جزوه تئوری ارتجاعی سازه ها
دانشگاه تهران

تئوری ارتجاعی سازه‌ها

- سرفصل‌ها :

• مراجع :

- Theory of Elasticity , Timoshenko

- Elasticity in Engineering Mechanics , Boresi

- Contitutive Equations for Engineering Material , Chen and Saleeb

- Elasticity , Theory and Application , Reismann and Pawlik

- مکانیک محیط های پیوسته

- تئوری ارتجاعی

فصل اول – جبر اندیسی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

بیان دیگر : $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i \quad (i=1,2,3)$

با بیان سیگما : $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,3)$

بصورت قراردادی : $a_{ij}x_j = b_i$

◄ اندیس های موجود :

۱– اندیس آزاد

$$A_i \begin{cases} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{cases} \qquad C_K \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{cases}$$

$$B_{ij} \begin{cases} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{matrix}$$

۲– اندیس تکرار

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$C_{Kjj} = C_{K11} + C_{K22} + C_{K33}$$

(هیچ گاه در یک عبارت بیش از 2 تکرار نداریم)

C_{Kjj}: K ← اندیس آزاد ، jj ← اندیس تکرار

$$\frac{\partial f_K}{\partial x_K} = f_{K,K} = f_{1,1} + f_{2,2} + f_{3,3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ → ۹ جمله → هر دو اندیس آزادند

C_{jjjk} × از لحاظ اندیسی بی معنی است

$\frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i}$ × چون اندیس i سه بار تکرار شده بی مفهوم است

▸ معرفی چند کمیت اندیسی

▪ دلتای کرونیکر (Kroneker Delta)

$$\delta_{ij} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ij} A_i = \delta_{1j} A_1 + \delta_{2j} A_2 + \delta_{3j} A_3 \begin{cases} A_1 & j=1 \\ A_2 & j=2 \\ A_3 & j=3 \end{cases} = A_j$$

$$\Rightarrow \delta_{ij} A_i = A_j \quad ; \quad \delta_{kj} f_k = f_j$$

δ_{ij} = ماتور جابجایی

$$C_{ijkl}\delta_{ij} = C_{iikl} = C_{jjkl} = C_{rrkl}$$

چون اندیس ۲ را جابجا می‌کند به آن ماتور جابجایی می‌گویند.

اندیس تکراری می‌تواند هر چه باشد ولی در اینجا k یا l نباید باشد چون سه تا اندیس فراهم داشت.

(δ_{mn} دارای دو اندیس است و یا m را n می‌کند یا n را m)

▪ سمبل ε (سمبل چرخشی) Premutation Symbol

سمبل ε دارای 3 اندیس است (ε_{ijk})

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 3 & \leftarrow & 2 \end{array}$$

$\varepsilon_{123} = 1$, $\varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{312} = 1$

اگر اندیس های i، j و k در جهت نشان داده شده بچرخند مقدار ε برابر 1 خواهد بود و اگر برعکس این جهت بچرخند مقدار ε برابر با -1 خواهد شد.

$$\varepsilon_{132} = -1 \;,\quad \varepsilon_{213} = -1 \;,\quad \varepsilon_{321} = -1$$

غیر از مقادیر ذکر شده به ازای سایر اندیس ها، مقدار ε برابر با صفر خواهد بود

$$i=j \quad \text{یا} \quad i=j=k \;\Rightarrow\; \varepsilon_{ijk}=0$$

(اگر هر دو اندیس یکسان باشند ε صفر خواهد شد)

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

رابطه بین ε و δ که در حالت کلی به آن اتحاد δ-ε گفته میشود

اتحاد δ ε

$$\varepsilon_{ijk} \times \varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1r} & \delta_{1s} & \delta_{1t} \\ \delta_{2r} & \delta_{2s} & \delta_{2t} \\ \delta_{3r} & \delta_{3s} & \delta_{3t} \end{vmatrix}$$

سطر اول × ستون اول $= \delta_{1i}\delta_{1r} + \delta_{2i}\delta_{2r} + \delta_{3i}\delta_{3r} = \delta_{nr}\delta_{ni} = \delta_{ir} = \delta_{ri}$

که یک کمیت اندیسی که نسبت به r و i متقارن است

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk} \times \varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix}$$ اتحاد $\varepsilon - \delta$

سه حالت خاص اتحاد $\varepsilon - \delta$:

۱) $i=r$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ist} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{ji} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ki} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ist} = \delta_{ii}(\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}) - \delta_{is}(\delta_{ji}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ki}) + \delta_{it}(\delta_{ji}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{ki})$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ist} = 3(\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}) - (\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}) - (\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks})$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ist} = \begin{vmatrix} \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix}$$

۲) $i=r\,,\ j=s$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijt} = \begin{vmatrix} \delta_{jj} & \delta_{jt} \\ \delta_{kj} & \delta_{kt} \end{vmatrix} = \delta_{jj}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{kj} = 3\delta_{kt} - \delta_{kt} = 2\delta_{kt}$$

۳) $i=r\,,\ j=s\,,\ k=t$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6$$

◄ دترمینان

می‌خواهیم دترمینان ماتریس 3x3 را با نماد اندیسی نشان دهیم :

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1i}\delta_{1i} & a_{1i}\delta_{2i} & a_{1i}\delta_{3i} \\ a_{2j}\delta_{1j} & a_{2j}\delta_{2j} & a_{2j}\delta_{3j} \\ a_{3k}\delta_{1k} & a_{3k}\delta_{2k} & a_{3k}\delta_{3k} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = a_{1i}a_{2j}a_{3k} \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = \varepsilon_{ijk}\, a_{1i}a_{2j}a_{3k} = \varepsilon_{ijk}\, a_{i1}a_{j2}a_{k3}$$

حال می‌خواهیم حالت کلی‌تری از دترمینان را بدست آوریم :

$$a\,\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1r} & \delta_{1s} & \delta_{1t} \\ \delta_{2r} & \delta_{2s} & \delta_{2t} \\ \delta_{3r} & \delta_{3s} & \delta_{3t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} \\ a_{2r} & a_{2s} & a_{2t} \\ a_{3r} & a_{3s} & a_{3t} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{ir}\delta_{1i} & a_{js}\delta_{1j} & a_{kt}\delta_{1k} \\ a_{ir}\delta_{2i} & a_{js}\delta_{2j} & a_{kt}\delta_{2k} \\ a_{ir}\delta_{3i} & a_{js}\delta_{3j} & a_{kt}\delta_{3k} \end{vmatrix} = a_{ir}a_{js}a_{kt} \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a\,\varepsilon_{rst} = \varepsilon_{ijk}\, a_{ir}a_{js}a_{kt}$$

$$\xrightarrow{\times \varepsilon_{rst}} \quad a = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\, a_{ir}a_{js}.a_{kt}\,\varepsilon_{rst} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{rst}\, a_{ri}a_{sj}a_{tk}}$$

شکل کلی دترمینان

کوفاکتور ◄

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

A : عناصر کوفاکتور اجزاء ماتریس اول

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A_{ij} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}}}$$

عناصر کوفاکتور : مشتق دترمینان نسبت به اجزاء ماتریس اصلی

$$a = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{rst}\,a_{ir}\,a_{js}\,a_{kt}$$

$$A_{nm} = \frac{\partial a}{\partial a_{nm}} = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{rst}\,(\delta_{in}\delta_{rm}\,a_{js}\,a_{kt} + \delta_{jn}\delta_{sm}\,a_{ir}\,a_{kt} + \delta_{kn}\delta_{tm}\,a_{ir}\,a_{js})$$

$$* \; \frac{\partial a_{ir}}{\partial a_{nm}} = \delta_{in}\,\delta_{rm} \qquad \left(\frac{\partial A_i}{\partial A_j} = \delta_{ij}\right)$$

$$* \; \frac{\partial a_{js}}{\partial a_{nm}} = \delta_{jn}\,\delta_{sm} \qquad * \; \frac{\partial a_{kt}}{\partial a_{nm}} = \delta_{kn}\,\delta_{tm}$$

$$\Rightarrow A_{nm} = \frac{1}{6}\,(\varepsilon_{njk}\,\varepsilon_{mst}\,a_{js}\,a_{kt} + \varepsilon_{ink}\,\varepsilon_{rmt}\,a_{ir}\,a_{kt} + \varepsilon_{ijn}\,\varepsilon_{rsm}\,a_{ir}\,a_{js})$$

$$\varepsilon_{nik}\,\varepsilon_{mrt}\,a_{ir}\,a_{kt} \qquad \varepsilon_{nji}\,\varepsilon_{mrs}\,a_{ir}\,a_{js}$$

با عوض کردن اندیس‌ها [illegible] ←

$$\varepsilon_{njk}\,\varepsilon_{mrt}\,a_{jr}\,a_{kt} \qquad \varepsilon_{nji}\,\varepsilon_{msr}\,a_{ir}\,a_{js}$$

$$\varepsilon_{njk}\,\varepsilon_{mst}\,a_{kt}\,a_{js}$$

$$\Rightarrow A_{nm} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{njk}\,\varepsilon_{mst}\,a_{js}\,a_{kt}$$

$$\xrightarrow{\times a_{n\ell}} A_{nm}\,a_{n\ell} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{mst}\,\underbrace{\varepsilon_{njk}\,a_{n\ell}\,a_{js}\,a_{kt}}_{a\,\varepsilon_{\ell st}}$$

$$\Rightarrow A_{nm} a_{nl} = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{mst} \varepsilon_{lst}}_{2\delta_{ml}} a = a\,\delta_{ml} \Rightarrow A_{nm} a_{nl} = a\,\delta_{ml}$$

$$\left(* \quad A_i B_i \Rightarrow C_i A_i = C_i B_i \Rightarrow A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3 = B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 \right)$$

$$\begin{cases} m=1 \\ l=1 \end{cases} \Rightarrow A_{n1} a_{n1} = a \Rightarrow \underbrace{a_{11}A_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31}}_{\text{تعریف دترمینان}} = a$$

$$\begin{cases} m=2 \\ l=2 \end{cases} \Rightarrow A_{n2} a_{n2} = a \Rightarrow a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a$$

برای انجام ضرب ماتریسی باید اندیس دوم A با اندیس اول a یکسان باشد، پس A_{nm} را ترانهاده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A]^T [a] = a[I] \Rightarrow \frac{[A]^T}{a} [a] = [I]$$

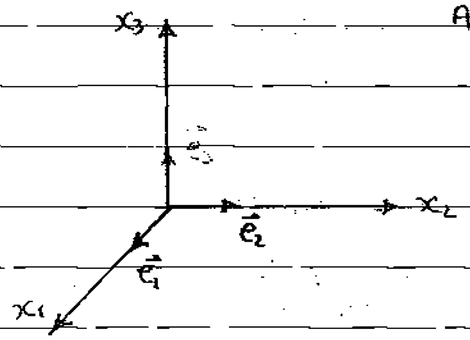
$$\Rightarrow \boxed{[a]^{-1} = \frac{[A]^T}{a}}$$ (کوفاکتورهای a عوض شد)

تمرین) x_j را از رابطهٔ $a_{ij}x_j = b_i$ بدست آورید.

راهنمایی: باید طرفین رابطه را در یک کوفاکتور ضرب کنیم

◄ بردارها

در دستگاه نشان داده شده از بردارهای یکه $\vec{e}_1$ ، $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ استفاده می‌کنیم



$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 = A_i\vec{e}_i$$

اندیس تکرار

$$\vec{B} = B_j\,\vec{e}_j$$

• جمع و تفریق بردارها:

$$\vec{A} = \vec{B} \pm \vec{C} \rightarrow A_i = B_i \pm C_i$$

• ضرب اسکالر:

$$\vec{A} = \alpha\vec{B} \rightarrow A_i = \alpha B_i$$

• ضرب عددی (داخلی) دو بردار:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_i\vec{e}_i \cdot B_j\vec{e}_j = A_iB_j\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$$

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij} \rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_iB_j\delta_{ij} = A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

• ضرب خارجی دو بردار:

$$\vec{A}\times\vec{B} = A_i\vec{e}_i \times B_j\vec{e}_j = A_iB_j(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)$$

در دستگاه راستگرد: $\vec{e}_i\times\vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = \varepsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k$

دارای جمع، اندیس‌ها اندیس تکرارند

• ضرب مختلط سه بردار:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \varepsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k\cdot C_l\vec{e}_l$$

$$= \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_l\delta_{kl} = \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k$$

(حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار)

ضرب برداری سه بردار:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\varepsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k)\times C_l\vec{e}_l$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{kij}}A_iB_jC_l\varepsilon_{kln}\vec{e}_n = (\delta_{il}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jl})A_iB_jC_l\vec{e}_l$$

$$= A_iB_jC_i\vec{e}_j - A_iB_jC_j\vec{e}_i = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = A_i\vec{e}_i\times(B_j\vec{e}_j\times C_k\vec{e}_k) = A_i\vec{e}_i\times(B_jC_k\varepsilon_{jkn}\vec{e}_n)$$

$$= A_iB_jC_k\varepsilon_{jkn}\underbrace{\varepsilon_{inl}}_{\varepsilon_{lin}}\vec{e}_l = (\delta_{jl}\delta_{ki}-\delta_{ji}\delta_{kl})A_iB_jC_k\vec{e}_k$$

$$= A_iB_jC_i\vec{e}_j - A_iB_iC_k\vec{e}_k = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

◄ حال برخی از اپراتورهای برداری را با اندیس نشان می‌دهیم:

- گرادیان

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\vec{e}_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\vec{e}_i = \varphi_{,i}\vec{e}_i$$

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$$

$$\vec{\nabla}\vec{A}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial x_1} = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1}\vec{e}_2 + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1}\vec{e}_3 = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_1}\vec{e}_j \\[2ex]
\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial x_2} = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_2}\vec{e}_1 + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_2}\vec{e}_3 = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_2}\vec{e}_j \\[2ex]
\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial x_3} = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_3}\vec{e}_1 + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_3}\vec{e}_2 + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_3}\vec{e}_3 = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_3}\vec{e}_j
\end{array}\right.$$

$\dfrac{\partial\vec{e}_j}{\partial x_i} = 0 \;\Leftarrow\;$ چون $\vec{e}_j$ در دستگاه کارتزین ثابت است

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\vec{e}_j = A_{j,i}\,\vec{e}_j \qquad (\vec{\nabla} = \partial_i\,\vec{e}_i)$$

۱ـ مولفه های گرادیان یک بردار هر کدام یک بردار هستند که به آن تانسور گفته می شود.

(یک تانسور مرتبه 3 ، 27 مولفه دارد ← 3^3)

۲ـ دیورژانس

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\right)\cdot A_j\vec{e}_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$$

$$= \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\delta_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = A_{i,i}$$

۳ـ لاپلاسین

$$\nabla^2\varphi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\;\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\vec{e}_j = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\delta_{ij}$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_i} = \varphi_{,ii} = \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + \varphi_{,33} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

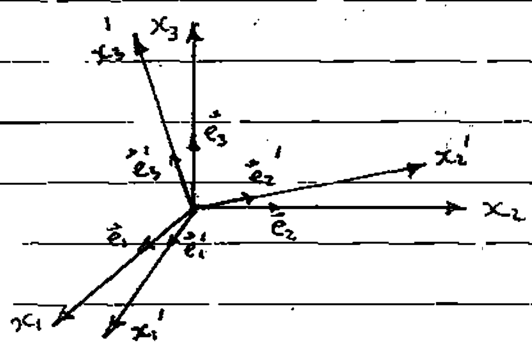
۴ـ کرل

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i \times A_j\vec{e}_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{A} = \varepsilon_{ijk}A_{j,i}\,\vec{e}_k = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

◄ تبدیل دستگاه مختصات

یعنی دستگاه مختصات را بچرخانیم



	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\vec{e}_2'$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\vec{e}_3'$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

بردارها یکه اند $\Rightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$

تصویر $\vec{e}_1'$ روی x_3

ضرب هر سطر یا ستون در خودش

یک است و ضرب هر سطر در سطر دیگر یا هر ستون در ستون دیگر برابر صفر است

$\Leftarrow$ این ماتریس یک ماتریس متعامد است (Orthogonal Matrix)

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1' &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3 = a_{1j}\vec{e}_j \\ \vec{e}_2' &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3 = a_{2j}\vec{e}_j \\ \vec{e}_3' &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 = a_{3j}\vec{e}_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{e}_i' = a_{ij}\vec{e}_j}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1 &= a_{11}\vec{e}_1' + a_{21}\vec{e}_2' + a_{31}\vec{e}_3' = a_{i1}\vec{e}_i' \\ \vec{e}_2 &= a_{12}\vec{e}_1' + a_{22}\vec{e}_2' + a_{32}\vec{e}_3' = a_{i2}\vec{e}_i' \\ \vec{e}_3 &= a_{13}\vec{e}_1' + a_{23}\vec{e}_2' + a_{33}\vec{e}_3' = a_{i3}\vec{e}_i' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{e}_j = a_{ij}\vec{e}_i'}$$

حال می خواهیم ببینیم که یک بردار مفروض در دستگاه جدید چگونه خواهد بود:

$$\vec{A} = A_i\vec{e}_i = A_j'\vec{e}_j' \xrightarrow{\cdot\vec{e}_k'} A_i\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k' = A_j'\vec{e}_j'\cdot\vec{e}_k'$$

$$* \quad \vec{e}_i'\cdot\vec{e}_k = a_{ij}\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k = a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik} \Rightarrow \vec{e}_i'\cdot\vec{e}_j = a_{ij}$$

$$\Rightarrow A_i a_{ki} = A_j'\delta_{jk} = A_k' \Rightarrow \boxed{A_j' = a_{ji}A_i}$$

$$\{A'\} = [a]\{A\}$$

* همیشه اندیس اول مربوط به e' و اندیس دوم مربوط به e است

Homa

$$\vec{A} = A_i \vec{e}_i = A'_j \vec{e}'_j \xrightarrow{\cdot \vec{e}_k} A_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = A'_j \vec{e}'_j \cdot \vec{e}_k$$

$$\Rightarrow A_i \delta_{ik} = A'_j a_{jk} \Rightarrow A_k = a_{jk} A'_j \Rightarrow \boxed{A_i = a_{ji} A'_j}$$

$$\{A\} = [a]^T \{A'\}$$

$$\delta'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = a_{in} \vec{e}_n \cdot a_{jm} \vec{e}_m = a_{in} a_{jm} \delta_{nm} = a_{in} a_{jn} = \delta_{ij}$$

$$a_{in} a_{jn} = \delta_{ij} \Rightarrow \boxed{[a][a]^T = [I]}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = [I]$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \xrightarrow{\cdot \vec{e}_k} (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon'_{ijk} = (\vec{e}'_i \times \vec{e}'_j) \cdot \vec{e}'_k$$

$$1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon'_{123} = (\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2) \cdot \vec{e}'_3 = (a_{1i} \vec{e}_i \times a_{2j} \vec{e}_j) \times a_{3k} \vec{e}_k$$

$$= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

اگر هر دو دستگاه راستگرد یا هر دو چپگرد باشند، دترمینان برابر با 1 می‌شود ولی اگر یکی از دستگاه‌ها

راستگرد و دیگری چپگرد باشد، دترمینان برابر با -1 می‌شود

◄ تانسور

← کمیتی است که از قانون تبدیل محورهای مختصات تبعیت می‌کند

قانون‌های تبدیل
$$\begin{cases} A'_i = a_{ij} A_j \\ A_i = a_{ji} A'_j \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma'_{ij} = a_{ir} a_{js} \sigma_{rs} \\ \sigma_{ij} = a_{ri} a_{sj} \sigma'_{rs} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{ijk} = a_{ri} a_{sj} a_{tk} A'_{rst} \\ A'_{ijk} = a_{ir} a_{js} a_{kt} A_{rst} \end{cases}$$

قانون تبدیل به طور کلی : $\underbrace{A'_{ijk\dots l}}_{n} = a_{ir} a_{js} a_{kt} \dots a_{ul} A_{rst\dots u}$

← معنی فیزیکی تانسور این است که مؤلفه‌هایی دارد که خودشان بردارند .

