

# فصل ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها  
استدلال ریاضی

درس ۱

درس ۲

# درس ۱

## گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

مَنْطِق<sup>۱</sup> در لغت به معنی «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنی بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. کاربرد منطق در تشخیص استدلال درست از نادرست است. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می‌شود.

تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است و با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق دانان و افرادی که با منطق مأنوس‌ترند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شما را با منطق ریاضی<sup>۲</sup> که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی‌گونه منطق می‌پردازد، آشنا کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

در بین جملاتی که ما از آنها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و بخصوص صدق و کذب یا درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد، به عنوان مثال وقتی شما به دوست خود می‌گویید، «من امروز ساعت ۸ صبح در محل قرار حضور داشتم» خبری را برای او بیان می‌کنید که صدق یا کذب این خبر برای شما و دوستان مهم است. در منطق ریاضی به هر جمله خبری که بتوانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درستی یا نادرستی را به آن نسبت بدهیم، یک گزاره گفته می‌شود. جمله‌های غیر خبری مانند «چه هوای خوبی» یا «شما اهل کجایی؟» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم، گزاره نیستند.

## فعالیت

۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

(الف) شما چند سال دارید؟

(ب) عدد ۲ عددی اول است.

(پ) عدد  $\sqrt{2}$  عددی گویا است.

(ت) افلاطون شاگرد ارسطو است.

(ث)  $2+3 \times 4 = 20$

(ج) عدد  $(-1)^n$  عددی مثبت است. ( $n \in N$ )

(چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش مزه تر است.

(ح) لطفاً تخته را پاک کن.

۱\_ Logic

۲\_ Mathematical Logic

۲. دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

گاهی اوقات گزاره‌ای که بیان می‌کنیم، ترکیبی از دو یا چند گزاره است که در این صورت برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره‌ها که به گزاره‌های ترکیبی معروف‌اند باید بیشتر تأمل کرده و آنها را دقیق‌تر بررسی کنیم. به عنوان مثال جمله «۳ عددی فرد است و  $\sqrt{2}$  عددی گنگ است» که از ترکیب دو گزاره ساده «۳ عددی فرد است» و « $\sqrt{2}$  عددی گنگ است» توسط حرف ربط «و» ساخته شده است. واضح است که ارزش این گزاره ترکیبی به ارزش دو گزاره ساده مذکور بستگی دارد. اگر هر دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزاره ترکیبی چیست؟ اگر هر دو درست باشند، چه ارزشی برای آن قائل هستید؟ اگر یکی از گزاره‌ها درست و دیگری نادرست باشد چه پاسخی می‌دهید؟ در حالت کلی برای یک گزاره ترکیبی که از ترکیب دو گزاره به دست آمده و نسبت به ارزش‌های این دو گزاره چند حالت می‌توان در نظر گرفت؟ آیا حروف ربط دیگری برای ترکیب دو گزاره وجود دارد؟ برای پاسخ به سؤال‌های اخیر نیاز داریم تا از نمادها و قراردادهایی استفاده کنیم که به مجموعه این قراردادها و نمادگذاری‌ها جبر گزاره‌ها یا حساب گزاره‌ها گفته می‌شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند  $p$  یا  $q$  یا  $r$  یا ... نمایش می‌دهیم. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

$p$
د
ن

$$2^1 = 2$$

$p$	$q$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

$$2^2 = 4 = \text{تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره}$$

$p$	$q$	$r$
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$$2^3 = 8 = \text{تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره}$$

**نقیض یک گزاره:** نقیض گزاره  $p$  را با نماد  $(\sim p)$  نمایش داده و آن را به صورت «نقیض  $p$ » یا «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم. از آنجایی که هر گزاره یک جمله خبری است و حتماً دارای فعل می‌باشد، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم و واضح است که با این کار ارزش گزاره  $p$  اگر درست باشد ارزش گزاره  $(\sim p)$  نادرست و اگر  $p$  گزاره‌ای نادرست باشد ارزش گزاره  $(\sim p)$  درست خواهد بود.

