$$F(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 7y$$

ک152: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟(ارشد مکانیک 81)منزل

$$F(x,y) = 2xy - 5y^2 + 4x - 2x^2 + 4y - 4$$

ک 152 و پ 390: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟ منزل

$$F(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

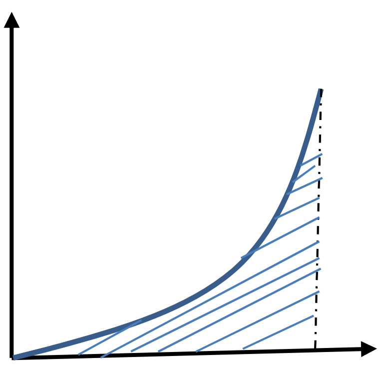
فرض می کنیم $(x_0, y_0) \in D_z$ و یک نقطه بحرانی باشد با توجه به تعریف نقاط بحرانی، $F_x = 0$ و $F_y = 0$ را با توجه به مفهوم مشتق چگونه ارزیابی می کنید؟

انتگرال:

حساب و دیفرانسیل – جیمز استورات ترجمه: ارشک حمیدی – قسمت اول جلد اول ویرایش ششم – انتشارات فاطمی

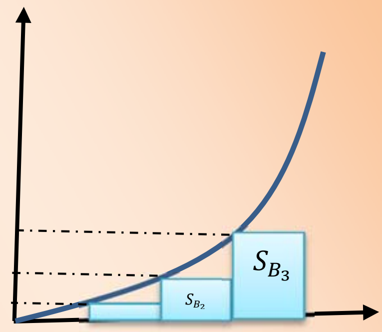
مثال: با استفاده از مستطیلها می خواهیم مساحت زیر سهمی $y=x^2$ از 0 تا 1 را تخمین بزنیم؟

شکل:



برای محاسبه مساحت می توانیم دو شکل زیر را داشته باشیم:

شکل:



$x = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$

$y = x^2$

$y = (0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1)$

$S_{B_i} = f(x_i)\Delta x$ مساحت هر مستطیل= طول در عرض

$S_B = S_{B_1} + S_{B_2} + S_{B_3}$

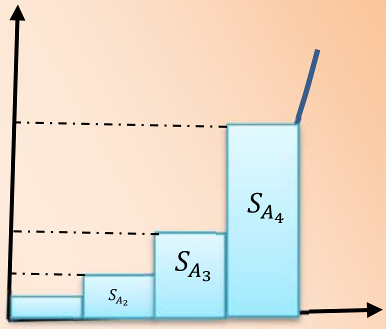
$S_B = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$

$S_B = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{9}{16}\right)$

$S_B = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} = \frac{7}{32} = 0.21875$

$S > S_B$

شکل:



$x = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$

$y = x^2$

$y = (0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1)$

$S_{A_i} = f(x_i)\Delta x$ مساحت هر مستطیل= طول در عرض

$S_A = S_{A_1} + S_{A_2} + S_{A_3} + S_{A_4}$

$S_A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$

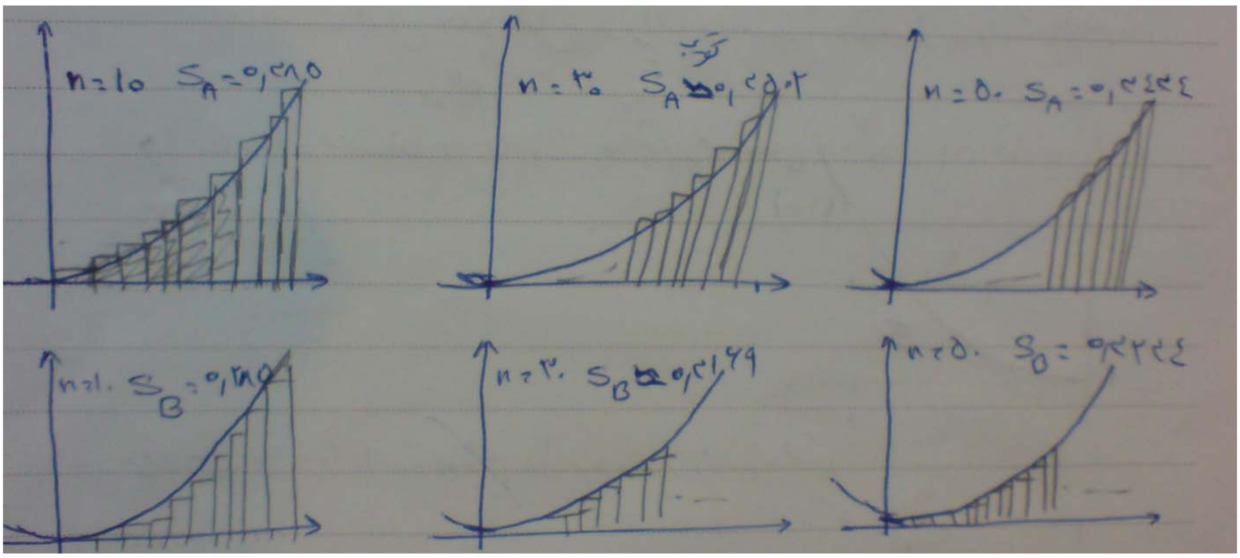
$S_A = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{9}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} \times 1\right)$

$S_A = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4} = \frac{15}{32} = 0.46875$

$S < S_A$

$$S_B < S < S_A$$

مساحت S بین مقادیر $0.21875 < S < 0.46875$ است راه حل چیست؟



وقتی که n زیاد می شود S_A و S_B هر دو تقریب های بهتری برای مساحت S می شوند بنابراین مساحت S واحد مجموع مساحت های مستطیل تقریب زن تعریف می کنیم یعنی:

$$S = \lim_{n\to\infty} (S_A)_n = \lim_{n\to\infty} (S_B)_n = \frac{1}{3}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \left(f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x\right)$$

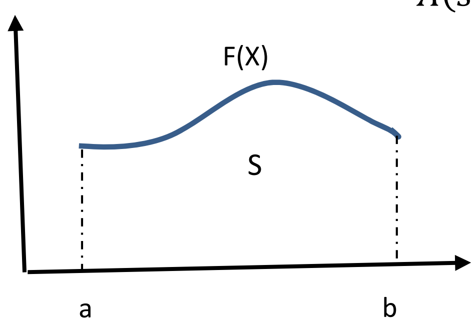
$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

F تابعی می باشد که به ازای $a \le x \le b$ تعریف شده است و اگر حد وجود داشته باشد می گوئیم f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

برای درک بهتر انتگرال دو شیوه محاسبه مساحت را داریم:

رپ217فرخو: محاسبه مساحت (1): فرض کنید $F(x) \ge 0$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد، مساحت ناحیه زیر منحنی F و خطوط x=a و x=b وy=0 برابر است با

