مرجع :

ریاضی مهندسی پیشرفته – اروین کرزینگ – ترجمه دکتر شید فر

فصل ها :

فصل اول : آنالیز فوریه

در این فصل گفته می شود :

- یادآوری
- قضیه دریکله
- سری فوریه
  - بسط زوج و فرد
  - فرم مختلط سری فوریه
  - انتگرال فوریه
- تبدیل فوریه
  - خواص تبدیل فوریه

یادآوری

روابط مثلثاتی :

$$\begin{cases}\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin p \pm \sin q = ۲\sin\frac{p \pm q}{۲}\cos\frac{p \pm q}{۲} \\ \cos p + \cos q = ۲\cos\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲} \\ \cos p - \cos q = -۲\sin\frac{p+q}{۲}\sin\frac{p-q}{۲}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin a\cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a\cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a\sin b = -\frac{۱}{۲}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^{۲}\alpha = \frac{۱ - \cos ۲\alpha}{۲} \\ \cos^{۲}\alpha = \frac{۱ + \cos ۲\alpha}{۲}\end{cases}$$

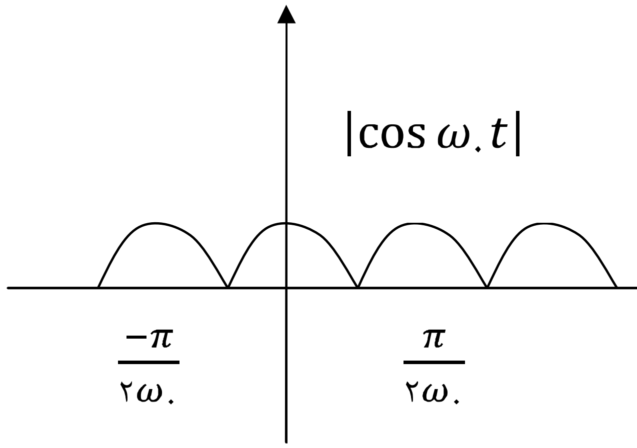
تناوب :

تابع $f(t)$ را متناوب گویند اگر

$$\begin{cases} \forall\ t \in D_f \rightarrow t + t \in D_f \\ \quad f(t + T) = f(t) \end{cases}$$

مثال :

دوره تناوب توابع زیر را تعیین کنید



۱) $\sin \omega_. t \qquad T = \frac{۲\pi}{\omega_.}$

۲) $|\cos \omega_. t| \qquad T = \frac{\pi}{\omega_.}$

انتگرال جزء به جزء :

$$(uv)' = u'v + uv' \rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

$$\begin{cases} \int x \sin \alpha x dx = \frac{\sin \alpha x}{a^۲} - \frac{x \cos \alpha x}{a} + c \\ \int x^۲ \sin \alpha x\, dx = \frac{۲x}{\alpha^۲} \sin \alpha x + (\frac{۲}{a^۳} - \frac{x^۲}{a}) \cos ax + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int x \cos ax\, dx = \frac{\cos ax}{a^۲} + \frac{x \sin ax}{a} + c \\ \int x^۲ \cos ax\, dx = \frac{۲x}{a^۲} \cos ax + \left(\frac{x^۲}{a} - \frac{۲}{a^۳}\right) \sin ax + c \end{cases}$$

تابع فرد و زوج :

تابعی را زوج گویند هر گاه

$$\begin{cases} \forall\, x \in D_f \rightarrow -x \in D_f \\ f(x) = f(-x) \end{cases}$$

تابعی را فرد گویند هر گاه

$$\begin{cases} \forall\; x \in D_f \rightarrow -x \in D_f \\ f(x) = -f(-x) \end{cases}$$

تابع زوج = تابع فرد × تابع فرد

تابع فرد = تابع فرد × تابع زوج

تابع زوج = تابع زوج × تابع زوج

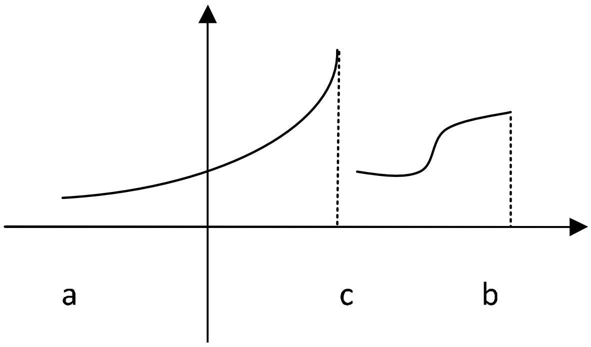
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} \text{تابع فرد} = ۰ \\ \displaystyle\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} \text{تابع زوج} = ۲\int_{۰}^{\frac{T}{۲}} \text{تابع زوج} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = ۰$$

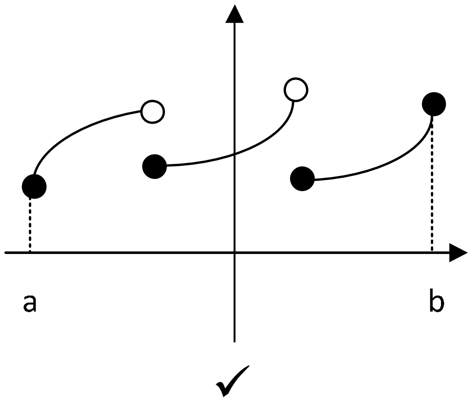
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} ۰ & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

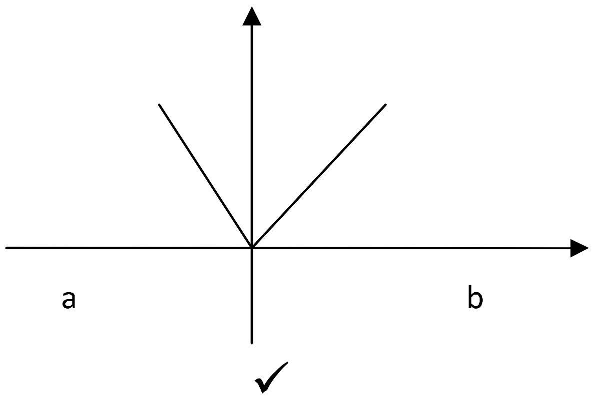
پیوسته تکه ای :

تابع f(x) در بازه {a,b} تکه ای هموار گفته می شود هرگاه بتوان این بازه را به تعداد متناهی زیر بازه تقسیم کرد ، بطوری که f(x) در هر یک از آنها پیوسته باشد .



در نقطه c دارای حد نیست ✗





قضیه دریکله :

اگر تابع $f(x)$ پیوسته تکه ای باشد ، آنگاه دارای سری فوریه می باشد و مقدار تابع $f(x)$ در نقطه x_0 برابر است با

$$f(x)|_{x_0} = \begin{cases} f(x_0) \\ \dfrac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{۲} \end{cases}$$

اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد

اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته نباشد

شرایط دریکله :

برای آنکه تابع $f(x)$ دارای سری فوریه باشد

۱- متناوب باشد

۲- انتگرال آن در یک دوره محدود باشد

۳- پیوسته باشد

شرایط دریکله ، شرایط کافی برای داشتن سری فوریه هستند نه شرایط لازم . ممکن است تابعی شرایط دریکله را نداشته باشد ولی سری فوریه داشته باشد .

سری فوریه :

اگر f(t) تابعی متناوب با دوره تناوب t باشد ، آنگاه f(t) را می توان بر حسب توابع sin و cos بصورت زیر نوشت :

تعریف ۱ :

$$f(t) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{۲\pi}{T}nt + b_n \sin\frac{۲\pi}{T}nt$$

$$a_۰ = \frac{۱}{T}\int_T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_T f(t)\cos\frac{۲\pi}{T}nt\,dt \qquad b_n = \frac{۲}{T}\int_T f(t)\sin\frac{۲\pi}{T}nt\,dt$$

تعریف ۲

$$f(t) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{۲\pi}{T}nt + b_n \sin\frac{۲\pi}{T}nt$$

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{۲}{T}\int_{T} f(t)\cos\frac{۲\pi}{T}nt\,dt$$

$$b_n = \frac{۲}{T}\int_{T} f(t) sin\frac{۲\pi}{T}nt\,dt$$

$$a_{.} = \frac{۲}{T}\int_{T} f(t)dt$$

اگر f(t) تابعی زوج باشد آنگاه

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{۲}{T}\int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(t)\cos\frac{۲\pi}{T}nt\,dt = \frac{۴}{T}\int_{.}^{\frac{T}{۲}} f(t)\cos\frac{۲\pi}{T}nt\,dt$$

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{۲}{T}\int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(t)\sin\frac{۲\pi}{T}nt\,dt = \cdot$$

تابع فرد

اگر f(t) تابعی فرد باشد آنگاه

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{۲}{T}\int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(t)\cos\frac{۲\pi}{T}nt\,dt = \cdot$$

تابعی فرد

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{۲}{T}\int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(t)\sin\frac{۲\pi}{T}nt\,dt = \frac{۴}{T}\int_{.}^{\frac{T}{۲}} f(t)\sin\frac{۲\pi}{T}nt\,dt$$

مثال :

مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} ۰ & x < \frac{l}{۲} \\ ۱ & x > \frac{l}{۲} \end{cases}$ را به کمک بسط فوریه در نقطه $\frac{L}{۲}$ تعیین کنید.

حل: $X = \frac{l}{۲}$ نقطه ناپیوسته است لذا

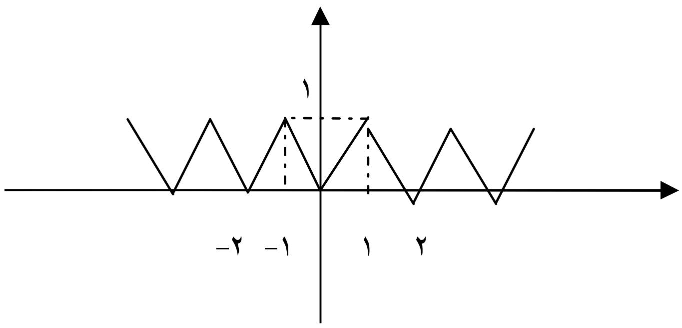
$$F\left(\frac{l}{۲}\right) = \frac{f\left(\frac{l^+}{۲}\right)+f\left(\frac{l^-}{۲}\right)}{۲} = \frac{۰+۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

مثال :

سری فوریه تابع f(t) را به دست آورید

$$f(t) = \begin{cases} t & ۰ \le t < ۱ \\ ۲ - t & ۱ \le t < ۲ \end{cases}$$

F(T+۲)=f(t)



تابع f(t) زوج است بنابراین b_n=۰

T=۲

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_T f(t)\cos\frac{۲\pi}{T}nt\,dt = \frac{۲}{۲}\left(\int_۰^۱ t\cos\pi nt\,dt + \int_۱^۲ (۲-t)\cos\pi nt\right)$$

$$\int_۰^۱ t\cos n\pi t\,dt = \frac{\cos n\pi t}{(n\pi)^۲} + \frac{t\sin n\pi t}{n\pi}\int_۰^۱ = \frac{\cos n\pi - ۱}{(n\pi)^۲}$$

$$\int_۱^۲ t\cos n\pi t\,dt = \frac{\cos n\pi t}{(n\pi)^۲} + \frac{t\sin n\,\pi t}{n\pi}\int_۱^۲ = \frac{۱-\cos n\pi}{(n\pi)^۲}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{\cos n\pi - ۱}{(n\pi)^۲} + \frac{۲}{n\pi}\sin n\pi t\int_۱^۲ - \frac{۱ - \cos n\pi}{(n\pi)^۲}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{۲\cos n\pi - ۲}{(n\pi)^۲} = \frac{۲}{(n\pi)^۲}[(-۱)^n - ۱] = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ \frac{-۴}{(n\pi)^۲} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

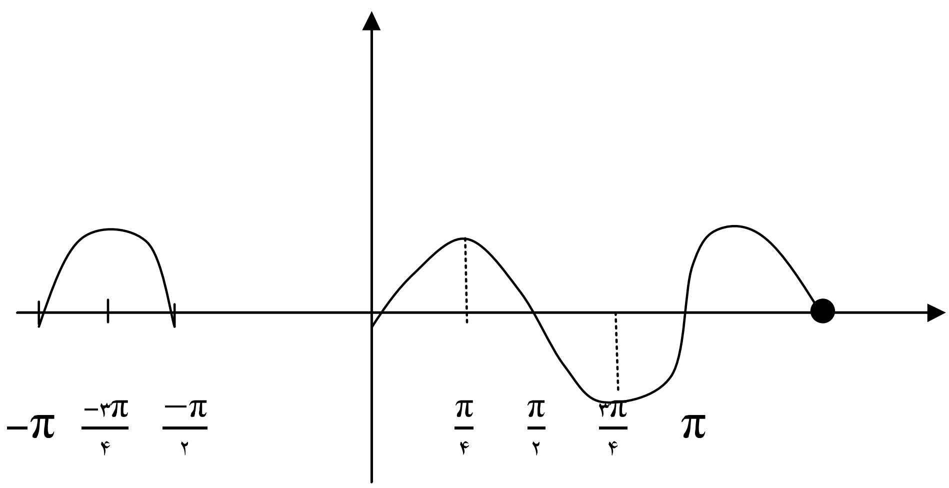
$$f(t) = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{\pi^۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k-۱)^۲}\cos(۲k-۱)\pi t$$

$$\Rightarrow a_۰ = \frac{۲}{t}\int_۰^۱ t\,dt + \frac{۲}{t}\int_۰^۱(۲-t)dt = \frac{۱}{۲} + ۴ - ۲ - ۲ + \frac{۱}{۲} = ۱$$

مثال :

برای تابع f(t) با دوره تناوب ۲π ضرایب $a_۲$ و $b_۲$ را بدست آورید

$$f(t)\begin{cases} \sin ۲t & -\pi < t < \frac{-\pi}{۲} \quad , \quad ۰ < t < \pi \\ ۰ & -\frac{\pi}{۲} < t < ۰ \end{cases}$$



نه فرد نه زوج

$$a_۲ = \frac{۲}{۲\pi}\left(\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{۲}} \sin ۲t\cos\frac{۲\pi}{۲\pi}\times ۲t\,dt + \int_{۰}^{\pi} \sin ۲t\cos\frac{۲\pi}{۲\pi}\times ۲tdt\right)$$

$$= \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{۲}} \frac{۱}{۲}\sin ۴t\,dt + \int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{۲}} \frac{۱}{۲}\sin ۴t\,dt\right) = \frac{۱}{\pi}\left(-\frac{۱}{۸}\cos ۴t\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{۲}}\right.$$

$$\left.\frac{-۱}{۸}\cos ۴t\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{۲}}\right) = \frac{۱}{\pi}\left(-\frac{۱}{۸}\right) - \frac{۱}{۸}) - \frac{۱}{۸} - \left(-\frac{۱}{۸}\right)) = ۰$$

$$b_۲ = \frac{۲}{۲\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{۲}} \sin ۲t\sin\frac{۲\pi}{۲\pi}\times ۲t\,dt + \int_{۰}^{\pi} \sin ۲t\sin\frac{۲\pi}{۲\pi}\times ۲t\,dt\right)$$

$$b_۲ = \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{۲}} \sin^۲ ۲t\,dt + \int_{۰}^{\pi} \sin^۲ ۲t\,dt\right) = \frac{۱}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{۲}} \frac{۱-\cos ۴t}{۲}dt\right.$$

$$\left.+\int_{۰}^{\pi} \frac{۱-\cos ۴t}{۲}dt\right) = \frac{۱}{\pi}\left(\frac{t}{۲} - \frac{\sin ۴t}{۸}\int_{۰}^{\pi}\right.$$

$$= \frac{۱}{\pi}\left(\frac{-\pi}{۴} + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} - ۰\right) = \frac{۳}{۴}$$

نکته :

برای توابع سینوسی و کسینوسی با ضرایب صحیح با تبدیلات زیر می توان ضرایب سری فوریه را به راحتی بدست آورد

$$\sin^۲ at = \frac{۱-\cos ۲at}{۲} \qquad a \in N$$

$$\cos^۲ at = \frac{۱+\cos ۲at}{۲} \qquad a \in N$$

مثال:

ضرایب سری فوریه تابع زیر را تعیین کنید

$$f(t) = (\sin t + cos۲t)^{۲} \qquad\qquad f(t + ۲\pi) = f(t)$$

$$f(t) = \sin^{۲} t + cos^{۲}۲t + ۲ \sin t \cos ۲t$$

$$f(t) = \frac{۱ - cos۲t}{۲} + \frac{۱ + cos۴t}{۲} + sin۳t - sinx$$

$$f(t) = ۱ - sint - \frac{۱}{۲}cos۲t + sin۳t + \frac{۱}{۲}cos۴t$$

$\frac{a_{٠}}{۲}$ b۱   a۲   b۳   A۴

اتحاد پارسوال :

اگر f(t) تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد و در شرایط قضیه دریکله صدق کند آنگاه داریم

$$\frac{۲}{\pi}\int_T f^{۲}(t)dt = \left(\frac{a_{٠}}{۲}\right)^{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n^{۲} + b_n^{۲})$$

⁕اثبات از ضرب f(t) در خودش و انتگرال گیری بدست می آید به این اتحاد ، اتحاد پارسوال گویند .

مثال :

برای تابع زیر درستی اتحاد پارسوال را نشان دهید .

f(t)=sin t

$$\frac{2}{T}\int_{T} f^{2}(t)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \sin^{2} t dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t \right|_{0}^{2\pi} = 1 \qquad a_1^{2} = 1 \quad \checkmark$$

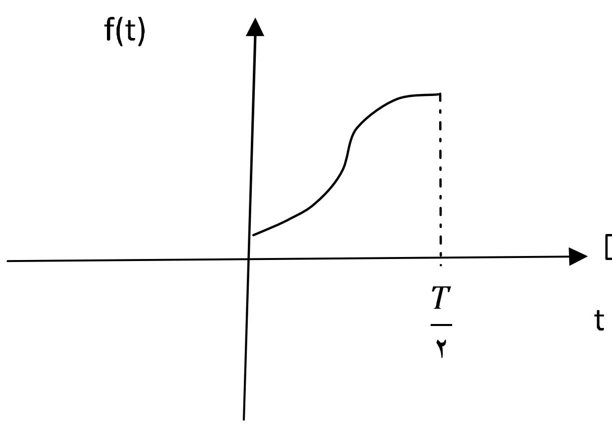
بسط زوج و فرد :

فرض کنید تابع $f(t)$ در بازه $\{0,\frac{T}{2}\}$ تعریف شده باشد

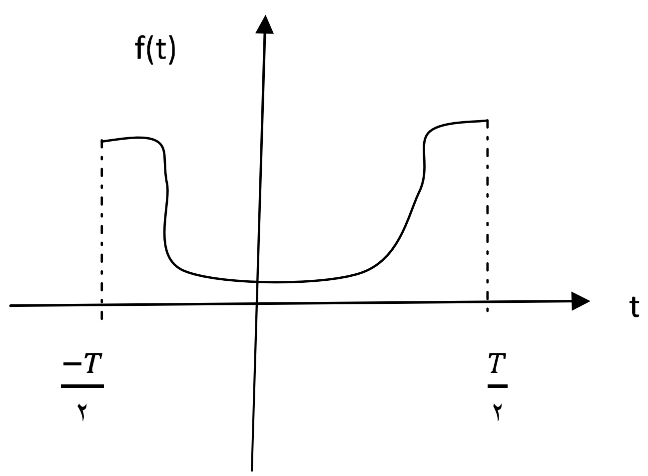
الف – چنانچه تابع را در فاصله $\{\frac{-T}{2},0\}$ طوری تعریف کنیم که تابع حاصله در بازه $\{\frac{-T}{2},\frac{T}{2}\}$ زوج شود (بسط زوج نیم دامنه) و سپس سری فوریه این تابع را بنویسیم، اصطلاحاً سری فوریه کسینوسی تابع اصلی نوشته شده است .