به عنوان مثال، نقیض گزاره « $a$  مثبت است» به صورت « $a$  مثبت نیست» بیان می‌شود. به جدول زیر توجه کنید:

$p$	$\sim p$
د	ن
ن	د

در هر یک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کرده و سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.  
الف) عدد ۵ زوج است.

ب) تساوی « $4=2 \times 2$ » برقرار است.

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است.

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد.

ج)  $(3 \times 7) > (5 \times 4)$

در مثال قبل اگر نقیض گزاره  $(m)$  مثبت است را به صورت  $(\neg m)$  منفی است تعبیر کنیم، این دو گزاره نقیض هم نیستند زیرا وقتی  $a$  مثبت نباشد، یا منفی است و یا صفر است در صورتی که  $(\neg m)$  منفی است شامل صفر نمی‌شود.

### ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره‌ها، به صورت‌های متفاوتی می‌توان گزاره‌های ساده را با هم ترکیب کرده و گزاره‌های مرکب تولید کرد. در این کتاب ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دو شرطی» انجام می‌شود. هر گزاره مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزاره ساده تولید می‌شود خودش یک گزاره است که باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم. به گزاره‌های ترکیبی زیر توجه کنید؛

الف) «۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است.»

ب) «۱۲۱ مضرب ۱۲ است یا  $\sqrt{3}$  مثبت است.»

پ) «اگر من مسلمان باشم آنگاه نبوت حضرت رسول اکرم (ص) را قبول دارم.»

ت) «اگر  $n$  عددی زوج باشد آنگاه  $n^2$  زوج است و اگر  $n^2$  زوج باشد آنگاه  $n$  زوج است.»

هر یک از گزاره‌های ترکیبی فوق از ترکیب دو گزاره به دست آمده‌اند و اگر از شما بخواهیم ارزش هر یک از آنها را تعیین کنید شاید کمی مشکل به نظر برسد ولی آنچه که مسلم است این است که ارزش گزاره‌های ترکیبی فوق به ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آنها و نوع رابط به کار رفته بین آنها بستگی دارد.

۱. ترکیب عطفی دو گزاره: گزاره «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید، چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارید؟ نسبت به صدق و کذب گزاره «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است» چه استنباطی دارید؟ کاملاً واضح است که صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ «یا» یا «و» تشکیل شده است، درستی هر دو گزاره را طلب می‌کند. به نظر شما گزاره دومی چه ارزشی دارد؟ توجه دارید که افلاطون شاگرد ارسطو نبوده است! در منطق ریاضی ارزش درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب که با حرف ربط «و» بین دو گزاره ساده ساخته می‌شوند و به آنها ترکیب عطفی گفته می‌شود مطابق جدول زیر مشخص می‌شود.

هر گاه بخواهیم دو گزاره مانند  $p$  و  $q$  را با لفظ «و» ترکیب کنیم از نماد « $\wedge$ » بین دو گزاره استفاده کرده و می‌نویسیم « $p \wedge q$ » و

آن را به صورت « $p$  و  $q$ » می‌خوانیم، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌گردد.

$p$	$q$	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، « $p \wedge q$ » نادرست است.

## فعالیت

در جدول زیر روبه‌روی گزاره‌های داده شده ارزش آنها را با علامت  $\checkmark$  مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد		
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		
۳	..... و ۸ زوج است.		$\checkmark$
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و .....	$\checkmark$	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		
۶	..... و $۵ > ۲$		$\checkmark$

**ترکیب فصلی دو گزاره:** اگر شخصی به شما بگوید «آن حیوان، پرنده است یا مهره‌دار است» صدق گفته او را در چه صورتی تأیید می‌کنید؟ اگر پس از بررسی معلوم شود که حیوان مورد نظر نه پرنده بوده است و نه از تیره مهره‌داران بوده است، آیا گزاره مذکور دارای ارزش درست بوده است؟ در واقع صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ «یا» تشکیل شده است، در صورتی تأیید می‌شود که حداقل یکی از دو گزاره ساده، ارزش درست داشته باشند.