تانسور مرتبه صفر (اسکالر) → تعداد مؤلفه‌ها $= 3^0 = 1$

" " یک (بردار) → " " $= 3^1 = 3$

" " دو → " " $= 3^2 = 9$

→ $\boxed{\text{تانسور مرتبه } n \rightarrow \text{تعداد مؤلفه‌ها} = 3^n}$

◄ می‌خواهیم نشان دهیم δ_{ij} یک تانسور مرتبه دو می‌باشد، پس باید از قانون تبدیل محورها تبعیت کند :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ri} \vec{e}'_r \cdot a_{sj} \vec{e}'_s = a_{ri} a_{sj} e'_r \cdot e'_s = a_{ri} a_{sj} \delta'_{rs} \\ \delta'_{rs} = \vec{e}'_r \cdot \vec{e}'_s = a_{ri} \vec{e}_i \cdot a_{sj} \vec{e}_j = a_{ri} a_{sj} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ri} a_{sj} \delta_{ij} \end{cases}$$

⇐ δ_{ij} یک تانسور مرتبه دو می‌باشد

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)\cdot\vec{e}_k = (a_{ri}\,\vec{e}'_r \times a_{sj}\,\vec{e}'_s)\cdot a_{tk}\,\vec{e}'_t$$

$$= a_{ri}\,a_{sj}\,a_{tk}\,[(\vec{e}'_r \times \vec{e}'_s)\cdot\vec{e}'_t] = a_{ri}\,a_{sj}\,a_{tk}\,\varepsilon'_{rst}$$

$$\varepsilon'_{rst} = (\vec{e}'_r \times \vec{e}'_s)\cdot\vec{e}'_t = (a_{ri}\,\vec{e}_i \times a_{sj}\,\vec{e}_j)\cdot a_{tk}\,\vec{e}_k = a_{ri}\,a_{sj}\,a_{tk}\,\varepsilon_{ijk}$$

$\Leftarrow$ ε یک تانسور مرتبه سه است، چون از قانون تبدیل بردارها تبعیت می‌کند

۱ـ خواص تانسورها

۱) تساوی تانسورها: یعنی تمام مؤلفه‌های تانسورها با هم برابر باشند. $A_{ijk} = B_{ijk}$

۲) جمع و تفریق تانسورها: مؤلفه‌های نظیر تانسورها با هم جمع یا تفریق می‌شود. $A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij}$

۳) ضرب اسکالر در یک تانسور: اسکالر در همه مؤلفه‌ها ضرب می‌شود. $B_{ij} = \alpha\, C_{ij}$

۴) ضرب عددی دو تا تانسور: اگر دو تا تانسور یک اندیس مشابه داشته باشند، می‌گوییم ضرب عددی شده‌اند.

$A_i B_i \quad , \quad C_{ij} D_{ik} \quad , \quad A_{ijk} B_{ist}$

۵) ضرب خارجی دو تا تانسور: اگر دو تا تانسور دارای هیچ اندیس مشابهی نباشند.

$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{rst} \quad , \quad A_i B_j$

۶) فشردن تانسور: یعنی دو اندیس تانسورها را مساوی بگیریم. با این مساوی‌سازی دو مرتبه از مرتبه تانسور کاسته می‌شود.

$$\underset{\text{مرتبه ۳}}{A_{ijk}} \rightarrow \underset{\text{مرتبه ۱}}{A_{iik}} = A_{11k} + A_{22k} + A_{33k}$$

$$A'_{ijk} = a_{ir}\, a_{is}\, a_{kt}\, A_{rst} = \delta_{rs}\, a_{kt}\, A_{rst} = a_{kt}\, A_{rrt}$$

چون با تبدیل مختصات مرتبط شد ← یک تانسور مرتبه ۱ است

$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{rst} \rightarrow$ تانسور مرتبه 6 $\rightarrow 3^6$

$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ist} \rightarrow$ تانسور مرتبه 4 $\rightarrow 3^4$

$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijt} \rightarrow$ تانسور مرتبه 2 $\rightarrow 3^2$

$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} \rightarrow$ تانسور مرتبه 0 $\rightarrow 3^0$

← با فشرده سازی در هر بار دو مرتبه از تانسور کاسته می‌شود.

۷) تقارن در تانسورها :

$A_{ij} = A_{ji}$ نسبت به اندیس‌های اول متقارن است

$C_{ijk} = C_{kji}$ نسبت به i و k

$D_{ijkl} = D_{jikl}$ نسبت به i و j

$E_{ijkl} = E_{klij}$ نسبت به (ij) و (kl)

۸) تقارن معکوس (پاد متقارن) :

$$B_{ij} = -B_{ji} \Rightarrow B_{11} = B_{22} = B_{33} = 0$$

$$C_{ijkl} = -C_{kjil} \Rightarrow C_{1j1l} = C_{2j2l} = C_{3j3l} = 0$$

$3 \times 9 = 27 \rightarrow$ 27 جمله صفر است

← هر تانسوری را می‌توان به یک تانسور متقارن و یک تانسور پادمتقارن تبدیل کرد

$$A_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})}_{\text{متقارن معکوس}}$$

۹) ایزوتروپی در تانسورها : یعنی هرچه محورهای مختصات را بچرخانیم ، مؤلفه‌های تانسور تغییر نمی‌کند؟

Homa

یعنی این تانسور در تمام دستگاههای کوردینات به یک صورت نشان داده می‌شود.

* تانسورهای ایزوتروپ در مرتبه‌های مختلف عبارتند از :

الف) همهٔ تانسورهای مرتبهٔ صفر   ب) تانسور صفر از تانسورهای مرتبهٔ یک

ج) مرتبهٔ دو : δ_{ij} د) مرتبهٔ سه : ε_{ijk}

$$* \quad \delta'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = a_{ir} a_{js} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_s = a_{ir} a_{js} \delta_{rs} = a_{is} a_{js} = \delta_{ij}$$

$$* \quad \varepsilon'_{ijk} = (\vec{e}'_i \times \vec{e}'_j) \cdot \vec{e}'_k = a_{ir} a_{js} a_{kt} (\vec{e}_r \times \vec{e}_s) \cdot \vec{e}_t$$

$$= \varepsilon_{rst} a_{ir} a_{js} a_{kt} = \alpha \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

هـ) مرتبهٔ چهار : اگر C_{ijkl} به صورت زیر تجزیه شود، ایزوتروپ است.

$$C_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$$

$$* \quad C'_{rstu} = a_{ri} a_{sj} a_{tk} a_{ul} C_{ijkl} = a_{ri} a_{sj} a_{tk} a_{ul} (\alpha \delta_{ij} \delta_{kl}$$

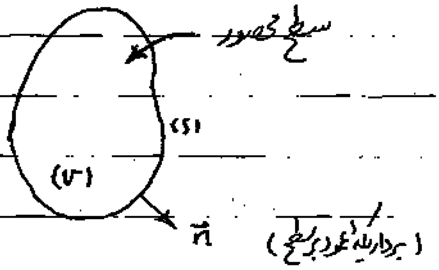
$$+ \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$= \alpha a_{ri} a_{si} a_{tk} a_{uk} + \beta a_{ri} a_{sj} a_{ti} a_{uj} + \gamma a_{ri} a_{sj} a_{tj} a_{ui}$$

$$= \alpha \delta_{rs} \delta_{tu} + \beta \delta_{rt} \delta_{su} + \gamma \delta_{ru} \delta_{st} = C_{rstu}$$

! نتیجه : تانسورهای $\alpha \delta_{ij}$ و $\alpha \varepsilon_{ijk}$ هم تانسور ایزوتروپ هستند.

قضیه دیورژانس :



$$\oint_s \vec{n} \cdot \vec{A}\, ds = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\, dV$$

حال این بردار می‌توانیم تانسور قرار دهیم

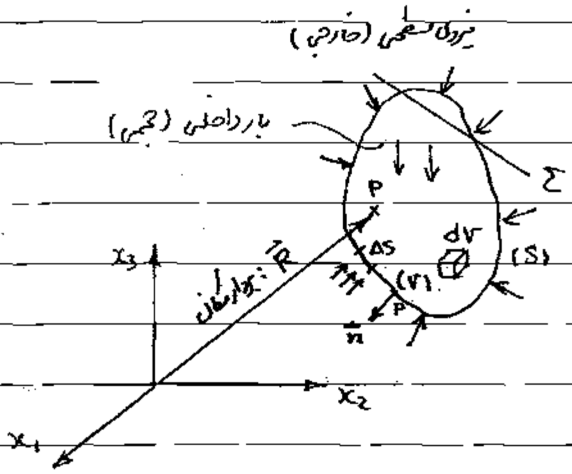
قضیه دیورژانس را به صورت اندیسی می‌نویسیم :

$$\oint_s n_i A_i\, ds = \int_v A_{i,i}\, dV$$

$$\oint_s n_i A_r\, ds = \int_v A_{r,i}\, dV \Rightarrow \oint_s A_{rs}\, n_k\, ds = \int_v A_{rs,k}\, dV$$

تعمیم طی قضیه دیورژانس :
$$\oint_s A_{ijk\ldots l}\, n_r\, dS = \int_v A_{ijk\ldots l,r}\, dV$$

فصل دوم - آنالیز تنش



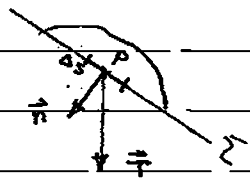
$$\lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta \vec F}{\Delta S} = \vec T$$ نیروی سطحی

$$= \vec T(P,\vec n)$$

هر نقطه خصوصیتی دارد و یک بار در آن وارد می‌شود.

نیروی وزن که بر هر جزء حجم وارد می‌شود، یک نیروی داخلی (حجمی) است:

$$\lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta \vec F}{\Delta V} = \vec f = \vec f(P)$$ یک نقطه داخلی



$$\lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta \vec F}{\Delta S} = \vec T$$ بردار تنش (Traction)

برآیند نیروهایی که به قسمت برش خورده وارد می‌شود

اگر مقطعی در جسم بزنیم، در هر نقطه‌ای از جسم بردار نیرویی داریم که به قسمت دیگر جسم وارد می‌شود و به آن بردار تنش گفته می‌شود.

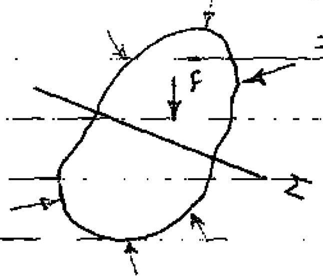
معادله تعادل نیروها به صورت برداری: $\oint_S \vec T\, ds + \int_V \vec f\, dV = 0$

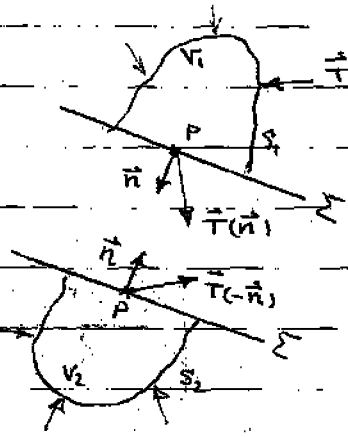
معادله تعادل گشتاورها به صورت برداری: $\oint_S \vec R \times \vec T\, ds + \int_V \vec R \times \vec f\, dV = 0$

← اگر جسمی در حال تعادل باشد، دارای 6 معادله تعادل است که به صورت بالا نشان داده می‌شود.

یعنی هر کدام از معادلات بالا نسبت به محورهای x_1، x_2 و x_3 باید نوشته شود.

لم کوشی





$$\oint_S \vec{T}\,ds + \int_V \vec{F}\,dV = 0$$

قطعه ۱ : $\int_{S_1} \vec{T}\,ds + \int_{\Sigma} \vec{T}(\vec{n})\,ds + \int_{V_1} \vec{F}\,dV = 0$ (I)

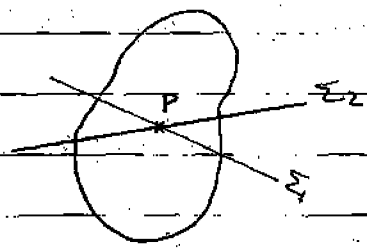
قطعه ۲ : $\int_{S_2} \vec{T}\,ds + \int_{\Sigma} \vec{T}(-\vec{n})\,ds + \int_{V_2} \vec{F}\,dV = 0$ (II)

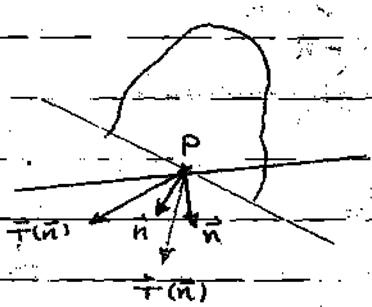
$$\xrightarrow{(I)+(II)} \underbrace{\oint_S \vec{T}\,ds + \int_V \vec{F}\,dV}_{\text{از تعادل کلی } = 0} + \int_{\Sigma} \left[\vec{T}(\vec{n}) + \vec{T}(-\vec{n})\right] ds = 0$$

این انتگرال بستگی به سطح Σ ندارد و هر سطحی که در نظر بگیریم، این رابطه برقرار است. یعنی همواره $\vec{T}(\vec{n}) + \vec{T}(-\vec{n})$ صفر است

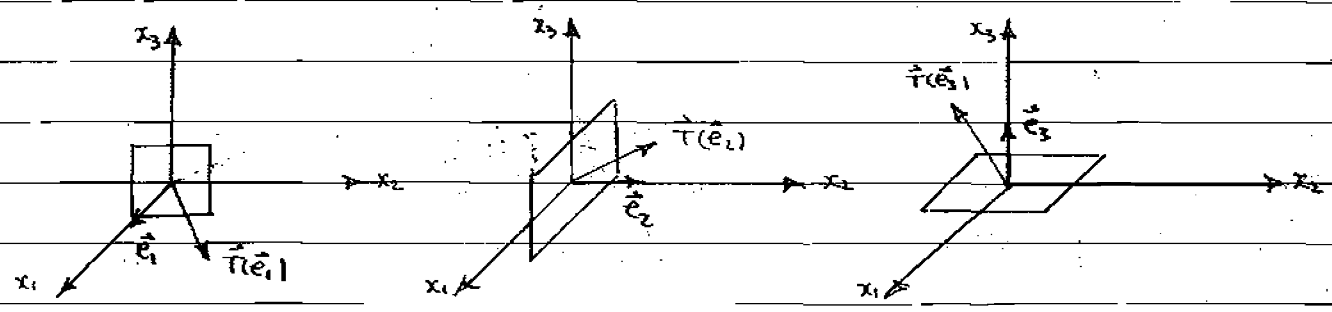
$$\vec{T}(\vec{n}) + \vec{T}(-\vec{n}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{T}(\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{n})}$$ لم کوشی

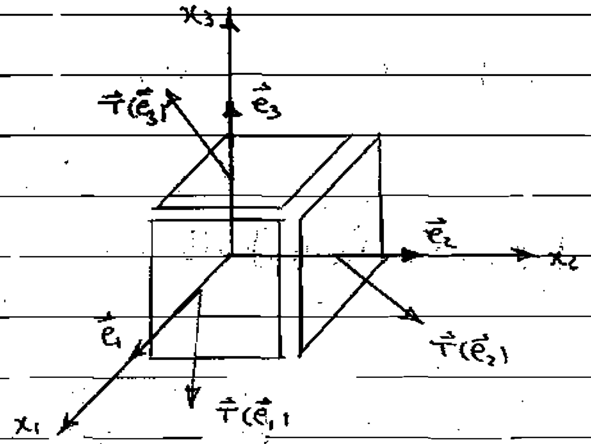
قضیه کوشی



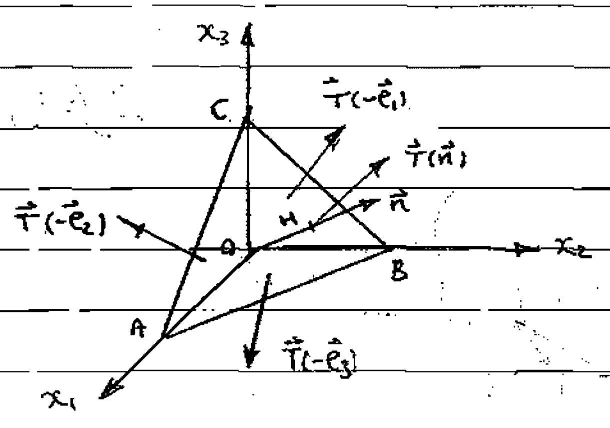


با هر بار مقطع زدن در یک نقطه، چون $\vec{n}$ عوض می‌شود، $\vec{T}(\vec{n})$ نیز تغییر می‌کند. از یک نقطه بی‌نهایت صفحه می‌گذرد ⟸ بی‌نهایت بردار عمود بر سطح و بردار تنش خواهیم داشت





وضعیت تنش: از یک نقطه P بی‌نهایت صفحه می‌گذرد. ولی اگر در سه صفحه عمود بر هم، بردار تنش را داشته باشیم، بردار تنش در هر صفحه دلخواهی را که از این نقطه می‌گذرد می‌توان برحسب این سه بردار تنش بدست آورد.