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n}{T}nt$$

$$a_0 = 2 \times \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad a_n = 2 \times \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi}{T}nt\, dt$$



تابع f(t) در بازه $\{0,\frac{T}{2}\}$ تعریف شده است

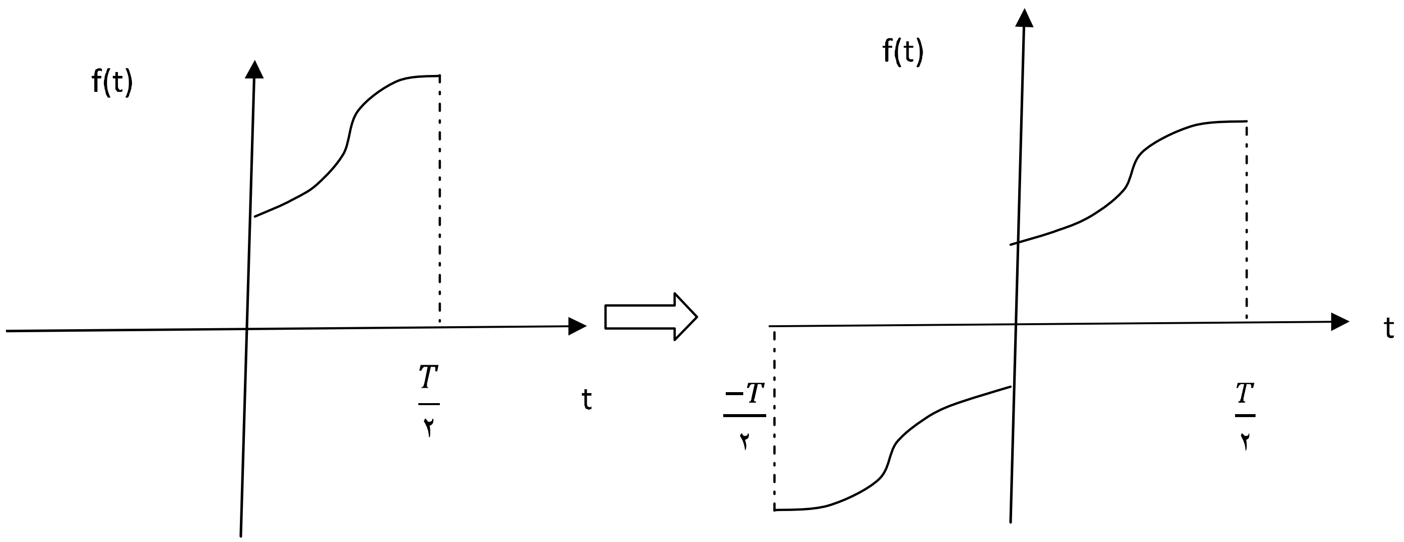


گسترش زوج تابع f(t)

ب) چنانچه تابع را در فاصله $\{\frac{-T}{۲},۰\}$ طوری تعریف کنیم که تابع حاصله در بازه $\{\frac{-T}{۲},\frac{T}{۲}\}$ فرد شود (گسترش فرد) و سپس سری فوریه این تابع را بنویسیم ، اصطلاحاً سری فوریه سینوسی تابع اصلی نوشته شده و بدست می آید .

$$f(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{۲\pi}{T}nt$$

$$b_n = ۲ \times \frac{۲}{T}\int_۰^{\frac{T}{۲}} f(t)\sin\frac{۲\pi}{T}nt\,dt$$



تابع f(t) در بازه $\{۰,\frac{T}{۲}\}$ تعریف شده است

گسترش فرد تابع f(t)

مثال:

سری فوریه تابع $g(x)=x^۲$ را با تناوب $t = ۲\pi$ در فاصله $-\pi < x < \pi$ بدست آورید .

$$g(x) = ۴\int_۰^x f(x_۱)dx_۱ = ۴\int_۰^x (sinx - \frac{sin۲x}{۲} + \frac{sin۳x}{۳} \pm \cdots)dx$$

$$=۴(-\cos x + \frac{cos۲x}{۴} - \frac{cos۳x}{۹} + \cdots \int_۰^x = \left[-cosx + \frac{cos۲x}{۴}\right]$$

$$-\frac{\cos ۳x}{۹}+\cdots]-(-۱+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۹}+\cdots)]$$

$$=۴\left[\left(۱-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\cdots\right)-\cos x+\frac{\cos ۲x}{۲^۲}-\frac{\cos ۳x}{۳^۲}\pm\cdots\right]$$

اگر $x=\frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم .

$$\frac{\pi^۲}{۴}=۴\left[\left(۱-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\cdots\right)-۰-\frac{۱}{۴}-۰+\frac{۱}{۱۶}+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\pi^۲}{۱۶}=\left(۱-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\cdots\right)-\frac{۱}{۴}(۱-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\cdots)\Rightarrow$$

$$\left(۱-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\cdots\right)=\frac{\pi^۲}{۱۲}\Rightarrow g(x)=۴(\frac{\pi^۲}{۱۲}-\cos x+\frac{\cos ۲x}{۴}-\cdots)$$

فرم مختلط سری فوریه :

با استفاده از فرمولهای اویلر ، سری فوریه را می توان بصورت مختلط نوشت

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲}\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲i}$$

$$f(t)=\sum_{n=\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{۲\pi}{T}nt}\qquad c_n=\frac{۱}{T}\int_T f(t)e^{-i\frac{۲\pi}{T}nt}\,dt$$

c_n بر حسب a_n و b_n:

$$\begin{cases}a_n=c_n+c_{-n}\\ b_n=i(c_n-c_{-n})\end{cases}$$

$$c_n=\frac{۱}{۲}(a_n-ib_n)$$

اثبات :

$$c_n = \frac{۱}{T}\int_T f(t)e^{-i\frac{۲\pi}{T}nt}dt = \frac{۱}{T}\int_T f(t)\cos\left(\frac{-۲\pi}{T}nt\right)dt$$

$$-i\frac{۱}{T}\int_t f(t)\sin\frac{۲\pi}{T}ntdt = \frac{۱}{۲}a_n - \frac{i}{۲}b_n$$

$$\frac{۱}{۲}(a_n + ib_n)$$

خواص سری فوریه مختلط:

در سری فوریه به فرم مختلط ؛ اگر c_n و d_n به ترتیب ضرایب سری فوریه $f(x)$ و $g(x)$ باشد ، داریم :

$$f(x-a) \leftrightarrow c_n e^{-in\frac{۲\pi}{T}a}$$

$$e^{ia\frac{۲\pi}{T}x}f(x) \leftrightarrow c_{n-a}$$

$$f(-x) \leftrightarrow c_{-n}$$

$$\int_T f(\lambda)g(x-\lambda)d\lambda \leftrightarrow Tc_n d_n$$

$$f(x)g(x) \leftrightarrow \sum_{i=\infty}^{\infty} c_i d_{n-i}$$

$$f'(x) \leftrightarrow in\frac{۲\pi}{T}c_n$$

$$(c_. = ۰ \text{ با شرط}) \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \leftrightarrow \frac{T}{۲\pi in}c_n$$

قضیه پارسوال برای سری فوریه مختلط بصورت زیر بیان می شود :

$$\frac{۲}{T}\int_T f^۲(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^۲$$

مثال :

سری فوریه مختلط $f(x)=e^x$ در بازه $-\pi < x < \pi$ را بدست آورید .

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-in)}e^{(-1-in)x}\int_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\times\frac{1+in}{1+in}(e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi})$$

$$= \frac{1}{2\pi}.\frac{1+in}{1+n^2}\{e^{\pi}(\cos n\pi - i\sin n\pi) - e^{-\pi}(\cos n\pi + i\sin n\pi)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}.\frac{1+in}{1+n^2}\{e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n\} = \frac{(-1)^n}{\pi}.\frac{1+in}{1+n^2}\sinh\pi$$

مثال :

سری فوریه مختلط تابع $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ در بازه $0 < x < \frac{\pi}{4}$ بصورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}nx}$ می باشد . حاصل $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$ را بدست آورید

طبق رابطه پارسوال داریم :

$$\frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

$$\to \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 dt = \frac{4}{\pi}\tan x\int_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

انتگرال فوریه :

رفتار یک تابع غیر تناوبی که در فاصله $(\infty+$ و $\infty-)$ تعریف شده است را نمی توان از طریق یک سری فوریه توصیف نموده. اما اگر $f(x)$ در فاصله $(\infty+$ و $\infty-)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$، آنگاه $f(x)$ را می توان در قالب یک بیان انتگرالی از جملات سینوسی و کسینوسی که به انتگرال فوریه تابع مرسوم است به فرم زیر نوشت :

$$\begin{cases} f(t)=\int_{۰}^{\infty}(a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t)d\omega \\ a(\omega)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt \\ b(\omega)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt \end{cases}$$

اگر $f(t)$ تابعی زوج باشد آنگاه

$$a(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt \qquad b(\omega)=۰$$

اگر $f(t)$ تابعی زوج باشد آنگاه

$$a(\omega)=۰ \qquad b(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

تساوی پارسوال برای انتگرال فوریه بصورت زیر بیان می شود :

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f^{۲}(t)dt=\int_{۰}^{\infty}(a^{۲}(\omega)+b^{۲}(\omega))d\omega$$

اگر $f(t)$ تابعی پیوسته تکه ای در بازه $(۰,-\infty)$ بوده و در این فاصله مطلقاً انتگرال پذیر باشد $(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty)$

الف – می توان $f(t)$ را در بازه $(-\infty,۰)$ بصورت زوج گسترش داده و انتگرال فوریه تابع حاصله را که انتگرال فوریه کسینوسی $f(t)$ نامیده می شود ، بصورت زیر نوشت :

$$f(x)=\int_{۰}^{\infty}a(\omega)cos\omega td\omega \qquad a(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(t)cos\omega tdt$$

ب- می توان f(t) را در بازه $(-\infty,۰)$ بصورت فرد گسترش داده و انتگرال فوریه تابع حاصله را که انتگرال فوریه سینوسی f(t) نامیده می شود ، بصورت زیر نوشت :

$$f(x)=\int_{۰}^{\infty}b(w)sin\omega td\omega \qquad b(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(t)sin\omega tdt$$

مثال :

اگر $\int_{۰}^{\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\begin{cases}\frac{\cos t}{۲} & |t|<\frac{\pi}{۲}\\ ۰ & |t|<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ باشد ، a(ω)را بدست آورید .

چون f(t)زوج است .

$$a(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(t)cos\omega tdt$$

$$a(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{۲}cost\ cos\omega t\ dt=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\cos(۱+\omega)\,t+\cos\,(۱-\omega)t)dt$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\sin(۱+\omega)\,t}{۱+\omega}+\frac{\sin(۱-\omega)\,t}{۱-\omega}\right|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\cos\frac{\omega\pi}{۲}}{۱+\omega}+\frac{\cos\frac{\omega\pi}{۲}}{۱-\omega}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\cos\frac{\omega\pi}{۲}.\frac{۲}{۱-\omega^{۲}}=\frac{\cos\frac{\omega\pi}{۲}}{\pi(۱-\omega^{۲})}$$

مثال :

اگر $f(t)=\int_{۰}^{\infty}a(\omega)cos\ \omega t\ d\omega$ باشد آنگاه انتگرال فوریه $t^{۲}f(t)$ به چه صورت خواهد بود ؟

$$a(\omega)\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(t)\cos\omega t\ dt \qquad \frac{da(\omega)}{d\omega}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(t)\times(-t)sin\omega tdt$$

$$\frac{d^{۲}a(\omega)}{d\omega^{۲}} = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(t) \times (-t) \times t\cos\omega t dt \rightarrow$$

$$\frac{d^{۲}a(\omega)}{d\omega^{۲}} = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} t^{۲}f(t)\cos\omega t dt$$

بنابراین

$$t^{۲}f(t) = \int_{۰}^{\infty}\left(-\frac{d^{۲}a(\omega)}{d\omega^{۲}}\right)\cos\omega t d\omega$$

تبدیل فوریه :

اگر $f(t)$ تابعی تکه ای هموار و دربازه $(-\infty, \infty)$مطلقاً انتگرال پذیر باشد ، دارای تبدیل فوریه است که بصورت زیر تعریف می شود :

تعریف ۱ :

$$\begin{cases} F(\omega) = f\big(f(x)\big) = \dfrac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ f(t) = f^{-۱}\big(F(\omega)\big) = \dfrac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \end{cases}$$

تعریف ۲ :

$$\begin{cases} F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ f(t) = \dfrac{۱}{۲\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \end{cases}$$

مثال :

تبدیل فوریه فوریه توابع زیر را بیابید :

$$f(x)=\begin{cases}۰ & x<۰\\ e^{-kx} & x>۰\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\int_{۰}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{k}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{dx}=\int_{۰}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\mathrm{k}+\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{dx}=\frac{-۱}{\mathrm{k}+\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-(\mathrm{k}+\mathrm{i}\omega)x}\int_{۰}^{\infty}=$$

$$\frac{۱}{\mathrm{k}+\mathrm{i}\omega}=\frac{\mathrm{k}-\mathrm{i}\omega}{\mathrm{k}^{۲}+\omega^{۲}}$$

$$۲)\ \mathrm{f(t)}=\mathrm{u(t-a)}=\begin{cases}۱ & \mathrm{t}>a\\ ۰ & \mathrm{t}<a\end{cases}$$

$$\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f(t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\mathrm{dt}=\int_{\mathrm{a}}^{\infty}۱\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\mathrm{dt}=\frac{-۱}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\int_{\mathrm{a}}^{\infty}$$

$$=\frac{e^{-ia\omega}}{\mathrm{i}\omega}$$

خواص تبدیل فوریه :

۱-خطی بودن

$$f\{C_۱f(x)+C_۲g(x)\}=C_۱F(\omega)+C_۲G(\omega)$$

۲- مشتق

$$f\{f^{(n)}(x)\}=(i\omega)^n f\{f(x)\}$$

۳-قضیه انتگرال

$$f\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right\}=\frac{۱}{i\omega}f(\omega)+\pi f(۰)\delta(\omega)$$

که $\delta(\omega)=\begin{cases}\infty & \omega=۰\\ ۰ & \omega\neq ۰\end{cases}$

۴-شیفت زمانی

$$f\{f(x-a)\} = e^{-i\omega}F(\omega)$$

۵-شیفت فرکانسی

$$f\{e^{iax}f(x)\} = F(\omega-a)$$

۶-قضیه مشتق گیری از تبدیل فوریه :

$$f\{x^n f(x)\} = i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

۷-کانولوشن

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

F(f*g)=F(ω).G(ω)

۸-تغیر مقیاس:

$$f\{f(ax)\} = \frac{۱}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

۹-پارسوال:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}^{۲}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{f}(\mathrm{w})|^{۲}\mathrm{d}\omega$$

نکته :

اگر f(x) تابعی حقیقی و زوج باشد ، تبدیل فوریه آن حقیقی و زوج خواهد بود .

اگر f(x) تابعی حقیقی و فرد باشد ، تبدیل فوریه آن موهومی محض و فرد خواهد بود .

مثال :

اگر تبدیل فوریه $f(x)$ را $f(w)$ بنامیم ، حاصل تبدیل فوریه $xe^{-ix}f(x)$ را بدست آورید .

راه اول :

شیفت زمانی : $f\{e^{-ix}f(x)\}=f(\omega+۱)$

مشتق گیری: $f\{x\times e^{-ix}f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f\{e^{-ix}f(x)\} = i\acute{f}(\omega+۱)$

راه دوم :

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \rightarrow \acute{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} -\mathrm{ixf(x)}e^{-i\omega x}dx \quad \xrightarrow{\text{مشتق از طرفین به } \omega}$$

$$i\acute{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx$$

به جای ω، $\omega+۱$ قرارا می دهیم :

$$\underbrace{i\acute{F}(\omega+۱)}_{\text{تابع}}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i(\omega+۱)x}dx \rightarrow \underbrace{i\,\acute{F}(\omega+۱)}_{\text{تبدیل فوریه}}=\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ix}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

تابع ضربه :

تابع ضربه $\delta(t)$ بصورت زیر تعریف می شود :

$$\delta(t)=\begin{cases} \text{تعریف نشده} & t=۰ \\ ۰ & t\neq ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} \int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=u(t) \\ \acute{u}(t)=\delta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\{\delta(t)\}=۱ \\ f\{۱\}=۲\pi\delta(\omega) \end{cases}$$

موفق باشید

احسائیان

فصل دوم:توابع مختلط

در این فصل گفته می شود:

- یادآوری

- نواحی در صفحه

- حد توابع مختلط- مشتق توابع مختلط

- تابع تحلیلی

- قضیه کوشی- ریمان

- تابع همساز

- توابع مقدماتی

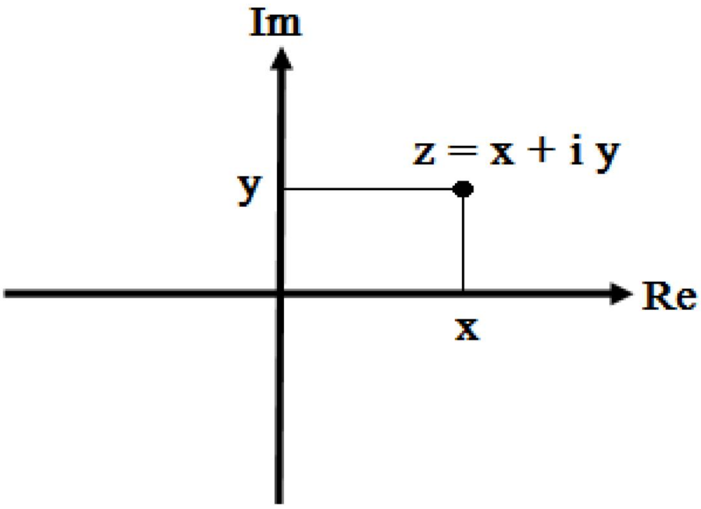
- تابع نمایی

- تابع مثلثاتی و هذلولی

- تابع لگاریتمی و توان عمومی

یادآوری از اعداد مختلط:

$Z=x+i.y \qquad i^{۲} = -۱$



$z_۱ + z_۲ = x_۱ + x_۲ + i.(y_۱ + y_۲)$

$z_۱ . z_۲ = (x_۱ + iy_۱)(x_۲ + iy_۲) = x_۱x_۲ - y_۱y_۲ + i(x_۱y_۲ + x_۲y_۱)$

مزدوج $\bar{z} = x - iy$

اندازه $|z| = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$

خواص اندازه و مزدوج:

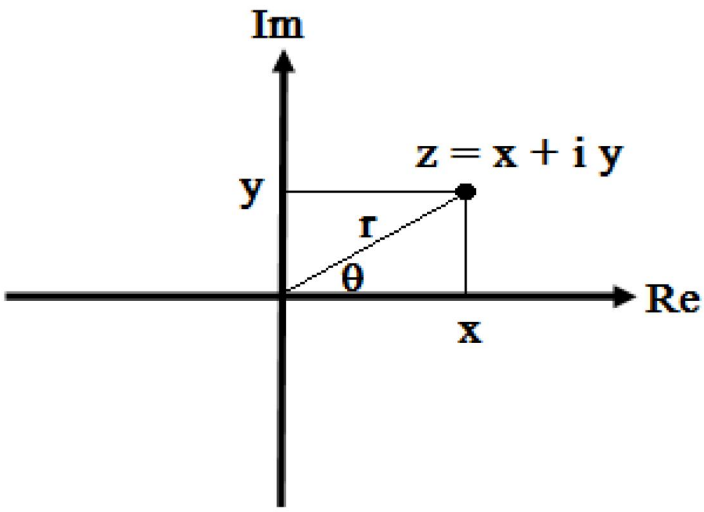
۱- $\overline{(z_۱ \pm z_۲)} = \bar{z}_۱ + \bar{z}_۲$ ۲- $\overline{z_۱ z_۲} = \bar{z}_۱ . \bar{z}_۲$

۳- $|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|$ ۴- $\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right| = \frac{|z_۱|}{|z_۲|}$

۵- $\overline{\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right)} = \frac{\bar{z}_۱}{\bar{z}_۲}$ ۶- $|z| = |\bar{z}|$

۷- $z.\bar{z} = |z|^{۲}$ ۸- $|z_۱ + z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲|$

فرم قطبی اعداد مختلط:



$$Z=x+iy=re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \\ \theta = tan^{-۱}\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$$

$$z_{۱}z_{۲}=r_{۱}r_{۲}e^{i(\theta_{۱}+\theta_{۲})}$$
$$z^{n} = r^{n}e^{in\theta}$$

ریشه nام اعدادمختلط:

هر عدد مختلط دارای n ریشه است بطوریکه اگر $z=re^{i\theta}$ باشد, ریشه های nام آن از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta+۲k\pi}{n}} \qquad k=۰,....,n-۱$$

مثال:

جواب معادله $z^{۵}-i-۱=۰$ را بدست آورید.

$$z^{۵}=i+۱ \rightarrow z^{۵}=\sqrt{۲}.e^{i\frac{\pi}{۴}} \rightarrow z=\sqrt[۵]{\sqrt{۲}}e^{i\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۴}}{۵}} \quad k=۰,....,۴$$

نواحی در صفحه مختلط:

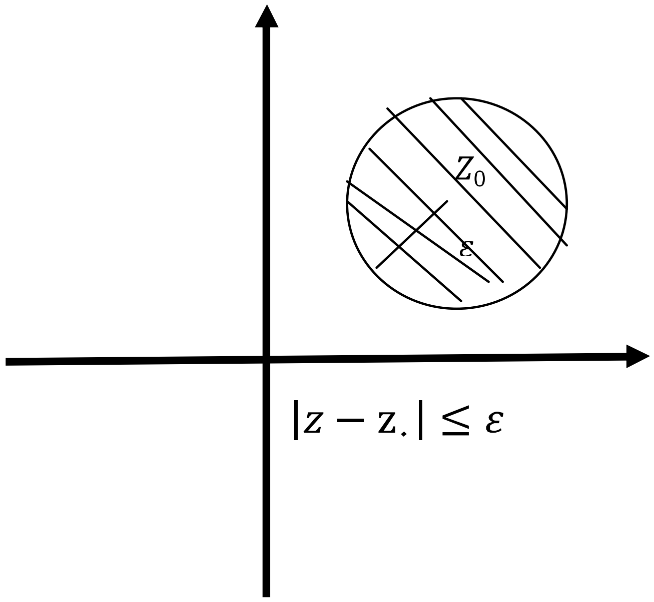
فاصله بین دو نقطه z و $z_{۰}$ عبارت است از $|z-z_{۰}|$,بنابراین دایره به شعاع ε و مرکز $z_{۰}$ را به صورت زیر نمایش می دهیم.

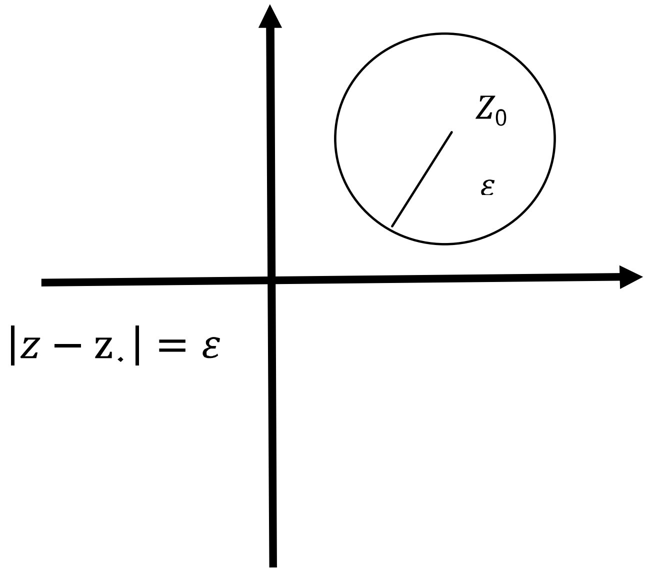
$$\{z; z\in\mathbb{C}, |z-z_{۰}|=\varepsilon\}$$

و نامساوی $|z - z.| < \varepsilon$,نقاط درونی دایره فوق رانشان می دهد. چنین ناحیه ای را قرص دایره ای باز و نامساوی $|z - z.| \leq \varepsilon$ که شامل نقاط درونی و خود دایره است را قرص دایره ای بسته می نامیم.قرص باز یک εهمسایگی از .zنیز نامیده می شود وآنرا با $N_{\varepsilon}(Z.)$نشان می دهیم.

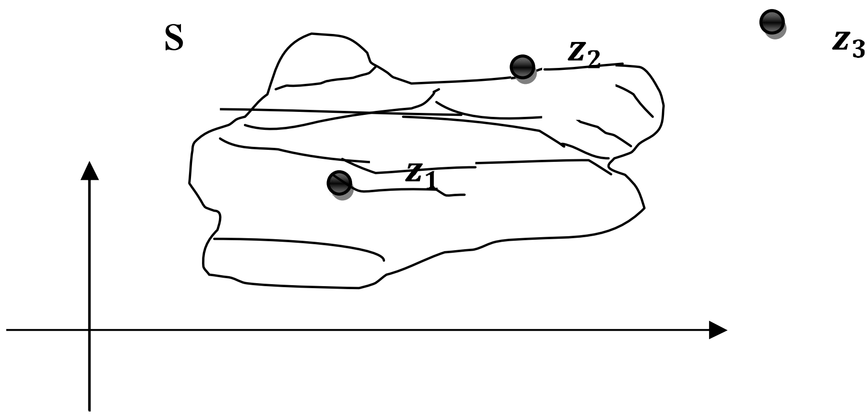
$$N_{\varepsilon}(Z.)=\{Z; Z\epsilon\mathbb{C}, |z - z.| < \varepsilon\}$$

نامساوی $|z - z.| > \varepsilon$ نقاط بیرونی دایره و $\varepsilon_1 < |z - z.| < \varepsilon_2$ ناحیه بین دو دایره متحدالمرکز به شعاع های ε_1 و ε_2 را نشان میدهد که به آن طوق باز می گوییم.



