوا تقریباً عمود بر مرز مشترک به هوا خواهند رفت،

همانند رابطه دی الکتریک و هوا در الکترواستاتیک

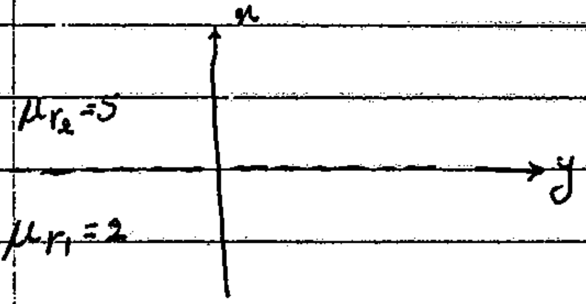
نکته: الف) اگر مرز دو ماده بر میدان مغناطیسی عمود باشد آنگاه $\vec{B}$ در دو محیط یکسان است $B_1 = B_2$

یعنی $\bar{B}$ فارغ از محیط است برای حل این مسائل از $\bar{B}$ استفاده می‌کنیم.

ب) اگر مرز دو ماده موازی میدان مغناطیسی باشد و جریان سطحی آزاد روی مرز صفر باشد، در این صورت H در دو محیط برابر است و برای حل مسئله از $\bar{H}$ شروع می‌کنیم

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_2$$

مثال: سطح مشترک دو ماده یکنواخت خطی و همسان در $x=0$ قرار دارد. جریان سطحی $K=5\hat{y}\left(\frac{A}{m}\right)$ در سطح مشترک جاری است. اگر $\bar{H}_1 = 4\hat{x} - 10\hat{y} + 6\hat{z}$ باشد، مقدار $\bar{H}_2$ کدام است (ارشد برق ۸۲)



از شرایط مرزی داریم

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

مولفه عمود بر مرز محیط ① می‌شود H_{x1} پس

$$\mu_1 H_{x1} = \mu_2 H_{x2}$$

$$H_{x2} = \frac{2\times 4}{5} \longrightarrow H_{x2} = 1.6$$

برای مولفه‌های مماسی داریم

$$\hat{n}_2 \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = J_s$$

$$\hat{x} \times \left[H_{2x}\hat{x} + H_{2y}\hat{y} + H_{2z}\hat{z} - H_{1x}\hat{x} - H_{1y}\hat{y} - H_{1z}\hat{z}\right] = 5\hat{y} = \vec{K}$$

$$\hat{z}(H_{2y} - H_{1y}) + \hat{y}(H_{1z} - H_{2z}) = 0\,\hat{z} + 5\hat{y}$$

پس $H_{2y} = -10$, $H_{2z} = +1 \longrightarrow H_2 = 1.6\hat{x} - 10\hat{y} + \hat{z}$

۶-۲ خودالقایی و القای متقابل

میزان شار گذرنده از یک حلقه را می‌توان نوشت $\varphi = B\cdot S = BS\cos\alpha$

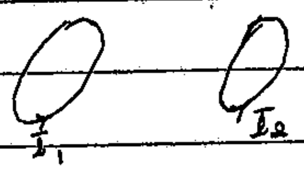
یا $\varphi = \int B\cdot ds$

حال اگر دو حلقه جریان داشته باشیم که در مجاورت یکدیگر قرار دارند عبور جریان I_1 موجب می‌گردد که شار φ_{11} در محل خود حلقه اول ایجاد گردد. این شار همچون چگالی شار مغناطیسی وابسته به I می‌باشد

و این چنین تعریف می‌شود L_1 ثابت φ_{11} که به L ضریب خودالقایی یا سلف گفته می‌شود $L_1 = \frac{\varphi_{11}}{I}$

از طرفی I_1 ایجاد شاری در حلقه دوم می‌کند که این شار نیز وابسته به جریان است $\varphi_{21} = M I_1$

M را ضریب القای متقابل می‌نامند و می‌شود $M = \frac{\varphi_{21}}{I_1}$



روابط کلی شار در حلقه اول می‌شود

$$\varphi_1 = \underbrace{L_1 I_1}_{\varphi_{11}} + \underbrace{M I_2}_{\varphi_{12}}$$

$$\varphi_2 = \overbrace{M I_1}^{\varphi_{21}} + \overbrace{L_2 I_2}^{\varphi_{22}}$$

که البته

$M = M_{12} = M_{21}$ می‌باشد یا

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L_1 & M\\ M & L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\end{bmatrix}$$