در منطق ریاضی ارزش درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب که با حرف ربط «یا» بین دو گزاره ساده، ساخته می‌شوند و به آنها **ترکیب فصلی گفته می‌شود** مطابق جدول زیر مشخص می‌شوند.

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند  $p$  و  $q$  را با لفظ «یا» با هم ترکیب کنیم از نماد « $\vee$ » استفاده کرده و می‌نویسیم « $p \vee q$ » و آن را به صورت « $p$  یا  $q$ » می‌خوانیم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌گردد:

$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشد در این صورت ارزش ترکیب فصلی آنها درست است.

## فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است		
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا .....	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب یا .....	✓	
۴	..... یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.		✓
۵	..... یا .....	✓	

## ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه بخواهیم از گزاره  $p$  گزاره  $q$  را نتیجه بگیریم از نماد « $\Rightarrow$ » استفاده کرده و می‌نویسیم « $p \Rightarrow q$ » و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

(اگر  $p$  آنگاه  $q$ )، ( $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را)، ( $q$  از  $p$  نتیجه می‌شود)

در گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ »،  $p$  را مقدم و  $q$  را تالی می‌نامیم.

ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » با توجه به جدول زیر تعیین می‌گردد:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم یعنی  $p$  درست بوده ولی تالی یعنی  $q$  دارای ارزش نادرست باشد (از یک گزاره درست نتیجه‌ای نادرست حاصل شود) و در بقیه موارد ارزش « $p \Rightarrow q$ » درست است.

بخصوص وقتی که ارزش مقدم گزاره شرطی یعنی  $p$ ، نادرست باشد همواره « $p \Rightarrow q$ » دارای ارزش درست بوده و درست یا نادرست بودن  $q$  تأثیری در ارزش گزاره « $p \Rightarrow q$ » ندارد بنابراین در هر یک از دو حالت مذکور، گزاره شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

#### ◆ مثال:

۱. گزاره‌های «اگر  $۳^۲=۶$  آنگاه، ۵ اول است» و «اگر ۸ فرد است آنگاه  $۲ > ۴$ » هر دو به انتفای مقدم درست هستند.
۲. گزاره «اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است» نادرست است.
۳. گزاره «اگر  $۲^۴=۴^۲$  آنگاه  $۳^۲ > ۲^۳$ » درست است.

**تذکر:** در تعیین ارزش گزاره‌های شرطی، ارزش تالی در صورتی که درست باشد نمی‌توانیم ایرادی از کل گزاره شرطی بگیریم زیرا نتیجه شرط، درست است و اگر از مقدم ایراد بگیریم گوینده به راحتی می‌تواند با کلمه «اگر» که روی مقدم بیان می‌شود ایراد را رفع کند! و چنانچه ارزش تالی نادرست باشد و مقدم نیز دارای ارزش نادرست باشد، درست بودن گزاره  $p \Rightarrow q$  فاقد ایراد است. (از بیان گزاره‌ای نادرست به نتیجه‌ای نادرست رسیدن، عجیب نیست!)

## فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است آنگاه $\sqrt{۹}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر ..... آنگاه .....	✓	
۵	اگر ..... آنگاه .....		✓
۶	اگر ۷ فرد است آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر ..... آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