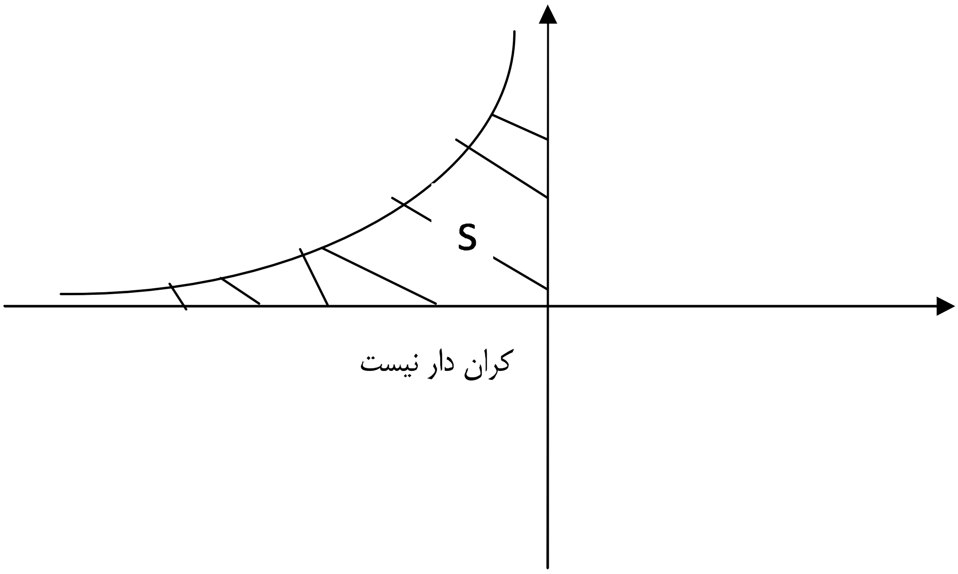


فرض کنید S مجموعه ای از نقاط در صفحه مختلط Ȼباشد.$z.\epsilon S$ را یک نقطه داخلی Sگوییم.اگر یک ε همسایگی از .z وجود داشته باشد به طوریکه $N_{\varepsilon}(z.)\subset S$ و نقطه z_1 را یک نقطه خارجی S می گوییم اگر یک ε همسایگی از z_1 یافت شود بطوریکه $N_{\varepsilon}(z_1) \subset$ Ȼ-S نقطه $z_2 \in c$ را یک نقطه مرزی s می نامیم اگر z_2 نه نقطه داخلی باشد و نه نقطه خارجی آن.



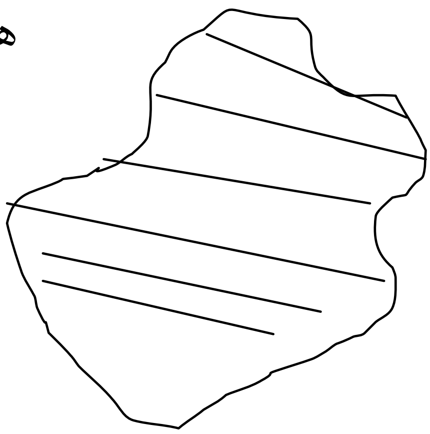
z_1:نقطه داخلی z_2:نقطه مرزی z_3:نقطه خارجی

مجموعه کلیه نقاط مرزی s را مرز S می نامیم.مجموعه S رامجموعه باز می گوییم اگر هرنقطه متعلق به آن ,یک نقطه داخلی باشد و مجموعه S را مجموعه مجموعه بسته گوییم اگر علاوه بر نقاط داخلی شامل نقاط مرزی خود نیز باشد.(مجموعه S را بسته گوئیم هرگاه مکمل آ باز باشد).مجموعه S را کراندار نامیم اگر عدد حقیقی N>٠ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $z\epsilon S$ داشته باشیم $|z| < N$

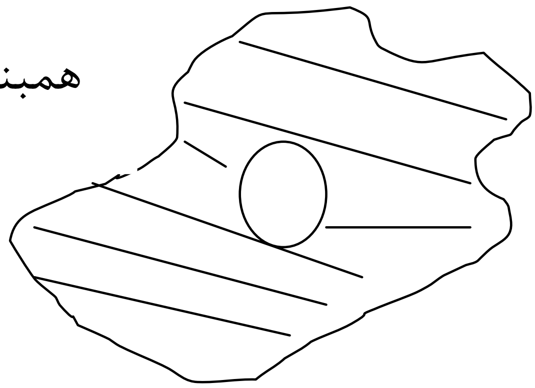


مجموعه باز S را همبند گوئیم ,اگر هر دونقطه دلخواه آن را بتوان بوسیله یک خط شکسته به هم وصل کرد بطوریکه تمام نقاط آن درون S باشد.مجموعه S را همبند ساده گوییم اگر هر منحنی بسته واقع در S رابتوان در یک نقطه منقبض کرد که ضمن انقباض هموار در S واقع باشد.

همبند ساده



همبند مرکب



حد توابع مختلط:

فرض کنیدتابع f در همه نقاط همسایگی z_0 بجز احتمالا خود z_0 تعریف شده باشد.در این صورت $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ می باشد, هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ ;\ \exists\, \delta > 0\ \ ;\ 0 < |z - z_0| < \delta\ \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

و تابع $f(z)$ را در $z=z_{\cdot}$ پیوسته گوئیم هرگاه :

$$\lim_{z\to z_{\cdot}} = f(z)$$

حد یک تابع در صورت وجود منحصر به فرد می باشد.

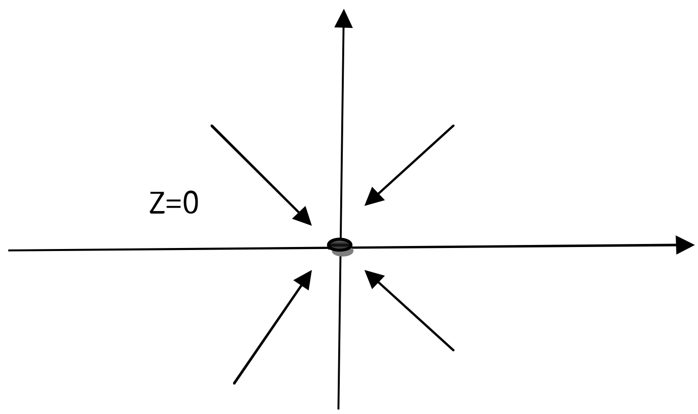
مثال:

حد توابع زیر را درصورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{z\to\cdot}\frac{|z|}{z}=\lim_{(x,y)\to\cdot}\frac{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{x+iy}=\lim_{r\to\cdot}\frac{r}{r\cos\theta+r\sin\theta}=\frac{۱}{\cos\theta+i\sin\theta}$$

وابسته به θ ←منحصر به فرد نیست←حد ندارد.

$$\lim_{z\to\cdot}\frac{Re(z)}{|z|}=\lim_{r\to\cdot}\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$$



حد ندارد

اگر از زاویه $\frac{\pi}{۴}$ به ۰ نزدیک شویم ← $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

اگر از زاویه $\frac{\pi}{۲}$ به ۰ نزدیک شویم ← ۰

و ...

مثال:

تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{Re(z^{۳})}{|z|^{۲}} & z\neq\cdot\\ a & z=\cdot\end{cases}$ به ازای چه مقدار ه مقدار a در $z=\cdot$ پیوسته است؟

پیوستگی تابع از $\lim_{z\to z_{\cdot}} f(z) = f(z)$ نتیجه می شود.

$$\lim_{z\to\cdot} f(z)=\lim_{z\to\cdot}\frac{Re(z^{۳})}{|z|^{۲}}$$

$$z^3=(x+iy)^3=x^3+3ixy-3xy^2-iy^3 \Rightarrow Re(z^3)=x^3-3xy^2$$

$$Re(z^3)=(r\cos\theta)^3-3r\cos\theta(r\sin\theta)^2=r^3cos^3\theta-3r^3\cos\theta\, sin^2\theta$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{Re(z^3)}{|z|^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3cos^3\theta-3r^3\cos\theta sin^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\cos\theta(cos^2\theta-3sin^2\theta)$$

بنابراین باید $f(z=0)=0$ باشد تا تابع در $z=0$ پیوسته باشد.

مشتق توابع مختلط:

مشتق تابع $f(z)$ در z_0 بصورت زیر تعریف می شود:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

اگر حدهای فوق موجود باشند,در اینصورت می گوییم تابع f در z_0 مشتق پذیر است.

مثال:

مشتق پذیری تابع $|z|^2$ را در $z_0=0$ بررسی کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|^2-0}{h^2}=0$$

حد موجود است ← مشتق پذیر است.

تابع تحلیلی:

تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 تحلیلی می نامیم اگر $f(z)$ در تمام نقاط همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد.اگر تابع $f(z)$ در کلیه نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد,آن را *تابع تام* می نامیم.

اگر تابع f در نقطه z_0 تحلیلی نباشد ولی در همسایگی آن تحلیلی باش آنگاه z_0 را یک نقطه تکین تابع $f(z)$ می نامیم.

مثلا نقطه $z=0$ برای تابع $\frac{1}{z}$ یک نقطه تکین است.

$$f(z)=\frac{1}{z} \qquad f'(z)=\frac{-1}{z^2}$$

قضیه کوشی-ریمان در فرم دکارتی :

هرگاه تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_\cdot=x_\cdot+iy_\cdot$ دارای مشتق باشد, آنگاه خواهیم داشت:

$$f'(z_\cdot)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

قضیه کوشی – ریمان در فرم قطبی:

هرگاه تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ در نقطه $z_\cdot=r_\cdot e^{i\theta_\cdot}$ دارای مشتق باشد,آنگاه خواهیم داشت:

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}=\frac{۱}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}$$

$$\begin{cases} u_r=\dfrac{۱}{r}v_\theta \\ u_r=-\dfrac{۱}{r}v_\theta \end{cases}$$

تذکر:

قضایای کوشی – ریمان شرایط لازم مشتق پذیری هستند نه شرایط کافی.مثلا تابع $f(z)=\begin{cases} \dfrac{(\overline{z})^۲}{z} & z\neq ۰ \\ ۰ & z=۰ \end{cases}$ در $z=۰$ مشتق پذیر نیست ولی در معادلات کوشی – ریمان صدق می کند.

اگر تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_\cdot$ در معادلات کوشی ریمان صدق نکند, در آن نقطه مشتق پذیر نیست.

قضیه:

شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در حوزه D تحلیلی باشد,آنست که u_x, u_y, v_x, v_y که در D پیوسته و در معادلات کوشی – ریمان صدق کنند.

مثال:

تابع $f(z)=z^۲$ در کلیه نقاط صفحه مختلط ,تحلیلی است.

f(z)= $z^{۲}=(x+iy)^{۲}=x^{۲}-y^{۲}+۲ixy \begin{cases} u=x^{۲}-y^{۲} \\ v=۲xy \end{cases}$

$$\begin{cases} u_x=۲x \\ u_y=-۲y \\ v_x=۲y \\ v_y=۲x \end{cases} \qquad \begin{matrix} u_x=v_y \\ u_x=-v_y \end{matrix}$$

مثال:

روابط کوشی – ریمان را برای تابع زیر در مبدا بررسی کنید.

$$f(z)=\begin{cases} \frac{(\bar{z})^{۲}}{z} & z\neq ۰ \\ ۰ & z=۰ \end{cases}$$

$$f(z)=\frac{(x-iy)^{۲}}{x+iy}=\frac{(x-iy)^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}}=\frac{x^{۳}+۳xy^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}+i\,\frac{y^{۳}-۳x^{۲}y}{x^{۲}+y^{۲}}$$

$$u_x(۰,۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{u(x,۰)-u(۰,۰)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۳}}{x^{۳}}=۱$$

$$u_y(۰,۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{u(۰,y)-u(۰,۰)}{y}=\lim_{y\to ۰}\frac{۰}{y^{۳}}=۰$$

$$v_x(۰,۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{v(x,۰)-v(۰,۰)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۰}{x^{۳}}=۰$$

$$v_y(۰,۰)=\lim_{y\to ۰}\frac{v(۰,y)-v(۰,۰)}{y}=\lim_{y\to ۰}\frac{y^{۳}}{y^{۳}}=۱$$

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$$

مثال:

فرض کنید $u=\frac{۲xy}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$ و $f(z)=u+iv$ بجز در مبدا یا همه جا تحلیلی باشد.حاصل $f'(z)$را در نقطه $z=۱+i$ بدست آورید.

راه اول:

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$$

$$u_x=\frac{۲y(x^{۲}+y^{۲})^{۲}-۲(x^{۲}+y^{۲})(۲x)(۲xy)}{(x^{۲}+y^{۲})^{۴}}$$

$$u_y = \frac{(۲x)(x^۲+y^۲)^۲-۲(x^۲+y^۲)(۲y)(۲xy)}{(x^۲+y^۲)^۴}$$

در نقطه $z=۱+i$ داریم:

$$\begin{cases} u_{x=-\frac{۱}{۲}} \\ u_{y=-\frac{۱}{۲}} \end{cases} \qquad \acute{f}(۱+i) = \frac{-۱}{۲} + \frac{i}{۲}$$

راه دوم:

به فرم قطبی:

$$f(z) = u(r,\theta) + i\, v(r,\theta)$$

$$\acute{f}(z) = e^{-i\theta} \quad (u_r + iv_r) = (U_r - i\frac{۱}{r} u\theta) \quad e^{-i\theta}$$

$$u(r,\theta) = ۱ * \frac{۲r\cos\theta r \sin\theta}{(r^۲)^۲} = \frac{\sin۲\theta}{r^۲}$$

$$U_r = -۲\frac{\sin۲\theta}{r^۳}$$

$$U_\theta = ۲\frac{\cos۲\theta}{r^۲}$$

$$\acute{f}(z) = (-۲\frac{\sin۲\theta}{r^۳} - ۲\frac{\cos۲\theta}{r^۲}\frac{i}{r})e^{-i\theta}$$

در نقطه $z=۱+i=\sqrt{۲}\, e^{\frac{\pi}{۴}i}$ داریم:

$$\acute{f}(z) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\left(-۲\sin\frac{\pi}{۲} - ۲i\cos\frac{\pi}{۲}\right)e^{\frac{-i\pi}{۴}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{-۱}{۲} + \frac{i}{۲}$$

تابع همساز:

تابع حقیقی hاز دو متغیر حقیقی x,yرا در یک حوزه Dاز صفحه xyهمساز گوییم اگر در آن حوزه دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله با مشتقات جزئی زیر که به معادلات لاپلاس معروف است صدق کند.

$$\nabla^{۲} h = \frac{\partial^{۲}\mathrm{h}}{\partial^{۲}\mathrm{x}}+\frac{\partial^{۲}\mathrm{h}}{\partial \mathrm{y}^{۲}} = ۰$$

اگر تابع $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ درحوزه D تحلیلی باشد ،آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول u,v در معادلات کوشی –ریمان صدق می کنند یعنی:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \\ u_{xy} = v_{yy} \\ u_{yx} = -v_{xx} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = ۰ \\ v_{xx} + v_{yy} = ۰ \end{cases}$$

اگر دوتابع مفروض u,v در حوزه n همساز باشند و مشتقات جزئی مرتبه اول تنها در D در معادلات کوشی – ریمان صدق کنند،گوییم V یک مزدوج همسازU است.

قضیه:

شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن تابع $f(z) = u(x,y) + i\, v\,(x,y)$ در حوزه D آنست که v یک مزدوج همساز u در D باشد.

مثال:

اگر $U(X,Y)=۲X(۱-Y)$ وتابع $f(z) = u(x,y) + i\,(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه تابع f(z) را بدست آورید ؟

حل: چون $F(Z)$ تحلیلی است V مزدوج همساز U خواهد بود یعنی:

$U_Y=-V_X$

$U_X=V_Y$

$U_X=۲(۱-Y)=V_Y \rightarrow V=\int ۲(۱-Y)dy + f(x)$

$$\Longrightarrow v = ۲y - y^{۲} + f(x)$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow -\acute{f}(x) = -۲x \Rightarrow f(x) = x^۲ + C \Rightarrow v = ۲y - y^۲ + x^۲ + C$$

$f(z)=۲x(۱-y)+i(۲y-y^۲+x^۲+C)$

مثال:

اگر $f(z)=r^۳\sin۳\Theta-\frac{۳}{r}\cos\Theta + iv(r,\theta)$ یک تابع تحلیلی باشد ،آنگاه $v(r,\theta)$ را بدست آورید u و v در معادلات کوشی – ریمان صدق می کند:

$U_r=\frac{۱}{r}v_\Theta$

$U_r=\frac{-۱}{r}u_\Theta$

$u_\Theta=۳r^۳\cos۳\Theta+\frac{۳}{r}\sin\theta \quad \rightarrow \quad u_r=۳r^۲\sin۳\theta+\frac{۳}{r^۲}\cos\theta$

$\rightarrow v_\Theta=۳r^۳\sin۳\theta+\frac{۳}{r}\cos\theta \rightarrow \quad v=-r^۳\cos۳\theta+\frac{۳}{r}\sin\theta+A(r)$

$V_r=-۳r^۲\cos۳\theta - \frac{۳}{r^۲}\sin\theta+A'(r)=-\frac{۱}{r}u_\Theta \rightarrow A'(r)=۰\rightarrow A(r)=c$

$\rightarrow v(r,\theta)= -r^۳\cos۳\theta+\frac{۳}{r}\sin\theta+c$

توابع مقدماتی :

توابع نمایی:

تابع نمایی آنالیز مختلط به ازای هر Z با رابطه زیر تعریف می شود:

$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

تابع e^z به ازای تمام مقادیر Z تحلیلی است و مخالف صفر است:

$|e^z|=e^x \qquad \arg(e^z)=y$

$e^{z+۲\pi i}=e^z$ بنابراین دوره تناوب e^z، ۲π است.

به ازای هر Z داریم $e^{\bar{z}} = \overline{(e^z)}$ وتابع $e^{\bar{z}}$ در هیچ جا تحلیلی نیست.

مثال:

اگر z یک عدد مختلط باشد،مدول و آرگومان عدد e^{z+i} کدام است؟

$e^{z+i}=e^{x+iy+i}=e^{x+i(y+۱)}=|e^{z+i}|=e^{x}$, $e^{z+i}=y+۱$

توابع مثلثاتی و هذلولی:

توابع $sinz,cosz$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathrm{Sinz}=\frac{۱}{۲i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

$$\mathrm{cosz}=\frac{۱}{۲}(e^{iz}+e^{-iz})$$

این دو تابع متناوب با دورهπ ۲می باشند.

$$\mathrm{tanz}=\frac{sinz}{cosz}$$

$$\mathrm{cotz}=\frac{cosz}{sinz}$$

توابع sinz,cosz به ازای تمامی مقادیر تحلیلی می باشند.

توجه:

تمام فرمول های توابع مثلثاتی حقیقی برای مقادیر مختلط نیز برقرارند.مثلا

$(\cos z)' = -\sin z$, $(\tan z)' = +\sec^{۲} z$,$\sin^{۲} z+\cos^{۲} z=۱$

می توان نشان داد که

$\sin z= \sin x \cosh y+i \cos x \sinh y$

$\cos z=\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$

$\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$

$\overline{\tan z}=\tan\bar{z}$

:

توابع هذلولی :

سینوس و کسینوس هذلولی متغیر مختلط z بصورت زیر تعریف می شود:

$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{۲}$ $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{۲}$

توابع فوق تحلیلی با تناوب ۲ πi می باشند.

$\coth z = \frac{coshz}{sinh}$ $\tanh z = \frac{sinhz}{coshz}$

$\cosh z = \cos(iz)$ $\sinh z = -i\sin(iz)$

$\cosh(iz) = \cos z$ $\sinh(iz) = i\sin z$

$\cosh^{۲} z - \sinh^{۲} z = ۱$ $\sinh(-z) = -\sinh z$

$\cosh(-z) = \cosh z$

مشتق توابع هذلولی:

$(\sinh z)' = \cosh z$ $(\coth z)' = \sinh z$

$(\tanh z)' = \mathrm{sech}^{۲} z$ $(\coth z)' = -\mathrm{csch}^{۲} z$

توابع معکوس هذلولی :

$\sin^{-۱} z = -i\log(iz+\sqrt{۱-z^{۲}})$

$\sinh^{-۱} z = \log(z+\sqrt{۱+z^{۲}})$

$\cos^{-۱} z = -i\log(z+\sqrt{۱-z^{۲}})$

$\cosh^{-۱} z = \log(z+\sqrt{z^{۲}-۱})$

$tg^{-۱} z = \frac{i}{۲}\log\frac{i+z}{i-z}$

$tg^{-۱} z = \frac{۱}{۲} log\frac{۱+z}{۱-z}$

مثال:

تحلیلی بودن تابع زیر را در بازه $|z|<۱$ بررسی کنید؟

$$f(z)=\begin{cases} \frac{۱-\cos z}{\sin^۲ z} & z \neq ۰ \\ \frac{۱}{۲} & z = ۰ \end{cases}$$

$$\frac{۱-\cos z}{\sin^۲ z} = \frac{۲\sin^۲\frac{z}{۲}}{۴\sin^۲\frac{z}{۲}\cos^۲\frac{z}{۲}} = \frac{۱}{۲\cos^۲\frac{z}{۲}}$$

$\cos^۲\frac{z}{۲}$ به ازای $z=\pi$ صفر می شودکه در بازه $|z|<۱$ قرار ندارد.

$\lim_{z\to ۰} f(z) = f(۰)=\frac{۱}{۲}$ پیوسته

چون تابع $\frac{۱}{۲\cos^۲\frac{z}{۲}}$ در بازه $|z|<۱$ تحلیلی است، $f(z)$ نیز در این بازه تحلیلی است .