اثبات وضعیت تنش:

اضلاع هرم نزدیک صفرند و تعادل برقرار

نقطه O نوشته می‌شود

رأس هرم: O قاعده هرم: $\overset{\Delta}{ABC}$

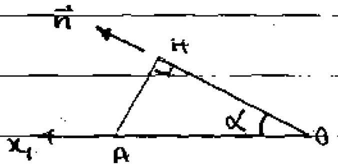
می خواهیم ثابت کنیم هر بردار تنش را می توان بر حسب $\vec{T}(\vec{e}_1)$ ، $\vec{T}(\vec{e}_2)$ و $\vec{T}(\vec{e}_3)$ نوشت

⇐ تعادل را در هم می نویسیم :

$$\vec{T}(-\vec{e}_1)\, S_{OBC} + \vec{T}(-\vec{e}_2)\, S_{OAC} + \vec{T}(-\vec{e}_3)\, S_{OAB} + \vec{T}(\vec{n})\, S_{ABC} + \vec{f}\, \Delta V = 0$$

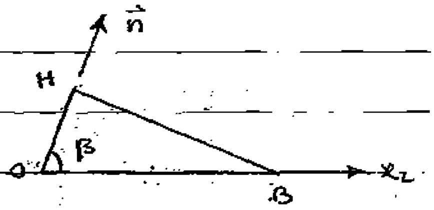
$$* \quad \Delta V = \frac{1}{3}\, \overline{OH}\, S_{ABC} = \frac{1}{3}\, \overline{OA}\, S_{OBC} = \frac{1}{3}\, \overline{OB}\, S_{OAC} = \frac{1}{3}\, \overline{OC}\, S_{OAB}$$

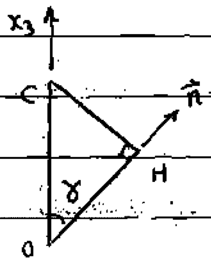
$$* \quad \vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3 \rightarrow \vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (C\alpha, C\beta, C\gamma)$$



$$\overline{OA}\, C\alpha = \overline{OH}$$
$$\Rightarrow \overline{OA}\,.\,n_1 = \overline{OH}$$

$$\overline{OB}\, C\beta = \overline{OH}$$
$$\Rightarrow \overline{OB}\,.\,n_2 = \overline{OH}$$





$$\overline{OC}\, C\gamma = \overline{OH}$$
$$\Rightarrow \overline{OC}\,.\,n_3 = \overline{OH}$$

$$\frac{1}{3}\, \overline{OH}\, S_{ABC} = \frac{1}{3}\, \overline{OA}\, S_{OBC} \Rightarrow \frac{1}{3}\, \overline{OA}\,.\,n_1\, S_{ABC} = \frac{1}{3}\, \overline{OA}\, S_{OBC}$$

$$\Rightarrow S_{OBC} = n_1\, S_{ABC}$$

$$\frac{1}{3}\, \overline{OB}\,.\,n_2\, S_{ABC} = \frac{1}{3}\, \overline{OB}\, S_{OAC} \Rightarrow S_{OAC} = n_2\, S_{ABC}$$

$$\frac{1}{3}\, \overline{OC}\,.\,n_3\, S_{ABC} = \frac{1}{3}\, \overline{OC}\, S_{OAB} \Rightarrow S_{OAB} = n_3\, S_{ABC}$$

با روابط بدست آمده برای مساحت‌ها را در معادلهٔ تعادل جایگزین می‌کنیم :

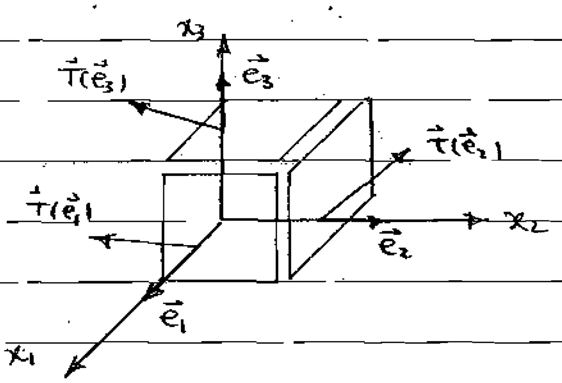
$$n_1 S_{ABC}\,\vec{T}(-\vec{e}_1) + n_2 S_{ABC}\,\vec{T}(-\vec{e}_2) + n_3 S_{ABC}\,\vec{T}(-\vec{e}_3) + S_{ABC}\,\vec{T}(\vec{n})$$

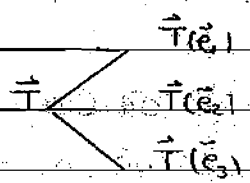
$$+\vec{F}\cdot\frac{1}{3}\,\overline{OH}\cdot S_{ABC} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{T}(\vec{n}) - n_1\vec{T}(\vec{e}_1) - n_2\vec{T}(\vec{e}_2) - n_3\vec{T}(\vec{e}_3) + \frac{1}{3}\vec{F}\cdot\overline{OH} = 0$$

$$\overline{OH}\to 0 \Rightarrow \vec{T}(\vec{n}) = n_1\vec{T}(\vec{e}_1) + n_2\vec{T}(\vec{e}_2) + n_3\vec{T}(\vec{e}_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{T}(\vec{n}) = n_i\,\vec{T}(\vec{e}_i)}$$





داریم به علت تانسور مرتبه دو می‌باشد . یعنی برداری

که مؤلفه‌های آن بردارند

$$\left.\begin{aligned}\vec{T}(\vec{e}_1) &= \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3\\ \vec{T}(\vec{e}_2) &= \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3\\ \vec{T}(\vec{e}_3) &= \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{T}(\vec{e}_i) = \sigma_{ij}\,\vec{e}_j}$$

$$\vec{T}(\vec{n}) = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2 + T_3\vec{e}_3 = T_j\vec{e}_j$$

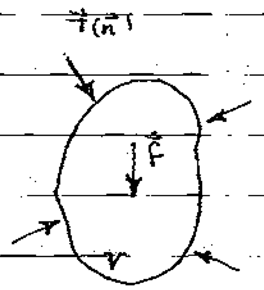
$$\Rightarrow T_j\vec{e}_j = n_i\,\sigma_{ij}\,\vec{e}_j \Rightarrow \boxed{T_j = n_i\,\sigma_{ij}}$$ (فرمول کوشی (شرائط مرزی))

$$\boxed{T_i = n_j\,\sigma_{ji}}$$

به این فرمول، فرمول شرایط مرزی هم گفته می‌شود. چون نیروهای مرزی را با تنش‌های حالت نقطه به هم ارتباط می‌دهد

حالت تنش در هر نقطه با $\vec{T}(\hat{n})$، $\vec{T}(\vec{e}_1)$، $\vec{T}(\vec{e}_2)$ یا $\vec{T}(\vec{e}_3)$ به تنهایی نشان داده نمی‌شود

حالت تنش در هر نقطه باید توسط بردار تنش در سه صفحه مستقل (برای سادگی سه صفحه عمود بر هم) نشان داده شود



$$\oint_s \vec{T}(\hat{n})\,ds + \int_v \vec{f}\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \oint_s T_i \vec{e}_i\,ds + \int_v f_i \vec{e}_i\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \oint_s T_i\,ds + \int_v f_i\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \oint_s \sigma_{ji} n_j\,ds + \int_v f_i\,dv = 0$$

قضیهٔ دیورژانس

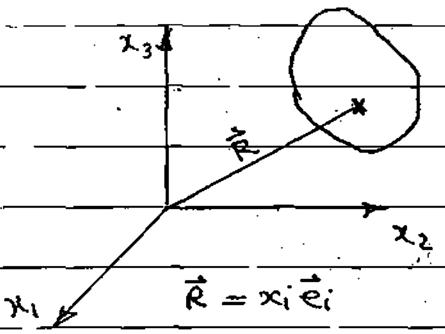
$$\longrightarrow \int_v \sigma_{ji,j}\,dv + \int_v f_i\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_v (\sigma_{ji,j} + f_i)\,dv = 0$$

مستقل از حجم کل است و می‌تواند هر قطعه‌ای از جسم هم باشد.

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{ji,j} + f_i = 0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases}$$



$\vec{R} = x_i \vec{e}_i$

$$\oint_s \vec{R} \times \vec{T}\, ds + \int_v \vec{R} \times \vec{f}\, dV = 0$$

$$\Rightarrow \oint_s \varepsilon_{ijk} x_i T_j \vec{e}_k\, ds + \int_v \varepsilon_{ijk} x_i f_j \vec{e}_k\, dV = 0$$

$$\Rightarrow \oint_s \varepsilon_{ijk} x_i T_j\, ds + \int_v \varepsilon_{ijk} x_i f_j\, dV = 0$$

$$T_j = \sigma_{\ell j} n_\ell \Rightarrow \oint_s \varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{\ell j} n_\ell\, ds + \int_v \varepsilon_{ijk} x_i f_j\, dV = 0$$

قضیهٔ دیورژانس

$$\Rightarrow \int_v \left[(\varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{\ell j})_{,\ell} + \varepsilon_{ijk} x_i f_j \right] dV = 0$$

چون توابع بستگی به حجم ندارند ← عبارت داخل کروشه $= 0$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} (\delta_{i\ell} \sigma_{\ell j} + x_j \sigma_{\ell j,\ell}) + \varepsilon_{ijk} x_i f_j = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} + x_i \varepsilon_{ijk} \underbrace{(\sigma_{\ell j,\ell} + f_j)}_{= 0} = 0$$

طبق رابطهٔ تعادل سل $= 0$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} \sigma_{ji} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_{ji} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}} \quad i \neq j$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 & \text{در حجم } V \\ T_i = \sigma_{ij} n_j & \text{در مرز } S_T \text{ (مرز نیرویی)} \end{cases}$$

◄ اثبات تانسور بودن σ_{ij}

$$\vec{T} = T_i \vec{e}_i = \sigma_{ij} n_j \vec{e}_i = \sigma'_{rs} n'_s \vec{e}'_r$$

$$\sigma_{ij} n_j \vec{e}_i = \sigma'_{rs} a_{sj} n_j a_{ri} \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} n_j = a_{ri} a_{sj} \sigma'_{rs} n_j \Rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = a_{ri} a_{sj} \sigma'_{rs}}$$

$$\sigma_{ij} a_{sj} n'_s a_{ri} \vec{e}'_r = \sigma'_{rs} n'_s \vec{e}'_r$$

چون n اختیاری است قابل حذف است

$$\Rightarrow \boxed{\sigma'_{rs} = a_{ri} a_{sj} \sigma_{ij}}$$

σ_{ij} تمام خواص تانسور را دارد. چون از قانون تبدیل محورهای مختصات تبعیت می‌کند.

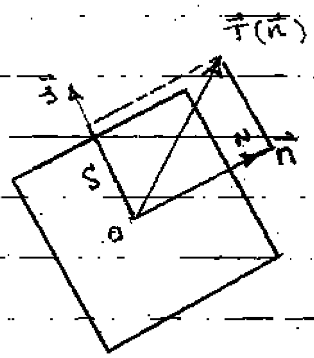
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

حال می‌خواهیم $[\sigma]$ را به صورت ضرب ماتریسی بنویسیم :

$$\begin{cases} [\sigma] = [a]^T [\sigma'] [a] \\ [\sigma'] = [a][\sigma][a]^T \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{21} & \sigma'_{31} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{32} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

◄ تنش های اصلی ـ محورها و صفحات اصلی



N: تصویر $\vec{T}(\vec{n})$ بر روی $\vec{n}$

$$N = \vec{n} \cdot \vec{T}(\vec{n}) = n_i T_i$$

$$\vec{n} = n_i \vec{e}_i \quad , \quad \vec{T}(\vec{n}) = T_i \vec{e}_i$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \sigma_{ij} n_i n_j} \qquad \vec{N} = N \vec{n}$$

S: تصویر $\vec{T}(\vec{n})$ بر روی $\vec{s}$

$$S = \vec{s} \cdot \vec{T}(\vec{n}) = s_i T_i$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \sigma_{ij} s_i n_j} \qquad \vec{S} = S \vec{s}$$

$$\Rightarrow \vec{T}(\vec{n}) = \vec{N} + \vec{S}$$

◄ تنش اصلی: تنشی است که مولفه برشی آن (S) صفر باشد

$$\vec{T}(\vec{n}) = \sigma \vec{n} \rightarrow T_i = \sigma n_i \rightarrow \boxed{\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i}$$

با استفاده از رابطه بالا می‌توان تنش ها، محورها و صفحات اصلی را بدست آورد

◄ در این رابطه σ تنش اصلی ، n محور اصلی و صفحه عمود بر n صفحه اصلی می باشد

$$\sigma_{ij} n_j - \sigma n_i = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} n_j - \sigma n_j \delta_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \xrightarrow{i=1} (\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0$$

دریک صفحه $\rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

چون رابطه ۱ بالا در صفحه برقرار است ،

بنابراین بردار n صفر نمی‌شود . پس باید دترمینان ماتریس σ ها برابر با صفر گردد .

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \qquad \begin{cases} I_1 = \sigma_{kk} \\ I_2 = \Sigma_{kk} \\ I_3 = |\sigma_{ij}| \end{cases}$$

$I_2 = \Sigma_{kk} \rightarrow$ مجموع مینورهای قطر ماتریس

حال رابطه ۱ بالا را با جزء اندیسی بدست می‌آوریم :

$$\Delta = |\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rst} (\sigma_{ir} - \sigma \delta_{ir})(\sigma_{js} - \sigma \delta_{js})(\sigma_{kt} - \sigma \delta_{kt})$$

$$= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rst} (\sigma_{ir} \sigma_{js} - \sigma \delta_{ir} \sigma_{js} - \sigma \delta_{js} \sigma_{ir} + \sigma^2 \delta_{ir} \delta_{js})(\sigma_{kt} - \sigma \delta_{kt})$$

$$= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rst} (\sigma_{ir} \sigma_{js} \sigma_{kt} - \sigma \delta_{ir} \sigma_{js} \sigma_{kt} - \sigma \delta_{js} \sigma_{ir} \sigma_{kt}$$

$$- \sigma \delta_{kt} \sigma_{ir} \sigma_{js} + \sigma^2 \delta_{ir} \delta_{js} \sigma_{kt} + \sigma^2 \delta_{ir} \delta_{kt} \sigma_{js}$$

$$+ \sigma^2 \delta_{js} \delta_{kt} \sigma_{ir} - \sigma^3 \delta_{ir} \delta_{js} \delta_{kt})$$

$$\Delta = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst}\sigma_{ir}\sigma_{js}\sigma_{kt} - \frac{1}{6}\sigma\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}\sigma_{js}\sigma_{kt} - \frac{1}{6}\sigma\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rjt}\sigma_{ir}\sigma_{kt}$$

$$-\frac{1}{6}\sigma\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rsk}\sigma_{ir}\sigma_{js} + \frac{1}{6}\sigma^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijt}\sigma_{kt} + \frac{1}{6}\sigma^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}\sigma_{js}$$

$$+\frac{1}{6}\sigma^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rjk}\sigma_{ir} - \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}\sigma^3 = 0$$

$$\begin{cases} * \ \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}\sigma_{js}\sigma_{kt} = \Sigma_{ii} \\ * \ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijt} = 2\delta_{kt} \ , \ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{isk} = 2\delta_{js} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\sigma_{ij}| - \sigma\Sigma_{ii} + \frac{1}{3}\sigma^2\delta_{kt}\sigma_{kt} + \frac{1}{3}\sigma^2\delta_{js}\sigma_{js} + \frac{1}{3}\sigma^2\delta_{ir}\sigma_{ir} - \sigma^3 = 0$$

$$\Rightarrow |\sigma_{ij}| - \sigma\Sigma_{ii} + \sigma^2\sigma_{kk} - \sigma^3 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^3 - \sigma^2(\sigma_{kk}) + \sigma\Sigma_{ii} - |\sigma_{ij}| = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{kk} \\ I_2 = \Sigma_{kk} \\ I_3 = |\sigma_{ij}| \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0}$$

- σ_{kk} ، Σ_{kk} و $|\sigma_{ij}|$ نامتغیر هستند چون با تغییر دستگاه مختصات تغییر نمی‌کنند.

- اگر در یک نقطه تانسور تنش را داشته باشیم و محورهای مختصات را دوران دهیم، معادله مشخصه تغییر نمی‌کند یعنی تنش اصلی ثابت است.

