به نام حضرت دوست

فروردین ماه ۱۳۹۶

پاسخنامه آزمون جامع (سری سوم)

11 th IOAA Team
I.R. IRAN

اعضای تیم به ترتیب حروف الفبا :

سینا بلوکی   امیراحسان علیزاده

امیرحسین ستوده فر   عباس فروزان نژاد

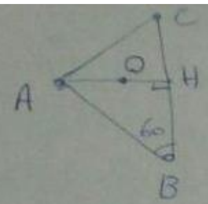
عماد صالحی   زهرا فرهمند

پریماه صفریان   علیرضا ملکی

شایان عزیزی   محمد علی نادمی

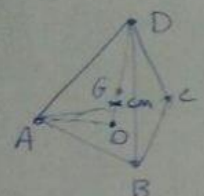
پاسخ سوال اول :

۴ وجه :



①

$AB = 2 , \hat{B} = 60^\circ \rightarrow AH = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow AO = \frac{2}{3}AH = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$



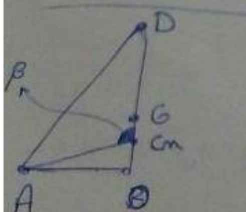
$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

$\rightarrow GO = \frac{1}{4} DO = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$m \frac{\sqrt{6}}{6} = (m+M)\, G\,Cm \rightarrow G\,Cm = \frac{\sqrt{6}}{18} \quad , O\,Cm = \frac{\sqrt{6}}{9}$ الف)

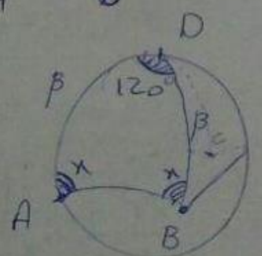
ب) احتمال هر وجه ~~...~~ زاویه فضایی اشغال شده توسط آن وجه برای ناظری روی مرکز جرم متناسب است.

$P \propto \Omega$



$tg(180 - \beta) = \frac{AO}{OCm} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{9}} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \beta = 103.26^\circ$



چهار جزئی : $\cos\beta \cos 120 = \sin\beta \cot\beta - \sin 120 \cot x$

$\Rightarrow ctg\, x = \cos\beta \frac{1 - \cos 120}{\sin 120} = \cos\beta\, tg 60$

$\Rightarrow x = 111.67$

$\Rightarrow \Omega_1 = (2x + 120 - 180)\frac{\pi}{180} = 2.85\, sr \rightarrow \boxed{P_1 = \frac{\Omega_1}{4\pi} = 22.69\%}$

تقارن $\rightarrow P_1 = P_2 = P_3 \rightarrow P_4 = 1 - 3P_1 \rightarrow \boxed{P_4 = 31.94\%}$

پاسخ سوال دوم :

در ابتدا شما می‌بایست ثابت کنید که اهله ماه را به صورت بیضی خواهیم دید.

برای اینکار یک دستگاه مختصات بر روی ماه در نظر بگیرید که محور Z آن به سمت شمال دایره‌البروج است و محور X آن نیز به سمت خورشید. مختصات نقاطی که در مرز روشنایی و تاریکی قرار دارند را به دست آورید (واضح است که چیست !) و سپس به دوران این دستگاه به گونه‌ای که محور X آن به سمت زمین آید مختصات مرز را در دستگاه جدید خواهیم داشت و می‌توان دید که تصویر آن ها بر صفحه آسمان یک بیضی است. (۲۵نمره)

سپس باتوجه به توضیحات داده شده، می‌بایست ضابطه تسطیح اسطرلاب را بنویسید (و اگر هم آن را دیده‌اید قبلا(!!!) ، صرفا باید بنویسیدش!!) و اثبات نمایید که تحت این ضابطه، دایره عظیمه به دایره می‌رود. (۳۵ نمره)

حال اگر اهله داده شده در شکل را مورد بررسی قرار دهید متوجه می‌شوید که قسمتی از یک دایره است (این کار را بدین صورت می‌توان انجام داد : چند نقطه روی هلال در نظر بگیرید و آن‌ها را به یکدیگر وصل نمایید و عمود منصف‌های این خطوط را رسم کنید. خواهید دید که محل برخورد آن‌ها در یک نقطه است) پس این می‌بایست حاصل تسطیح دایره عظیمه باشد (یا به عبارتی پاد تسطیح آن یک دایره عظیمه است) که این برخلاف گفته های قسمت اول است! (۴۰ نمره)

پاسخ سوال سوم :

نیرو ارشمیدس را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$d\overrightarrow{F_A} = -\hat{n}pdA$$

که در آن $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر سطح می‌باشد.بنابراین نیرو کل برابر است با:

$$\overrightarrow{F_A} = -\oint \hat{n}pdA$$

باتوجه به راه نمایی یک و دو ($\vec{\nabla}p = \rho g$) خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{F_A} = -\int \rho\vec{g}dV$$

با استفاده از تابعیت چگالی، تابعیت شتاب گرانشی را به دست می‌آوریم و با حل انتگرال بالا، نیرو ارشمیدس وارده بر لایه گفته شده را به دست می‌آوریم.