تابع لگاریتمی وتوان عمومی :

تابع لگاریتمی آنالیز مختلط به صورت زیر تعریف می شود :

$$\log z=\ln r+i\theta$$

که در آن $r=|z|$ و $\theta=\arg z$

اگر φ معرف مقدار اصلی $\arg z$ باشد $(-\pi<\varphi \le \pi)$ می توان نوشت :

$$\theta=\varphi + ۲k\pi \qquad k = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$$

لذا $\log z$ تابعی چند مقداری است ،مقداری از $\log z$ را که متناظر با مقدار اصلی $\arg z$ است را مقدار اصلی $\log z$ نامیده و آنرا با $\operatorname{Log} z$ نشان می دهیم:

$$\operatorname{Log} z=\ln r+i\varphi \qquad -\pi<\varphi \le \pi$$

مثال:

$$log\,(-۲-۲i) = log\,(\sqrt{۸}\, e^{-\frac{۳\pi}{۴}i}) = ln\sqrt{۸} - \frac{۳\pi}{۴}\, i$$

یادآوری:

رابطه زیر برای اعدادمختلط نیز برقرار است:

$$Z^n = e^{nlogz}$$

بنابراین:

$$log\, z^n = nlog\, z + ۲\pi ki \qquad k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$$

$Log\, z$ در بازه $-\pi < \varphi < \pi$ پیوسته و تحلیلی می باشد و

$$\frac{d}{dz} Log\, z = \frac{۱}{z} \qquad -\pi < argz < \pi$$

مثال:

مقدار اصلی $(۱+i)^{۱-i}$ را بدست آورید؟

$$(۱+i)^{۱-i} = e^{(۱-i)log(۱+i)}$$

$$log(۱+i) = log\,(\sqrt{۲}\, e^{i\frac{\pi}{۴}}) = ln\sqrt{۲} + i\frac{\pi}{۴}$$

$$(۱+i)^{۱-i} = e^{(۱-i)(ln\sqrt{۲} + i\frac{\pi}{۴})} = e^{(ln\sqrt{۲} + i\frac{\pi}{۴}) + i(-ln\sqrt{۲} - i\frac{\pi}{۴})}$$

$$= e^{ln\sqrt{۲}}\left(cos\frac{\pi}{۴} + isin\frac{\pi}{۴}\right)(cos(-ln\sqrt{۲} - i\frac{\pi}{۴}) + isin(-ln\sqrt{۲} - i\frac{\pi}{۴}))$$

مثال:

مقدار $log\, z^۲$ را در نقطه $z = e^{i\frac{۳\pi}{۴}}$ بدست آورید؟

$$Log\, z = ln\,|z| + i\theta \qquad -\pi < \varphi < \pi$$

$$Log\, z^۲ = Log\, e^{i\frac{۳\pi}{۲}} = ln۱ + i\frac{۳\pi}{۲} = i\frac{۳\pi}{۲}$$

چون $\frac{۳\pi}{۲}$ در بازه $-\pi<\varphi\leq\pi$ قرار ندارد ۲π از آن کم می کنیم:

$$\varphi=\frac{۳\pi}{۲}-۲\pi=-\frac{\pi}{۲}$$

$$-\pi<-\frac{\pi}{۲}<\pi$$

$$Log\, z^{۲}=-\frac{\pi}{۲}i$$

موفق باشید

احسائیان

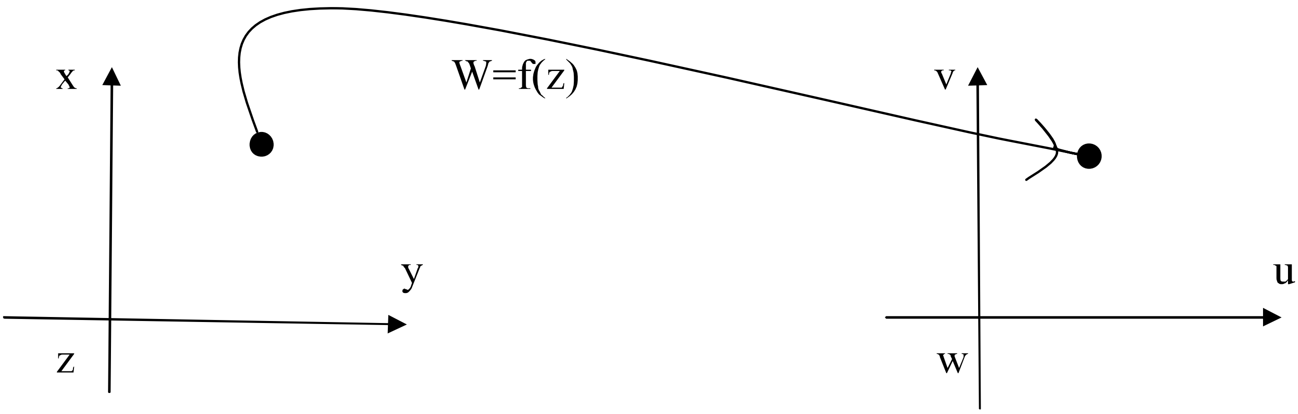
فصل سوم:نگاشت ها

در این فصل گفته می شود:

- تعاریف و قضایا
- نگاشت های مقدماتی
- نگاشت همانی
- نگاشت انتقالی
- نگاشت انبساط یا انقباض
- نگاشت توانی
- نگاشت ریشه nام
- نگاشت کسری $\frac{۱}{۲}$
- نگاشت کسری موبیوس
- نگاشت e^{z}
- نگاشت لگاریتمی
- نگاشت مثلثاتی
- تبدیل متوالی

عملکرد یک تابع مختلط مانند w=f(z) بمنزله یک نگاشت از صفحه z به صفحهw است، بطوریکه اگر z=x+iy وw=u+iv فرض شود، تحت عمل f نقطه (x,y) به نقطه (u,v) تبدیل می گردد.

تابع f یک به یک است هرگاه هرw، تبدیل یافته یک z خاص باشد.



تعاریف و قضایا:

۱- چنانچه هر زاویه به راس $z_.$ در صفحه zها با نگاشت w=f(z) به زاویه ای در صفحه wها تبدیل شود که از حیث اندازه وجهت مانند زاویه اول باشد،نگاشت مذکور را درنقطه $z_.$ *همدیس* می گویند.

۲- نگاشتی که فقط اندازه زاویه را حفظ می کند(و نه جهت آن را) نگاشت *هم زاویه ای* نامیده می شود.

۳- اگر تابع f(z) در نقطه $z_.$ تحلیلی بوده و $\acute{f}(z_.) \neq ۰$، آنگاه نگاشت w=f(z) در $z_.$ همدیس است.

۴- نقاط ثابت نگاشت w=f(z) نقاطی هستند که تبدیل یافته آنها نظیرخودشان است.

۵- نگاشت از مجموعهA به مجموعهB را *پوشا* می نامند،اگرهرعضوB تصویردست کم یک عضوA باشد.

۶- نگاشت از مجموعه A به مجموعهB را یک به یک می نامند، اگرعضوهای مختلف A تصاویرمتفاوتی درB داشته باشد.

۷- نگاشتی که هم یک به یک باشد وهم پوشا باشد را *دوسویی* می نامند.

نگاشت های مقدماتی:

۱- نگاشت همانی w=z

این نگاشت هرشکل از صفحه z را بدون هیچ تغییری به صفحه w می نگارد.

۲- نگاشت انتقال w=z+b

این نگاشت هرشکل از صفحه z رابه اندازه b منتقل می کند.به تعبیری شکل را به اندازه Re(b) به راست یا چپ و به اندازه Im(b) به بالا یا پایین انتقال می دهد.

۳- نگاشت انبساط یا انقباض همراه با دوران w=az

اگرفرض شود $a=r_{\cdot} e^{i\theta_{\cdot}}$ ، $z=re^{i\theta}$ و $w=\rho e^{i\varphi}$ به دست می آید:

$$W=az \rightarrow \rho e^{i\varphi}=re^{i\theta} r, rr_{\cdot} e^{i\theta_{\cdot}} \rightarrow \rho e^{i\varphi}=rr_{\cdot}, e^{i(\theta+\theta_o)} \Rightarrow \begin{cases} \rho=rr_{\cdot} \\ \varphi=\theta+\theta_{\cdot} \end{cases}$$

یعنی این نگاشت دو عمل متوالی زیر را انجام می دهد:

الف)فاصله هر نقطه از شکل تا مبدا،را $|a|$ برابرمی کند لذا:

چنانچه $|a|<۱$ باشد فاصله ها کم و انقباض داریم.

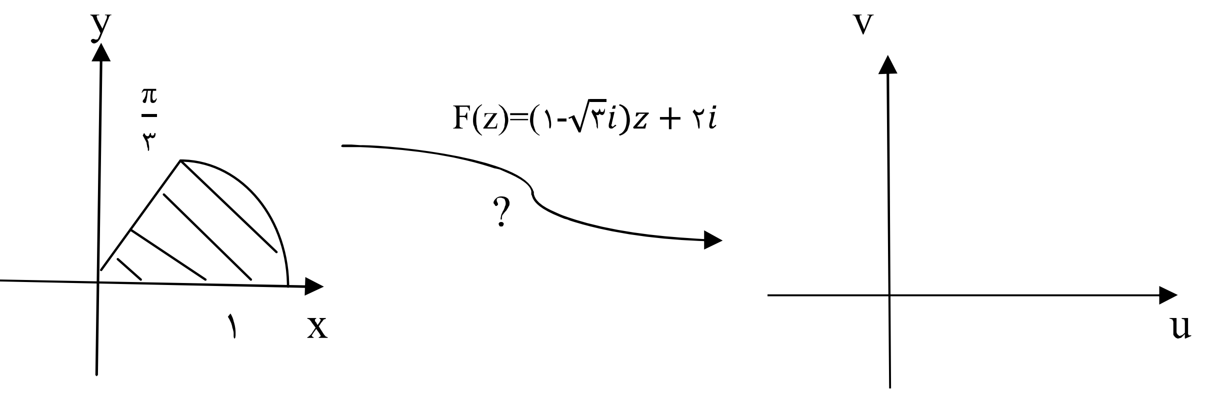
چنانچه $|a|>۱$ باشد فاصله ها کم و انبساط داریم.

چنانچه $|a|=۱$ باشد فاصله ها تغییرنمی کند.

ب)زاویه شعاع حامل هرنقطه را با Arg(a) جمع می کند، لذا کل شکل را به اندازه Arg(a) حول مبدا،مختصات دوران می دهد.

مثال:

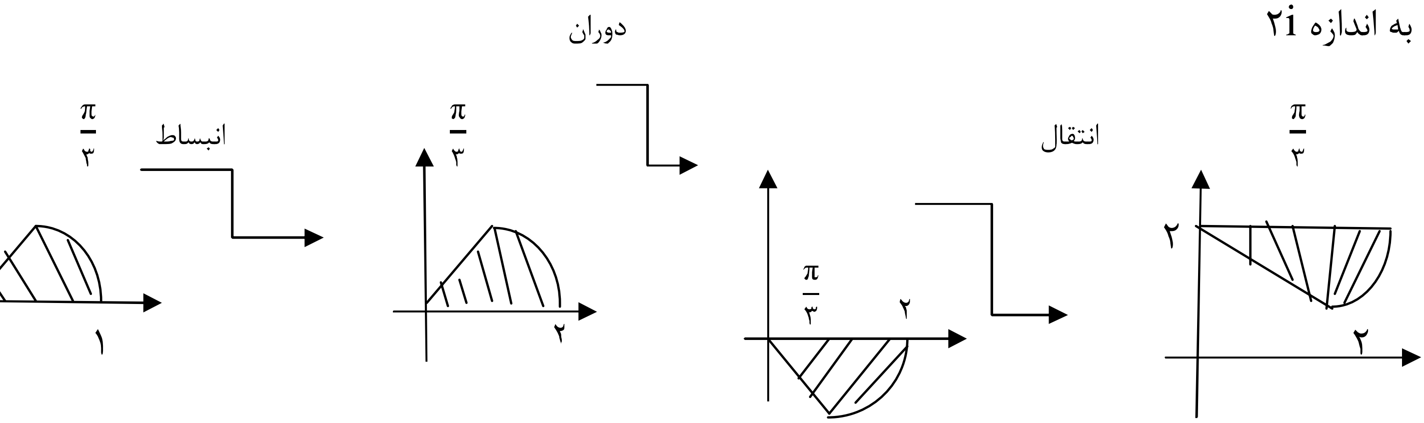
تحت نگاشت $f(z)=(۱-\sqrt{۳}i)z+۲i$ ناحیه $\{|z| \leq ۱, \theta \leq \text{Arg}z \leq \frac{\pi}{۳}\}$ به چه فرمی تبدیل می شود؟



فاصله ها زیاد و انبساط داریم: $|۱-\sqrt{۳}i| = \sqrt{۱+۳} = ۲ > ۱$

دوران به اندازه $-\frac{\pi}{۳}$ $\arg= (۱-\sqrt{۳}i) = -\frac{\pi}{۳}$

انتقال به اندازه ۲i



۴- نگاشت توانی $w=z^n$

از آنجا که $w=z^n$ همواره تحلیلی و $\acute{w} = nz^{n-۱}$ به جز در $z=۰$ همواره مخالف صفراست، لذا نگاشت مذکور به جز در مبدا با مختصات همه جا همدیس است اگرفرض کنیم $z=re^{i\theta}$ و $w=\rho e^{i\varphi}$ به دست می آید:

$$W=z^n \rightarrow \rho e^{i\varphi} = (re^{i\theta})^n, \rightarrow \rho e^{i\varphi} = r^n e^{in\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho = r^n \\ \varphi = n\theta \end{cases}$$

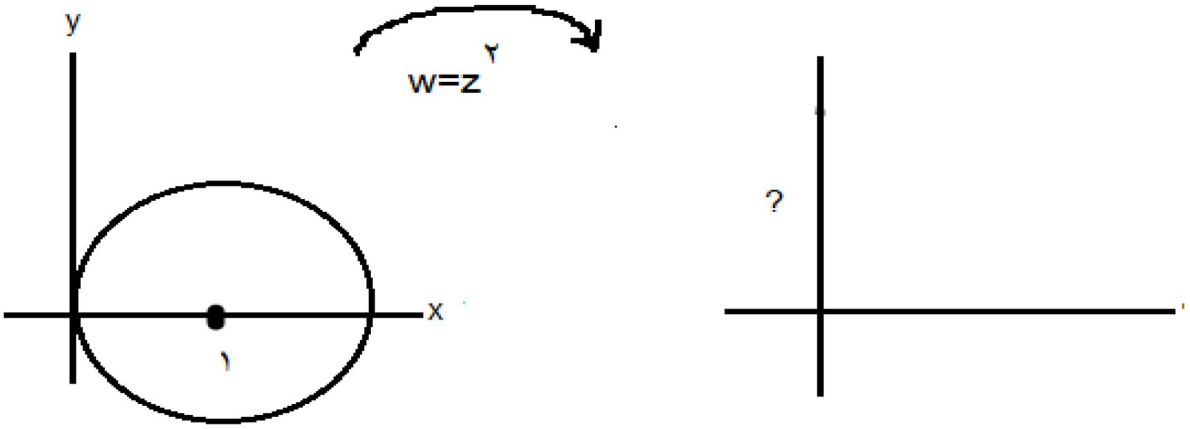
این نگاشت دو عمل متوالی زیر را انجام می دهد:

الف) فاصله هر نقطه از شکل تا مبدا به توان n می رساند.

ب) زاویه شعاع حامل هرنقطه را n برابرمی کند.

مثال:

منحنی $|z-۱|=۱$ تحت نگاشت $w=z^۲$ به چه منحنی تبدیل می شود؟



$$|z-۱|=۱ \to |(x-۱)+iy|=۱ \to \sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}=x^۲+y^۲-۲x+۱=۱$$

$$x^۲+y^۲=۲x \to r^۲=۲r\cos\theta \to r=۲r\cos\theta$$

بنابراین منحنی $|z-۱|=۱$ در فرم قطبی به صورت $r۲\cos\theta$ در می آید.

$$W=z^۲ \Rightarrow \rho e^{i\varphi}=r^۲e^{۲i\theta} \to \begin{cases}\rho=r^۲\\ \varphi=۲\theta\end{cases}$$

بنابراین تبدیل یافته $r=۲r\cos\theta$ با نگاشت مذکور چنین خواهد شد:

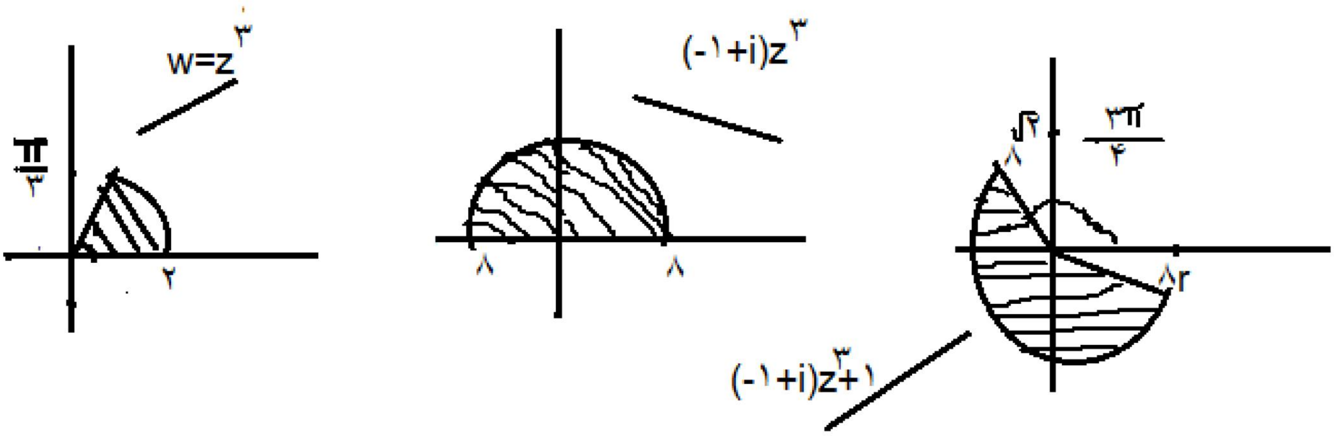
$$\begin{cases}\rho=(۲\cos\theta)^۲=۲(۱+\cos۲\theta)\\ \alpha=۲\theta\end{cases} \to \rho=۲(۱+cos\alpha)$$

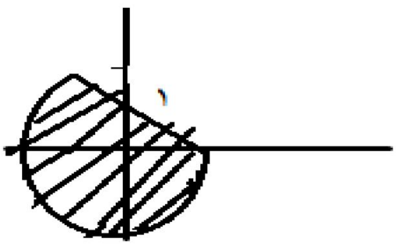
مثال:

تحت نگاشت $w=(-۱+i)\,z^۲+۱$ ناحیه $D=\left\{z\,\middle|\,|z|\le ۲,۰\le \arg z\le \frac{\pi}{۳}\right\}$ به چه ناحیه ای تبدیل می شود؟

۱- تبدیل $z^۳$

۲- تبدیل $(-۱+i)z^{۳}+۱$





$$\begin{cases}|-۱+i| = \sqrt{۲} \\ (-۱+i) = \frac{۳\pi}{۴}\end{cases}$$

۵- نگاشت ریشه nام $w=\sqrt[n]{z}$

با فرض $z=re^{i\theta}$ و $w=\rho e^{i\varphi}$ داریم

$$w=\rho e^{i\varphi}=\sqrt[n]{re^{i\theta}}=r^{\frac{۱}{۲}}e^{i\frac{\theta}{n}}\Rightarrow \begin{cases}\rho=r^{\frac{۱}{n}}\\ \varphi=\frac{\theta}{n}\end{cases}$$

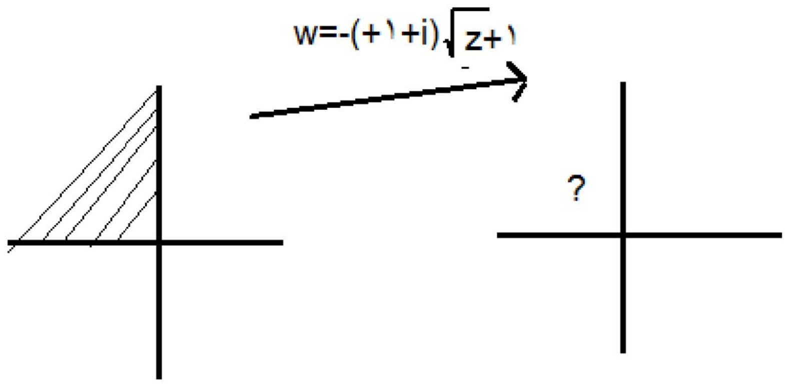
یعنی این نگاشت مشابه تبدیلات توانی بوده و دو عمل متوالی زیر را انجام می دهد:

الف) فاصله هر نقطه از شکل تا مبدا به توان $\frac{۱}{n}$ می رساند.

ب) زاویه شعاع حامل هرنقطه را $\frac{۱}{n}$ برابرمی کند.

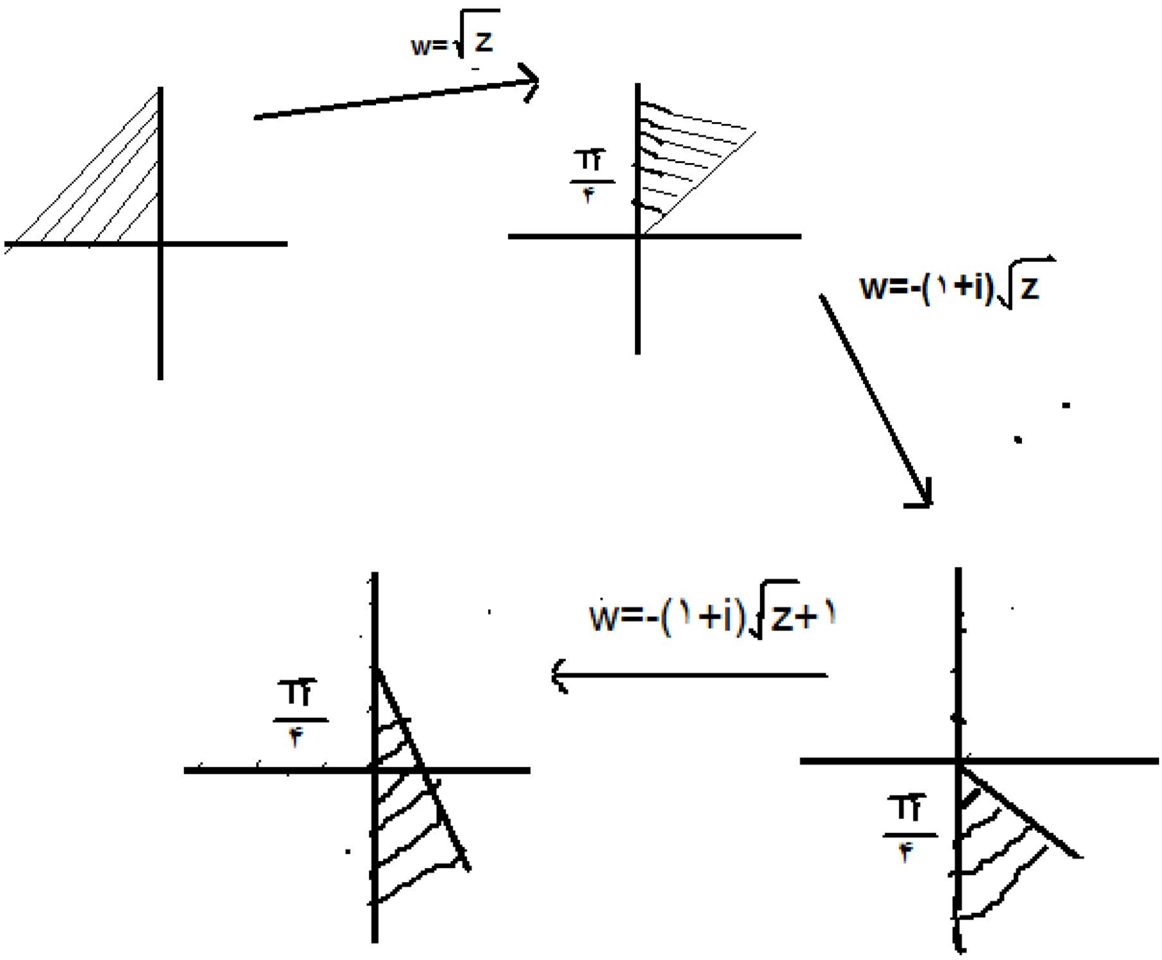
مثال:

نگاشت $w= -(i+۱)\sqrt{z}+i$ در ناحیه $x\leq ۰, y \geq ۰$ را در به چه ناحیه ای تبدیل می کند؟



حل: اول تبدیل $w= \sqrt{z}$

دوم تبدیل $w=-(i+۱)\sqrt{z}+i$



$$W=\sqrt{z} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \varphi = \frac{\theta}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |-(۱+\mathrm{i}) = \sqrt{۲}| \\ -(۱+\mathrm{i}) = -\frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

۶- نگاشت کسری $w=\frac{۱}{z}$

از آنجا که $w=\frac{۱}{z}$به جز در $z=۰$ همواره تحلیلی است و $w = \frac{-۱}{z^{۲}}$ همواره مخالف صفر است. لذا نگاشت مذکور بجز در مبدا مختصات همه جا همدیس است.