(با تغییر دستگاه مختصات تنش‌های اصلی تغییر نمی‌کنند و ثابتند)

به متغیرهای P و Q :

$$P_1 = \sigma_{kk} \qquad Q_1 = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijt}\,\sigma_{kt}$$

$$P_2 = \sigma_{ij}\,\sigma_{ji} \qquad Q_2 = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ist}\,\sigma_{js}\,\sigma_{kt}$$

$$P_3 = \sigma_{ij}\,\sigma_{jk}\,\sigma_{ki} \qquad Q_3 = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{rst}\,\sigma_{ir}\,\sigma_{js}\,\sigma_{kt}$$

Q_1 ← قطر تنش‌ها

Q_2 ← دو برابر مجموع قطر کوفاکتورها

Q_3 ← 6 برابر دترمینان

$$Q_1 = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijt}\,\sigma_{kt} = 2\,\sigma_{kk} = 2P_1$$

$$Q_2 = (\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks})\,\sigma_{js}\,\sigma_{kt} = \sigma_{jj}\,\sigma_{kk} - \sigma_{jk}\,\sigma_{kj} = P_1^2 - P_2$$

$$Q_3 = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} \sigma_{ir}\,\sigma_{js}\,\sigma_{kt}$$

$$\Rightarrow Q_3 = \Big[\delta_{ir}(\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}) - \delta_{is}(\delta_{jr}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{kr})$$

$$+\,\delta_{it}(\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr})\Big]\,\sigma_{ir}\,\sigma_{js}\,\sigma_{kt}$$

$$\Rightarrow Q_3 = \sigma_{ii}\,\sigma_{jj}\,\sigma_{kk} - \sigma_{ii}\,\sigma_{jk}\,\sigma_{kj} - \sigma_{ij}\,\sigma_{ji}\,\sigma_{kk} + \sigma_{ik}\,\sigma_{ji}\,\sigma_{kj}$$

$$+\,\sigma_{ij}\,\sigma_{jk}\,\sigma_{ki} - \sigma_{ik}\,\sigma_{jj}\,\sigma_{ki} = P_1^3 - 3P_1P_2 + 2P_3$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{2}\,Q_1 = P_1 \quad ; \quad I_2 = \dfrac{1}{2}\,Q_2 = \dfrac{1}{2}(P_1^2 - P_2) \\[2ex] I_3 = \dfrac{1}{6}\,Q_3 = \dfrac{1}{6}(P_1^3 - 3P_1P_2 + 2P_3) \end{cases}$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \vec{n}^{(1)} \\ \sigma_2 \rightarrow \vec{n}^{(2)} \\ \sigma_3 \rightarrow \vec{n}^{(3)} \end{cases}$$

فرض : $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

چون دترمینان ضرایب را صفر کرده‌ایم

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma_1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\sigma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0$$

در نتیجه از دستگاه روبرو دو معادله بدست می‌آوریم. معادله سوم نیز $n_i n_i = 1$ می‌باشد.

می‌خواهیم ثابت کنیم $\vec{n}^{(1)}$ ، $\vec{n}^{(2)}$ و $\vec{n}^{(3)}$ برهم عمودند :

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij} n_j^{(1)} = \sigma_1 n_i^{(1)} & \xrightarrow{\times n_i^{(2)}} \\ \sigma_{ij} n_j^{(2)} = \sigma_2 n_i^{(2)} & \xrightarrow{\times n_i^{(1)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij} n_j^{(1)} n_i^{(2)} = \sigma_1 n_i^{(1)} n_i^{(2)} & (I) \\ \sigma_{ij} n_j^{(2)} n_i^{(1)} = \sigma_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)} & (II) \end{cases}$$

$$(I) - (II) \Rightarrow \underbrace{\sigma_{ij} n_j^{(1)} n_i^{(2)} - \sigma_{ij} n_j^{(2)} n_i^{(1)}}_{\sigma_{ij} n_i^{(1)} n_j^{(2)}} = (\sigma_1 - \sigma_2) n_i^{(1)} n_i^{(2)} = 0$$

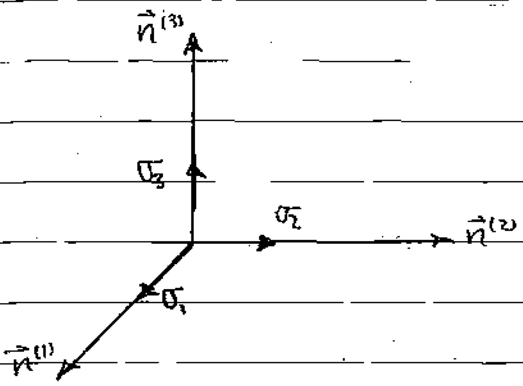
$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \vec{n}^{(1)} \perp \vec{n}^{(2)}$$

اگر $\sigma_1 = \sigma_2$ بود نمی‌توانستیم عمود بودن n ها را نتیجه بگیریم.

به طور مشابه برای $(\vec{n}^{(3)}, \vec{n}^{(2)})$ و $(\vec{n}^{(3)}, \vec{n}^{(1)})$ خواهیم داشت :

$$\sigma_2 \neq \sigma_3 \Rightarrow \vec{n}^{(2)} \perp \vec{n}^{(3)}$$

$$\sigma_1 \neq \sigma_3 \Rightarrow \vec{n}^{(1)} \perp \vec{\sigma}^{(3)}$$



$$\sigma_{ij}\, n_j = \sigma\, n_i$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}\, n_j^{(1)} = \sigma_i\, n_i^{(1)} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

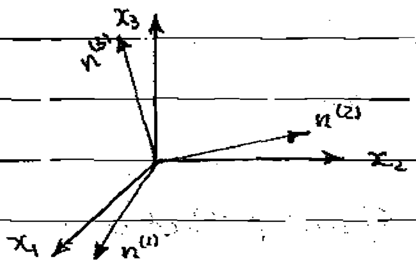
$$I_2 = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^3 \;(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\,\sigma^2 + (\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3+\sigma_1\sigma_2)\,\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

◀ اگر تانسور تنش را در دستگاه‌های مختصات مختلف داشته باشیم
یک دستگاه مختصات وجود دارد که در آن مؤلفه‌های محوری تنش
وجود دارند و تنش‌های برشی صفرند.



$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \hline \vec{n}^{(1)} & n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ \vec{n}^{(2)} & n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ \vec{n}^{(3)} & n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{array} = [n]$$

$$\sigma'_{ij} = a_{ir}\, a_{js}\, \sigma_{rs}$$

$$[\sigma'] = [a][\sigma][a]^T$$

$$\begin{cases} [\sigma'] = [n][\sigma][n]^T \\ [\sigma] = [n]^T[\sigma'][n] \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

◄ می‌خواهیم ثابت کنیم که σها حقیقی‌اند.

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i$$

ابتدا فرض می‌کنیم σها حقیقی نباشند دیگر nها هم حقیقی نخواهند بود.

$$\begin{cases} n_i = \alpha_i + i\beta_i & n_i^* = \alpha_i - i\beta_i \\ n_j = \alpha_j + i\beta_j & n_j^* = \alpha_j - i\beta_j \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \xrightarrow{\times n_i^*} \sigma_{ij} n_i^* n_j = \sigma n_i n_i^*$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma_{ij} n_i^* n_j + \frac{1}{2}\sigma_{ij} n_j^* n_i = \sigma(\alpha_i + i\beta_i)(\alpha_i - i\beta_i)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left[(\alpha_i - i\beta_i)(\alpha_j + i\beta_j) + (\alpha_j - i\beta_j)(\alpha_i + i\beta_i)\right] = \sigma(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left[2\alpha_i\alpha_j - i\beta_i\alpha_j + i\alpha_i\beta_j + 2\beta_i\beta_j + \alpha_i\alpha_j - i\alpha_i\beta_j + i\alpha_i\beta_j + \beta_i\beta_j\right]$$

$$= \sigma(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left[2\alpha_i\alpha_j + 2\beta_i\beta_j\right] = \sigma(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sigma_{ij}}_{\text{عدد حقیقی}} \underbrace{(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j)}_{\text{عدد حقیقی}} = \sigma \underbrace{(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)}_{\text{عدد حقیقی}}$$

⇐ σ باید حتماً عدد حقیقی باشد و فرض اولیه نادرست است .

حداکثر مؤلفهٔ عمودی بردار تنش :

$\mathrm{Max}(N)$

$$N = \sigma_{ij} n_i n_j \quad , \quad \underbrace{n_i n_i = 1}_{\text{قید مسئله}}$$

از قضیهٔ لاگرانژ استفاده می‌کنیم :

$$F = \sigma_{ij} n_i n_j - \sigma(n_i n_i - 1)$$

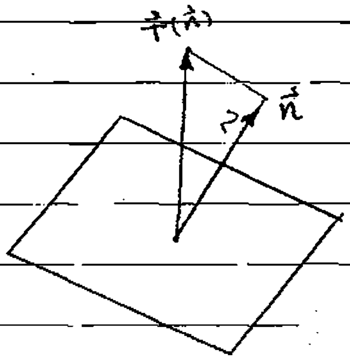
$$\frac{\partial F}{\partial n_k} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij}\delta_{ik} n_j + \sigma_{ij} n_i \delta_{jk} - \sigma(\delta_{ik} n_i + n_i \delta_{ik}) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{kj} n_j + \sigma_{ki} n_i - \sigma(2n_k) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sigma_{kj} n_j - 2\sigma n_k = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} n_j - \sigma n_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) n_j = 0}$$

← همان معادلهٔ مشخصه بدست می‌آید .



ما بینهایت صفحه داریم که تصویر $\vec{T}(\vec{n})$ بر روی

بردار عمود بر صفحه $\vec{n}$ مقدارهای مختلفی دارد (N) .

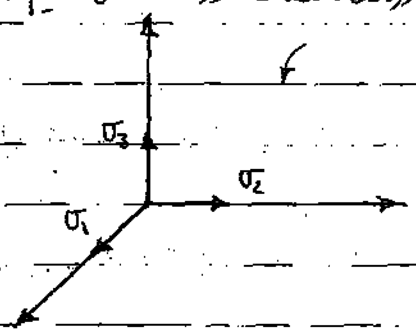
حداکثر مقدار N در حالتی رخ می‌دهد که $\vec{T}$ در راستای

بردار عمود بر صفحه باشد ← حداکثر مؤلفهٔ عمودی بردار تنش در صفحهٔ اصلی رخ می‌دهد.

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (۳ معیار برای تنش بدست خواهد آمد)

حداکثر مؤلفهٔ برشی بردار تنش :

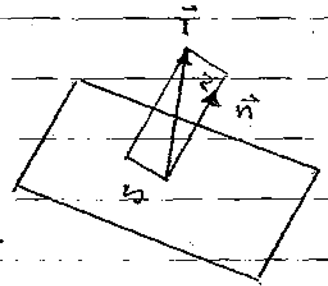
در دستگاه مختصات محورهای اصلی هستیم.



$$N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad \begin{cases} T_1 = \sigma_1 n_1 \\ T_2 = \sigma_2 n_2 \\ T_3 = \sigma_3 n_3 \end{cases}$$

$$|\vec{T}|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$



ولی همیشه : $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$$S^2 = |\vec{T}|^2 - N^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad S^2 = n_1^2 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_2^2 n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_3^2 n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

از تعریف لاگرانژ استفاده می‌کنیم :

$$F = S^2 - \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1)$$

$$= n_1^2 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_2^2 n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_3^2 n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = 2 n_1 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2 n_1 n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2 n_1 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_2} = 2 n_2 n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2 n_2 n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2 n_2 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_3} = 2n_3 n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2n_3 n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2n_3 \lambda = 0$$

← می‌دانیم که n_1، n_2 و n_3 با هم صفر نمی‌شوند

$n_1 = 0 \;,\; n_2 = 0 \;,\; n_3 = \pm 1 \;\rightarrow\; N = \sigma_3 \;,\; S = 0 \;,\; \lambda = 0$

$n_1 = 0 \;,\; n_2 = \pm 1 \;,\; n_3 = 0 \;\rightarrow\; N = \sigma_2 \;,\; S = 0 \;,\; \lambda = 0$

$n_1 = \pm 1 \;,\; n_2 = 0 \;,\; n_3 = 0 \;\rightarrow\; N = \sigma_1 \;,\; S = 0 \;,\; \lambda = 0$

در این حالت مقدار مینیمم مؤلفه برشی بدست می‌آید. (چون درایه‌ای از روابط اکسترمم حاصل می‌شود)

حال به دنبال مقدار max می‌رویم:

شماره صفحه

$1 \; * \; n_1 = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} n_2^2 = n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow n_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;,\; n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; N = \frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2} \;,\; S^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}$$

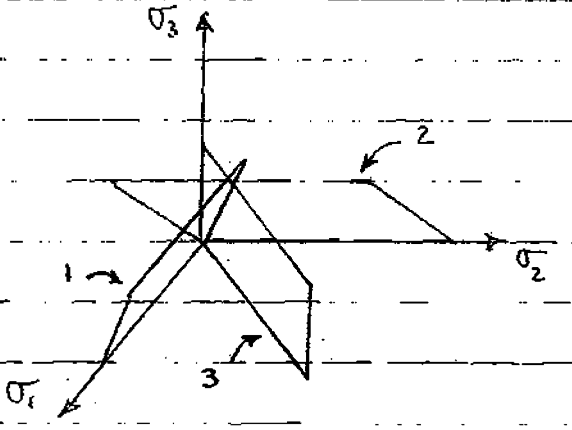
$$2 \; * \; n_2 = 0 \;\Rightarrow\; n_1 = n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; N = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \;,\; S^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}$$

$$3 \; * \; n_3 = 0 \;\Rightarrow\; n_2 = n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; N = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \;,\; S^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2}$$

← اگر n_1، n_2 و n_3 هر سه غیرصفر باشند دیگر به جواب نمی‌رسیم. یعنی که این صفحه‌ای با چنین nها امکان‌پذیر نیست.



$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

تنش min و max برشی

$$S_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} - \tau_{min}$$

$$S_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_{max}$$

$$S_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \tau_{int}$$

◄ دوایر موهر

$$\begin{cases} N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ S^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

◄ مجهولات مسئله را: n_1^2 ، n_2^2 و n_3^2 در نظر می‌گیریم و دستگاه معادله سه مجهول را حل می‌کنیم:

$$n_1^2 = \frac{S^2 + (N - \sigma_2)(N - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \qquad (\mathrm{I})$$

$$n_2^2 = \frac{S^2 + (N - \sigma_1)(N - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \qquad (\mathrm{II})$$

$$n_3^2 = \frac{S^2 + (N - \sigma_1)(N - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \qquad (\mathrm{III})$$

$$(\mathrm{I}) \rightarrow S^2 + (N^2 - \sigma_2 N - \sigma_3 N + \sigma_2\sigma_3) = n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\Rightarrow S^2 + \left(N - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \sigma_2\sigma_3 = n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

* $(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2})^2 - \sigma_2\sigma_3 = \frac{-(\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\sigma_2\sigma_3)}{4} - \frac{-4\sigma_2\sigma_3}{4}$

$= -(\frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\sigma_2\sigma_3}{2})^2 = (\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2})^2$

$\Rightarrow S^2 + (N - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2})^2 = (\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2})^2 + n_1^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)$

معادلهٔ دایره‌ای است به مرکز $\left|\begin{matrix}\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$

شعاع min دایره : $(R_1)_{min} = (\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2})$

$\Rightarrow S^2 + (N - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2})^2 = (R_1)^2_{min} = (\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2})^2$

لـ هر N و S دیگری خارج از این دایره خواهد بود. چون شعاع این دایره min است.

(II) $\rightarrow S^2 + (N - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2})^2 - (\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2})^2 + \sigma_1\sigma_3 = n_2^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)$

$\Rightarrow S^2 + (N - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2})^2 - (\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2})^2 = n_2^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)$

$\Rightarrow S^2 + (N - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2})^2 = (\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2})^2 + n_2^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)$

معادلهٔ دایره‌ای است به مرکز $\left|\begin{matrix}\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$

شعاع max دایره : $(R_2)_{max} = (\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2})$

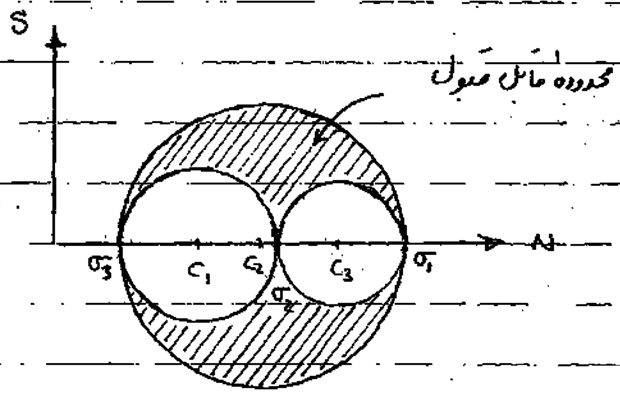
$\Rightarrow S^2 + (N - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2})^2 = (R_2)^2_{max} = (\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2})^2$

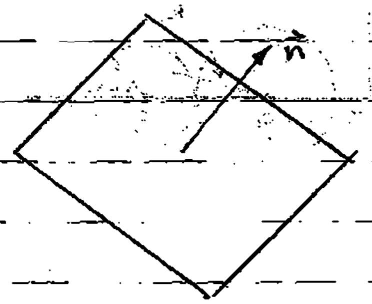
لـ هر N و S دیگری داخل این دایره خواهد بود. چون شعاع این دایره max است.

$$(III) \rightarrow \quad S^2 + \left(N - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 + n_3^2(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)$$

شعاع min دایره : $(R_3)_{min} = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)$

← هر نوع تنش دیگری خارج این دایره خواهد بود.





$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

$n_1 = \cos\alpha \; , \; n_2 = \cos\beta \; , \; n_3 = \cos\gamma$

← در دستگاه مختصات اصلی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ S^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \end{cases}$$

← اگر تنش های S و N را محاسبه کنیم ، در دستگاه N و S یک نقطه خواهد بود که حتماً در محدوده حالت قابل قبول قرار می گیرد.