پاسخ سوال چهارم :

$$\frac{E_{int}}{E_{Kin}} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 q_e^2}{\lambda}}{K_B T}$$

$$\frac{\bar{m}}{\lambda^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \longrightarrow \lambda = R\sqrt[3]{\frac{4\pi\bar{m}}{3M}}$$

$$\longrightarrow 2\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{M}}{\bar{m}}K_B T = \frac{\cancel{3}}{5}\frac{GM^{\cancel{2}}}{R} \longrightarrow K_B T = \frac{\bar{m}GM}{5R}$$

$$\longrightarrow = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\cancel{R}\sqrt{\frac{4\pi\bar{m}}{3M}}} \times \frac{5\cancel{R}}{\bar{m}GM} = \frac{5Z_1 Z_2 e^2}{G\bar{m}^{3/2}\times\sqrt{4\pi}}\, 3^{1/2} M^{-1/2}$$

فرض ساده کننده : $Z_1, Z_2 = 1$

$\bar{m} \simeq m_H \longrightarrow = 0.3 \simeq 1$

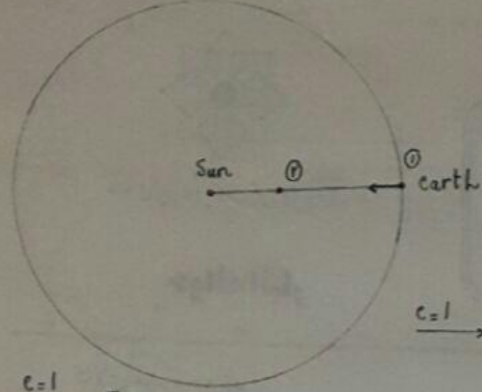
$M \simeq 10^{-3} M_\odot$

$M \simeq 1 M_\odot \longrightarrow = 0.01 \ll 1$

چون برهم کنش بین ذرات در سیارات اهمیت دارد، باعث شده است ماده بصورت جامد در بیاید!

پاسخ سوال پنجم :

الف)



$$\sigma T^4 \cdot 2\pi R^2 = \frac{L}{4\pi d^2} \times \pi R_*^2 (1-A)$$

$$\longrightarrow d = \sqrt{\frac{L(1-A)}{8\pi\sigma T^4}} \xrightarrow{A=0.306} d = 0.66\ A.U$$

بیضی کشیده : $2a = 1\ A.U \longrightarrow a = 0.5\ A.U$

$$\xrightarrow{e=1} r = a(1-\cos E) \xrightarrow{r_2 = 0.66 A.U} 0.66\ A.U = 0.5\ A.U(1-\cos E_2)$$

$$E_2 = 1.89\ rad$$

$$\xrightarrow{r_1 = 1 A.U} 1 = 0.5(1-\cos E_1)$$

$$\longrightarrow E_1 = \pi\ rad$$

$$\xrightarrow{e=1} E - \sin E = \frac{2\pi}{T} \times t$$

① $\pi - \sin\pi = \frac{2\pi}{T} \times t_1 \longrightarrow t_1 = \frac{T}{2} = 0.5T$

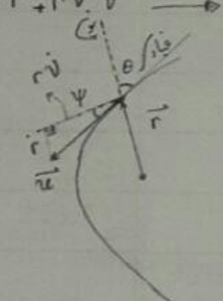
② $1.89 - \sin 1.89 = \frac{2\pi}{T} \times t_2 \longrightarrow t_2 = 0.15T$

$$\longrightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = 0.35T$$

$$T^2 = a^3 \longrightarrow T = 0.35\ yr \longrightarrow \Delta t = 0.12\ yr = 45.31\ days \quad (\mathrm{I})$$

$r = \frac{2P}{1+\cos\nu}$ شار سهمی $\xrightarrow{d/dt} \dot{r} = \frac{2P\sin\nu\ \dot{\nu}}{(1+\cos\nu)^2} = \frac{\sin\nu}{1+\cos\nu} r\dot{\nu}$

$\vec{u} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\nu}\hat{\nu} \longrightarrow \tan\psi = \frac{\dot{r}}{r\dot{\nu}} = \frac{\sin\nu}{1+\cos\nu}$ زاویه پرواز