اگر فرض کنیم $z=re^{i\theta}$و $w=\rho e^{i\varphi}$ خواهیم داشت:

$$w=\frac{۱}{z} \quad \to \quad \rho e^{i\varphi} = \frac{۱}{re^{i\theta}} \quad \to \begin{cases} \rho = \frac{۱}{r} \\ \varphi = -\theta \end{cases}$$

یعنی این نگاشت دو عمل متوالی زیر را انجام می دهد:

الف) فاصله هر نقطه از شکل را تامبدا معکوس می کند

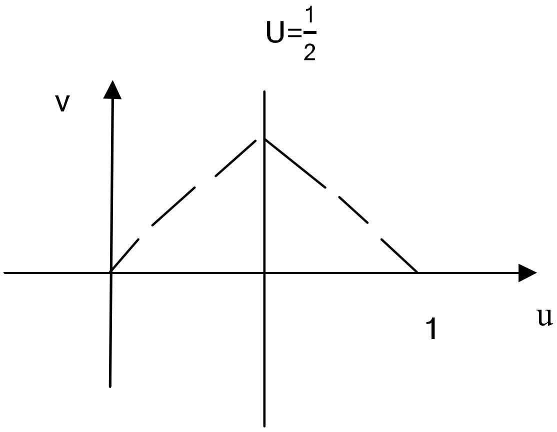
ب) زاویه شعاع حامل هر نقطه را قرینه می کند

به تعبیر دیگر نقش هر نقطه بعد از یک انعکاس دایره ای نسبت به دایره واحد ویک انعکاس آینه ای نسبت به محور افقی بدست می آید.

مثال:

تصویر دایره $|z-\mathrm{i}|=۱$ تحت نگاشت $w = \frac{i}{z}$ را بدست آورید.

$$W=\frac{i}{z} \Rightarrow z = \frac{i}{w} \Rightarrow \left|\frac{i}{w} - i\right| = ۱ \Rightarrow |i||۱-w| = |w| \Rightarrow |w-۱| = |w|$$



یعنی نقاطی که فاصله از مبدا برابر فاصله از ۱ است.

۷- نگاشت کسری موبیوس $w=\frac{az+b}{cz+d}$

Aوbوcو dاعداد مختلط دلخواه می باشند.

تابع موردنظر بجز در$z=\frac{-d}{c}$ همواره تحلیلی و مشتق آن همواره مخالف صفر هست.

لذا این نگاشت بجز در نقطه $z=\frac{-d}{c}$همه جا همدیس است.در این نگاشت نقاط $z_۱=\frac{-d}{c}$ و$z_۲=\infty$ به $w_۱=\infty$ و $w_۲=\frac{a}{c}$ نگاشته می شوند.

مثال:

تبدیل خطی کسری $w=\frac{z-i}{z+i}$ ناحیه $R=\{(x,y)|x>0, y>0\}$ را به چند ناحیه ای می نگارد؟

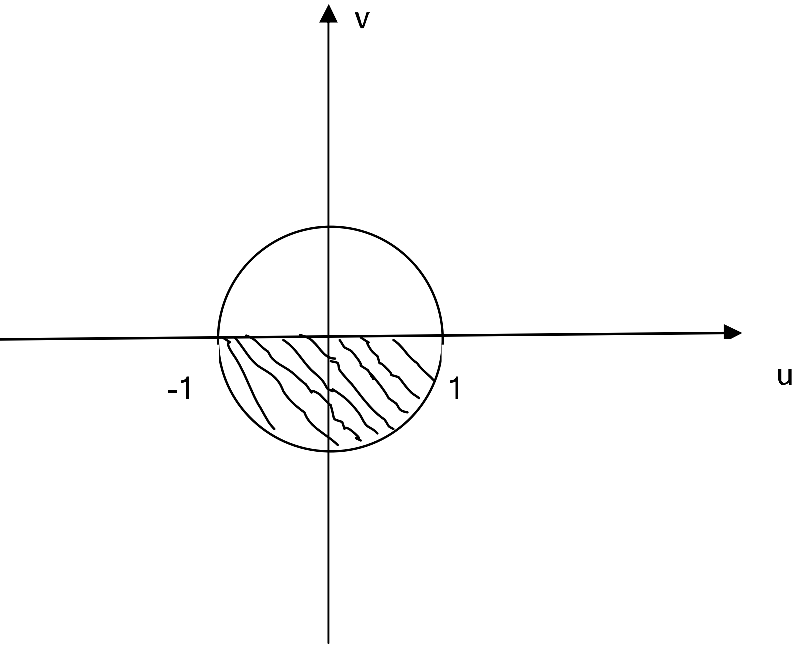
$$W=\frac{z-i}{z+i} \quad\Rightarrow\quad wz+iw=z-i \quad\Rightarrow\quad z=\frac{w+۱}{i(w-۱)}$$

$$\begin{cases} z=x+iy \\ w=u+iv \end{cases} \Rightarrow i(x+iy)=\frac{u+iv+۱}{u+iv-۱} \quad\Rightarrow\quad -y+ix=\frac{(u+۱)+iv}{(u-۱)+iv}$$

$$X\frac{(u-۱)-iv}{(u-۱)-iv} \quad\Rightarrow\quad -y+ix=\frac{(u^۲-۱+v^۲)+i(uv-v-uv-v)}{(u-۱)^۲+v^۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۲v}{(u-۱)^۲+v^۲} \\ y=\frac{۱-u^۲-v^۲}{(u-۱)^۲+v^۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} x>۰ \\ y>۰ \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \frac{-۲v}{(u-۱)^۲+v^۲}>۰ \\ \frac{۱-u^۲-v^۲}{(u-۱)^۲+v^۲}>۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v < ۰ \\ u^۲ + v^۲ < ۱ \end{cases}$$



۸- نگاشت $w = e^z$

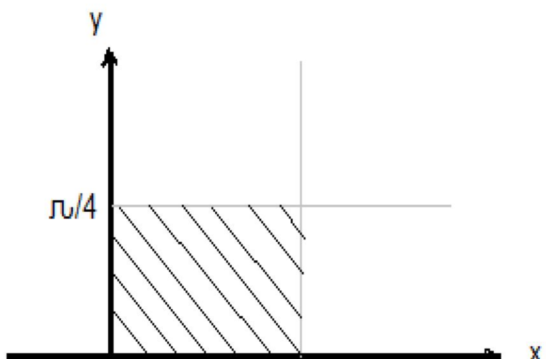
نگاشت $w = e^z$ همواره تحلیلی و $\acute{w} = e^z$ نیز همواره مخالف صفر است. لذا نگاشت مذکور همه جا همدیس است.

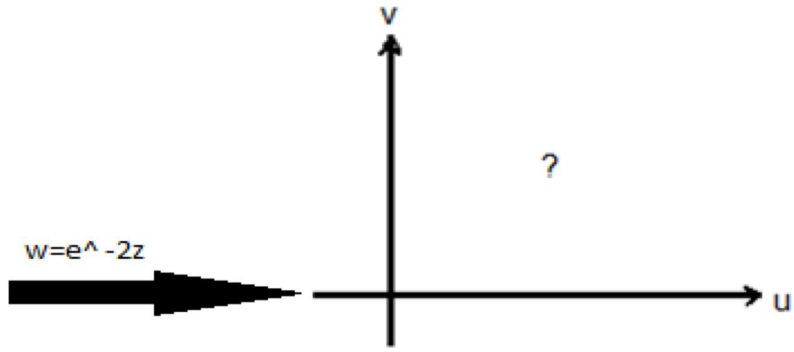
با فرض z=x+iy و $w = \rho e^{i\varphi}$ داریم:

$$\begin{cases} w = e^z \\ \rho e^{i\varphi} = e^{x+iy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = e^x \\ \varphi = y \end{cases}$$

مثال:

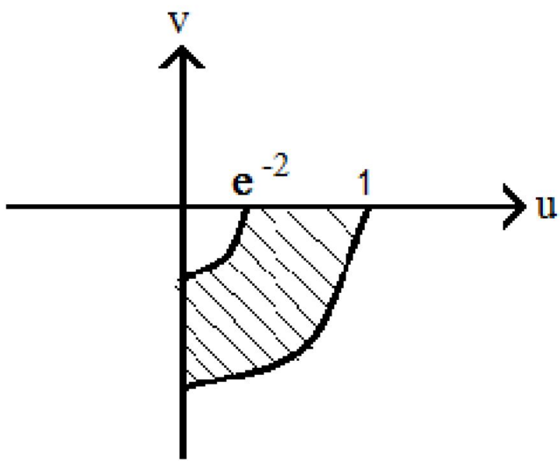
ناحیه $D^{\prime}$ که تبدیل یافته ناحیه $D=\{(x\ y)|۰\leq x\leq ۱ \text{ and } ۰\leq y\leq \frac{\pi}{۴}\}$ تحت نگاشت $w=e^{-۲z}$ بیابید.





$$w = e^{-۲z} = e^{-۲(x+iy)} \implies \begin{cases} \rho = e^{-۲x} \\ \varphi = -۲y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdot \leq x \leq ۱ \\ \\ \cdot \leq y \leq \frac{\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-۲} \leq \rho \leq ۱ \\ \\ \frac{-\pi}{۲} \leq \varphi \leq \cdot \end{cases}$$



۹-نگاشت لگاریتمی w=Ln z

باتوجه به اینکه:

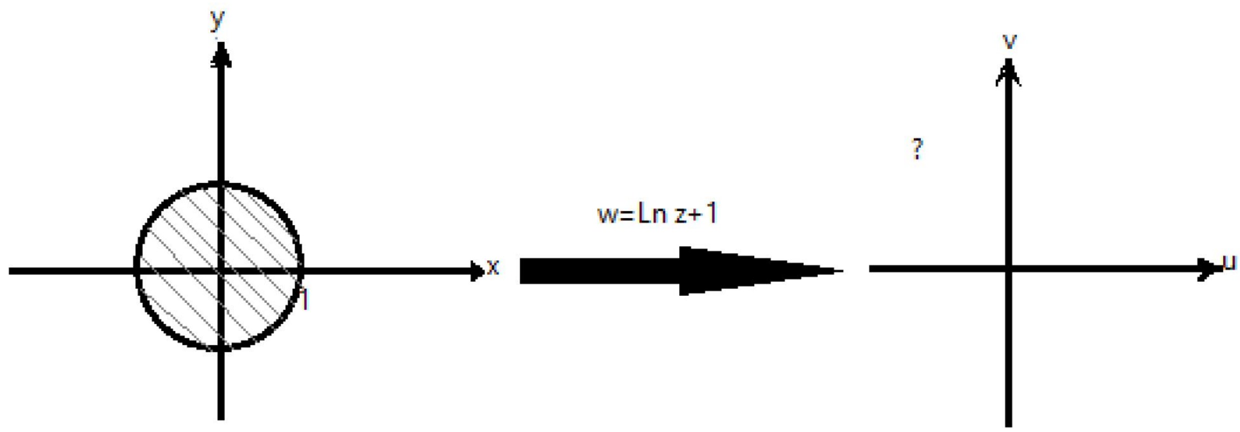
ln z=ln r+ i(θ+۲kπ)   k=۰, ۱, ۲,...

تابع w=ln z بیانگر یک تابع تک مقداره نمی باشد. ولی برای w=Ln z خواهیم داشت:

w=Ln z ⇒u+v=Ln r+iθ ⇒$\begin{cases} u = Ln\, r \\ v = \theta \end{cases}$

مثال:

ناحیه $x^۲ + y^۲ < ۱$ تحت نگاشت w=Ln z+i به چه ناحیه ای تبدیل می شود.

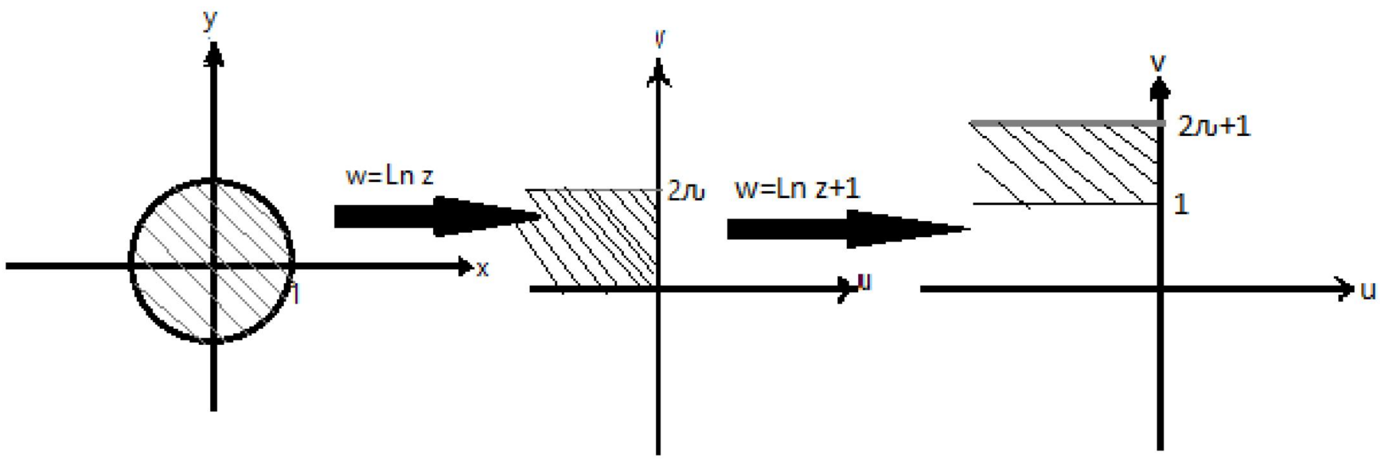


تبدیل w=Ln z+۱ از ترکیب دو تبدیل زیر حاصل می شود:

۱- W=Ln z

۲- W=Ln z+۱

$$W=\text{Ln } z \Rightarrow \begin{cases} u = Ln\, r \\ v = \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} ۰ \leq r \leq ۱ \\ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\infty \leq u \leq ۰ \\ ۰ \leq v \leq ۲\pi \end{cases}$$



۱۰-نگاشت مثلثاتی w=sin z و w=cos z

توابع sin z و cos z متناوب با دوره ۲π می باشند. لذا نگاشت یک به یک نخواهند بود. برای w=sin z داریم w'=cos z که در z=k$\pi + \frac{\pi}{2}$ صفر می شود و در این نقاط همدیس نخواهد بود.

برای تابع w=cos z داریم $w' = -\sin z$ که در z=kπ صفر می شود و در این نقاط همدیس نخواهد بود.

$$\begin{cases} \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos y + \sin iy \cos x = \sin x \cos hy + i \cos x \sin h \\ \cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cos hy - i \sin x \sin hy \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = \sin z \begin{cases} u = \sin x \cos hy \\ v = \cos x \sin hy \end{cases} \qquad w = \cos z \begin{cases} u = \cos x \cos hy \\ v = -\sin x \sin hy \end{cases}$$

تابع هذلولی:

$$\begin{cases} \sin hz = \sin h(x+iy) = \sin hx \cos hyi + \cos hx \sin hiy = \sin bx \cos y + i \cos hx \sin y \\ \cos \mathrm{hz} = \cos \mathrm{h}(\mathrm{x}+\mathrm{iy}) = \cos \mathrm{hx} \cos \mathrm{hiy} + \sin \mathrm{hx} \sin \mathrm{hiy} = \cos \mathrm{hx} \cos \mathrm{y} + \mathrm{i} \sin \mathrm{hx} + \sin \mathrm{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = \sin hz \begin{cases} u = \sin hx \cos y \\ v = \cos hx \sin y \end{cases} \qquad w = \cosh z \begin{cases} u = \cosh x \cos y \\ v = \sin hx \sin y \end{cases}$$

مثال:

تصویر خط $y = \frac{\pi}{۴}$ تحت نگاشت $w = \cos hz$ را بیاریید.

حل:

$$w = \cos hz = \cos(iz) = \cos(-y+in) = \cos(-y) \cos ix - \sin(-y)$$

$$w = \cos y \cos hx + i \sin y \sin hx \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} u = \cos y \cos hx \\ v = \sin y \sin hx \end{cases}$$

تصویر خط $y = \frac{\pi}{۴}$به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} u = \cos\frac{\pi}{۴}\cos hx \\ v = \sin\frac{\pi}{۴}\sin hx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos hx = \sqrt{۲}u \\ \sin hx = \sqrt{۲}v \end{cases}$$

از آنجا که $\cos h^۲x - \sin h^۲x = ۱$خواهیم داشت:

$$۲u^۲ - ۲v^۲ = ۱ \rightarrow u^۲ - v^۲ = \frac{۱}{۲}$$

تبدیلات متوالی

برای محاسبه نگاشت $w=f\big(g(z)\big)$ می توان ابتدا $w=g(z)$ را بدست آورد سپس $w=f\big(g(z)\big)$ را محاسبه نمود.

مثال:

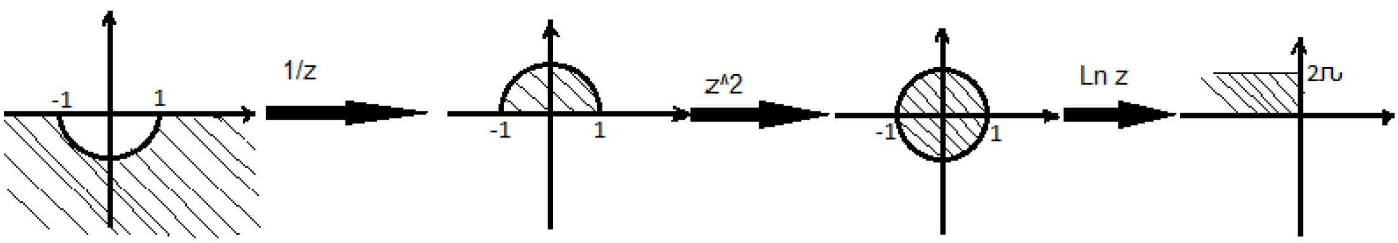
ناحیه $D=\{z|? \leq ۰ \; and \; |z| \geq ۱\}$ را تحت نگاشت $\mathrm{Ln}\left(\frac{۱}{z^۲}\right)$ را بدست آورید.

راه اول:

۱- تبدیل $\frac{۱}{z}$

۲- تبدیل $\left(\frac{۱}{z}\right)^۲$

۳- تبدیل $\mathrm{Ln}\left(\frac{۱}{z^۲}\right)$

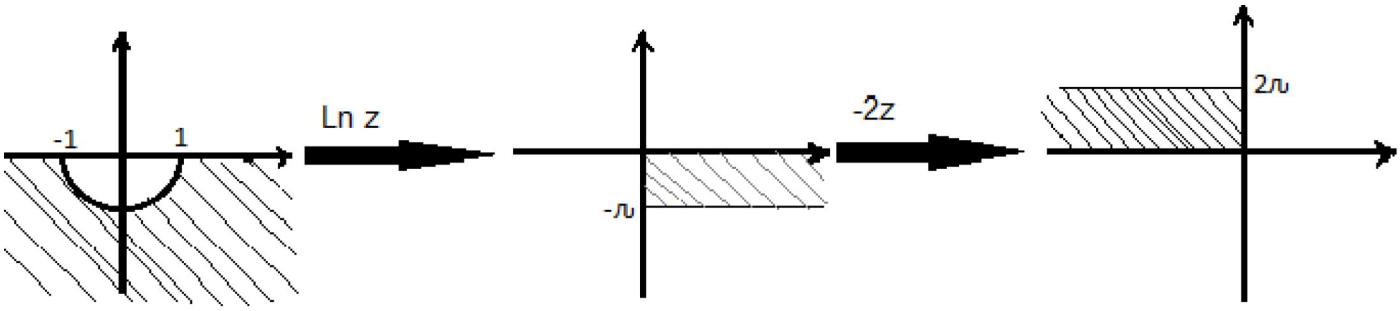


راه دوم:

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{۱}{z^۲}\right) = -۲Ln\, z$$

۱- تبدیل Ln z

۲- تبدیل -۲Ln z



موفق باشید

احسائیان

فصل چهارم : دنباله ها و سری ها

در این فصل گفته می شود :

- قضیه تیلور

- بسط لوران

قضیه لوران

- صفرهای یک تابع مختلط

- قطب های یک تابع مختلط

دنباله ها :

اگر به هر عدد طبیعیn عددی مانند z_n نسبت داده شود آنگاه اعداد ... ... و z_2وz_1 تشکیل یک دنباله را خواهند داد که آنرا بصورت $\{z_n\}$ نمایش می دهیم.