← حال مقادیر n را در روابط (I) ، (II) و (III) جایگزین می کنیم :

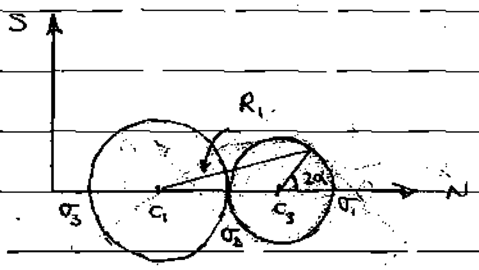
$$(\mathrm{I}):\ S^2+\left(N-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2=\frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\sigma_2\sigma_3}{4}+\underbrace{\cos^2\alpha}_{\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2)$$

$$\Rightarrow S^2+\left(N-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2=\frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\cancel{\sigma_2}\sigma_3}{4}+\frac{2\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_2-2\sigma_1\sigma_3+2\cancel{\sigma_2}\sigma_3}{4}$$

$$+\,2(\cos 2\alpha)\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S^2+\left(N-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)\cos 2\alpha=R_1^2$$

شعاع دایره اول



$$\begin{cases} C_1:\ \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} \\ C_3:\ \frac{\sigma_1+\sigma_2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_3-C_1:\ \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

پاره خط نشان داده شده در شکل است $R_1 \Leftarrow$

S و N در محیط دایره‌ای قرار دارند که به مرکز C_1 و شعاع R_1 می‌باشد

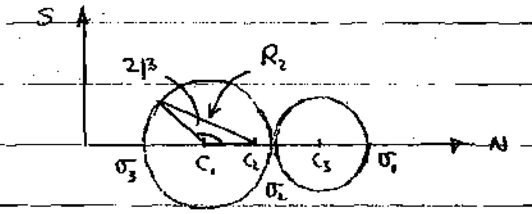
$$(\mathrm{II}):\ S^2+\left(N-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(1+\cos 2\beta)(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)$$

$$\Rightarrow S^2+\left(N-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2=\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_3}{4}+\frac{\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3}{2}$$

$$+\,\frac{1}{2}\cos 2\beta(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)$$

$$\Rightarrow S^2+\left(N-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2-2\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)\cos 2\beta=R_2^2$$

شعاع دایره دوم



$$C_1:\ \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\qquad C_2:\ \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\quad\Rightarrow\quad C_2-C_1:\ \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

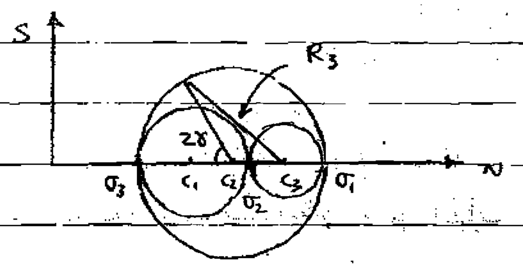
باید دایره‌ای به مرکز C_2 و شعاع R_2 رسم شود. محل تلاقی این دایره با دایرهٔ قبل نقطهٔ مربوط به تنش صفحهٔ مورد نظر می‌باشد. دایرهٔ سوم نیز حتماً از این نقطه می‌گذرد.

$$(III):\ S^2+\left(N-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2}{4}+\frac{1}{2}(1+\cos 2\gamma)(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)$$

$$\Rightarrow S^2+\left(N-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2}{4}+\frac{\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2}{2}$$

$$+2\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)\cos 2\gamma$$

$$\Rightarrow S^2+\left(N-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)\cos 2\gamma=R_3^2$$



$$C_2:\ \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\qquad C_3:\ \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\quad\Rightarrow\quad C_3-C_2:\ \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$$

دایرهٔ سوم به مرکز C_3 و شعاع R_3 می‌باشد. این دایره نیز از نقطهٔ تلاقی دو دایرهٔ قبل می‌گذرد. چون طبق رابطهٔ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ با مشخص بودن α و β، می‌توان γ را بدست آورد. پس γ هر مقدار دلخواهی نخواهد داشت و مقداری دارد که دایرهٔ سوم از نقطهٔ تلاقی آن دو دایره بگذرد.

◄ تنش انحراف آور

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + p\,\delta_{ij} \quad ; \quad p = \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

S_{ij} : تنش انحراف آور

p : تنش هیدرواستاتیک

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}}_{\text{تغییر شکل بدون تغییر حجم}} + \underbrace{\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}}_{\text{تغییر حجم}}$$

$$S_{11} = \sigma_{11} - p \qquad S_{12} = \sigma_{12}$$

$$S_{22} = \sigma_{22} - p \qquad S_{13} = \sigma_{13}$$

$$S_{33} = \sigma_{33} - p \qquad S_{23} = \sigma_{23}$$

◄ در دستگاه مختصات محورهای اصلی داریم :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

◄ دستگاه مختصات اصلی تنش انحراف آور با دستگاه مختصات اصلی تنش یکسان است.

تنش‌های انحراف آور اصلی

$$\begin{cases} S_1 = \sigma_1 - p \\ S_2 = \sigma_2 - p \\ S_3 = \sigma_3 - p \end{cases}$$

◄ حال شکل ماتریسی را به صورت اندیسی نشان می‌دهیم :

$$\sigma_{ij}\, n_j = \sigma\, n_i \;\Rightarrow\; (\sigma_{ij} - \sigma\,\delta_{ij})\, n_j = 0$$

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \vec{n}^{(1)} \\ \sigma_2 \rightarrow \vec{n}^{(2)} \\ \sigma_3 \rightarrow \vec{n}^{(3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\sigma_{ij} - p\delta_{ij} + p\delta_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0$$

$$\Rightarrow |\underbrace{(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})}_{S_{ij}} - \underbrace{(\sigma - p)}_{S}\delta_{ij}| = 0$$

$$\Rightarrow |S_{ij} - S\delta_{ij}| = 0 \quad \begin{cases} S_1 = \sigma_1 - p \rightarrow \vec{n}^{(1)} \\ S_2 = \sigma_2 - p \rightarrow \vec{n}^{(2)} \\ S_3 = \sigma_3 - p \rightarrow \vec{n}^{(3)} \end{cases}$$

محورهای اصلی و صفحات اصلی تنش انحرافی با تنش یکسان است

معادله مشخصه تنش انحرافی : $S^3 - J_1 S^2 - J_2 S - J_3 = 0$

$$J_1 = \sigma_{11} - p + \sigma_{22} - p + \sigma_{33} - p = 0 \Rightarrow J_1 = S_{kk} = 0$$

⇐ اگر تنشی داشته باشیم که مجموع عناصر روی قطر آن برابر صفر شود تنش انحرافی است

و تحت این تنش تغییر حجم نخواهیم داشت.

$$J_1 = S_{kk} = 0$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}Q_2 = \frac{1}{2}(P_1^2 - P_2) = \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$$

$$P_1 = S_{kk} \qquad P_2 = S_{ij}S_{ij}$$

$$J_3 = \frac{1}{6}Q_3 = \frac{1}{6}(P_1^3 - 3P_1P_2 + 2P_3) = \frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki}$$

$$P_3 = S_{ij}S_{jk}S_{ki}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - \frac{1}{2}\left[(S_1 + S_2 + S_3)^2 - 2S_1S_2 - 2S_2S_3 - 2S_1S_3\right]$$

$$J_2 = -S_1S_2 - S_2S_3 - S_1S_3 = -\left[(\sigma_1 - p)(\sigma_2 - p) + (\sigma_2 - p)(\sigma_3 - p) + (\sigma_1 - p)(\sigma_3 - p)\right]$$

$$J_2 = -\left[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 - 2p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3p^2\right]$$

$$J_2 = -\left[I_2 - \frac{2I_1^2}{3} + \frac{I_1^2}{3}\right] = \frac{I_1^2}{3} - I_2$$

رابطه بدست آمده برای J_2 در دستگاه اصلی می‌باشد. حال اگر در دستگاه غیراصلی باشیم، داریم:

$$J_2 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{3} - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2)$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{11}\sigma_{33} - 3\sigma_{11}\sigma_{22}$$
$$- 3\sigma_{22}\sigma_{33} - 3\sigma_{11}\sigma_{33}) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$$

$$J_2 = \frac{1}{6}(2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{22}^2 + 2\sigma_{33}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22} - 2\sigma_{22}\sigma_{33} - 2\sigma_{11}\sigma_{33})$$
$$+ \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$$

در دستگاه اصلی داریم $\Rightarrow$ $J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$

$$J_2 = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2\right]$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \Rightarrow \begin{cases} \tau_{max}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \tau_{min}^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \tau_{int}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_2 = \frac{2}{3}\left[\tau_{max}^2 + \tau_{int}^2 + \tau_{min}^2\right]$$

معیار J_2: اگر مقدار بدست آمده برای J_2 از رابطهٔ بالا از مقدار مشخصی بیشتر شود، می‌گوییم جسم به حالت خمیری رسیده است. (معیار J_2 همان معیار ون‌مایزز است)

در دستگاه مختصات اصلی J_2 به صورت یک رویه است که اگر در فضای بین رویه باشیم جسم در حالت الاستیک است و اگر به سطح رویه برسیم جسم پلاستیک می‌شود.

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} = \frac{1}{3}\left(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3\right)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\left[\underbrace{\cancel{(S_1 + S_2 + S_3)}}_{0}{}^3 - 3S_1^2(S_2+S_3) - 3S_2^2(S_1+S_3) - 3S_3^2(S_1+S_2) - 6S_1S_2S_3\right]$$

$$* \quad \frac{1}{3}\left(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3\right) = \frac{1}{3}\left[3S_1^3 + 3S_2^3 + 3S_3^3 - 6S_1S_2S_3\right]$$

$$= \left(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3\right) - 2S_1S_2S_3$$

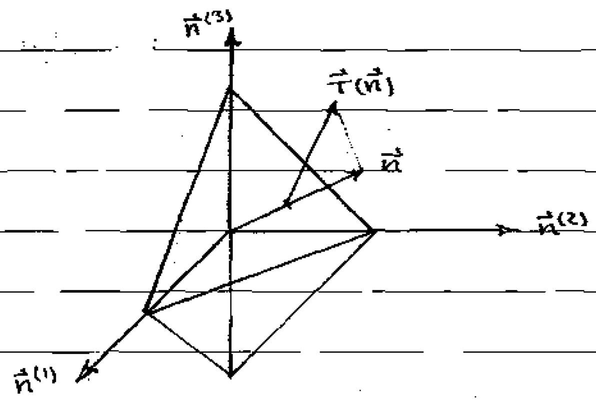
$$\Rightarrow \frac{2}{3}\left(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3\right) = 2S_1S_2S_3 \Rightarrow \frac{1}{3}\left(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3\right) = S_1S_2S_3$$

$$J_3 = S_1S_2S_3 = (\sigma_1 - p)(\sigma_2 - p)(\sigma_3 - p) = (\sigma_1\sigma_2 - p\sigma_1 - p\sigma_2 + p^2)(\sigma_3 - p)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - p(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) + p^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - p^3$$

$$J_3 = I_3 - \frac{I_1}{3} I_2 + \frac{I_1^2}{9}(I_1) - \frac{I_1^3}{27} \Rightarrow J_3 = I_3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3$$

◄ تنش هشت وجهی (Octahedral Stress)



در دستگاه مختصات اصلی، صفحه‌ای درنظر می‌گیریم که بردار عمود بر آن با محورهای مختصات زاویه مساوی می‌سازد.

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

درکل، هشت صفحه می‌توان به این صورت درنظر گرفت که بردار عمود بر آنها به صورت زیر خواهد بود.

⇐ یک هشت وجهی تشکیل خواهد شد.

n_1	n_2	n_3
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

$$N = \vec{n} \cdot \vec{T}(\vec{n}) = n_i T_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\boxed{N = \sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = p}$$

تنش عمودی هشت وجهی

$$\vec{n}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

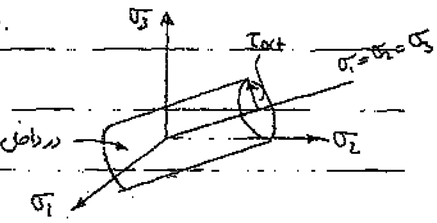
$$T_i = \sigma_{ij} n_j \rightarrow \begin{cases} T_1 = \sigma_1 n_1 \\ T_2 = \sigma_2 n_2 \\ T_3 = \sigma_3 n_3 \end{cases}$$

$$\vec{T}(\vec{n}) = T_1 \vec{e}_1 + T_2 \vec{e}_2 + T_3 \vec{e}_3 = \sigma_1 n_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 n_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 n_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{N} = N\vec{n} = p\vec{n} = p(n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3)$$

$$\vec{S} = \vec{T}(\vec{n}) - \vec{N} = \sigma_1 n_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 n_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 n_3 \vec{e}_3 - n_1 p \vec{e}_1 - n_2 p \vec{e}_2 - n_3 p \vec{e}_3$$

$$\vec{S} = (\sigma_1 - p) n_1 \vec{e}_1 + (\sigma_2 - p) n_2 \vec{e}_2 + (\sigma_3 - p) n_3 \vec{e}_3$$



$$\vec{S} = S_1 n_1 \vec{e}_1 + S_2 n_2 \vec{e}_2 + S_3 n_3 \vec{e}_3$$

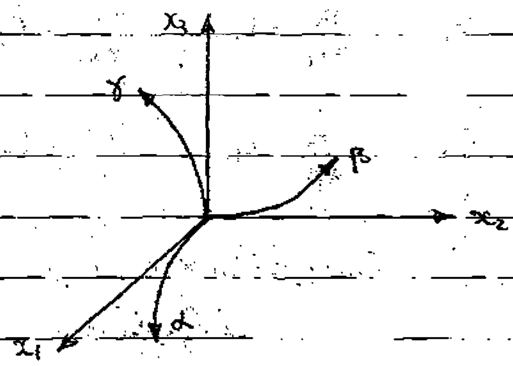
$$|\vec{S}|^2 = \tau_{oct}^2 = S_1^2 n_1^2 + S_2^2 n_2^2 + S_3^2 n_3^2 = \frac{1}{3}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$$

$$\Rightarrow \tau_{oct}^2 = \frac{2}{3} J_2 = \frac{4}{9}(\tau_{max}^2 + \tau_{int}^2 + \tau_{min}^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{oct} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\tau_{max}^2 + \tau_{int}^2 + \tau_{min}^2}\right)}$$ تنش برشی هشت وجهی

◄ دستگاه مختصات منحنی الخط

در اینجا فرض می‌کنیم که دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد باشد یعنی در هر نقطه محورهای مختصات بر هم عمودند.



صفحه مختصات $\rightarrow x_1 = cte$

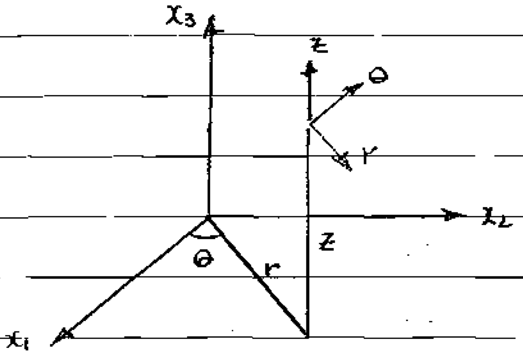
محور مختصات $\rightarrow \begin{cases} x_1 = cte \\ x_2 = cte \end{cases}$

صفحه مختصات سطح را به ما نشان می‌دهد $x_1 = cte$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3) \\ \beta = \beta(x_1, x_2, x_3) \\ \gamma = \gamma(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

حال اگر صفحات منحنی الخط در نظر بگیریم :

برای مثال، مختصات استوانه‌ای را در نظر می‌گیریم:



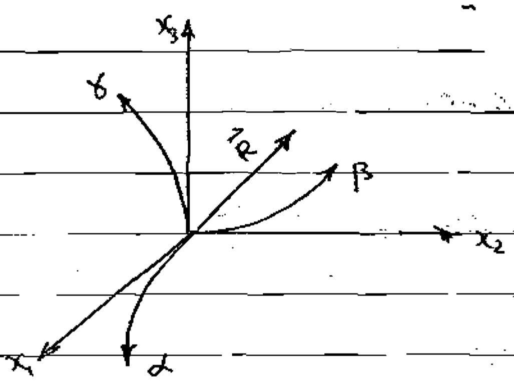
$$r = r(x_1, x_2, x_3)$$
$$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3)$$
$$z = z(x_1, x_2, x_3)$$

برای $\alpha = Cte$ یک رویه خواهیم داشت ولی برای $x_1 = Cte$ یک صفحه مسطح بدست می‌آوریم

برای هر x_1 ، x_2 ، x_3 یک α ، β و γ داریم و به ازای هر α ، β و γ هم یک x_1 ، x_2 ، x_3 خواهیم داشت. یعنی رابطه x_1 ، x_2 ، x_3 با α ، β و γ یک به یک است البته اگر ژاکوبین خلاف صفر باشد.

$$\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3) \qquad x_1 = x_1(\alpha, \beta, \gamma)$$
$$\beta = \beta(x_1, x_2, x_3) \qquad x_2 = x_2(\alpha, \beta, \gamma)$$
$$\gamma = \gamma(x_1, x_2, x_3) \qquad x_3 = x_3(\alpha, \beta, \gamma)$$

دستگاه کارتزین: $\vec{R} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$



$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial x_1} = \vec{e}_1 \qquad \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_2} = \vec{e}_2 \qquad \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_3} = \vec{e}_3$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha} = \vec{E}_\alpha \qquad \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta} = \vec{E}_\beta \qquad \frac{\partial \vec{R}}{\partial \gamma} = \vec{E}_\gamma$$