$\theta = 90 - \psi$ (زاویه بین غبار و دم) $\longrightarrow \tan\theta = \frac{1+\cos\nu}{\sin\nu}$

$$\longrightarrow \sqrt{3}\sin\nu = 1 + \cos\nu$$

$$\sqrt{3}\sin\nu - \cos\nu = 1 \longrightarrow \sin\nu' = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\nu' = -\frac{1}{2} \longrightarrow \nu' = 120^\circ$$

$$\longrightarrow \cos(\nu - 120) = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \nu = 60^\circ \longrightarrow 0.66\ A.U = \frac{2P}{1+\cos\nu}$$

$$\longrightarrow P = 0.49\ A.U$$

$$\sqrt{\frac{GM}{2P^3}}\, t = \tan\frac{\nu}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\nu}{2}$$

$\xrightarrow{\nu = 60^\circ} t = 18.16\ days$ (بعد از حضیض)

$$\xrightarrow{(\mathrm{I})} |t + \Delta t| = 63.47\ days \longrightarrow \nu'' = ?$$

$$x^3 + ax + b = 0$$

$$x = u + v \longrightarrow u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + a(u+v) + b = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ (3uv - a)(u+v) = 0 \longrightarrow 3uv = a \end{cases} \longrightarrow \frac{a^3}{27v^3} + v^3 = -b \longrightarrow (a/3)^3 + v^6 + bv^3 = 0$$

$$v^3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a/3)^3}}{2}$$

$$\rightarrow v^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} \longrightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

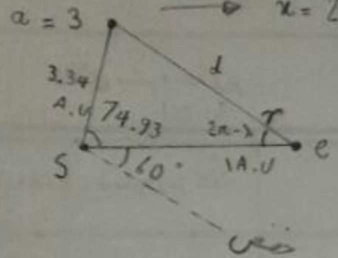
$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

$$\longrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

$b = -3.36$

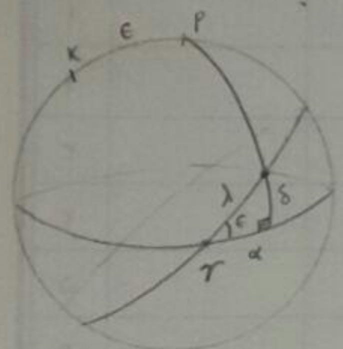
$a = 3 \longrightarrow x = 2.41 = \tan \frac{v}{2} \longrightarrow v = 134.93^\circ \longrightarrow \boxed{\theta = 22.54^\circ}$

$\longrightarrow r = 3.34$ A.U



$$d^2 = 1^2 + 3.34^2 - 2 \times 3.34 \cos 74.93^\circ$$

$\longrightarrow d = 3.23$ A.U

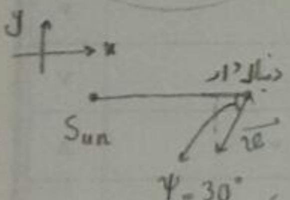


$$\frac{-\sin\lambda}{3.34} = \frac{\sin 74.93}{d} \longrightarrow \lambda = 272.34^\circ$$

$\sin\delta = \sin\epsilon \sin\lambda \longrightarrow \boxed{\delta = -23.48^\circ}$

$tg\alpha = \cos\epsilon \, tg\lambda \longrightarrow \boxed{\alpha = 272.55^\circ}$

ب)



$\vec{v}_M = v_M(-\cos 30 \, \hat{i} - \sin 30 \, \hat{j})$

$\vec{v}_e = v_e(-\hat{i})$

$$\longrightarrow \begin{cases} -m v_M \frac{\sqrt{3}}{2} - M v_e = v_x (m+M) \\ -\frac{m v_M}{2} = v_y (m+M) \end{cases}$$

دنباله‌دار سیاه‌ شال

تخمین جرم : $R = 100$ Km, $\rho = 5000 \, Kg/m^3 \longrightarrow m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 2.09 \times 10^{19}$ Kg

$$\frac{v_M^2}{2} - \frac{GM}{r} = 0 \longrightarrow v_M = 51.78 \, Km/s$$

$$\frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{1 A.U} \longrightarrow v_e = 30.19 \, Km/s$$

$\longrightarrow v_x = 30.19 \, Km/s$! تاثیر شهاب‌سنگ اول

$v_y = 0.0001 \, Km/s$

$\longrightarrow v = 30.19 \, Km/s$

$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \longrightarrow \alpha = 10^{-4}$ deg

$\longrightarrow a = 0.5$ A.U

دیگه این برخورد تأثیر خاصی روی مدار نخواهد داشت !

$$\longrightarrow \sqrt{GMa(1-e^2)} = |\vec{r} \times \vec{v}| = rv\sin\alpha \longrightarrow e = 1$$