دنباله $\{z_n\}$ را همگرا گوییم هر گاه $\lim_{n\to\infty} z_n = k < \infty$

دنباله $\{z_n\}$ را کراندار گوییم هر گاه عدد مثبت M ای موجود باشد به قسمی که :

$$\forall\, n\in \mathrm{N} \Rightarrow |z_n| \leq M$$

سری ها :

یک سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a(n,z)$نوشته می شود . ناحیه همگرایی این سری را می توان با یکی از نامعادلات زیر کد شرط همگرایی طبق روش دالامبر و روش کوشی می باشند, بدست آورد .

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a(n+1,z)}{a(n,z)}\right| < 1 \\ \\ \dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a(n,z)|} \quad < 1 \end{cases}$$

مثال :

شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ را بدست آورید ؟

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z}{n+1}\right| = 0 \Rightarrow R = \infty$$

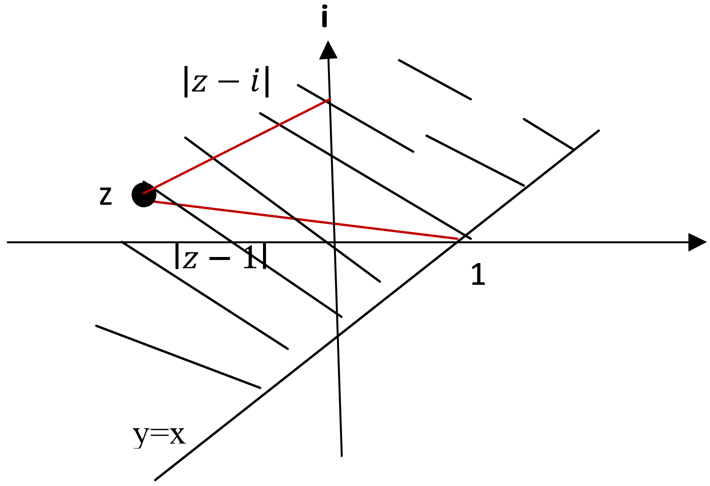
همه جا همگرا

مثال :

ناحیه همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-i}{z-1})^n$ کدام است ؟

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{|a(n,z)|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z-i}{z-1}\right|^n} < 1 \Rightarrow \left|\frac{z-i}{z-1}\right|<1$

$\Rightarrow |z-i| < |z-1|$



قضیه تیلور :

هر گاه f(z) در یک حوزه D تحلیلی باشد و نقطه $z=z_0$ نقطه ای درD باشد . در این صورت دقیقاً یک سری به مرکز z_0 وجود دارد که f(z) را نشان می دهد و بصورت زیر بیان می شود :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$$

در صورتی که $z_0 = 0$،بسط فوق به بسط مک *لوران* مشهور است .

بسط مک لوران چند تابع مهم :

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad sinx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+\cdots \quad |x|<1 \text{ با شرط} \\ \dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1-x+x^2\pm \quad \ldots \quad |x|<1 \text{ با شرط} \end{cases}$$

نکته:

از سری های توانی می توان مشتق و انتگرال گرفت.

-Ln(1-x)=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

Ln(1+x)=$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+x)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$

مثال :

بسط تیلور f(z) $= Lnz$ تابع حول نقطه $z_0=-1+i$ کدام است ؟

$f\acute{}(z)=\frac{1}{z}$ بنابراین $z_0=-1+i$ یک نقطه تحلیلی می باشد .

$$f\acute{}(z)=\frac{1}{z}\ f^2(z)\ =\frac{-1}{z^2}f^3=\frac{2}{z^3}\dots\ \ f^n=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{z^n}$$

$$f^n(-1+i)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(-1+i)^n}$$

f(z)=f(z_0)+$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!(-1+i)^n}(z-(-1+i))^n$

مثال :

سری تیلور f(z)=$\frac{1}{z}$ را حول $z_0=1$ در بازه $|z-1|<1$ بدست آورید .

$\frac{1}{z}=\frac{1}{1-(1-z)}=1+(1-z)+(1-z)^2+(1-z)^3+$..........

زیرا $|1-z|<1$ وتابع f(z)=$\frac{1}{z}$ در این بازه تحلیلی است .

بسط لوران :

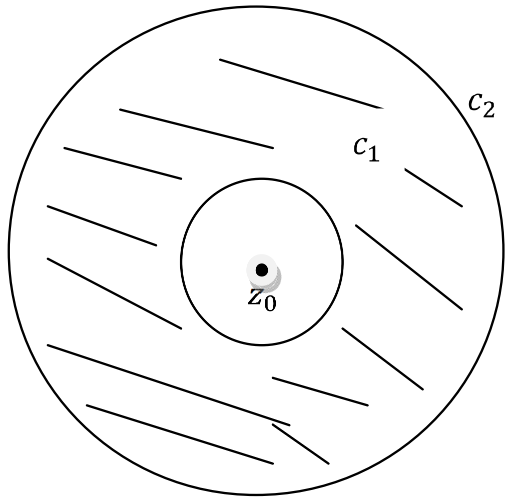
در بسیاری از موارد لازم است که تابع f(z) حول نقطه ای که تابع در آن نقطه تکین است بسط داده می شود .قضیه تیلور را نمی توان در این موارد به کار برد .برای این منظور از سری لوران استفاده می کنیم .

قضیه لوران :

اگر$f(z)$ روی دو دایره متحدالمرکز c_1 وc_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آنها تحلیلی باشد , آنگاه$f(z)$ را می توان با سری لوران زیر نمایش داد :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \\ b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} d_z \end{cases}$$



یا به فرم دیگر:

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

نکته :

معمولا برای محاسبه بسط لوران یک تابع چند جمله ای از انتگرال های بالا استفاده نمی شود و از بسط زیر استفاده می شود:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{باشرط} \quad |z| < 1$$

نکته :

به ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع $f(z)$, *مانده* تابع $f(z_0)$ در z_0 گفته می شود و با c_{-1} نمایش داده می شود .

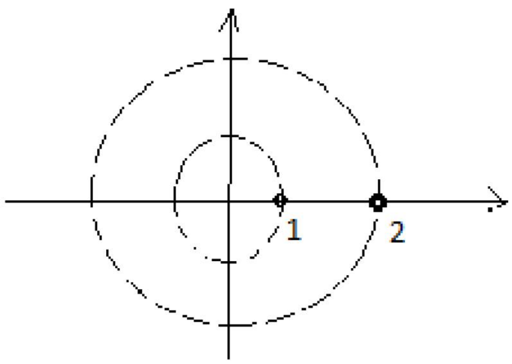
مثال :

سری لوران تابع $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ را در نواحی زیر به دست آورید.

الف) $|z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

نقاط ۱و۲ نقاط تکین تابع f(z) هستند و تابع f(z) در این نقاط تحلیلی نمی باشد .



با شرط $|z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n$

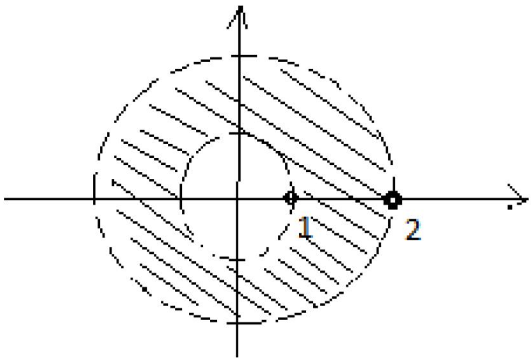
$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{2})^n$$

زیرا

$$\left|\frac{z}{2}\right| \leq |z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{n+1}} - 1) z^n$$

ب) $1 < |z| < 2$



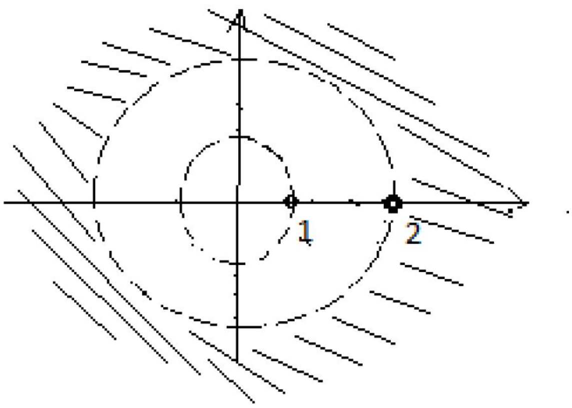
$$* \ |z|>1 \Rightarrow \frac{1}{|z|}<1 \quad f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2-z}$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$** \ |z|<2 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1 \Rightarrow \frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{2^{n+1}})$$

ج) $|z|>2$



$$* \ |z|>2 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$** \ |z|>2 \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1 \quad \frac{1}{2-z}=\frac{-1}{z}.\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{-1}{z}.\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2^n}{z^{n+1}} \Rightarrow f(z)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{2^n}{z^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^{n+1}}$$

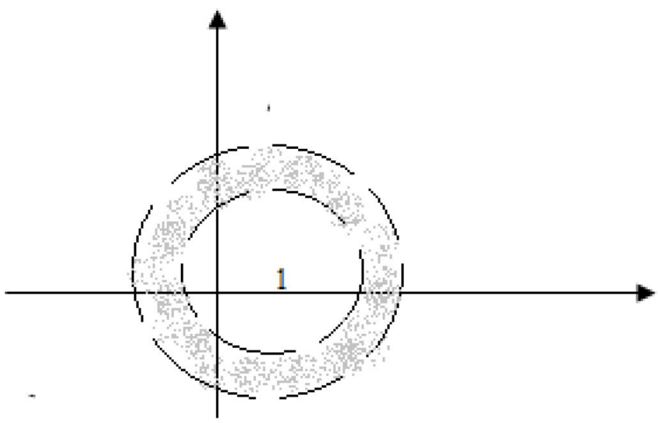
مثال :

بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-5)}$ را در ناحیه $2 < |z-1| < 3$ بدست آورید.

Z_0 در بسط لوران باید مرکز دایره باشد.

$$F(z)=\frac{1}{z(z-5)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(z-1)-4} - \frac{1}{(z-1)+1}\right)$$

$$* \ 2< |z-1| \Rightarrow \left|\frac{z-1}{4}\right| < \frac{1}{2}$$



$$\left|\frac{z-1}{4}\right| < 1$$

$$\frac{1}{(z-1)-4} = \frac{-1}{4}\frac{1}{1-(\frac{z-1}{4})} = \frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n+1}$$

$$** |z-1| > 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{z-1}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$$

$$\frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1}.\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{z-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

$$F(z)=\frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(z-1)^n}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\right]$$

صفرهای یک تابع مختلط:

اگر تابع $f(z)$ در نقطه z_0 دارای صفر باشد داریم:

$$lim_{z\to z_0}|f(z)|=0$$

۱- تابع $f(z)$ در نقطه z_0 دارای صفر مرتبه m ام است هرگاه:

$$f(z_0)=0,\ldots,\ldots.\ f^{(m-1)}(z_0)=0\ ,f^{m}(z_0)\neq 0$$

به تعبیری اگر z_0 یک تابع $f(z)$ باشد کوچکترین عدد صحیح m که $f^{(m)}(z_0)\neq 0$ باشد.مرتبه این صفر را تعیین می کند.

۲- صفرهای یک تابع تحلیلی تنها هستند.یعنی اگر z_0یک صفر مرتبه mام تابع تحلیلی $f(z)$ باشد.یک همسایگی از z_0وجود دارد بطوری که برای هر $z\neq z_0$ از آن همسایگی $f(z)$ مخالف باشد.

مثال :

چند جمله ای $f(z)=az^{n}$ دارای صفر مرتبه n در نقطه $z=0$ می باشد.

۳- اگر $f\left(\frac{1}{z}\right)$ دارای صفری از مرتبه m در $z=0$ باشد.می گوییم $f(z)$ دارای صفری از مرتبه m در $z=\infty$ است.

اگر z_0 صفر تابع $f(z)$ باشد برای تعیین مرتبه این صفر می توان به طریق زیر عمل کرد.

الف–حاصل $lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m}}$ را به ازای $m=1,2,\ldots.$ محاسبه کرده و مقدار m ای که به ازای آن حد مذکور مقداری متناهی و مخالف صفر پیدا می کند را به عنوان مرتبه صفر z_0 معرفی کنم.

ب–بسط تیلور تابع را حول نقطه z_0 نوشته و عدد پایین ترین توان عبارت $(z\text{-}z_0)$ را بعنوان مرتبه صفر z_0 گزارش کنم.

قطب های تابع مختلط :

اگر بخش اصلی در بسط لوران دارای تعداد متناهی جمله باشد.یعنی بصورت زیر بیان شود.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} an(z-z_0)^{n}+\frac{b1}{(z-z_0)}+\cdots+\frac{bm}{(z-z_0)^{m}}$$

و $b_n=0$ برای $n>m$ تکینی f در $z=z_0$ را قطب و m را مرتبه قطب می نامیم . قطب مرتبه اول را *قطب ساده* می نامیم.

برای تعیین مرتبه قطب می توان $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ را به ازای $m=1,2,\ldots$ محاسبه می کنیم. مقدار m که به ازای آن برای اولین بار,حد فوق برابر مقداری متناهی شود,مرتبه قطب می باشد.

اگر تابع تحلیلی $f(z)$, تکینی غیر از قطب داشته باشد,این تکین را *تکین اساسی* $f(z)$ می نامیم.

مثال :

تابع $f(z)=\frac{2}{z(z-1)^3}-\frac{5}{(z-1)^2}$ دارای قطبی ساده در $z=0$ و قطبی از مرتبه ۳ در $z=1$ است.

مثال :

تابع $e^{1/z}$ دارای یک تکین اساسی تنها در $z=0$ است.

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots$$

اگر $f(\frac{1}{z})$ دارای قطبی از مرتبه m در $z=0$ باشد,می گوییم $f(z)$ دارای قطبی از مرتبه m در $z=\infty$ است.

مثال :

چند جمله ای $f(z)=z+3z^2$ دارای قطبی از مرتبه ۲ در بینهایت است. زیرا $f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}$ در $z=0$ دارای قطبی از مرتبه n در بینهایت دارد.

نکته :

هر چند جمله ای از درجه n , قطبی از مرتبه n در بینهایت دارد.

مثال :

نقاط $z=2$ و$z=-2$ چه نقاطی برای تابع $f(z)=\frac{z^7}{(z^2-4)^2\exp\left(\frac{1}{z-2}\right)}$ هستند.

$$F(z)=\frac{z^7}{(z-2)^2(z+2)^2\exp\left(\frac{1}{z-2}\right)}$$

$Z=-2$ قطب مرتبه ۲ می باشد.

$Z=2$ نقطه تکین اساسی $e^{1/z-2}$ و تابع $f(z)$ می باشد.

نقطه $z=z_0$ را یک نقطه تکین برداشتنی می نامیم. اگر تابع $f(z)$ در این $z=z_0$ تحلیلی نباشد ولی بتوان آنرا در $z=z_0$طوری تعریف کرد که در آن نقطه تحلیلی شود.

مثال :

نقطه $z=0$ یک نقطه تکین برداشتنی تابع $f(z)=\frac{1-\cos z}{z}$ می باشد.

$$\frac{1-\cos z}{z}=\frac{1}{z}\left(1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}\pm\cdots\right)=\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{4!}\pm\cdots$$

قضیه :

برای تابع $w(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$, چناچه z_0 صفر مرتبه m تابع $f(z)$ و صفر مرتبه n ام تابع $g(z)$ باشد:

۱-اگر $m>n$ آنگاه $z0$ صفر مرتبه $(m-n)$ ام تابع w است.

۲-اگر$m=n$ آنگاه $z0$ یک تکین برداشتنی تابع w است.

۳-اگر $m< n$ آنگاه $z0$ قطب مرتبه $(n-m)$ ام تابع $w(z)$ است.

مثال :

نقطه $z=0$ برای تابع $f(z)=\frac{1-e^z}{\sin z-\sin h^z}$ چه نقطه ای می باشد؟

صورت کسر $\left| \underset{z=0}{=(1-e^z)} \right| \underset{z=0}{=0}$

مشتق صورت کسر $\left| \underset{z=0}{=-e^z} \right| \underset{z=0}{=-1\neq 0}$

بنابراین $z=0$ صفر مرتبه اول صورت کسر است.

مخرج کسر $\left| \underset{z=0}{=(\sin z-\sin hz)} \right| \underset{z=0}{=0}$

مشتق اول مخرج کسر $\left| \underset{z=0}{=\cos z-\cos hz} \right| \underset{z=0}{=0}$

مشتق دوم مخرج کسر $\left. = -\sin z - \sin hz \right|_{z=0} = 0$

$z = 0$

مشتق سوم مخرج کسر $\left. = -\cos z - \cos hz \right|_{z=0} = -z \neq 0$

$z = 0$

بنابراین $z=0$ مرتبه سوم مخرج کسر است و در کل $z=0$ قطب مرتبه ($1 - 3 = 2$) ام تابع $f(z)$ است.

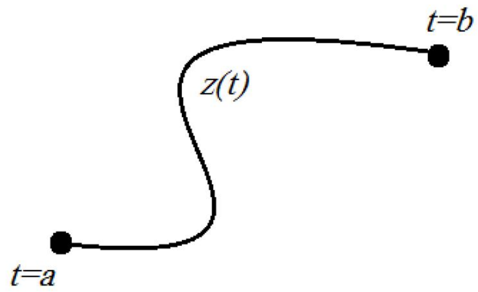
موفق باشید

احسائیان

فصل پنجم:

خم یا منحنی:

فرض کنید$z(t) = x(t) + iy(t)$ که درآن$a \leq t \leq b$.هرگاه $z(t)$تابعی پیوسته (y, x تابعی پیوسته باشند) zرا یک خم یا منحنی گویند.



خم ساده:

تابع $z(t)$ را خم ساده گوییم هرگاه این منحنی خودش را قطع نکند. یعنی $z(t)$ بر روی $[a, b]$ یک به یک باشد.

منحنی بسته ساده:

منحنی c به معادله $z(t) = x(t) + iy(t)$اگر بگونه ای باشد که $z(a) = z(b)$ وبرای سایرt ها $z(t)$یک به یک باشد, c یک منحنی بسته ساده است.

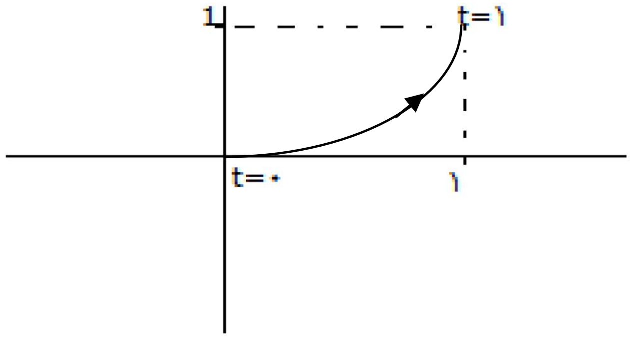
انتگرال مختلط:

فرض کنید تابع$f(z(t))$ یک تابع پیوسته تکه ای روی $[a , b]$باشد, تعریف می کنیم.

$$\int_c f(z)dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z(t))\acute{z}(t)dt$$

مثال:

مقدار انتگرال $\int_c z^2\ dz$ را روی منحنی $c: z(t) = t + t^2 \quad 0 \le t \le 1$ بدست آورید



$$\int_c z^2\ \ dz = \int_0^1 (t + i\,t^2)^2\ (1 + i2t)dt$$

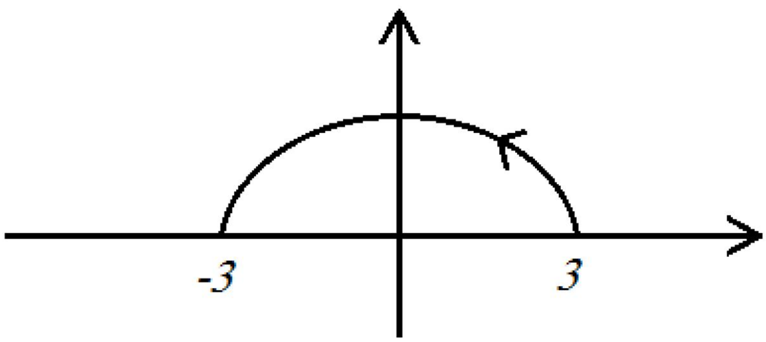
$$\int_0^1 (t^2 - t^4 - 2it^3)(1 + 2ti)dt$$

$$= \int_0^1 t^2 - t^4 - 4t^4 + i(2t^3 + 2t^3 - 2t^5))dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{4}{5} + i(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$$

$$= \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}i$$

مثال:

حاصل انتگرال $\int_{\mathbb{C}} z^{\frac{1}{2}} dz$ را روی منحنی زیر بدست آورید.



$$z(t) = 3e^{it} \quad 0 \le t \le \pi$$

$$I = \int_0^\pi (3e^{it})^{\frac{1}{2}} 3i\, e^{it} dt = 3\sqrt{3i}\int_0^\pi e^{i(\frac{3t}{2})} dt = 3\frac{\sqrt{3i}}{\frac{3}{2}i} e^{\frac{3it}{2}} \quad /_0^\pi$$

$$= 2\sqrt{3}(e^{\frac{3\pi}{2}i} - 1) = -2\sqrt{3}(1 + i)$$

طول منحنی:

اگر z(t) پیوسته تکه ای باشند, طول منحنی z(t) بصورت زیر تعریف می شود.

$$L = \int_a^b /\acute{z}(t)/\, dt = \int_a^b \sqrt{\acute{x}^2(t) + \acute{y}^2(t)}\, dt$$

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

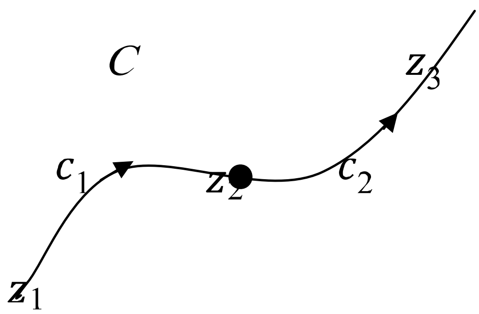
خواص انتگرال:

1-اگر f(x) وg(x) روی منحنی c دارای انتگرال باشند آنگاه

$$\int_c kf(z) \pm k_2 g(z)dz = k_1 \int_c f(z)dz \pm k_2 \int_c g(z)dz$$

2-اگر منحنی c از دو منحنی c_1 و c_2 تشکیل شده باشد آنگاه

$$\int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$$



قضیه کوشی-گورسا:

اگر f(z)در تمام نقاط درون و روی منحنی ساده بسته c تحلیلی باشد , آنگاه

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

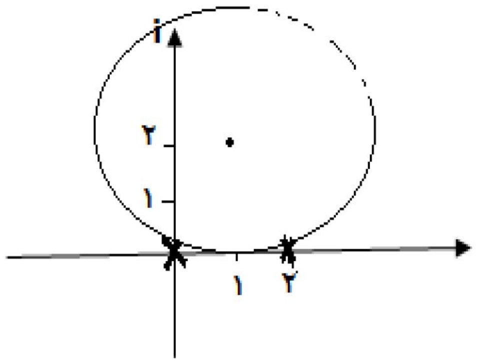
مثال :

حاصل انتگرال $\oint_c \frac{z+}{z^3-2z^2}$ را حساب کنید.c دایره ای است به معادله $|z-1-2i| = 2$

حل: بررسی می کنیم آیا $f(z)$ درمنحنی c تحلیلی است یا نه

$$z^3-2z^2=0 \rightarrow z^2(z-2)=0\left\{\begin{matrix} z=0 \\ z=2 \end{matrix}\right.$$

تابع $f(z)$ درون منحنی c تحلیلی است بنابراین



$$\oint_c \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz=0$$

فرمول انتگرال کوشی:

فرض کنید $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد, آنگاه به ازای هر نقطه z_0 از D و هر مسیر بسته ساده C در D که z_0 نقطه ای در درون آن باشد , داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\, f(z_0)$$

مثال:

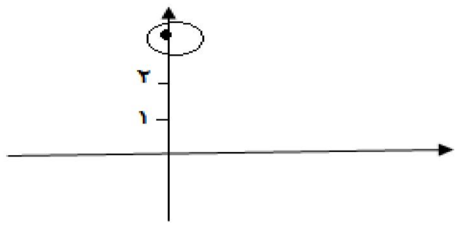
حاصل انتگرال $\oint_c \frac{2z+1}{z^3-z^2i+6}dz$ را بدست آورید .(منحنی c دایر ه ای است به شعاع $\frac{1}{3}$ و به مرکز $3i$)

حل: نقاط تکین را بدست می آوریم

$$z^3-iz^2+6z=0 \rightarrow z\left(z^2-iz+6\right)=0$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = \dfrac{i \pm \sqrt{-1-24}}{2} = \dfrac{i \pm 5i}{2} = \{^{3i}_{-2i} \end{cases}$$

بررسی می کنیم کدام یک در منحنی قرار دارند



$|0-3i| = 3 > \frac{1}{3}$ ×

$|3i-3i| = 0 < \frac{1}{3}$ √

$|-2i-3i| = 5 > \frac{1}{3}$ ×

$$\oint_c \frac{2z+1}{z(z-3i)(z+2i)}dz = \oint_c \frac{\frac{2z+1}{z(z+2i)}}{z-3i}\, dz$$

$$= \frac{2\pi i \times (2z+1)}{z(z+2i)}\Big|_{z=3i} = \frac{\pi}{15}(12-2i)$$

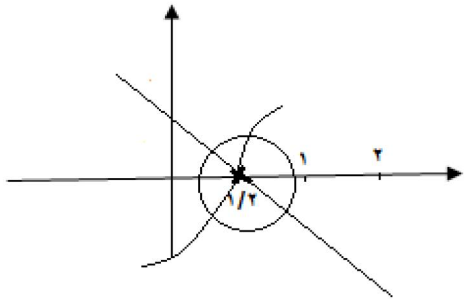
مشتقات یک تابع تحلیلی:

اگر $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد آنگاه خواهیم داشت.