برای اینکه β و γ ثابت است
و α تغییر می‌کند

$$\vec{E}_\alpha = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}\vec{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\vec{e}_3$$

$$\vec{E}_\beta = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta} = \frac{\partial x_1}{\partial \beta}\vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \beta}\vec{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \beta}\vec{e}_3$$

$$\vec{E}_\gamma = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \gamma} = \frac{\partial x_1}{\partial \gamma}\vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \gamma}\vec{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \gamma}\vec{e}_3$$

$$\begin{cases} h_\alpha = |\vec{E}_\alpha| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\right)^2} \\ h_\beta = |\vec{E}_\beta| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \beta}\right)^2} \\ h_\gamma = |\vec{E}_\gamma| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \gamma}\right)^2} \end{cases}$$

$$\vec{E}_\alpha = h_\alpha \vec{e}_\alpha \quad , \quad \vec{E}_\beta = h_\beta \vec{e}_\beta \quad , \quad \vec{E}_\gamma = h_\gamma \vec{e}_\gamma$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_\beta = \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial x_2}{\partial \beta}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial x_3}{\partial \beta}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_\gamma = \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial x_1}{\partial \gamma}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial \gamma}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial x_3}{\partial \gamma}\vec{e}_3 \end{cases}$$

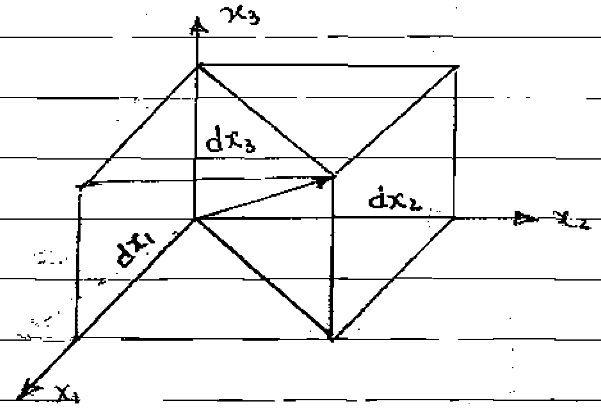
	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_\alpha$	$\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}$	$\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}$	$\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial x_3}{\partial \alpha}$
$\vec{e}_\beta$	$\frac{1}{h_\beta}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}$	$\frac{1}{h_\beta}\frac{\partial x_2}{\partial \beta}$	$\frac{1}{h_\beta}\frac{\partial x_3}{\partial \beta}$
$\vec{e}_\gamma$	$\frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial x_1}{\partial \gamma}$	$\frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial \gamma}$	$\frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial x_3}{\partial \gamma}$

ماتریس تبدیل

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}|J| \neq 0$$

(باید دترمینان ماتریس تبدیل مخالف صفر باشد)

$$\vec{R} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$



$$d\vec{R} = dx_1\,\vec{e}_1 + dx_2\,\vec{e}_2 + dx_3\,\vec{e}_3$$

$$d\vec{A}_1 = (dx_2\vec{e}_2)\times(dx_3\vec{e}_3)$$
$$= dx_2\,dx_3\,\vec{e}_1$$

$$d\vec{A}_2 = dx_3\vec{e}_3 \times dx_1\vec{e}_1 = dx_1\,dx_3\,\vec{e}_2$$

$$d\vec{A}_3 = dx_1\vec{e}_1 \times dx_2\vec{e}_2 = dx_1\,dx_2\,\vec{e}_3$$

$$d\vec{R} = \frac{\partial\vec{R}}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\vec{R}}{\partial\beta}\,d\beta + \frac{\partial\vec{R}}{\partial\gamma}\,d\gamma$$ ← در دستگاه منحنی الخط

چون دستگاه متعامد است بر هم عمودند
$$\begin{cases} \vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta = \vec{e}_\gamma \\ \vec{e}_\beta \times \vec{e}_\gamma = \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\gamma \times \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\beta \end{cases}$$

$$d\vec{A}_\alpha = \frac{\partial\vec{R}}{\partial\beta} \times \frac{\partial\vec{R}}{\partial\gamma}\,d\beta\,d\gamma = (h_\beta\vec{e}_\beta \times h_\gamma\vec{e}_\gamma)\,d\beta\,d\gamma$$

$$\Rightarrow d\vec{A}_\alpha = \underbrace{h_\beta h_\gamma}_{\text{ضریب مقیاس}}\,d\beta\,d\gamma\,\vec{e}_\alpha$$

جزء مساحت عمود بر $\vec{e}_\alpha$ ضریب مقیاس

$$d\vec{A}_\beta = h_\alpha h_\gamma\,d\alpha\,d\gamma\,\vec{e}_\beta$$

$$d\vec{A}_\gamma = h_\alpha h_\beta\,d\alpha\,d\beta\,\vec{e}_\gamma$$ که ضریب مقیاس در دستگاه دکارتی ۱ است

◄ بدست آوردن جزء حجم در دستگاه کارتزین :

$$dV = (dx_1\vec{e}_1 \times dx_2\vec{e}_2) \cdot dx_3\vec{e}_3 = dx_1 dx_2 dx_3$$

◄ جزء حجم در دستگاه منحنی الخط

$$dV = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha} d\alpha \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta} d\beta\right) \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \gamma} d\gamma$$

$$= h_\alpha h_\beta h_\gamma \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \left[\underbrace{(\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta) \cdot \vec{e}_\gamma}_{=1}\right]$$

$$\Rightarrow dV = h_\alpha h_\beta h_\gamma \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \beta} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta} & \frac{\partial x_3}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \gamma} & \frac{\partial x_2}{\partial \gamma} & \frac{\partial x_3}{\partial \gamma} \end{vmatrix}}_{J} d\alpha \, d\beta \, d\gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{dV = J \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma} \qquad \Rightarrow J = h_\alpha h_\beta h_\gamma$$

◄ جزء حجم مثبت و مخالف صفر است در نتیجه باید $J>0$ باشد

اگر $J\leq 0$ ← دستگاه مختصات منحنی الخط قابل قبول نخواهد بود.

بنابراین اگر در مسئله‌ای گفته شود که قابل قبول بودن دستگاه منحنی الخط را بررسی کنید باید J آن را محاسبه نموده و نشان دهیم که $J>0$ می‌باشد

◄ کمیت‌های برداری مورد نیاز را در دستگاه مختصات منحنی الخط بدست می‌آوریم :

گرادیان

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\vec{e}_3$$

$$\vec{\nabla}\varphi = A_\alpha \vec{e}_\alpha + A_\beta \vec{e}_\beta + A_\gamma \vec{e}_\gamma$$

$$A_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\right) = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$$

$$A_\beta = \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \quad ; \quad A_\gamma = \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\vec{e}_\beta + \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\vec{e}_\gamma}$$

$$* \quad \vec{\nabla}\alpha = \frac{\vec{e}_\alpha}{h_\alpha} \quad ; \quad \vec{\nabla}\beta = \frac{\vec{e}_\beta}{h_\beta} \quad ; \quad \vec{\nabla}\gamma = \frac{\vec{e}_\gamma}{h_\gamma}$$

$$* \quad \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\alpha = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{e}_\alpha}{h_\alpha}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{e}_\beta}{h_\beta}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{e}_\gamma}{h_\gamma}\right) = 0$$

$$* \quad (\vec{\nabla}\alpha)\times(\vec{\nabla}\beta) = \frac{\vec{e}_\alpha}{h_\alpha}\times\frac{\vec{e}_\beta}{h_\beta} = \frac{\vec{e}_\gamma}{h_\alpha h_\beta}$$

$$(\vec{\nabla}\alpha)\times(\vec{\nabla}\gamma) = \frac{\vec{e}_\beta}{h_\alpha h_\gamma} \quad ; \quad (\vec{\nabla}\beta)\times(\vec{\nabla}\gamma) = \frac{\vec{e}_\alpha}{h_\beta h_\gamma}$$

$$* \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{e}_\alpha}{h_\beta h_\gamma}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{e}_\beta}{h_\alpha h_\gamma}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{e}_\gamma}{h_\alpha h_\beta}\right) = 0$$

۲- دیورژانس

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(A_\alpha\vec{e}_\alpha) + \vec{\nabla}\cdot(A_\beta\vec{e}_\beta) + \vec{\nabla}\cdot(A_\gamma\vec{e}_\gamma)$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot(B\vec{A}) = (BA_i)_{,i} = B_{,i}A_i + BA_{i,i}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(B\vec{A}) = (\vec{\nabla}B)\cdot\vec{A} + B\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$\vec{A}$: تابع برداری　　B: تابع اسکالر

تابع پتانسیل عددی به هر نقطه در فضا یک عدد نسبت می‌دهد و تابع پتانسیل برداری به هر نقطه یک بردار

مانند دمای هوا در هر نقطه — مانند سرعت ذره در یک نقطه

$$\vec{\nabla}\cdot(A_\alpha \vec{e}_\alpha) = \vec{\nabla}\cdot\left(h_\beta h_\gamma A_\alpha \frac{\vec{e}_\alpha}{h_\beta h_\gamma}\right) = \left[\vec{\nabla}(h_\gamma h_\beta A_\alpha)\right]\cdot\frac{\vec{e}_\alpha}{h_\beta h_\gamma}$$

$$= \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_\beta h_\gamma A_\alpha)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(A_\beta \vec{e}_\beta) = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_\alpha h_\gamma A_\beta)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(A_\gamma \vec{e}_\gamma) = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_\alpha h_\beta A_\gamma)$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_\beta h_\gamma A_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h_\alpha h_\gamma A_\beta) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_\alpha h_\beta A_\gamma)\right]}$$

۳ـ لاپلاسین

$$\nabla^2\varphi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi)$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_\alpha h_\gamma}{h_\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right)\right]}$$

۴ـ کرل

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times(A_\alpha\vec{e}_\alpha + A_\beta\vec{e}_\beta + A_\gamma\vec{e}_\gamma)$$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i \times A_j\vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} A_{j,i}\,\vec{e}_k$$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\times(B\vec{A}) = \varepsilon_{ijk}(BA_j)_{,i}\,\vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}\left[B_{,i}A_j + BA_{j,i}\right]\vec{e}_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}B_{,i}A_j\vec{e}_k + BA_{j,i}\vec{e}_k\varepsilon_{ijk} = (\vec{\nabla}B)\times\vec{A} + B\,\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times(A_\alpha\vec{e}_\alpha) = \vec{\nabla}\times\left(h_\alpha A_\alpha\frac{\vec{e}_\alpha}{h_\alpha}\right) = \left[\vec{\nabla}(h_\alpha A_\alpha)\right]\times\frac{\vec{e}_\alpha}{h_\alpha}$$

$$= \left[\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_\alpha A_\alpha)\vec{e}_\alpha + \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_\alpha A_\alpha)\vec{e}_\beta + \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_\alpha A_\alpha)\vec{e}_\gamma\right]\times\frac{\vec{e}_\alpha}{h_\alpha}$$

$$= -\frac{1}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_\alpha A_\alpha)\,\vec{e}_\gamma + \frac{1}{h_\alpha h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_\alpha A_\alpha)\,\vec{e}_\beta$$

که با محاسبه $\vec{\nabla}\times(A_\beta\vec{e}_\beta)$ و $\vec{\nabla}\times(A_\gamma\vec{e}_\gamma)$ بطور مشابه خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\begin{vmatrix} h_\alpha\vec{e}_\alpha & h_\beta\vec{e}_\beta & h_\gamma\vec{e}_\gamma \\ \partial/\partial\alpha & \partial/\partial\beta & \partial/\partial\gamma \\ h_\alpha A_\alpha & h_\beta A_\beta & h_\gamma A_\gamma \end{vmatrix}$$

کمیتهای برداری در دستگاه استوانه‌ای

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = z \end{cases}$$

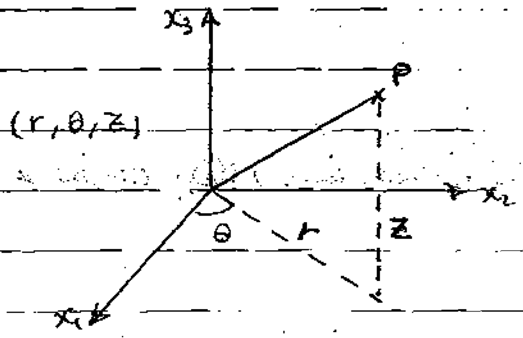
$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \cos\theta \ , \quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin\theta \ , \quad \frac{\partial x_3}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta} = -r\sin\theta \ , \quad \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = r\cos\theta \ , \quad \frac{\partial x_3}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial z} = 0 \ , \quad \frac{\partial x_2}{\partial z} = 0 \ , \quad \frac{\partial x_3}{\partial z} = 0$$

با توجه به رابطه $h_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \cdots}$ داریم:

$$h_r = 1 \ , \quad h_\theta = r \ , \quad h_z = 1$$



$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_z = \vec{e}_3 \end{cases}$$

۱- گرادیان

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\vec{e}_\beta + \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\vec{e}_\gamma$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

۲- دیورژانس

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(A_\alpha h_\beta h_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \beta}(A_\beta h_\alpha h_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(A_\gamma h_\alpha h_\beta)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(rA_z)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rA_z)$$

۳- لاپلاسین

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]$$

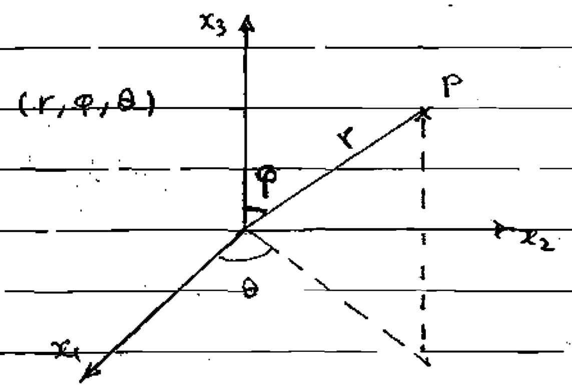
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

۴- کرل

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\begin{vmatrix} h_\alpha\vec{e}_\alpha & h_\beta\vec{e}_\beta & h_\gamma\vec{e}_\gamma \\ \partial/\partial\alpha & \partial/\partial\beta & \partial/\partial\gamma \\ h_\alpha A_\alpha & h_\beta A_\beta & h_\gamma A_\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial z \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

که عملگرهای برداری در دستگاه مختصات کروی



$$\begin{cases} x_1 = r\sin\varphi\cos\theta \\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta \\ x_3 = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \sin\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial x_3}{\partial r} = \cos\varphi \quad\rightarrow\quad h_r = 1$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial x_2}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial x_3}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi \quad\rightarrow\quad h_\varphi = r$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\theta} = -r\sin\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial x_2}{\partial\theta} = r\sin\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial x_3}{\partial\theta} = 0 \quad\rightarrow\quad h_\theta = r\sin\varphi$$

$$
\begin{cases}
\vec{e}_r = \sin\varphi \cos\theta \, \vec{e}_1 + \sin\varphi \sin\theta \, \vec{e}_2 + \cos\varphi \, \vec{e}_3 \\
\vec{e}_\varphi = r \cos\varphi \cos\theta \, \vec{e}_1 + r \cos\varphi \sin\theta \, \vec{e}_2 - r \sin\varphi \, \vec{e}_3 \\
\vec{e}_\theta = - r \sin\varphi \sin\theta \, \vec{e}_1 + r \sin\varphi \cos\theta \, \vec{e}_2
\end{cases}
$$

$$* \quad \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r\sin\varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$* \quad \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2 \sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi r \sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r A_\theta) \right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi \sin\varphi) + \frac{1}{r\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta)$$

$$* \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\varphi} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & r\sin\varphi \, \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ A_r & r A_\varphi & r\sin\varphi A_\theta \end{vmatrix}$$

◀ معادلات تعادل در دستگاه مختصات منحنی الخط

$$\oint_s \vec{T}(\vec{n}) \, ds + \int_v \vec{F} \, dv = 0$$

$$\vec{T}(\vec{n}) = n_i \vec{T}(\vec{e}_i) \quad \Rightarrow \quad \oint_s n_i \vec{T}(\vec{e}_i) \, ds + \int_v \vec{F} \, dv = 0$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه دیورژانس}} \int_v \left\{ [\vec{T}(\vec{e}_i)]_{,i} + \vec{F} \right\} dv = 0$$

$$* \quad \vec{\nabla}.(A\vec{B}) = (A B_i)_{,i} = A_{,i} B_i + A B_{i,i} = \vec{\nabla}A . \vec{B} + (\vec{\nabla}.\vec{B}) A$$

$$\vec{\nabla}.(A\vec{B}) = (\vec{\nabla}.\vec{B} + \vec{B}.\vec{\nabla}) A$$

این روابط در هر دستگاهی برقرار است

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = A_{i,i} = \vec{\nabla}\cdot(A_i\vec{e}_i) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i + \underbrace{\vec{e}_i\cdot\vec{\nabla}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}})A_i$$

$$\Rightarrow \oint_s n_i\,\vec{T}(\vec{e}_i)\,ds = \int_v \vec{\nabla}\cdot[\vec{T}(\vec{e}_i)\,\vec{e}_i]\,dv = \int_v (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i + \vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_i)\,dv$$

با اگر در معادله تعادل جایگزین کنیم، خواهیم داشت :

$$\int_v [(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i + \vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_i) + \vec{f}]\,dv = 0$$

انتگرال به حجم بستگی ندارد $\Leftarrow$ عبارت داخل کروشه $= 0$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i + \vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_i) + \vec{F} = 0$$

$$* \quad (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i + \vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_i) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\alpha + \vec{e}_\alpha\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_\alpha)$$

$$+ (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\beta + \vec{e}_\beta\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_\beta) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\gamma + \vec{e}_\gamma\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_\gamma)$$

$$* \quad \vec{f} = f_\alpha\vec{e}_\alpha + f_\beta\vec{e}_\beta + f_\gamma\vec{e}_\gamma$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_\alpha h_\beta h_\gamma) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A_\beta h_\alpha h_\gamma) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(A_\gamma h_\alpha h_\beta)\right]$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\alpha = \dfrac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(h_\beta h_\gamma) & (A_\alpha = 1,\ A_\beta = A_\gamma = 0) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\beta = \dfrac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\dfrac{\partial}{\partial\beta}(h_\alpha h_\gamma) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\gamma = \dfrac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\dfrac{\partial}{\partial\gamma}(h_\alpha h_\beta) \end{cases}$$