## کار در کلاس

اگر گزاره‌ای درست و  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

$$۱) (q \Rightarrow p) \wedge r$$

$$۲) (p \vee q) \vee r$$

$$۳) (p \Rightarrow q) \wedge r$$

$$۴) (r \Rightarrow p) \vee q$$

$$۵) (r \Rightarrow p) \Rightarrow q$$

$$۶) (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

$$۷) (p \wedge q) \Rightarrow r$$

**ترکیب دو شرطی:** هرگاه بخواهیم از گزاره  $p$ ، گزاره  $q$  را نتیجه بگیریم و نیز از گزاره  $q$ ، گزاره  $p$  را نتیجه بگیریم از نماد « $\Leftrightarrow$ » استفاده کرده و می‌نویسیم « $p \Leftrightarrow q$ » و آن را به صورت‌های « $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را و  $q$  نتیجه می‌دهد  $p$  را»، «اگر  $p$  آنگاه  $q$  و اگر  $q$  آنگاه  $p$ »، «اگر  $p$  آنگاه  $q$  و برعکس»، « $p$  شرط لازم و کافی است برای  $q$ » و « $p$  اگر و تنها اگر  $q$ » می‌خوانیم. در واقع گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » است.

**تذکر:** هم‌ارزش بودن دو گزاره  $p$  و  $q$  را با نماد  $p \equiv q$  نشان می‌دهیم در این صورت:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

بنابراین با توجه به ارزش گزاره‌های شرطی و عطفی ارزش گزاره‌های دو شرطی طبق جدول زیر به دست می‌آید.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

همان‌طور که در ستون آخر مشاهده می‌کنید، اگر دو گزاره  $p$  و  $q$  هم‌ارزش باشند یعنی  $p \equiv q$  (هر دو درست یا هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » درست است.



## فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳	اگر ..... آنگاه ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر ..... آنگاه ..... و برعکس		✓
۵	$f = \{(۲, x_۱) \text{ و } (۳, x_۲) \text{ و } (۱, x_۳)\}$ تابع است، اگر و تنها اگر $x_۱ = x_۲$		
۶	اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس		

## کار در کلاس

اگر  $p$  گزاره‌ای درست و  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

$$۱) (p \Leftrightarrow q) \wedge r$$

$$۲) (\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$$

$$۳) (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$۴) (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$۵) (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$$

$$۶) (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$۷) (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$$

◆ مثال: با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

$$\text{الف) } (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

$$\text{ب) } (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$\text{پ) } \sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\text{ت) } p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$\text{ث) } (p \vee \sim p) \equiv T \text{ و } (p \wedge \sim p) \equiv F$$

۱- T ابتدای کلمه True به معنی درست و F ابتدای کلمه False به معنی نادرست است.

الف)

$p$	$q$	$\sim p$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	.....
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	.....

ب)

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	.....
ن	ن	د	د	د	.....

**تذکر:** گزاره  $(\sim q \Rightarrow \sim p)$  را عکس نقیض گزاره  $(p \Rightarrow q)$  می‌نامیم.

پ)

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	...	ن	.....
د	ن	ن	...	د	...	.....
ن	د	د	...	د	...	ن
ن	ن	د	...	...	د	.....

**تذکر:** این قانون یا هم‌ارزی یعنی  $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$  و مشابه آن یعنی  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$  به قوانین دمورگان معروفند.

ت)

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	...
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	...

ث)

$p$	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

**تذکر:** گزاره‌هایی نظیر  $(p \vee \sim p)$  را گزاره‌هایی همیشه درست و  $(p \wedge \sim p)$  را همیشه نادرست می‌نامیم.

## تمرین

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.		
۲	اگر ..... آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است آنگاه .....		✓
۴	$4 \times 2 = 2^3 \Rightarrow 8^2 > 4^2$		
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر $a$ عدد صحیح زوج یا فردی باشد آنگاه عدد ۱ اول است.		
۷	اگر $r$ عددی فرد باشد آنگاه $r^2$ نیز فرد است.		
۸	امام خمینی (ره) در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.		
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و .....	✓	
۱۰	اگر ..... آنگاه ..... و برعکس	✓	

۲. اگر گزاره‌ای درست و  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

الف)  $(p \vee r) \Rightarrow p$

ب)  $(q \wedge r) \Rightarrow r$

پ)  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$

ت)  $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

ث)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

ج)  $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

چ)  $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$

ح)  $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$

خ)  $(r \Rightarrow p) \wedge p$

۳. درستی هریک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

الف)  $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

ب)  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ج)  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت)  $(p \Rightarrow p) \equiv T$