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} = 2i\pi \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

مثال:

حاصل انتگرال $\oint_c \frac{\ln(1+z^2)}{(2z-i)^2}$ که c منحنی $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{3}$ در جهت مثبت است را بدست آورید.



$$\oint_c \frac{\frac{1}{4}\ln\left(1+z^2\right)}{\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}dz = \frac{f'(i/2)}{1!} \times 2\pi i$$

$Z=\frac{i}{2}$ در دایره c واقع است.

$F(z)=\frac{1}{4}\ln\left(1+z^2\right) \qquad f'(z)=\frac{1}{4}\frac{2z}{1+z^2} \qquad f'\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{4}\frac{i}{1-\frac{1}{4}}=\frac{i}{3}$

$$\oint_c \frac{\frac{1}{4}\ln\left(1+z^2\right)}{\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}dz = 2\pi i \times \frac{i}{3} = \frac{-2\pi}{3}$$

انتگرال گیری به روش مانده ها:

اگر z_0 نقطه تکین تنهای $f(z)$ باشد آنگاه

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

b_1 (ضرایب $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ را مانده $f(z)$ در نقطه z_0 گوییم و با $res_{z=z_0} f(z)$ نشان می دهیم.

با استفاده از b_1 و قضیه مانده ها می توان انتگرال $f(z)$ را محاسبه نمود.

قضیه مانده ها:

فرض کنید c مرز ساده وبسته ای باشد که $f(z)$ در درون و روی آن , بجز در تعداد متناهی از نقاط منفرد z_1, z_2 , ... z_n که در داخل c واقعند , تحلیلی است آنگاه

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res_{z=z_j} f(z)$$

محاسبه مانده ها :

1- اگر *f(z)* در نقطه ای $z = z_0$ دارای یک قطب ساده باشد آنگاه

$$Res_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(Z - Z_0\right) F(Z)$$

2- اگر $z = z_0$ یک قطب مرتبه M تابع *f(z)* باشد, آنگاه

$$Res_{z=z_0} f(z) = \frac{[(Z - Z_0)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)i} \Big/_{z=z_0}$$

3- اگر $F(Z)=\frac{P(Z)}{q(z)}$ و *p(z)* و*q(z)* در $z=z_0$ تحلیلی و$0 \neq p(z_0)$ و *q(z)* دارای یک صفر ساده در $z=z_0$ باشد آنگاه

$$Res_{z=z_0} f(z) = \frac{p(Z_0)}{\acute{q}(Z_0)}$$

مثال :

حاصل انتگرال $\oint_c \frac{z-1}{z^3-2z^2} dz$ که در آن c دایره ای به معادله $|z| = 1$ است را بدست آورید.

$z^3{}_{+}2z^2=0$ $\qquad$ $z^2(z-2)=0 \rightarrow \begin{cases} z=0 & \text{قطب مرتبه دوم} \\ ,z=2 & \text{قطب ساده} \end{cases}$

z=0 خارج از دایره و Z=2 داخل دایره است.

$$Res_{z=0}=(z^2 \frac{z+1}{z^2(z-2)})\acute{} \Big/_{z=0} \quad x\frac{1}{1!}=\frac{-3}{(z-2)^2} \Big/_{z=0}=\frac{-3}{4}$$

$$\oint \frac{z+1}{z^2(z-2)}dz=2\pi i(\frac{-3}{4})=\frac{-3}{2}\pi i$$

مثال:

اگر $c:|z|=3$ باشد.مقدار$\oint_c \frac{sin\pi z^2+cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$ را بدست آورید؟

$$(z-1)(z-2)=0\rightarrow \begin{cases} z=1 & \text{قطب ساده} \\ z=2 & \text{قطب ساده} \end{cases}$$

z=1.z=2هر دو داخل دایره قرار دارند.

$$\oint \frac{sin\pi z^2+cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz=2\pi i(Res_{z=1}f(z)+Res_{z=2}f(z))$$

$$Res_{z=1}f(z)=res_{z=1}\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(1)}{q(1)}$$

$$Res_{z=1}\frac{\frac{sin\pi z^2+cos\pi z^2}{(z-2)}}{z-1}=\frac{\frac{\sin\pi+cos\pi}{-1}}{-1}=1$$

$$Res_{z=2}\frac{\frac{sin\pi z^2+cos\pi z^2}{(z-1)}}{z-2}=\frac{\frac{\sin 4\pi+cos4\pi}{2-1}}{1}=1 \rightarrow \oint c\, f(z)dz=2\pi i(1+1)=4\pi i$$

قضیه:

اگر تابع f(z) همه جای صفحه متناهی باشد به جز در تعداد محدودی نقطه تحلیلی بوده و تمامی تکین های f(Z)در داخل مرز بسته c واقع باشند.آنگاه

$$\oint_c f(z)dz=2\pi i\, res_{z=0}(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}))$$

مثال:

مقدار انتگرال $I=\oint_c \frac{-1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz$ که در آن $c:|z|=2$ می باشد.چقدراست؟

حل: نقاط تکین z=0 و z=1 می باشند که در$|z|=2$می باشد واقع اند.

راه حل اول:

$$F(z)=\frac{-1}{1-z}\sin\frac{1}{z}=(1+z+z^2+\cdots)(\frac{-1}{z}+\frac{1}{3z^3}-\frac{1}{5!z^5}\pm\cdots)$$

$=-1+\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\pm\cdots=-\sin 1$ $\frac{1}{z}$ضریب

لذا $\operatorname{Res}_{z=0} f(z)=-\sin 1_{z=0}$ نتیجه $\rightarrow$ $\oint_c \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}dz=2\pi i(-\sin 1+\sin 1)=0$

$\operatorname{Res}_{z=1} f(z)=\sin 1$

راه حل دوم:

$f(z)$هر دو نقطه تکین $|z|=2$ در واقع اند.

$$\oint f(z)dz=$$
$$2\pi i\, Res_{z=0}\left(\frac{1}{z^2}\, f\left(\frac{1}{z}\right)\right)=2\pi i\, Res_{z=0}\left(\frac{1}{z^2}\cdot f\left(\frac{1}{\frac{1}{z-1}}\sin z\right)\right)=$$
$$2\pi i\, Res_{z=0}\left(\frac{sinz}{z(z-1)}\right)=2\pi i\times\frac{sinz}{z-1}\Big/_{z=0}=0$$

محاسبه انتگرال های حقیقی با استفاده از انتگرال های مختلط:

فرض کنید تابع $f(x)$ یک تابع گویای حقیقی مانند$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ باشد و $q(x)$به ازای هر مقدار حقیقی x مخالف با صفر باشد.اگر درجه$q(x)$ حداقل دو تا بیشتر از درجه$p(x)$ باشد. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگرا است و مقداری که انتگرال به آن همگرا است را اغلب می توان با تعیین مقدار اصلی کوشی آن با استفاده از نظریه مانده ها بدست آورید.

قضیه:

اگر $f(z)$ تابعی گویا و دارای قطب روی محور xها نباشد و درجه مخرج حداقل دو درجه بیشتر از درجه صورت باشد.آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\times\sum_{\text{قطب های سمت بالا } y>0} Res\, f(z)$$

مثال:

حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}$ را بست آورید.

تابع $\frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}$ یک تابع گویا و درجه مخرج 2 واحد بیشتر از درجه صورت است و دارای قطب روی محور xها نمی باشد.

$$z^4+5z^2+4=(z^2+4)(z^2+1)=0\begin{cases} z=\pm i \\ z=\pm 2i \end{cases}$$

از میان قطب ها i و2i در ناحیه y>0 واقع هستند.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{(x^4+4)(x^2+1)}\mathrm{dx}=2\pi i(res_{\ z=i}f(z)+res_{\ z=2i}f(z))=2\pi i\left[\frac{-2}{-4i+10i}+\frac{-5}{-32i+20i}\right]=\frac{\pi}{6}$$

قضیه:

اگر f(z) یک تابع گویابصورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ باشد و به ازای هر مقدار حقیقی x ..f(x) مخالف با صفر باشد.آنگاه

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos axdx=re[2\pi i\sum_{y>0} res\,f(z)e^{iaz}] \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin axdx=im[2\pi i\sum_{y>0} res\,f(z)e^{iaz}] \end{cases}$$

مثال:

مقدار انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos2x}{x^2+1}dx$ را بدست آورید

قطب x=i در سمت بالای محور قرار دارد $\qquad x^2+1=0\ \ x=\pm i$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos2x}{x^2+1}=re[2\pi i\,res\frac{e^{i2z}}{z^2+1}]=_{z=i}$$

$$Re[2\pi i\frac{e^{-2}}{2i}]=\frac{\pi}{e^2}$$

زیرا $\frac{e^{i2z}}{z^2+1}\Big|z=i=\frac{e^{-2}}{2i}$

قضیه:

اگر f تابعی گویا از $sin\theta$ و $cos\theta$ و در فاصله $0\leq \theta \leq 2\pi$ متناهی باشد.آنگاه

$$I=\int_0^{2\pi} f(sin\theta\ ,cos\theta)d\theta = 2\pi \sum res_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}$$

به عبارتی دیگر با تغییر $z=e^{i\theta}$ مساله را حل کنید.

مثال:

مقدار $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}}$ چقدر است؟

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}} = 2\pi res_{|z|=1} \ \frac{f(z)}{z}$$

$$cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \to \frac{f(z)}{z} = \frac{-2}{z^2 - 2\sqrt{2z} + 1}$$

$$z^2 - 2\sqrt{2z} + 1 = 0 \begin{cases} z = \sqrt{2} + 1 \\ z = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

$z = \sqrt{2} - 1$ درون $|z| = 1$ است ولی $z = \sqrt{2} + 1$ درون $|z| = 1$ قرار ندارد.

$$Res_{z=\sqrt{2}-1} \frac{f(z)}{z} = \frac{-2}{2(\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2}} = 1$$

$$\to I = 2\pi$$

مثال:

مقدار انتگرال $\mathrm{i} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} - \sin\theta}$ را بدست آورید.

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

$$I=2\pi\sum res_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}=2\pi\sum res_{|z|=1}\frac{1}{(\frac{5}{4}-\frac{z-z^{-1}}{2i})z}\ =2\pi\ res_{|z|=1}\frac{4i}{-2i+5iz+2}=$$

$$2z^2+5iz+2=0\rightarrow z=2i,\frac{i}{2}$$

فقط قطب $Z=\frac{i}{2}$ درون $|z|=1$ واقع است.

$$2\pi\times 4i\ \ res_{z=\frac{i}{2}}\frac{1}{-2z^2+5iz+2}=8\pi i\frac{1}{-4\frac{i}{2}+5i}=\frac{8\pi}{3}$$

موفق باشید

احسائیان

فصل ششم : معادلات با مشتقات جزئی

دراین فصل گفته می شود:

- تعاریف

شرایط مرزی

شرایط اولیه

- استفاده از تغیر در متغیر

- روش لاکرانژ در حل معادلات با مرتبه اول

-روش جداسازی پارامترها

- حل معادله موج

- حل معادله موج به روش دالامبر

- معادله حرارت با شرایط مرزی همگن

- حل معادلات بوسیله تبدیل لاپلاس

- استفاده از تبدیل فوریه در حل معادلات

- معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

معادله هذلولی گون

معادله سهمی گون

معادله بیضی گون

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

معادله ای که شامل یک یا چند مشتق جزئی یک تابع از دو یا چند متغیر مستقل باشد را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می گوییم.

$$u=u(x,y) \qquad u_x=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$f\,(x,y,\ldots,u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{yy}, \ldots, u_{xy,\ldots}) = 0$$

تعاریف :

بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله گویند.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial_x \partial_y}\, xy + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^5 = ۰$$

مرتبه 3

توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را درجه معادله گویند.

معادله بالا درجه ۱ است.

معادله خطی : معادله ای که مشتقاتش نه در هم ضرب شده اند و نه توان دار هستند.

معادله بالا غیرخطی است.

$u^2{}_{xx}$ غیر خطی $\sqrt{u_{xy}}$ غیر خطی

$\sqrt{xy}u_{xz}$ خطی $u_{xy}u_{zz}$ غیر خطی

$f_1(x,y)u_{xx} + f_2(x,y)u_{xy} + \ldots = g(x,y)$ خطی

معادله همگن : معادله ای است که همه جملاتش شامل مشتق یا خود تابع باشد.

$f_1(x,y)u_{yy} + f_2(x,y)u_{xy} = g(x,y)$ غیر همگن

$f_1(x,y)u_{yy} + f_2(x,y)u_{xy} =$ ۰ همگن

شرایط مرزی:

به شرایطی که مقادیرتابع یامشتقات جزئی آن رادرنقاط مرزی نشان می دهد,شرایط مرزی گفته می شود.

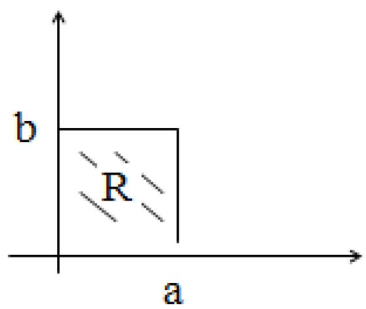
شرایط اولیه :

به شرایطی که مقادیر تابع یا مشتقات جزئی آنرا در یک ناحیه داده شده در زمان اولیه که معمولاt=0 است را نشان می دهد, شرایط اولیه گفته می شود.

مثال :

معادله زیر را درنظر بگیرید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$



$$\begin{cases} u(x,y) = f(x) & \text{شرط مرزی} \\ u(0,y) = 0 & \text{شرط مرزی} \\ u_x(a,y) = g(y) & \text{شرط مرزی} \\ u\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = 0 & \text{شرط اولیه} \end{cases}$$

معرفی چند معادلات مهم :

← معادله موج یک بعدی $u_{tt} = u_{xx}c^2$

← معادله گرما یک بعدی $u_t = u_{xx}c^2$

← معادله لاپلاس دو بعدی $u_{xx} + \ = 0u_{yy}$

← معادله پواسن $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$

معادله لاپلاس سه بعدی ← $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

معادله موج دو بعدی ← $u_{tt}=(u_{xx}+u_{yy})c^2$

معادله گرما دو بعدی ← $u_t=(u_{xx}+u_{yy})c^2$

قضیه :

چنانچه $u_1,u_2,\dots,u_n$ جواب هایی از یک معادله با مشتقات جزئی همگن خطی باشند,

هر ترکیب خطی آنها یعنی $c_1u_1+\dots+c_nu_n$ نیز جوابی از معادله مذکور خواهد بود که در آن

$c_1,\dots,c_n$ ثابت های اختیاری می باشند.

استفاده از تغیر در متغیر

در برخی موارد برای ساده تر شدن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از تغیر در متغیر استفاده می شود.

مثال :

با تغیر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+t+(sint-t)x$ معادله زیر به چه معادله ای تبدیل می شود؟

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=h \quad (\text{ثابت } h) & 0<x<1 \quad , \quad t>0 \\ u(0,x)=t \\ u(1,t)=\sin t \\ u(x,0)=x(1-x) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

حل: معادله دیفرانسیل

$$U(x,t) = v(x,t) + t + x(\sin t - t)$$

$$\begin{cases} u_t = v_t + ١ + x(\cos t - 1) \\ u_{tt} = v_{tt} - x\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = v_x + \sin t \\ u_{xx} = v_{xx} \end{cases} \Rightarrow$$

معادله جدید $v_{tt} - x\sin t - v_{xx} = h$

$$\Rightarrow v_{tt} - v_{xx} = h + x\sin t$$

شرایط اولیه و مرزی :

$$\begin{cases} U(x,t) = v(x,t) + t + x(\sin t - t) \\ u_t(x,t) = v_t(x,t) + 1 + x(\cos t - 1) \end{cases}$$

$U(٠,t) = t \Rightarrow t = v(٠,t) + t \Rightarrow v(٠,t) = 0$

$U(١,t) = \sin t \Rightarrow \sin t = v(١,t) + t + \sin t - t \Rightarrow v(١,t) = 0$

$U(x,٠) = x(1-x) \Rightarrow x(١-x) = v(x,٠)$

$u_t(x,٠) = ٠ \Rightarrow ٠ = v_t(x,٠) + 1 \Rightarrow v_t(x,٠) = -1$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = h + x\sin t \\ V(٠,t) = v(١,t) = ٠ & ٠<x<١ \\ v_t(x,٠) = -1 & t>٠ \\ V(x,٠) = x(1-x) \end{cases}$$

مثال :

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی که جواب آن در رابطه $xyz = \varphi\,(x + y + z)$ صدق کند, بیابید؟

حل: با فرض u=x+y+z داریم $z = \frac{1}{xy}\varphi(u)$. با مشتق گیری نسبت به x و نسبت به y و حذف $\varphi'(u)$ داریم :

$$\begin{cases} z_x = \frac{-1}{x^2 y}\varphi(u) + \frac{1}{xy}\varphi'(u)u_x \\ \\ z_y = \frac{-1}{xy^2}\varphi(u) + \frac{1}{xy}\varphi'(u)u_y \end{cases} \Rightarrow \quad z_x - z_y = \frac{-1}{x^2 y}\varphi(u) + \frac{1}{xy^2}\varphi(u)$$

$$xy\,(z_x - z_y) = \varphi(u)\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \quad \varphi(u) = zxy$$

$$xy(z_x - z_y) = z(x - y)$$

روش لاکرانژ در حل معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول :

معادله $p(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$ را در نظر بگیرید. برای یافتن جواب این معادله، دستگاه زیر را که به دستگاه لاکرانژ مرسوم است،تشکیل می دهیم :

$$\frac{dx}{p(x,y,z)} = \frac{dy}{\varphi(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

با حل دو معادله مستقل این دستگاه دو جواب به صورت $u(x,y,z)=c_1$ و $v(x,y,z)=c_2$ بدست می آوریم. جواب معادله به صورت $f(u,v)=0$ خواهد بود.

مثال :

جواب عمومی معادله $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = x$ را بدست آورید؟

حل: دستگاه لاکرانژ را تشکیل می دهیم

$$\frac{d_x}{1}=\frac{d_y}{2}=\frac{d_u}{x} \qquad \begin{cases} 2d_x=d_y \rightarrow & y-۲x=c_1 \\ d_u=xd_x \longrightarrow & u-\frac{1}{2}x^2=c_2 \end{cases}$$

جواب معادله بصورت $F\left(y-2x,u-\frac{1}{2}x^2\right)=0$ خواهد بود.

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش جداسازی پارامترها:

فرض کنید معادله با مشتقات جزئی برای تابع $u(x,y,z)$ مطرح شده باشد با این تصور که شاید $u=A(x).B(y).C(z)$ باش، این تابع را در معادله قرار می دهیم. اگر بتوان پس از این کار معادله را در فرم زیر نوشت :

$$H_1(x,A,A',\ldots)=H_2(y,B,B',\ldots)=H_3(z,C,C',\ldots)$$

آنگاه فرض اولیه صحیح بوده است. بدین ترتیب به سه معادله دیفرانسیل معمولی برای توابع $C(z)$ و $B(y)$ و $A(x)$ می رسیم که با حل آنها A,B,C بدست می آید.

نکته :

هر معادله همگن با شرایط مرزی همگن را می توان از طریق جداسازی پارامترها حل کرد.