حال می‌خواهیم $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha}$ را بدست آوریم: $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha = 1$

$$\Rightarrow \vec{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_\alpha = 0 \Rightarrow \vec{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} = 0$$

یعنی $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha}$ در جهت α مؤلفه‌ای ندارد

$$\begin{cases} \vec{T}(\vec{e}_\alpha) = \sigma_{\alpha\alpha}\,\vec{e}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}\,\vec{e}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma}\,\vec{e}_\gamma \\ \vec{T}(\vec{e}_\beta) = \sigma_{\beta\alpha}\,\vec{e}_\alpha + \sigma_{\beta\beta}\,\vec{e}_\beta + \sigma_{\beta\gamma}\,\vec{e}_\gamma \\ \vec{T}(\vec{e}_\gamma) = \sigma_{\gamma\alpha}\,\vec{e}_\alpha + \sigma_{\gamma\beta}\,\vec{e}_\beta + \sigma_{\gamma\gamma}\,\vec{e}_\gamma \end{cases}$$

حال باید مشتق این سه بردار را نسبت به α، β و γ بدست آوریم

با جایگذاری روابط بدست آمده در معادلهٔ تعادل می‌توان معادلات تعادل را در حالت کلی بدست آورد

معادلات تعادل در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2 \\ \vec{e}_z = \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_r + \vec{e}_r\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_r) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\theta + \vec{e}_\theta\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_\theta) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_z + \vec{e}_z\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_z)$$

$$+ f_r\,\vec{e}_r + f_\theta\,\vec{e}_\theta + f_z\,\vec{e}_z = 0 \qquad \text{(معادلهٔ تعادل)}$$

$$* \ \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r) = \frac{1}{r} \quad ; \quad * \ \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(1) = 0$$

$$* \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\vec{T}(\vec{e}_r) + \frac{\partial}{\partial r}\left[\vec{T}(\vec{e}_r)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\vec{T}(\vec{e}_\theta)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\vec{T}(\vec{e}_z)\right]$$

$$+ f_r\vec{e}_r + f_\theta\vec{e}_\theta + f_z\vec{e}_z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{rr}}{r}\vec{e}_r + \frac{\sigma_{r\theta}}{r}\vec{e}_\theta + \frac{\sigma_{rz}}{r}\vec{e}_z + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\vec{e}_r + \sigma_{rr}\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r}} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}\vec{e}_\theta$$

$$+ \sigma_{r\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r}} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}\vec{e}_z + \sigma_{rz}\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta}\vec{e}_r + \frac{\sigma_{\theta r}}{r}\cancelto{\vec{e}_\theta}{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}}$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}\cancelto{-\vec{e}_r}{\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}\vec{e}_z + \frac{\sigma_{\theta z}}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\theta}}$$

$$+ \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}\vec{e}_r + \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\vec{e}_z + \sigma_{zr}\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial z}} + \sigma_{z\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial z}}$$

$$+ \sigma_{zz}\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial z}} + f_r\vec{e}_r + f_\theta\vec{e}_\theta + f_z\vec{e}_z = 0$$

حال می‌توانیم معادلات تعادل در جهت هریک از محورها را بنویسیم:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta}+\sigma_{\theta r}}{r} + f_\theta = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = 0$$

معادلات تعادل در دستگاه کروی

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\varphi\cos\theta \\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta \\ x_3 = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\varphi\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{e}_2 + \sin\varphi\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{e}_2 - \sin\varphi\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \vec{e}_\varphi \quad , \quad \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\vec{e}_r \quad , \quad \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = -\sin\varphi\sin\theta\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{e}_2 = \sin\varphi\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\theta} = -\sin\varphi\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\cos\theta\,\vec{e}_2 = \cos\varphi\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\cos\theta\,\vec{e}_1 - \sin\theta\,\vec{e}_2 = -\sin\varphi\,\vec{e}_r - \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

معادله تعادل: $(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_r + \vec{e}_r\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_r) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_\varphi)$

$+ (\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\theta + \vec{e}_\theta\cdot\vec{\nabla})\,\vec{T}(\vec{e}_\theta) + \vec{F} = 0$

$$* \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2\sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi r\sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta r)\right]$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_r = \frac{2}{r} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r\,tg\varphi} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_\theta = 0$$

با جایگذاری در معادله تعادل خواهیم داشت :

$$\frac{2}{r}\vec{T}(\vec{e}_r) + \frac{\partial}{\partial r}\left[\vec{T}(\vec{e}_r)\right] + \frac{1}{r\,tg\varphi}\vec{T}(\vec{e}_\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\vec{T}(\vec{e}_\varphi)\right]$$

$$+ \frac{1}{r\,Sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\vec{T}(\vec{e}_\theta)\right] + \vec{f} = 0$$

$$* \quad \vec{T}(\vec{e}_r) = \sigma_{rr}\vec{e}_r + \sigma_{r\varphi}\vec{e}_\varphi + \sigma_{r\theta}\vec{e}_\theta$$

$$* \quad \vec{T}(\vec{e}_\varphi) = \sigma_{\varphi r}\vec{e}_r + \sigma_{\varphi\varphi}\vec{e}_\varphi + \sigma_{\varphi\theta}\vec{e}_\theta$$

$$* \quad \vec{T}(\vec{e}_\theta) = \sigma_{\theta r}\vec{e}_r + \sigma_{\theta\varphi}\vec{e}_\varphi + \sigma_{\theta\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\sigma_{rr}}{r}\vec{e}_r + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r}\vec{e}_\varphi + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}\vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{\sigma_{\varphi r}}{r\,tg\varphi}\vec{e}_r + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r\,tg\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\sigma_{\varphi\theta}}{r\,tg\varphi}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial\varphi}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}\vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{\sigma_{\varphi r}}{r}\vec{e}_\varphi - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r\,Sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta}\vec{e}_r + \frac{1}{r\,Sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta}\vec{e}_\varphi$$

$$+ \frac{1}{r\,Sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\sigma_{\theta r}}{r}\vec{e}_\theta + \frac{\sigma_{\theta\varphi}}{r\,tg\varphi}\vec{e}_\theta + \underbrace{\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r\,Sin\varphi}\left(-Sin\varphi\,\vec{e}_r - Co\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)}_{-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}\vec{e}_r - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r\,tg\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

$$+ f_r\vec{e}_r + f_\varphi\vec{e}_\varphi + f_\theta\vec{e}_\theta = 0$$

حال می‌توانیم معادلات تعادل در جهت هریک از محورها را بنویسیم :

Homa

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi r}\cot\varphi}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}\cot\varphi + \sigma_{\varphi r} - \sigma_{\theta\theta}\cot\varphi}{r} + f_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta} + \sigma_{\varphi\theta}\cot\varphi + \sigma_{\theta r} + \sigma_{\theta\varphi}\cot\varphi}{r} + f_\theta = 0$$

◄ معادلات تعادل لنگری در مختصات منحنی الخط متعامد

$$\oint_s \vec{R}\times \vec{T}(\vec{n})\, ds + \int_v \vec{R}\times\vec{f}\, dv = 0$$

$$* \oint_s \vec{R}\times \vec{T}(\vec{e}_i)\, n_i\, ds = \int_v \vec{\nabla}\cdot[\vec{R}\times\vec{T}(\vec{e}_i)\vec{e}_i]\, dv$$

$$= \int_v (\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i + \vec{e}_i\cdot\vec{\nabla}})[\vec{R}\times\vec{T}(\vec{e}_i)]\, dv$$

عملگر است می‌توان آن را در براکت دوم ضرب کرد

$$= \int_v \{\vec{R}\times[(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i)\vec{T}(\vec{e}_i)] + [(\vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\vec{R}]\times\vec{T}(\vec{e}_i) + \vec{R}\times[(\vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\vec{T}(\vec{e}_i)]\}$$

$$\Rightarrow \int_v \{\vec{R}\times[(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i)\vec{T}(\vec{e}_i)] + [(\vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\vec{R}]\times\vec{T}(\vec{e}_i) + \vec{R}\times[(\vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\vec{T}(\vec{e}_i)] + \vec{R}\times\vec{f}\}\, dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_v \{\vec{R}\times[\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_i + \vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\vec{T}(\vec{e}_i) + \vec{f}}_{0}] + [(\vec{e}_i\cdot\vec{\nabla})\vec{R}]\times\vec{T}(\vec{e}_i)\}\, dv = 0$$

معادله تعادل بوده و برابر صفر است

مستقل از حجم بوده و برابر صفر می‌شود

$$\Rightarrow [(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{\nabla})\vec{R}]\times\vec{T}(\vec{e}_\alpha) + [(\vec{e}_\beta\cdot\vec{\nabla})\vec{R}]\times\vec{T}(\vec{e}_\beta) + [(\vec{e}_\gamma\cdot\vec{\nabla})\vec{R}]\times\vec{T}(\vec{e}_\gamma) = 0$$

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\vec{e}_\beta + \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\vec{e}_\gamma$$

$$(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{\nabla})\vec{R} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial\vec{R}}{\partial\alpha} = \vec{e}_\alpha$$

$$(\vec{e}_\beta\cdot\vec{\nabla})\vec{R} = \vec{e}_\beta \quad , \quad (\vec{e}_\gamma\cdot\vec{\nabla})\vec{R} = \vec{e}_\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_\alpha \times \vec{T}(\vec{e}_\alpha) + \vec{e}_\beta \times \vec{T}(\vec{e}_\beta) + \vec{e}_\gamma \times \vec{T}(\vec{e}_\gamma) = 0$$

$$* \quad \vec{T}(\vec{e}_\alpha) = \sigma_{\alpha\alpha}\vec{e}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}\vec{e}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma}\vec{e}_\gamma$$

$$* \quad \vec{T}(\vec{e}_\beta) = \sigma_{\beta\alpha}\vec{e}_\alpha + \sigma_{\beta\beta}\vec{e}_\beta + \sigma_{\beta\gamma}\vec{e}_\gamma$$

$$* \quad \vec{T}(\vec{e}_\gamma) = \sigma_{\gamma\alpha}\vec{e}_\alpha + \sigma_{\gamma\beta}\vec{e}_\beta + \sigma_{\gamma\gamma}\vec{e}_\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\alpha\beta}\vec{e}_\gamma - \sigma_{\alpha\gamma}\vec{e}_\beta - \sigma_{\beta\alpha}\vec{e}_\gamma + \sigma_{\beta\gamma}\vec{e}_\alpha + \sigma_{\gamma\alpha}\vec{e}_\beta - \sigma_{\gamma\beta}\vec{e}_\alpha = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_{\beta\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\gamma\alpha} \\ \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\gamma\beta} \end{cases}$$

که تانسور تنش در دستگاه منحنی الخط متقارن است

معادلات تعادل
$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 & \text{در داخل حجم } V \\ \sigma_{ij} n_j = T_i & \text{در داخل سطح } S_T \end{cases}$$

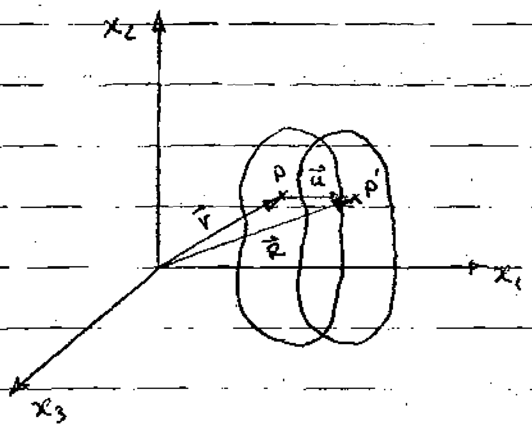
شرایط مرزی نیرویی

فصل سوم آنالیز کرنش

تعادل
$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{در تمام حجم } V \\ \sigma_{ij} n_j = T_i & \text{در تمام سطح } S_T \end{cases}$$

هندسی
$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ u_i = \bar{u}_i \end{cases}$$

تشریحی $\quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$



$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}$$

$$\begin{cases} \vec{R} = X_i\,\vec{e}_i \\ \vec{r} = x_i\,\vec{e}_i \\ \vec{u} = u_i\,\vec{e}_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X_i = x_i + u_i \quad \rightarrow \quad dX_i = dx_i + du_i$$

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3) \quad \Rightarrow \quad du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3$$

$$\Rightarrow du_i = u_{i,j}\, dx_j$$

$$d\vec{R} = d\vec{r} + d\vec{u} \quad , \quad d\vec{r} = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3$$

مرجع $dv = \left[(dx_1 \vec{e}_1) \times (dx_2 \vec{e}_2)\right] \cdot dx_3 \vec{e}_3 = dx_1 dx_2 dx_3$

$$d\vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_3} dx_3$$

$$dV = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_3} \, dx_1 dx_2 dx_3$$

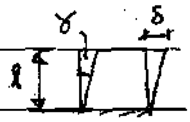
$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \vec{e}_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \vec{e}_3 \Rightarrow dV = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_3} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}}_{J} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\Rightarrow dV = J\, dv$$

به لحاظ فیزیکی باید $J>0$ باشد چون جزء حجم مثبت و غیرصفر است.

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} > 0$$

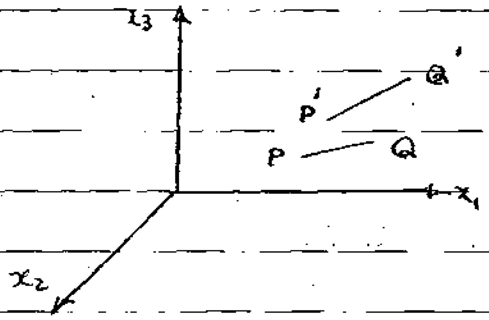
$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ کرنش عمودی یا طولی (در جهت طول)



$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\delta}{l} = \frac{1}{2}\gamma$ کرنش برشی (عمود بر جهت طول)

◄ تعریف کرنش

الف- کرنش عمودی (طولی)



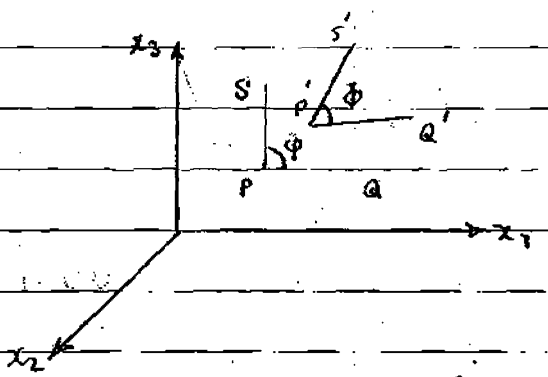
۱) مقاومت مصالح (کرنش خطی)

$$\varepsilon_{PQ/PQ} = \lim_{|\vec{PQ}|\to 0} \frac{|\vec{P'Q'}| - |\vec{PQ}|}{|\vec{PQ}|}$$

۲) تئوری الاستیسیته (کرنش غیرخطی)

$$\varepsilon_{PQ/PQ} = \lim_{|\vec{PQ}|\to 0} \frac{|\vec{P'Q'}|^2 - |\vec{PQ}|^2}{2|\vec{PQ}|^2}$$

ب- کرنش برشی (زاویه‌ای)



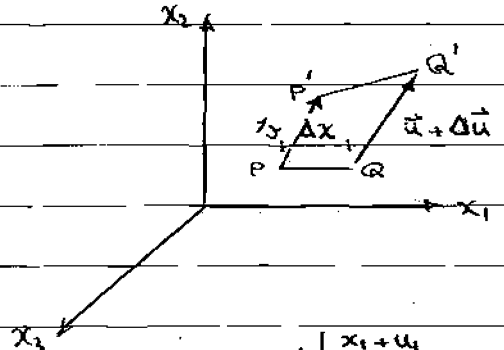
۱) تعریف خطی

$$\varepsilon_{PQ/PS} = \frac{1}{2}(\varphi - \Phi)$$

۲) تعریف غیرخطی

$$\varepsilon_{PQ/PS} = \lim_{\substack{|\vec{PQ}|\to 0\\ |\vec{PS}|\to 0}} \frac{\vec{P'Q'}\cdot\vec{P'S'} - \vec{PQ}\cdot\vec{PS}}{2|\vec{PQ}|\cdot|\vec{PS}|}$$

• کرنش طولی



$$\varepsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{|\vec{P'Q'}|^2 - |\vec{PQ}|^2}{2|\vec{PQ}|^2}$$

$$P\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \qquad Q\left|\begin{matrix} x_1+\Delta x \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \vec{PQ}\left|\begin{matrix} \Delta x_1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$P'\left|\begin{matrix} x_1+u_1 \\ x_2+u_2 \\ x_3+u_3 \end{matrix}\right. \qquad Q'\left|\begin{matrix} x_1+u_1+\Delta u_1 \\ x_2+u_2+\Delta u_2 \\ x_3+u_3+\Delta u_3 \end{matrix}\right. \qquad \rightarrow \qquad \vec{P'Q'}\left|\begin{matrix} \Delta x_1+\Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{matrix}\right.$$

$$\varepsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{(\Delta x_1+\Delta u_1)^2 + (\Delta u_2)^2 + (\Delta u_3)^2 - (\Delta x_1)^2}{2(\Delta x_1)^2}$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{2(\Delta x_1)(\Delta u_1) + (\Delta u_1)^2 + (\Delta u_2)^2 + (\Delta u_3)^2}{2(\Delta x_1)^2}$$

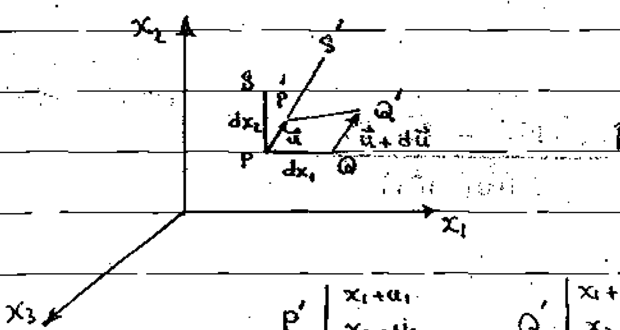
$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \left\{ \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_2}{\Delta x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_3}{\Delta x_1}\right)^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 \right]$$