می‌توان نوشت

مثال: یک خط انتقال هم‌محور دارای هادی داخلی توپری به شعاع a و هادی بیرونی بسیار نازکی به شعاع داخلی b است. اندوکتانس در واحد طول خط را تعیین کنید (جریان I با چگالی $J = J_0 \hat{a}_z$ از هادی مرکزی می‌گذرد)؟

با توجه به تقارن استوانه‌ای مسئله بر اساس قانون مداری آمپر داریم:

a) میدان در هادی داخلی $\rho < a$:

$$\oint B \cdot dl = \mu I$$

$$B_{\varphi_1}(2\pi\rho) = \mu \pi \rho^2 J_0 \longrightarrow B_1 = B_{\varphi_1} \hat{a}_\varphi = \frac{1}{2}\mu J_0 \rho \hat{a}_\varphi$$

برای محاسبه شار کل گذرنده از واحد طول هادی درونی که با جریان I پیوند داشته باشد، ابتدا مستطیل به طول واحد در جهت z و به عرض $d\rho$ در جهت φ به فاصله ρ از محور کابل در نظر می‌گیریم. شار گذرنده از این سطح مستطیلی عبارتست از:

$$d\psi_1 = B_1 \cdot dS_1 = \frac{1}{2}\mu J_0 \rho(1 \times d\rho) = \frac{1}{2}\mu J_0 \rho d\rho$$

اما $d\varphi$ تنها کسری از جریان را در بر می‌گیرد.

$$N = \frac{\pi\rho^2 J_0}{\pi a^2 J_0} = \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \qquad d\psi_1 = N d\varphi_1$$

برای بدست آوردن مقدار کل شاری که از هادی درونی گذشته و با جریان I پیوند داشته باشد داریم

$$\psi_1 = \int N d\varphi_1 = \int_0^a \frac{1}{2}\mu J_0 \rho \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 d\rho = \frac{1}{8}\mu J_0 a^2$$

b) میدان بین هادی داخلی و بیرونی $a < \rho < b$: بر اساس قانون مداری آمپر

$$\bar{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{a}_\varphi$$

شار گذرنده از سطح $ds_2 = l d\rho$ همه کل جریان را در بر می گیرد (پس $N = 1$ می گردد)

$$d\varphi_2 = B_2 \cdot ds_2 = \frac{\mu_0 I d\rho}{2\pi\rho}$$

$$\psi_2 = \int N d\varphi_2 = \int_a^b \frac{\mu_0 I d\rho}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(b/a)$$

و ضریب خود القایی می شود:

$$L = \frac{\psi_1 + \psi_2}{I} = \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

تمرین: اگر هادی درونی کابل به صورت یک استوانه توخالی به شعاع a باشد، L را بیابید؟

$$\frac{\mu_0}{4\pi} - \frac{a^2 \ln b/a}{2\pi(b^2 - a^2)}$$

۵-۴ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

بر اساس مجموعه ای از بارهای الکتریکی انرژی در میدان الکتریکی ذخیره می شد. اکنون بر اساس حلقه های جریان نیز انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی داریم. در واقع برای تشکیل حلقه های جریان باید کار انجام دهیم. به بیان دیگر اگر بخواهیم حلقه جریان داشته باشیم و بخواهیم جریان هر یک را از صفر تا مقدار معینی افزایش دهیم، برای رسیدن به این منظور باید مقداری انرژی صرف کرد. این انرژی در حقیقت همان انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی حاصل از این سیستم حلقه های جریان می باشد.

برای یک سلف داریم:

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$W_1 = \int V_1 i_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

$$W_1 = \frac{1}{2} I_1 \varphi_1$$

ضریب خودالقایی نیز $\frac{\varphi_1}{I_1}$ می‌باشد

حال اگر n حلقه داشته باشیم داریم

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} L_{jk} I_j I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \varphi_i$$

البته انرژی مغناطیسی را می‌توان بر حسب کمیات میدان نیز نوشت که روابط آن می‌شود

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} \bar{H} \cdot \bar{B}\, dv = \frac{1}{2} \int \frac{B^2}{\mu} dv' = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dv' \qquad (J)$$

که اگر چگالی انرژی مغناطیسی w_m را چنان تعریف کنیم که انتگرال حجمی آن معادل کل انرژی مغناطیسی باشد داریم

$$W_m = \int_{v'} w_m\, dv'$$

$$w_m = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (J/m^3)$$

توجه:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} A \cdot J\, dv'$$

مثال: با استفاده از انرژی ذخیره شده، اندوکتانس یک خط انتقال هم محور که دارای هادی داخلی توپر به شعاع a و هادی خارجی بسیار نازک با شعاع b است را در واحد طول تعیین کنید.