مثال :

جواب معادله $u_y+u_x=2(x+y)u$ رابدست آورید؟

حل: با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ خواهیم داشت :

$$F'(x)G(y)+F(x)G'(y)=۲(x+y)F(x)G(y)$$

$$\Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)}+\frac{G'(y)}{G(y)}=۲x+۲y \quad \Rightarrow \quad \frac{F'(x)}{F(x)}-۲x=۲y-\frac{G'(y)}{G(y)}=c$$

$$\begin{cases} \frac{F'(x)}{F(x)}=c+۲x \Rightarrow LnF(x)=cx+x^2+c_1 \Rightarrow F(x)=c_2e^{cx+x^2} \\ \frac{G'(y)}{G(y)}=۲y-c \Rightarrow LnG(y)=y^2-cy+c_3 \Rightarrow G(y)=c_4e^{y^2-cy} \end{cases}$$

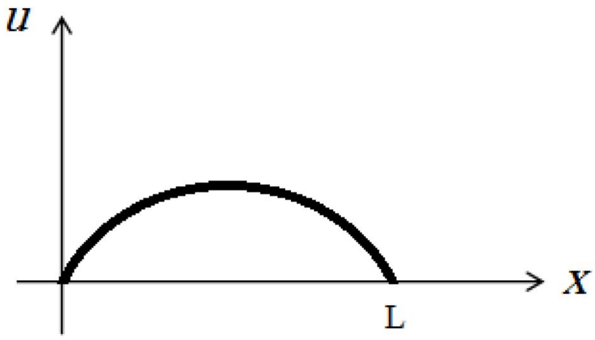
$$U(x,y)=F(x)G(y)=c_2c_4e^{cx+x^2+y^2-cy}=ke^{x^2+y^2+c(x-y)}$$

حل معادله موج یک بعدی همگن با شرایط مرزی همگن :

معادله موج یک بعدی همگن با شرایط مرزی همگن را می توان با استفاده از جداسازی پارامترها بدست آورد.

نخ کشسان

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} \\ U(0,t)=u(l,t)=0 \quad t>0 \\ U(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=y(x) \end{cases}$$



با فرض $u(x,t)=F(x)G(t)$ خواهیم داشت :

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}=k \longrightarrow \begin{cases} F''-kf=0 \\ \ddot{G}-c^2kG=0 \end{cases}$$

حالات مختلف k را بررسی می کنیم.

حالت اول $k=0$

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=0 \longrightarrow F''(x)=0 \longrightarrow F(x)=ax+b$$

$$U(0,t)=0 \longrightarrow F(0)G(t)=0 \longrightarrow \begin{cases} F(0)=0 \\ G(t)=0 \end{cases}$$

اگر $G(t)=0$ آنگاه $u(x,t)=0$ یعنی جواب بدیهی . بنابراین باید $F(0)=0$

$U(x,\cdot) = F(x)$

$U(l,t) = F(l)G(t)= 0 \longrightarrow F(l)=0$

جواب بدیهی

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F(l)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t)=0$$

بنابراین با فرض $k=0$ نمی توان به جواب رسید.

حالت دوم $k>0$

$$K=\mu^2> 0 \longrightarrow \frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{C^2G} = \mu^2 \quad \begin{cases} F'' - \mu^2F = \cdot \\ \ddot{G} - C^2\mu^2G = \cdot \end{cases}$$

$$F'' - \mu^2F = 0 \longrightarrow F(x) = c_1e^{\mu x} + c_2e^{-\mu x}$$

$$\begin{cases} F(0)=0 \longrightarrow c_1+c_2=0 \\ F(l)=0 \longrightarrow c_1e^{\mu l} + c_2e^{-\mu l}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1= -c_2 \\ - c_2(e^{\mu l} - e^{-\mu l})=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2c_2\sinh\mu l = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_2=0 \Rightarrow c_1=0 \\ \sinh\mu l = 0 \Rightarrow \mu l=\cdot \quad \text{تناقض} \end{cases}$$

$c_{1,2}=0 \Rightarrow F(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ جواب بدیهی

بنابراین با فرض $k>0$ نمی توان به جواب رسید.

حالت سوم k<0

$K=-p^2<0 \quad \begin{cases} F'' + P^2F = 0 \\ \ddot{G} + C^2P^2G=۰ \end{cases} \Rightarrow F(x) = A\cos px + B\sin px$

$F(0)=A=۰ \Rightarrow F(x)=B\sin px \qquad u(t,x)=B\sin px\, G(t)$

$F(l)=0 \Rightarrow \sin pl = 0 \Rightarrow pl=n\pi \Rightarrow p=\frac{n\pi}{l} \qquad n=۰,\pm1, ...$

با فرض B=1 داریم:

$F(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x n=۰,\pm1,\pm2, ...$

P را در معادله دوم قرار می دهیم:

$\ddot{G}_n + \frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}G_n = 0 \Rightarrow G_n(t)=A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t + B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t$

برای مشخص کردن A_nوB_n داریم:

$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)G_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t + B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$

$U(x,۰)=F(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)$

درحقیقت A_n ها ضرایب سری سینوسی f (x) هستند.

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

مشتق نسبت به زمان :

$$u_t(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{cn\pi}{L}\sin\frac{cn\pi}{L}t + B_n\frac{cn\pi}{L}\cos\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{L}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x = g(x)$$

عبارت بالا، سری سینوسی تابع g(x) می باشد.

$$\frac{cn\pi}{L}B_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)sin\frac{n\pi}{L}xdx \quad \Rightarrow \quad B_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

مثال:

معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & & 0<x<\pi \quad ,t>0 \\ u(x,0)=0 & u_t(x,0)=2sinx & 0\le x\le \pi \\ u(0,t)=0 & u(\pi,t)=0 & t\ge 0 \end{cases}$$

حل:

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,sin\frac{n\pi}{L}xdx=0$$

$$B_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi 2sinx\ sinnxdx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi [\cos(1-n)\,x-\cos(1+n)\,x]dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin(1-n)\,x}{1-n}-\frac{\sin(1+n)\,x}{1+n}\right]_0^\pi=\begin{cases}0 & n\neq 1\\ 2 & n=1\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=u_1(x,t)=2sint\ sinx$$

حل معادلات موج به روش دالامبر:

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(p)dp$$

مثال :

معادله موج زیر را حل کنید؟

$$\begin{cases} y_{tt}=4y_{xx} & t\geq 0 \\ y(x,0)=sinx & 0\leq x\leq \pi \\ y_t(x,0)=cosx \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} f(x)=y(x,0)=sinx \\ g(x)=y_t\,(x,0)=cosx \end{cases}$$

y(x,t)=$\frac{1}{2}\,[f(x+2t)+f(x-2t)]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} cosp\ dp$

=$\frac{1}{2}$[sin(x+2t)+sin(x-2t)]+$\frac{1}{4}$[sin(x+2t)-sin(x-2t)]

=$\frac{1}{2}$ *2sinx cos2t+$\frac{1}{4}$* 2sin2t cosx=sinx cos2t+$\frac{1}{2}$sin2t cosx

معادلات حرارت با شرایط مرزی همگن:

$$\begin{cases} u_{t=c^2 u_{xx}} \\ u(x,0)=f(x) \quad\ 0\leq x\leq L \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \quad\ t\geq 0 \end{cases}$$

باروش جداسازی پارامترها داریم:

u(x,t)=F(x) G(t)

F$\dot{G}=c^2F^{"}G \Rightarrow \frac{F^{"}}{F}=\frac{\dot{G}}{C^2G}=K$

بابررسی حالات k=0 وk>0 به تناقض می رسیم.برای k=-p^2داریم:

K= -$p^2<0 \begin{cases} f^{"}+p^2f=0 \\ \dot{G}+p^2c^2G=0 \end{cases}$

u(0,t)= u(L,t)=0 $\begin{cases} F(0)=0 \\ F(L)=0 \end{cases}$

F(X)=A cospx +B sinpx $\Rightarrow$ F(0)=A=0 $\Rightarrow$ F(x)=B sinpx

با قراردادن B =1 داریم:

F(x)=sin px F(L)=sin pL=0 pL=nπ $\Rightarrow$ p=$\frac{n\pi}{L}$ n=0,$\pm$1,…

F(x)=sin $\frac{n\pi}{l}$ x

$$\dot{G_n} + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 G_n = 0 \quad \Rightarrow \quad G_n(t) = A_n\, e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \; e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \; sin\frac{n\pi}{L}x$$

شرایط اولیه را بررسی می کنیم:

$$u(x,0)=f(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x)$$

A_nضرایب سری سینوسی f(x) است.

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\; sin\,\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال :

معادله روبرو را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{t=u_{xx}} & t>0\,,\ \ 0<x<1 \\ u(x,0)=x(1-x) & 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

حل:

$$A_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx = \begin{cases} \frac{8}{n^3\,\pi^3} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases} = \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\ e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}\ \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2n-1)^3}\ e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin(2n-1)\pi x$$

تبدیل لاپلاس وحل معادلات مشتقات جزیی :

لاپلاس روی متغیرزمانی اعمال می شود. با اعمال تبدیل لاپلاس به طرفین معادله با مشتقات جزیی واستفاده از روابط زیر، معادله به یک معادله دیفرانسیل معمولی برحسب U(x,s)تبدیل می شود وپس از محاسبه U(x,s)با معکوس لاپلاس گرفتن،u(x,t)بدست می آید.

$$L\{u(x,t)\}=U(x,s)$$

$$L\{u_x\}=\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$$

$$L\{u_t\}=s\,U(x,s)-u(x,0)$$

$$L\{xu_x\}=x\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$$

$$L\{tu_t\}=-\frac{\partial}{\partial s}(s\,U(x,s)-u(x,0))$$

$$L\{xu_{tt}\}=x(s^2\,U(x,s)-s\,u(x,0)-u_t(x,0))$$

$$L\{t^2\,u_x\}=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)\right)$$

یادآوری:

$L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$ $\qquad$ $L\{t^a\}=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $\qquad a\epsilon Q$

$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\qquad$ $L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$

$L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$

$L\{\sinh at\}=\frac{s}{s^2-a^2}$ $\qquad$ $L\{\cosh at\}=\frac{s}{s^2-a^2}$

$L\{e^{at}\,f(t)\}=F(s-a)$ $\qquad$ $L\{u(t-c)\,f(t-c)\}=e^{-cs}\ F(s)$

مثال :

با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیرا حل کنید .

$$\begin{cases} u_t + \mathrm{x}u_x = \mathrm{x}^2 \\ u(\mathrm{x}, 0) = 0 \\ u(0, \mathrm{t}) = 0 \end{cases}$$

حل: از طرفین معادله داده شده لاپلاس می گیریم

$$\mathrm{L}\{u_t + \mathrm{x}u_x\} = \mathrm{L}\{\mathrm{x}^2\} \Rightarrow \mathrm{s}\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{s}) - \mathrm{u}(\mathrm{x},0) + \mathrm{x}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x^2}{s} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{s}{x}U = \frac{x}{s}$$

معادله مرتبه اول برحسب U

$$\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{s}) = e^{-\int \frac{s}{x}dx}\{\int \frac{x}{s}\ e^{\int \frac{s}{x}dx}\ \mathrm{dx} + \mathrm{c}\} = e^{-s\,lnx}\{\frac{x}{s}\ e^{s ln\,x}\ \mathrm{dx} + \mathrm{c}\} = \frac{1}{x^s}\{\ \frac{x}{s}\ x^s\ \mathrm{dx} + \mathrm{c}\}$$

$$= \frac{1}{x^s}\left(\frac{\mathrm{x}^{s+2}}{\mathrm{s}(\mathrm{s}+2)} + \mathrm{c}\right) = \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{s}(\mathrm{s}+2)} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x}^s}$$

برای بدست آوردن ثابت c از شرایط مرزی استفاده می کنیم:

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U(0,s) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$U(x,s) = \frac{x^2}{s(s+2)} = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) \Rightarrow u(x,t) = \frac{x^2}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$$

استفاده از تبدیل فورریه در حل معادلات با مشتقات جزئی:

تبدیل فوریه روی متغیر مکان تعریف می شود. برای بدست آوردن جواب، ازطرفین معادله تبدیل فوریه می گیریم و پس از محاسبه U(ω,t) با فوریه معکوس گرفتن حاصل u(x,t) بدست می آید:

$$F\big(u(x,t)\big) = U(\omega,t)$$

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = i\omega U(\omega,t)$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = (i\omega)^2 U(\omega, t)$$

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t)$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\omega, t)$$

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم:

معادله دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید.

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

که در آن a و b و c توابعی از x و y هستند.

اگر $b^2 - 4ac > 0$ معادله از نوع هذلولی گون است.

اگر $b^2 - 4ac = 0$ معادله از نوع سهموی است.

اگر $b^2 - 4ac < 0$ معادله از نوع بیضی گون است.

مثال:

نوع معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را تعیین کنید.

$$e^{2x}u_{xx} + 2xe^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} = 0$$

حل:

$$a = e^{2x} \quad , \quad b = 2xe^{x+y} \quad , \quad c = e^{2y} \quad , \quad b^2 - 4ac = 4e^{2x+2y}(x^2 - 1)$$

به ازای $-1 < x < 1$ معادله هذلولی گون است.

به ازای $x > 1$ و $x < -1$ معادله بیضی گون است.

به ازای $x = \pm 1$ معادله سهمی گون است.

فرم کانونیک

با استفاده از تغییر متغیرهای لازم می توان معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم را به فرم ساده تری تبدیل کرد که به آن شکل استاندارد کانونیک گفته می شود .رابطه زیر را معادله مشخصه برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم معرفی می کنیم :

$$a(\frac{dy}{dx})^2 - b(\frac{dy}{dx}) + c = 0$$

۱-معادله هذلولی گون

برای یک معادله از نوع هذلولی گون، معادله مشخصه دارای دو جواب $\varphi(x,y) = c_1$ و $\varphi(x,y) = c_2$ است و تغییر متغیر $\alpha = \Psi(x,y)$ و $\beta = \varphi(x,y)$معادله دیفرانسیل را به شکل کانونی زیر تبدیل می کند:

$u_{\alpha\beta}=$ مشتقات مرتبه دوم

مثال:

معادله زیر را به فرم کانونی تبدیل کنید .

حل:

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0 \qquad b=0 \qquad a= y^2 \qquad c= -x^2$$

$$b^2 - 4ac = 4x^2y^2 > 0$$ هذلولی

معادله مشخصه را می نویسیم :

$$y^2 (\frac{dy}{dx})^2 - x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \quad y^2 - x^2 = \alpha \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = \beta \end{cases}$$

مشتقات جزیی :

$$\begin{cases} u_x = u_\alpha u_x + u_\beta \beta_x \\ u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = u_\alpha(-2x) + u_\beta(2x) = -2xu_\alpha + 2xu_\beta \\ u_y = u_\alpha(2y) + u_\beta(2y) = 2yu_\alpha + 2yu_\alpha + 2yu_\beta \end{cases}$$

محاسبه u_{xx} :

$$u_{xx} = -2u_\alpha - 2x\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + 2u_\beta + 2x\frac{\partial u_\beta}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x} = u_{\alpha\alpha}\,\alpha_x + u_{\alpha\beta}\beta_x = -2xu_{\alpha\alpha} + 2x\,u_{\alpha\beta} \\ \dfrac{\partial u\beta}{\partial x} = u_{\beta\alpha}\alpha_x + u_{\beta\beta}\beta_x = -2xu_{\beta\alpha} + 2x\,u_{\beta\beta} \end{cases}$$

بنابراین $u_{\alpha\beta}$=$u_{\beta\alpha}$

$$u_{\mathrm{xx}}=-2u_\alpha-2x(-2xu_{\alpha\alpha}+2x\,u_{\alpha\beta})+2u_\beta+2x\,(-2x\,u_{\beta\alpha}+2x\,u_{\beta\beta})=-2\,u_\alpha+2u_\beta+4x^2\,u_{\alpha\alpha}+4\,x^2u_{\beta\beta}-8x^2u_{\alpha\beta}$$

محاسبه u_{yy} :

$$u_{yy} = 2u_\alpha + 2y\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + 2u_\beta + 2y\frac{\partial u_\beta}{\partial y}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial y} = u_{\alpha\alpha}\alpha_y + u_{\alpha\beta}\beta_y = 2yu_{\alpha\alpha} + 2yu_{\alpha\beta} \\ \dfrac{\partial u_\beta}{\partial y} = u_{\beta\alpha}\alpha_y + u_{\beta\beta}\beta_y = 2yu_{\beta\alpha} + 2yu_{\beta\beta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= 2u_\alpha + 2y\big(2y\,u_{\alpha\alpha} + 2yu_{\alpha\beta}\big) + 2u_\beta + 2y\big(2yu_{\beta\alpha} + 2yu_{\beta\beta}\big) \\ &= 2u_\alpha + 2u_\beta + 4y^2u_{\alpha\alpha} + 4y^2u_{\beta\beta} + 8y^2u_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

u_{yy}و u_{xx}را در معادله قرار می دهیم :

$$y^2(-2u_\alpha + 2u_\beta + 4x^2u_{\alpha\alpha} + 4x^2u_{\beta\beta} - 8x^2u_{\alpha\beta}) - x^2(2u_\alpha + 2u_\beta + 4y^2u_{\alpha\alpha} + 4y^2u_{\beta\beta} + 8y^2u_{\alpha\beta} = 0$$

با ساده سازی خواهیم داشت :

$$u_{\alpha\beta} = \frac{2\beta}{-4(\beta^2-\alpha^2)}u_\alpha - \frac{2\alpha}{-4(\beta^2-\alpha^2)}u_\beta$$

۲- معادلات سهمی گون :

برای یک معادله از نوع سهمی گون ،معادله فقط دارای یک جواب بصورت $\varphi(x,y) = c$ است وتغییر متغیر $\alpha = \varphi(x,y)$ و y یا $\beta = x$ معادله دیفرانسیل را به شکل کانونی زیر تبدیل می کند :

$u_{\alpha\alpha} =$ مشتقات مرتبه اول   یا $u_{\beta\beta} =$ مشتقات مرتبه اول

مثال :

معادله زیر را به فرم کانونی تبدیل کنید .

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$$

حل:

$b^2 - 4ac = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$ سهمی گون

معادله مشخصه را می نویسیم:

$$x^2\left(\frac{\partial_y}{\partial_x}\right)^2 - 2xy\left(\frac{\partial_y}{\partial_x}\right) + y^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial_y}{\partial_x} = \frac{y}{x}$$

ریشه مضاعف

$$\Rightarrow \ln = \ln x + \ln \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{y}{x}\\ \beta = y\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}\alpha = x\\ \beta = \frac{y}{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = u_\alpha.\alpha_x + u_\beta.\beta_x = -\frac{y}{x^2}u_\alpha \\ u_y = u_\alpha.\alpha_y + u_\beta.\beta_y = \frac{1}{x}u_\alpha + u_\beta \end{cases}$$

محاسبه u_{xx} :

$$u_{xx}=\frac{2y}{x^3}u_\alpha-\frac{y}{x^2}.\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}=u_{\alpha\alpha}.\alpha_x+u_{\alpha\beta}.\beta_x=-\frac{y}{x^2}u_{\alpha\alpha}$$

$$\Rightarrow u_{xx}=\frac{2y}{x^3}u_\alpha+\frac{y^2}{x^4}u_{\alpha\alpha}$$

محاسبه u_{yy} :

$$u_{yy}=\frac{1}{x}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}+\frac{\partial u_\beta}{\partial y}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x}=u_{\alpha\alpha}.\alpha_y+u_{\alpha\beta}.\beta_y=\dfrac{1}{x}u_{\alpha\alpha}+u_{\alpha\beta}\\ \dfrac{\partial u_\beta}{\partial y}=u_{\beta\alpha}.\alpha_y+u_{\beta\beta}.\beta_y=\dfrac{1}{x}u_{\beta\alpha}+u_{\beta\beta}\end{cases}$$

$$u_{yy}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}u_{\alpha\alpha}+u_{\alpha\beta}\right)+\left(\frac{1}{x}u_{\beta\alpha}+u_{\beta\beta}\right)=\frac{1}{x^2}u_{\alpha\alpha}+\frac{2}{x}u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta}$$

$$u_{xy}=-\frac{1}{x^2}u_\alpha-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}u_\alpha-\frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{x}u_{\alpha\alpha}+u_{\alpha\beta}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}u_\alpha+\frac{y}{x^3}u_{\alpha\alpha}-\frac{y}{x^2}u_{\alpha\beta}$$

با قرار دادن u_{xx}و u_{xy}و u_{xy} در معادله اصلی خواهیم داشت :

$$x^2\left(\frac{2y}{x^3}u_\alpha+\frac{y}{x^4}u_{\alpha\alpha}\right)+2xy\left(-\frac{1}{x^2}u_\alpha-\frac{y}{x^3}u_{\alpha\alpha}-\frac{y}{x^2}u_{\alpha\beta}\right)+y^2\left(\frac{1}{x^2}u_{\alpha\alpha}+\frac{2}{x}u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta}\right)=0$$

با ساده سازی معادله خواهیم داشت :

$$y^2u_{\beta\beta}=0 \quad \Rightarrow \quad \beta^2u_{\beta\beta}=0$$

۳- معادلات بیضی گون :

برای یک معادله از نوع بیضی گون ،جوابهای معادله مشخصه به فرم $\begin{cases} c_1 = \varphi(x,y) + i\varphi(x,y) \\ c_2 = \varphi(x,y) - i\varphi(x,y) \end{cases}$ می باشد که در آن $\psi(x,y)$و$\varphi(x,y)$ توابعی حقیقی هستند.با جایگذاری $\alpha = \varphi(x,y)$ و $\beta =$ $\varphi(x,y)$ معادله به شکل کانونی زیر در می آید.

$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} =$ مشتقات مرتبه اول

مثال:

معادله روبرو را به فرم کانونی بنویسید.

$$u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

حل:

بجز محور y ها $\quad a=1 \quad b=0 \quad c=x^2 \Rightarrow b^2 - 4ac = -4x^2 < 0$

معادله مشخصه را می نویسیم

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm ix$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ix \Rightarrow y - i\dfrac{x^2}{2} = c_1 \\ \dfrac{dy}{dx} = -ix \Rightarrow y + i\dfrac{x^2}{2} = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = y \\ \beta = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = u_\alpha . \alpha_x + u_\beta . \beta_x = -x u_\beta \\ u_y = u_\alpha . \alpha_y + u_\beta . \beta_y = u_\alpha \end{cases}$$

محاسبه u_{xx} :

$$u_{xx} = -u_\beta - x\frac{\partial u_\beta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u_\beta}{\partial x} = u_{\beta\alpha} . \alpha_x + u_{\beta\beta} . \beta_x = -x u_{\beta\beta} \Rightarrow u_{xx} = -u_\beta + x^2 u_{\beta\beta}$$

محاسبه u_{yy} :

$$u_{yy} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \qquad \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} = u_{\alpha\alpha} . \alpha_y + u_{\alpha\beta} . \beta_y = u_{\alpha\alpha}$$

در معادله اصلی جانشین می کنیم :

$$(-u_\beta + x^2 u_{\beta\beta}) + x^2 u_{\alpha\alpha} = 0 \Rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{1}{x^2} u_\beta \Rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{-1}{2\beta} u_\beta$$