ث)  $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ح)  $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

## درس ۲

### استدلال ریاضی

در درس گذشته با انواع گزاره‌ها و جدول ارزشی گزاره‌ها آشنا شدید. از طرفی در سال گذشته انواع استدلال‌های منطقی و قیاس‌ها را در کتاب منطق خود فراگرفتید. در این درس ابتدا به نحوه تبدیل گزاره‌های شفاهی به نمادهای ریاضی و سپس با استفاده از قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می‌پردازیم. در اینجا منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت شفاهی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم. در ادامه با مثال‌هایی از تبدیل عبارت‌های شفاهی به زبان و نمادهای ریاضی آشنا می‌شوید.

**مثال ۱:** سال گذشته با عبارت زیر آشنا شدید.

«ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم.»

اکنون عبارت فوق را به صورت نماد ریاضی بازنویسی می‌کنیم. کافی است به جای «ما» در ابتدای عبارت از  $x$  استفاده کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x + x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}x\right) + 1 = 100 \rightarrow 2x + \frac{3}{4}x + 1 = 100 \rightarrow \frac{11}{4}x + 1 = 100$$

$$2x \quad \frac{1}{4}x$$

بنابراین عبارت شفاهی فوق به صورت « $\frac{11}{4}x + 1 = 100$ » بازنویسی شد که به وضوح یک معادله ریاضی است.

**مثال ۲:** عبارت «ده درصد قیمت فروش شیئی برابر سود آن است.» را به صورت نماد ریاضی بیان می‌کنیم. کافی است قیمت فروش شیء را  $x$  و قیمت خرید آن را  $y$  در نظر بگیریم:

$$\frac{10}{100}x = x - y$$

### کار در کلاس

- عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.
- الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.
  - ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.
  - ج) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳ بزرگ‌تر از خودش است.
  - د) مربع مجموع دو عدد کوچک‌تر یا مساوی مجموع مربعات آن دو عدد است.

## خواندنی

کورت گودل (Kurt Godel) یک ریاضی‌دان برجسته اتریشی است که در زمینه منطق و به‌ویژه تبدیل عبارات به نماد ریاضی تلاش‌های بسیاری انجام داد. نتیجه تحقیقات او در منطق ریاضی سبب پیدایش تحولات شگرفی در علم منطق به‌ویژه منطق ریاضی شد. قضایای معروف او موسوم به «قضایای ناتمامیت گودل» که در سال ۱۹۳۱ منتشر شدند فهم بشر را از نارسایی‌های موجود در دستگاہ‌های منطقی سازگار<sup>۱</sup> دگرگون کرد. قضایای او به‌عنوان یکی از بزرگ‌ترین بحران‌های تاریخ ریاضیات شناخته می‌شوند. وی با تبدیل برخی گزاره‌ها به عبارات پیچیده ریاضی به کمک اعداد اول نشان داد که در هر دستگاہ منطقی سازگار همواره گزاره‌هایی وجود دارند که یا درست هستند یا نادرست، ولی ما هرگز نمی‌توانیم درستی یا نادرستی آنها را ثابت کنیم و لذا همه دستگاہ‌های منطقی سازگار، ناقص هستند. وی چنین گزاره‌هایی را «گزاره‌های اثبات ناپذیر» می‌نامد. کارهای او از جمله «کدگذاری گودلی» بعدها در زمینه‌های مختلفی به ویژه در علوم رایانه و رمزنگاری استفاده شد. امروزه از تکنیک‌های مشابهی برای تولید بارکد محصولات استفاده می‌شود. در این بارکدها ابتدا یک عبارت شفاهی به عبارت ریاضی (معمولاً یک عدد) و سپس به یک شکل هندسی تبدیل می‌شود. نمونه‌ای از این بارکدها را در زیر می‌بینید. با استفاده از نرم‌افزارهای بارکدخوان عبارت متناظر با این بارکدها را بیابید.