ابتدا B را حساب می‌کنیم (در مثال قبل محاسبه شده است)

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \hat{a}_\varphi & 0 < \rho < a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{a}_\varphi & a < \rho < b \\ \text{صفر} & \rho > b \end{cases}$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} B^2 \, \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^a \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\right)^2 \rho^3 d\rho + \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \frac{d\rho}{\rho}\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}[1][2\pi]\left[\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\right)^2 \frac{a^4}{4} + \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \ln(b/a)\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[1/4 + \ln(b/a)\right]$$

با مساوی قرار دادن W_m با $\frac{1}{2}LI^2$ ضریب خودالقایی کابل هم محور در واحد طول بدست می آید

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a)$$

مثال: چه مقدار انرژی باید مصرف کنیم تا جریان ثابت I در یک چنبره با هسته هوایی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با سطح مقطع مستطیلی a ـ b و h با N دور سیم پیچ برقرار شود (ارشد برق ۷۹)

پس از شکل قانون آمپر

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho}\hat{a}_\varphi$$

$$W_m = \int_V \frac{1}{2}\mu_0 |H|^2 dv = \int \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4\pi^2 \rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

$$W_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln b/a$$

فصل ۷ : میدان های متغیر با زمان

قانون القای فارادی

آن چه تاکنون خوانده‌ایم در واقع الکتریسیته یا مغناطیس بوده نه الکترومغناطیس. در فصول گذشته صرفاً حالات استاتیک را بررسی کردیم در حالیکه الکترومغناطیس یعنی اینکه از الکتریسیته به مغناطیس برسیم و برعکس.

قانون فارادی می‌گوید: تغییر شار مغناطیسی ایجاد نیروی محرکه الکتریکی می‌کند (یعنی از مغناطیس به الکتریک برسیم)

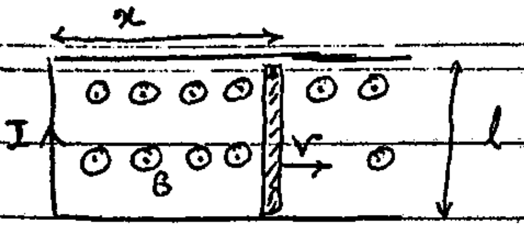
$$emf = \mathcal{E} = \frac{-\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

علامت منفی بر اساس قانون لنز می‌باشد که جریان القایی ($i = \frac{\mathcal{E}}{R}$) به گونه‌ای است که با عامل به وجود آورنده‌اش مخالفت می‌کند. اگر نیروی محرکه القایی لحظه‌ای را بخواهیم $\frac{-d\varphi}{dt}$ را می‌نویسیم و اگر نیروی محرکه القایی متوسط را بخواهیم طبیعتاً از $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{t_2-t_1}$ استفاده می‌کنیم.

توجه: برای ایجاد نیروی محرکه القایی باید شار مغناطیسی تغییر کند (B یا S یا α)

$$\varphi = BS\cos\alpha$$

مثلاً در یک قاب جریان که میدان مغناطیسی درون آن هست



با حرکت میله متحرک سطح در برگیرنده B تغییر می کند

$$\mathcal{E} = \frac{-d\varphi}{dt} = \frac{-d}{dt}(B\,l\,x \sin 90)$$

$$\xrightarrow{x = vt} \mathcal{E} = -B\,l\,v$$

حال اگر در حالت کلی حلقه نسبت به B ثابت زاویه داشته باشد

$$\mathcal{E} = l.(V \times B) = B\,v\,l \sin\theta$$

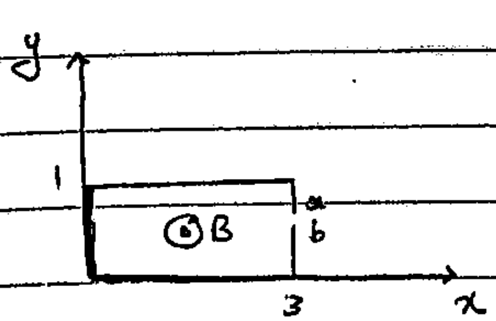
و اگر B متغیر شد

$$\mathcal{E} = \int_l (V \times B) \cdot dl$$

پس حالت کامل آن به ازای B متغیری که مساحت حلقه ی آن با سرعت V تغییر می کند و V و B با هم زاویه θ دارند می شود

$$\mathcal{E} = \int_l (V \times B) \cdot d\bar{l} + \int -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