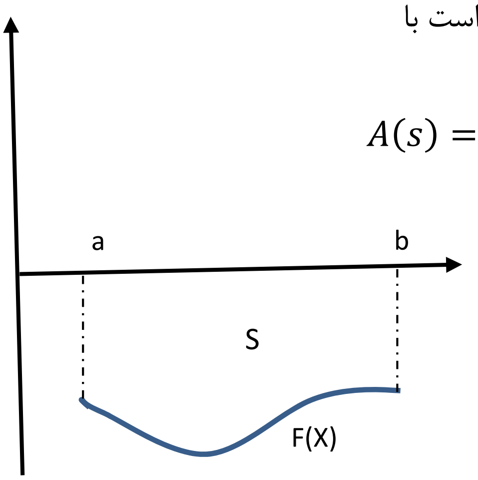
$$A(s) = \int_a^b F(x)dx$$



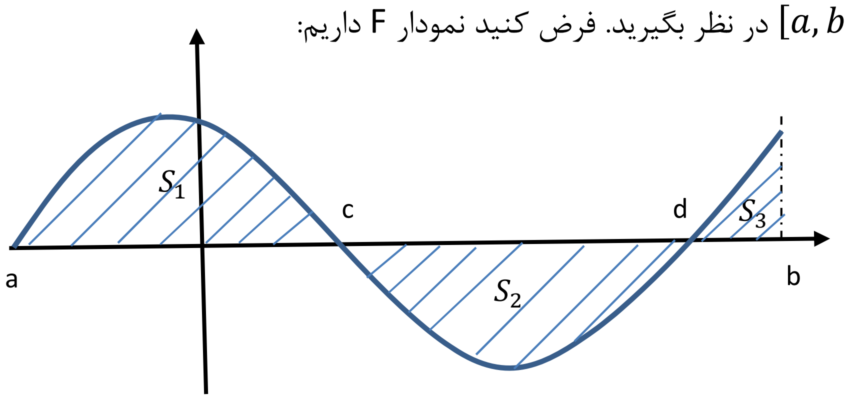
رپ218و219 فرخو: محاسبه مساحت (2): فرض کنید $F(x) \le 0$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد، مساحت ناحیه بالای منحنی F و خطوط x=a و x=b وy=0 برابر است با

$$A(s) = -\int_a^b F(x)dx$$

شکل



تابع انتگرال پذیر F را روی بازه $[a,b]$ در نظر بگیرید. فرض کنید نمودار F داریم:

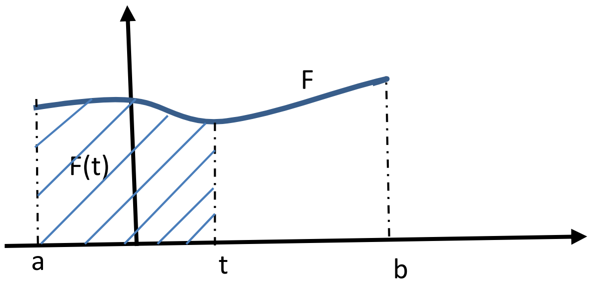


$$A(s)=A(s_1)+A(s_2)+A(s_3)$$ مساحت

$$A(s)=\int_a^c F(x)dx-\int_c^d F(x)dx+\int_d^b F(x)dx$$

قضیه: فرض کنید F روی $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت اگر $F(t)=\int_a^t F(x)dx\ ,a\le t\le b$

آنگاه F مشتق پذیر است و $\acute{F}(t)=f(t)$



آیزاک بارو (1630-1677) استاد نیوتن در کیمبریج پی برد که دو مساله حساب دیفرانسیل و انتگرال به هم مربوط اند. در حقیقت او متوجه شد که مشتق گیری و انتگرال پذیری فرآیندهای عکس یکدیگرند و نیوتن و لایپ نیتس بودند که از این رابطه نهایت استفاده را بردند.

پ ز343: مثال : فرض می کنیم $f(x)$ تابع اولیه آن $F(x)=x^2$ می باشد داریم

$$\acute{F}(x)=(\acute{x^2})=2x=f(x)$$

تعریف: تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه $f(x)$ در فاصله I می نامیم هرگاه به ازای هر x از I داشته باشیم

$$\acute{F}(x)=f(x)$$

انتگرال نامعین: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد عبارت $F(x)+c$ را انتگرال نامعین f می گوئیم و به صورت $\int f(x)\mathrm{dx}$ نشان می دهیم و بنابر تعریف فوق $\acute{F}(x)=f(x)$ آنگاه $\int f(x)\mathrm{dx}=F(x)+$ c (c عددی ثابت است).