در کتاب منطق با انواع قیاس‌ها آشنا شدید. قیاس‌ها ابزارهای مهمی در استدلال و به‌ویژه استدلال ریاضی هستند. یکی از انواع قیاس‌ها که در استدلال ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد «قیاس استثنایی» است. در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را یادآوری می‌کنیم.

**مقدمه ۱:** اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

**مقدمه ۲:** امشب، شب چهاردهم ماه است.

**نتیجه:** ماه کامل است.

استدلال بالا را می‌توان به‌طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد.

اگر الف آنگاه ب

الف

∴ ب

و یا با استفاده از نمادگذاری‌های درس قبل داریم:

$$p \rightarrow q$$

$$p, ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

$$\therefore q$$

که در اینجا سه نقطه (∴) نماد نتیجه است.

۱- دستگاہ منطقی مجموعه‌ای از اصول و قواعد منطقی است که درست پذیرفته می‌شوند. یک دستگاہ منطقی را وقتی سازگار گوئیم که با ترکیب اصول و قواعد آن نتوان هیچ یک از پارادوکس‌های شناخته شده را اثبات کرد.

## مثال ۱ :

$n$  زوج است :  $q \rightarrow n^2$  زوج است :  $P$

$P$  :  $(2)^2$  زوج است :

۲ زوج است :  $q$  ?

گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می‌شود و منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به این گونه استدلال مغالطه می‌گویند. در زیر به مثالی از این نوع پرداخته شده است.

**مثال ۲ :** آرش معتقد است که «هرکس از من متنفر است، پشت سر من حرف می‌زند. از طرفی سعید پشت سر من حرف زده است. پس سعید از من متنفر است.»

برای بررسی درستی یا نادرستی استدلال آرش ابتدا مقدمات استدلال او را در زیر مرتب کرده‌ایم :  
اگر کسی از من متنفر باشد آنگاه پشت سر من حرف می‌زند.

$p$

$q$

سعید پشت سر من حرف زده است.  
 $q$

سعید از من متنفر است

در واقع استدلال آرش به صورت زیر است :

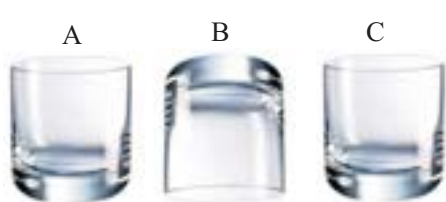
$p \rightarrow q$

$q$

$\therefore p$

در حالی که در قیاس استثنایی مقدمه دوم باید  $p$  باشد و نه  $q$ . پس استدلال آرش نادرست است.

با استفاده از نمادهای ریاضی و قواعد منطقی می‌توان مسائل زیادی را حل نمود. استفاده از نمادهای ریاضی اغلب باعث شفاف‌تر شدن مسئله و سهولت در به کارگیری قواعد منطقی می‌شود. در زیر به نمونه‌ای از استدلال ریاضی در حل مسائل پرداخته شده است.



**مثال ۳ :** سه لیوان همانند شکل روبه‌رو داریم که یکی از آنها وارونه است.

می‌خواهیم همه آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند. ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارنه است آن را درست کنیم و برعکس) سؤال این است که آیا این کار امکان‌پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟ امتحان کنید!

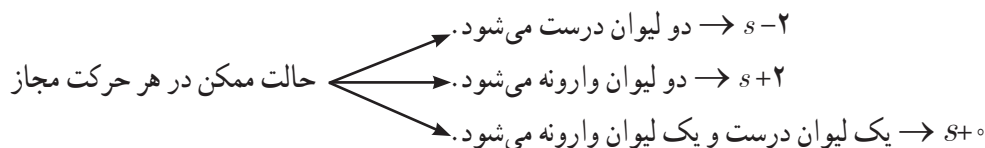
**پاسخ :** به کمک یک استدلال ساده ریاضی که در ادامه می‌آید نشان می‌دهیم که این کار امکان‌پذیر نیست. برای این کار داریم :

$s =$  تعداد لیوان‌های وارونه

وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است) :  $s = 1$

وضعیت مطلوب (هیچ لیوانی وارونه نباشد) :  $s = 0$

حرکت مجاز : در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.