مثال: یک حلقه سیم مستطیلی شکل با اضلاع ۱ و ۳ متر مطابق شکل، در میدان مغناطیسی متغیر با زمان B قرار داده می شود. مطلوبست محاسبه V_{ab} در حالتی که $B = 0.5\cos 100\pi t\,\hat{a}_z$



مسیر انتگرال گیری را خلاف عقربه های ساعت می گیریم

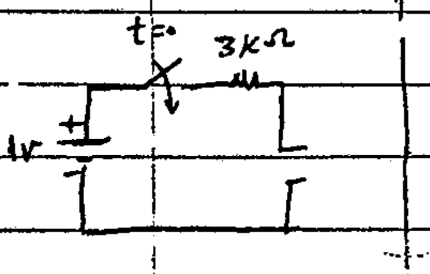
$$V_{ba} = -V_{ab} = -\frac{d}{dt}\int B \cdot ds$$

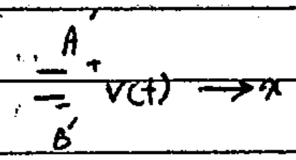
$$\int B \cdot ds = \int_s (0.5\cos 100\pi t\,\hat{a}_z) \cdot (dx\,dy\,a_z)$$

$$= 0.5\cos 100\pi t \int_0^3 dx \int_0^1 dy = 1.5\cos 100\pi t$$

$$V_{ab} = \mathcal{E} = \frac{d}{dt}(1.5\cos 100\pi t) = 150\sin 100\pi t \quad (V)$$

مثال: در فضای خالی در صفحه xy یک حلقه سیم به شکل دایره و دیگری به شکل نیم دایره همانند شکل بر روی یکدیگر منطبق شده اند. سیم ها از جنس رساناهای غیرمغناطیسی فرض می شوند. در حالتی که سرهای $A'B'$ باز هستند اندوکتانس دیده شده از سرهای A و B برابر $0.6\mu H$ است. ولتاژ مدار باز $v(t)$ برای $t \geq 0$ (پس از بسته شدن کلید) کدام است (ارشد برق ۹۰)





حل) در $t=0^+$ سلف مدار باز است و در نهایت اتصال کوتاه

$$i(0^-)=0 \longrightarrow i(0^+)=0$$

$$i(\infty) = \frac{1}{3}\ mA$$

$$i(t) = i(\infty) + (i(0) - i(\infty))e^{-t/\tau} = \frac{1}{3\times 10^3} - \frac{1}{3\times 10^3} e^{-\frac{10^{10}t}{2}}$$

$$\left(\tau = \frac{R}{L} = \frac{3\times 10^3}{0.6\times 10^{-6}} = \frac{10^{10}}{2}\right)$$

$$\varphi(t) = Li(t) = -2\times 10^{-10} e^{-\frac{10^{10}}{2}t} + 2\times 10^{-10}$$

پس شار لازم برای نیم دایره می شود

$$\frac{\varphi(t)}{2} = 10^{-10} - 10^{-10} e^{-\frac{10^{10}t}{2}}$$

$$emf = \mathcal{E} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} e^{-10^{10}t/2} \longrightarrow v(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

توجه:

$$v = emf = -\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = \int E.dl \qquad \varphi = \int B.ds$$

$$\oint E.dl = -\frac{d}{dt}\int B.ds \longrightarrow \int \nabla\times E\ ds = -\frac{d}{dt}\int B.ds$$

$$\rightarrow \nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

که این رابطه در واقع همان یکی از معادلات ماکسول برای E می باشد

معادلات ماکسول در فرم نقطه ای می شود

$$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla\times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla . D = \rho \qquad \nabla . B = 0$$

معادلات ماکسول در فرم انتگرالی

$$\int E.dl = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t}.ds$$ قانون فارادی

$$\oint H.dl = \int_s \left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right).ds$$ قانون آمپر

$$\oint_s D.ds = \int_v \rho\, dv$$ قانون گوس

$$\oint_s B.ds = 0$$ عدم وجود بار مغناطیسی مجزا