انتگرال معین:

(دومین قضیه حساب دیفرانسل و انتگرال) هرگاه تابع f(x) در [a,b] پیوسته باشد و F(x) یک تابع اولیه برای f(x) باشد داریم :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

تعریف فوق را انتگرال معین یک تابع در بازه [a,b] می گویند.

<u>قضایا و فرمولهای ریاضی 469:</u> قوانین و فرمولهای انتگرال:

$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int \mathrm{f(x)\,dx} + \int \mathrm{g(x)\,dx}$, $\int kf(x)dx = \mathrm{k}.\int \mathrm{f(x)}$ k مقداری ثابت

$\int dx = x + c$, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n \neq 1)$

$\int \sqrt{x}dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + c$, $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + c \quad n \neq 1$

*نکته * در فرمولهای زیر $du = u' dx$

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

18. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

$$\int \sqrt[3]{x}\ dx =$$

$$\int (3x+5)^{17} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}\ dx =$$

$$\int x \cot x^2\ dx =$$

$$\int_2^3 (x^2-2x)\ dx =$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$$

(ارشد سیستم 82) $\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2} =$

(ارشد سیستم 82) $\int_0^1 ln(1+x)dx =$

(ارشد آمار 82) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx =$

2- انتگرال گیری به روش جانشینی(تغییر متغیر)

در این روش ، یک متغیر مناسب را معرفی می کنیم و سپس انتگرال اصلی مان را بر حسب این متغیر جدید بازنویسی می کنیم و مساله را حل می کنیم.

(ارشد ژئوفیزیک 78) $\int_0^2 2e^{2x}\ dx =$

(ارشد صنایع 79) $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\ dx =$

3-انتگرال گیری توابع شامل رادیکال

در محاسبه انتگرال های شامل رادیکال بجزء حال خاص زیر، همواره رادیکال را برابر u در نظر می گیرم.

حالت خاص: در محاسبه انتگرال های شامل تابع $\sqrt{ax^2+bx+c}$ به شرط آنکه نتوان مشتق زیر رادیکال را ایجاد کرد ، ابتدا با مربع سازی آن را به یکی از شکل های $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ، $\sqrt{ax^2+bx+c}$ و یا $\sqrt{ax^2+bx+c}$ تبدیل کرده و سپس به ترتیب از جانشینی های $u=a\,sec\theta$ ، $u=a\,tan\theta$ و $u=a\,sin\theta$ استفاده می کنیم.

چند فرمول مثلثاتی خاص :

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\left|sin\frac{\theta}{2}\right| \quad ** \quad \sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left|cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\sqrt{1-\sin x}=\left|sin\frac{\theta}{2}-cos\frac{\theta}{2}\right| \quad ** \quad \sqrt{1+\sin x}=\left|sin\frac{\theta}{2}+cos\frac{\theta}{2}\right|$$

(ارشد عمران 83) $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}}=$

(ارشد معدن 83) $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx=$

(ارشد ریاضی 78) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx=$

(ارشد ریاضی 82) $\int_1^3\frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx=$

4-انتگرال گیری به روش جزء به جزء

این قاعده به این صورت می باشد : $\int u\,.dv = uv - \int vdu$

که u و v توابعی از متغیر x می باشند و برخی مواقع لازم می شود برای محاسبه یک انتگرال چند بار از روش جزء به جزء استفاده کنیم. در کلیه موارد u عضو مجموعه پائینتر انتخاب می شود. در این روش در انتخاب u و dv باید دقت لازم را داشته باشیم.