بنابراین  $s$  همیشه به اندازه عددی زوج ( $-2$  یا  $+2$  یا  $0$ ) تغییر می‌یابد و لذا هرگز از  $1$  به  $0$  کاهش نمی‌یابد. در درس قبل دیدیم که دو گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  و  $\sim p \Rightarrow \sim q$  هم ارز هستند. به عبارت دیگر اگر بخواهیم ثابت کنیم گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  درست است و این کار دشوار باشد، به جای آن می‌توان ثابت کرد  $\sim p \Rightarrow \sim q$  درست است. در این حالت می‌گوییم عکس نقیض گزاره اصلی را ثابت می‌کنیم.

**مثال ۴:** ثابت کنید «اگر  $n^2$  زوج باشد آنگاه  $n$  زوج است» ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

اگر فرض کنیم

$n^2$  زوج است:  $p$

$n$  زوج است:  $q$

و بخواهیم از درستی گزاره  $p$  به گزاره  $q$  برسیم، مسیر اثبات دشوار است. برای این کار از عکس نقیض گزاره  $p \Rightarrow q$  یعنی  $\sim p \Rightarrow \sim q$  استفاده می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم اگر  $n$  زوج نباشد (یعنی فرد باشد چون حالت دیگری وجود ندارد) آنگاه  $n^2$  زوج نیست (یعنی  $n^2$  فرد است).

$$n \text{ فرد است} \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2m + 1$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که  $n^2$  فرد است و لذا حکم به دست می‌آید.

## کار در کلاس

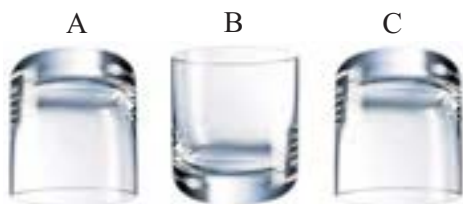
۱. با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس استثنایی  $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$  را نشان دهید.

۲. در هر یک از استدلال‌ات زیر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

دو خط هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند:  $q \Rightarrow$  دو خط موازی باشند:  $p$   
 $x: p > 0 \rightarrow q: x^2 > 0$   
 $p: 3 > 0$  .....

خطوط  $L_1$  و  $L_2$  هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. ....

۳. مثال سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟



۴. مثال سه لیوان را برای حالتی که بیش از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان‌ها وارونه هستند را بررسی کنید. آیا استدلال

گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟



گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می‌شویم. یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم است. گاهی یک استدلال غلط برای سال‌ها درست پنداشته می‌شود تا اینکه دانشمندی به غلط بودن آن پی می‌برد. کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد. به مثال‌های زیر دقت کنید.

**مثال ۱:** دانش‌آموزی ادعا می‌کند که معادله  $x^2 - x = 0$  تنها یک ریشه دارد و آن  $x=1$  است. استدلال او در زیر آمده است.

۱)  $x^2 - x = 0$

۲)  $x(x-1) = 0$  تجزیه معادله

۳)  $\frac{x(x-1)}{x} = \frac{0}{x}$  تقسیم طرفین بر  $x$  و ساده‌سازی

۴)  $x-1 = 0$  حاصل ساده‌سازی و تبدیل به معادله ساده‌تر

۵)  $x=1$  جواب معادله

ایراد این استدلال در این است که در گام سوم اجازه تقسیم بر  $x$  وجود ندارد چون  $x$  ممکن است صفر باشد و عبارت بی‌معنی می‌شود.