1	2	3
Lnx معکوس های مثلثاتی معکوس های هذلولی	چند جمله ای ها	e^{ax} Sin bx Cos bx Sinh bx Cosh bx

روش جزء به جزء را برای انتگرال گیری از توابه زیر بکار می بریم:

1- انتگرال گیری از توابع مجموعه 1
2- انتگرال گیری از حاصل ضرب های توابع مجموعه 3
3- انتگرال گیری از توابع مجموعه 2 در 3
4- انتگرال گیری از توابع مجموعه 2 در 1

(ارشد ژئوفیزیک 82) $\int_0^1 x\, lnx\, dx =$

$$\int sin^2 x\, dx =$$

$$\int_0^1 x\, e^x\, dx =$$

<u>انتگرال</u>　　<u>مشتق</u>

$\int_0^1 x^2\, e^x\, dx =$ (ارشد ژئوفیزیک 79)

انتگرال مشتق

5-انتگرال گیری از روش های تجزیه به کسرهای جزئی (روش هویساید)

در ابتدای کار فرض می کنیم که درجه صورت کسر کوچکتر از مخرج هست سپس صورت و مخرج کسر را تا آن جا که ممکن است به حاصلضرب عوامل درجه اول و دوم تجزیه کرده و ساده میکنیم.

تجزیه به کسرهای ساده ، برای یک کسر گویا به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^3(x-b)^n}$ که $n \epsilon N$ داریم:

$$f(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-b)^n}$$

$$A_n = \lim_{x\to a}(x-a)^n f(x)$$

$$B_n = \lim_{x\to a}(x-b)^n f(x)$$

تجزیه به کسرهای ساده ، برای یک کسر گویا به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$ که $n \epsilon N$ داریم:

$$f(x) = \frac{A_1x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

در ادامه با مخرج مشترک گرفتن و معادل قرار دادن صورت ، کسر حاصل با صورت اصلی تابع میتوانیم محاسبه کنیم.

$(75$ ارشد ریاضی$)$ $\int_{1}^{2} \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\, dx =$

$(78$ ارشد صنایع$)$ $\int \frac{dx}{x(1+x)^2} =$

6-انتگرال گیری از انتگرال معین توابع زوج و فرد در فاصله های متقارن

اگر f(x) تابع فرد یعنی $f(-x) = -f(x)$ و g(x) یک تابع زوج باشد یعنی $g(-x) = f(x)$ داریم:

$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ $\int_{-a}^{a} g(x) dx = 2 \int_{0}^{a} g(x)$

$(77$ ارشد ژئوفیزیک$)$ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} =$

$(79$ ارشد مهندسی هسته ای$)$ $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{x^4+x^2+1} =$

7-انتگرال گیری از توابع سینوسی و کسینوسی

الف) انتگرال گیری از توانهای زوج sin و cos داریم:

$$\sin^2 x = \frac{1 - cos2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

ب) انتگرال گیری از توانهای فرد sin و cos داریم:

نکته $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^{2+1} x = sin\, x(\sin^2 x)^n = \sin x\,(1 - \cos^2 x)^n$$

$$\cos^{2+1} x = cos\, x(\cos^2 x)^n = \cos x\,(1 - \sin^2 x)^n$$

ج) انتگرال گیری از فرمت $\int \sin^m x \cos^n x$ داریم:

اگر m یا n یکی فرد باشد فرض می کنیم m فرد باشد یعنی m=2k+1 :

$$\sin^m x \cos^n x = \sin x\,(1 - \cos^2 x)^k \cos^n x$$

اگر m , n هر دو زوج باشد مثلا m=2k :

$$\sin^m x \cos^n x = (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x$$

د) انتگرال گیری از توابع گویا بر حسب sin و cos داریم:

$$z = tan\frac{x}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad , \quad dz = \frac{1}{2}(1+z^2)dx$$

*غیر از موارد فوق می توان از روش جانشینی (تغییر متغیر) نیز استفاده کرد.

$\int sin^2x\, dx =$(برای حل این سوال به قسمت جزء به جزء توجه شود)

یاداوری : sin 2x= 2sin x cos x

$$\int \sin^4 \mathrm{x}\, dx =$$

$$\int \sin^3 \mathrm{x} \cos x\, dx =$$

انتگرالهای زیر را حل کنید؟

$$\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+4} dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x + 5} dx =$$

$$\int x^2\, lnx\, dx =$$

بردار و هندسه تحلیلی