**مثال ۲:** دانش‌آموزی گزاره « $a < b \Rightarrow ac < bc$ » که  $a, b, c$  اعداد حقیقی هستند را به صورت زیر ثابت کرده است. ایراد این استدلال را پیدا کنید.

۱)  $a < b$

۲)  $a + c < b + c$  طرفین را با  $c$  جمع می‌کنیم.

۳)  $c(a + c) < c(b + c)$  طرفین نامساوی قبل را در  $c$  ضرب می‌کنیم.

۴)  $ac + c^2 < bc + c^2$  را در پرانتزها ضرب می‌کنیم.

۵)  $ac + c^2 < bc + c^2$  چون  $c^2$  عددی همواره مثبت است، می‌توان آن را از طرفین کم کرد.

۶)  $ac < bc$

ایراد این استدلال در گام سوم است. چون علامت  $c$  معلوم نیست (ممکن است مثبت یا منفی باشد) پس نمی‌توان آن را در طرفین نامساوی ضرب کرد. به عنوان مثال اگر  $a=1$  و  $b=2$  و  $c=-1$  باشد، آنگاه گزاره فوق معادل است با « $-2 < -1 \Rightarrow 1 < 2$ » که آشکارا نادرست است.

## کار در کلاس

اگر  $a = \frac{a-d}{c-d}$  آنگاه مطلوب است  $d$ . استدلال‌های زیر نحوه به دست آوردن  $d$  را نشان می‌دهند که توسط دانش‌آموزان مختلف ارائه شده‌اند. کدام یک درست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را ذکر کنید. ( $a \neq 1$ )

(الف)

۱)  $a = \frac{a-d}{c-d}$

۲)  $a(a-d) = c-d$

۳)  $ac - a = ad - d$

۴)  $ac - a = (a-1)d$

۵)  $\frac{ac-a}{a-1} = d$

(ب)

$$۱) a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$۲) 0 = \frac{-d}{c-d}$$

$$۳) d = 0$$

(ج)

$$۱) a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$۲) ac - ad = a - d$$

$$۳) ac - a = ad - d$$

$$۴) a(c-1) = (a-1)d$$

$$۵) \frac{a(c-1)}{a-1} = d$$

$$۶) -(c-1) = d$$

(د)

$$۱) a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$۲) a(c-d) = a-d$$

$$۳) ac - a = ad - d$$

$$۴) ac - a = (a-1)d$$

$$۵) \frac{ac-a}{a-1} = d$$

## تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

ج) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

د) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ه) هر عدد ناصفیری از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۲. در هر مورد گزاره‌ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می‌شود.

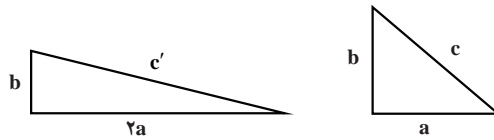
$x$  : طول

$y$  : عرض

مساحت  $S = xy$

مساحت دو برابر شده است.  $\rightarrow 2(xy) = 2xy = 2S$

ب) در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه  $a$  و  $b$  و وتر  $c$  همانند شکل زیر اگر ضلع  $a$  را دو برابر کنیم آنگاه وتر آن نیز دو برابر می شود.



استدلال : می دانیم در مثلث قائم الزاویه روبه رو قضیه فیثاغورث به صورت زیر برقرار است :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

اکنون این رابطه را برای مثلث قائم الزاویه جدید نیز می نویسیم :

$$c'^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2 = 4(\underbrace{a^2 + b^2}_{c^2}) = 4c^2 \Rightarrow c'^2 = 4c^2 \xRightarrow{\text{جذر}} c' = 2c$$

پس وتر دو برابر شده است.

ج) تساوی  $\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = 2\sqrt{11}$  برقرار است.

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{12 \times \cancel{3} + 4 \times 16}{2 \times \cancel{3}}} = \sqrt{\frac{12 + \cancel{3} \times 16}{\cancel{3}}} = \sqrt{12 + 32} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$

خواندنی