• کرنش برشی



$$P\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \qquad Q\left|\begin{matrix} x_1+dx_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \qquad S\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2+dx_2 \\ x_3 \end{matrix}\right.$$

$$P'\left|\begin{matrix} x_1+u_1 \\ x_2+u_2 \\ x_3+u_3 \end{matrix}\right. \qquad Q'\left|\begin{matrix} x_1+dx_1+u_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 \\ x_2+u_2+\partial u_2/\partial x_1\, dx_1 \\ x_3+u_3+\partial u_3/\partial x_1\, dx_1 \end{matrix}\right.$$

$$S' \left| \begin{array}{l} x_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\ x_2 + u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + dx_2 \\ x_3 + u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 \end{array} \right.$$

$$\vec{PQ} \left| \begin{array}{l} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \qquad \vec{PS} \left| \begin{array}{l} 0 \\ dx_2 \\ 0 \end{array} \right. \qquad \vec{P'Q'} \left| \begin{array}{l} (1+ \partial u_1 / \partial x_1) dx_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 \end{array} \right. \qquad \vec{P'S'} \left| \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\ (1+ \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) dx_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\left[(1+ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} (1+ \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2}{2 dx_1 dx_2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} \right)}$$

* کمیات لاگرانژی

نسبت به x_i (تغییر شکل یافته)

$$N = \frac{|d\vec{R}|^2 - |d\vec{r}|^2}{2 |d\vec{r}|^2}$$

$$P' \longrightarrow Q' \qquad \vec{P'Q'} = d\vec{R}$$

$$P \longrightarrow Q \qquad \vec{PQ} = d\vec{r}$$

$$\begin{cases} N = \varepsilon_{11} & |d\vec{r}| = dx_1 \qquad d\vec{R} = d\vec{u} + d\vec{r} \\ N = \varepsilon_{22} & |d\vec{r}| = dx_2 \end{cases}$$

$* \; d\vec{R} = d\vec{u} + d\vec{r} \;\rightarrow\; dX_i = dx_i + du_i = dx_i + u_{i,j}\, dx_j$

$= (\delta_{ij} + u_{i,j})\, dx_j$

$$|d\vec{R}|^2 = dX_i\, dX_i = (dx_i + u_{i,j} x_j)(dx_i + u_{i,k}\, dx_k)$$

$$= (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k})\, dx_j\, dx_k$$

$$= (\delta_{kj} + u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j}\, u_{i,k})\, dx_j\, dx_k$$

$$|d\vec{r}|^2 = dx_i\, dx_i$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{dx_k\, dx_k + (u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j}\, u_{i,k})\, dx_j\, dx_k - dx_i\, dx_i}{2\, |d\vec{r}|.|d\vec{r}|}$$

$$N = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\, u_{k,j})\, \frac{dx_i\, dx_j}{|d\vec{r}|\,|d\vec{r}|}$$

(لاگرانژی) $N = \varepsilon_{ij}\, n_i n_j$

ε_{ij} : تانسور کرنش (لاگرانژی)

* کرنشهای اویلری (فضائی)

نسبت به X_i (جسم تغییر شکل یافته)

(اویلری) $N = \dfrac{|d\vec{R}|^2 - |d\vec{r}|^2}{|d\vec{R}|^2}$

$* \; d\vec{r} = d\vec{R} - d\vec{u} \;\Rightarrow\; dx_i = dX_i - du_i$

$$\Rightarrow \quad dx_i = dX_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dX_j = dX_i - u_{i,j} dX_j = (\delta_{ij} - u_{i,j}) dX_j$$

بطور مستقیم نسبت به X_j می‌باشد

$$|d\vec{r}|^2 = dx_i \, dx_i = (\delta_{ij} - u_{i,j}) dX_j \, (\delta_{ik} - u_{i,k}) dX_k$$

$$= (\delta_{kj} - u_{k,j} - u_{j,k} + u_{i,j} u_{i,k}) \, dX_j \, dX_k$$

$$\Rightarrow \quad (\text{اویلری}) \quad N = \frac{\cancel{dX_i dX_i} - [\cancel{dX_j dX_j} - (u_{k,j} + u_{j,k} - u_{i,j} u_{i,k}) dX_j dX_k]}{2 |d\vec{R}| |d\vec{R}|}$$

$$N = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}) N_i N_j$$

$$N = E_{ij} N_i N_j$$

E_{ij} : کرنش اویلری

مختصات لاگرانژی : $E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$

مختصات اویلری : $E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j})$

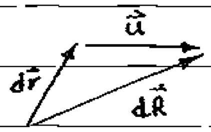
در مکانیک جامدات بیشتر از مختصات لاگرانژی استفاده می‌شود چون تغییرات در جامدات کم است. ولی

در مکانیک سیالات چون تغییرات زیاد است بیشتر از مختصات اویلری استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{ij} = E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})}$$

کرنش و چرخش ـ کرنش خطی

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j \quad , \quad du_i = u_{i,j}\, dx_j$$ (مختصات لاگرانژی)

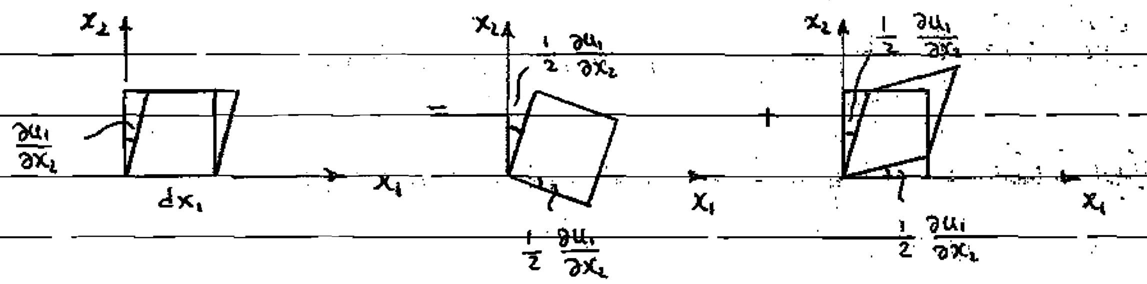


$$d\vec{R} = d\vec{r} + d\vec{u}$$
$$dX_i = dx_i + du_i$$

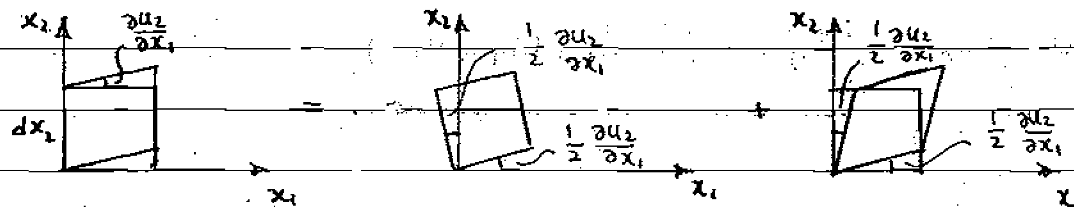
$$\frac{du_i}{|d\vec{r}|} = u_{i,j} \frac{dx_j}{|d\vec{r}|} = u_{i,j} n_j \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|} = u_{i,j} n_j \vec{e}_i$$

مولفه‌های بردار تغییر مکان نسبی واحد — بردار تغییر مکان نسبی واحد

گرادیان تغییر مکان : $u_{i,j} = \underbrace{\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})}_{\text{کرنش} \rightarrow \text{تانسور متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})}_{\text{چرخش} \rightarrow \text{تانسور متقارن معکوس}}$



◄ با توجه به شکل بالا مشخص می‌شود که گرادیان تغییر مکان را تبدیل به یک دوران جسم صلب و یک کرنش متقارن کرده‌ایم. یعنی گرادیان تغییر مکان شامل کرنش و چرخش است.



با توجه به اشکال صفحهٔ قبل و ترکیب آنها داریم:

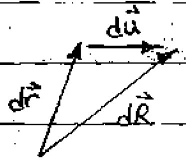
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

از روی روابط بدست آمده نیز مشخص می‌شود که در حالت تغییر شکل ترکیبی از کرنش و چرخش است

$$\begin{cases} \text{کرنش}: \ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \text{چرخش}: \ \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \end{cases}$$

$$\frac{du_i}{|d\vec{r}|} = u_{i,j}\, n_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\, n_j$$

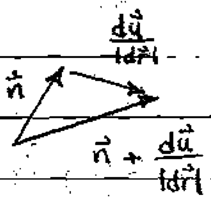


$$\frac{d\vec{R}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} + \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}$$

$$\frac{d\vec{R}}{|d\vec{r}|} = \vec{n} + \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}$$

چرخش:

$$\varepsilon_{ij} = 0$$



$$\left|\vec{n} + \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}\right|^2 - |\vec{n}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{n} + \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}\right)\cdot\left(\vec{n} + \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}\right) - \vec{n}\cdot\vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \left(n_i + \frac{du_i}{|d\vec r|}\right)\left(n_i + \frac{du_i}{|d\vec r|}\right) - n_i n_i = 0$$

$$\Rightarrow 2 n_i \frac{du_i}{|d\vec r|} + \underbrace{\cancel{\frac{du_i}{|d\vec r|}\frac{du_i}{|d\vec r|}}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i,j} n_i n_j = 0$$

$$u_{1,1} n_1^2 + u_{2,2} n_2^2 + u_{3,3} n_3^2 + u_{1,2} n_1 n_2 + u_{2,1} n_1 n_2 + u_{1,3} n_1 n_3$$

$$+ u_{3,1} n_1 n_3 + u_{2,3} n_2 n_3 + u_{3,2} n_2 n_3 = 0$$

⟵ اگر رابطهٔ بالا به ازای هر $\vec n$ برقرار باشد داریم :

$$u_{1,1} = 0 \qquad u_{2,2} = 0 \qquad u_{3,3} = 0$$

$$u_{1,2} = -u_{2,1} \qquad u_{1,3} = -u_{3,1} \qquad u_{2,3} = -u_{3,2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & u_{1,2} & u_{1,3} \\ -u_{1,2} & 0 & u_{2,3} \\ -u_{1,3} & -u_{2,3} & 0 \end{bmatrix}$$

یک تانسور متقارن معکوس بدست آوردیم .

⇐ فقط ترمهای چرخشی داریم . یعنی چرخش

شکل یک دوران است و تغییر طول نداریم .

$$\vec\omega = \frac{1}{2}\vec\nabla \times \vec u = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\vec e_1$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\vec e_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\vec e_3$$

$$= \omega_1 \vec e_1 + \omega_2 \vec e_2 + \omega_3 \vec e_3$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\ \omega_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \omega_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \end{cases}$$

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad du_i = u_{i,j}\,dx_j = \omega_{ij}\,dx_j$$

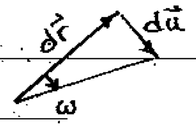
$$du_i = \omega_{ij}\,dx_j \Rightarrow \begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} du_1 = -\omega_3\,dx_2 + \omega_2\,dx_3 \\ du_2 = \omega_3\,dx_1 - \omega_1\,dx_3 \\ du_3 = -\omega_2\,dx_1 + \omega_1\,dx_2 \end{cases}$$

$$\vec\omega = \omega_i \vec e_i$$
$$d\vec r = dx_i \vec e_i$$
$$\Rightarrow \quad \vec\omega \times d\vec r = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = d\vec u$$

⇐ یک چرخش جسم صلب در هر نقطه داریم که برابر با $\frac{1}{2}\vec\nabla\times\vec u$ می‌باشد. که این همان

چرخش (ω_{ij}) است



(ω بردار $d\vec r$ را می‌چرخاند)

کرنش ◄

$$\frac{d\vec u}{|d\vec r|} = u_{ij} n_j = \varepsilon_{ij} n_j \qquad \omega_{ij} = 0$$

مؤلفه‌های بردار کرنش

مشابه بردار تنش ($T_i = \sigma_{ij} n_j$)

بردار کرنش $\quad \dfrac{d\vec u}{|d\vec r|} = \varepsilon_{ij} n_j \vec e_i$

بردار کرنش مشابه بردار تنش است.

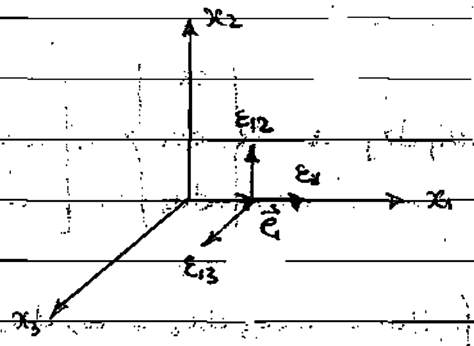
$$\frac{d\vec u}{|d\vec r|}(\vec n) = \varepsilon_{ij} n_j \vec e_i$$

⇐ در هر صفحه‌ای یک بردار کرنش داریم

$$\frac{d\vec u}{|d\vec r|}(\vec e_1) = \varepsilon_{i1} \vec e_i \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{d\vec u}{|d\vec r|}(\vec e_2) = \varepsilon_{i2} \vec e_i \qquad (\mathrm{II})$$

$$\frac{d\vec u}{|d\vec r|}(\vec e_3) = \varepsilon_{i3} \vec e_i \qquad (\mathrm{III})$$



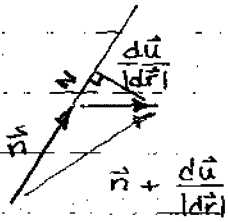
$$n_1\times(\mathrm{I})+n_2\times(\mathrm{II})+n_3\times(\mathrm{III}) \rightarrow n_1\left[\frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}(\vec{e}_1)\right]+n_2\left[\frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}(\vec{e}_2)\right]+n_3\left[\frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}(\vec{e}_3)\right]$$

$$=\varepsilon_{ij}n_j\vec{e}_i=\frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}(\vec{n})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}(\vec{n})=\varepsilon_{ij}n_j\vec{e}_i}$$

رابطه بدست آمده بیانگر همان

تصویر کوشی است یعنی بردار کرنش بر روی هر صفحه‌ای را می‌توان با استفاده از بردار کرنش در سه صفحه مستقل (عمود بر هم) بدست آورد



مولفه عمودی بردار کرنش: $N=\frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}\cdot\vec{n}=\frac{du_i}{|d\vec{r}|}n_i$

$$\Rightarrow N=\varepsilon_{ij}n_in_j$$

مولفه مماسی بردار کرنش: $S=\frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|}\cdot\vec{s}=\varepsilon_{ij}s_in_j$

$\boxed{\text{کرنش عمودی}\quad N=\varepsilon_{ij}n_in_j}$ $\qquad$ $\boxed{\text{کرنش برشی}\quad S=\varepsilon_{ij}s_in_j}$

$\vec{n}=\vec{e}_1=(1,0,0) \rightarrow N=\varepsilon_{11}$

$\vec{s}=\vec{e}_2=(0,1,0) \rightarrow S=\varepsilon_{12}$

$\vec{s}=\vec{e}_3=(0,0,1) \rightarrow S=\varepsilon_{13}$

کرنش اصلی : بردار کرنشی است که فقط در امتداد خودش تغییر طول می‌دهد. یعنی کرنش برشی صفر است.

$$\frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|} = \varepsilon \vec{n} \Rightarrow \frac{du_i}{|d\vec{r}|} = \varepsilon n_i \rightarrow \varepsilon_{ij} n_j = \varepsilon n_i$$

$$\rightarrow (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_j = 0 \qquad \text{(معادله مشخصه)}$$

$$\rightarrow \varepsilon^3 - I_1' \varepsilon^2 + I_2' \varepsilon - I_3' = 0$$

$$\begin{cases} I_1' = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ I_2' = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{23}^2 \\ I_3' = |\varepsilon_{ij}| \end{cases}$$

به همان روابط تغییرناپذیرهای P و Q برای تنش در اینجا نیز برقرار است.

$$\varepsilon^3 - I_1' \varepsilon^2 + I_2' \varepsilon - I_3' = 0 \begin{cases} \varepsilon_1 \rightarrow \vec{n}^{(1)} \\ \varepsilon_2 \rightarrow \vec{n}^{(2)} \\ \varepsilon_3 \rightarrow \vec{n}^{(3)} \end{cases}$$

کرنش‌های اصلی — محورهای اصلی

◄ کرنش انحراف آور — کرنش کروی

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{s_{ij}}_{\text{کرنش انحراف آور}} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} = s_{ij} + p'\delta_{ij}$$

$$p' = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \qquad \text{کرنش کروی}$$

$$S_{ij} n_j = S n_i \rightarrow (S_{ij} - S\delta_{ij}) n_j = 0$$

$$\Rightarrow S^3 - J_1' S^2 - J_2' S - J_3' = 0$$

$$\begin{cases} J_1' = 0 \\ J_2' = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \\ J_3' = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{cases}$$

◄ کرنش هشت وجهی

کرنش عمودی در صفحات هشت وجهی : $(\varepsilon_n)_{oct} = p'$

" " کرنش برشی : $(\varepsilon_t)_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2'}$

◄ اثبات تانسور بودن کرنش

$$\frac{du_i}{|d\vec{r}|} = \varepsilon_{ij} n_j \qquad \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|} = \varepsilon_{ij} n_j \vec{e}_i = \varepsilon'_{rs} n'_s \vec{e}'_r$$

تبدیل دستگاه مختصات

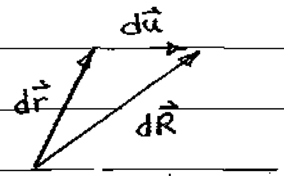
$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|} = \varepsilon'_{rs} a_{sj} n_j a_{ri} \vec{e}_i$$

$$\rightarrow \varepsilon_{ij} n_j \vec{e}_i = \varepsilon'_{rs} a_{ri} a_{sj} n_j \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} n_j = a_{ri} a_{sj} \varepsilon'_{rs} n_j \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = a_{ri} a_{sj} \varepsilon'_{rs} \\ \varepsilon'_{rs} = a_{ri} a_{sj} \varepsilon_{ij} \end{array}}$$

$$[\varepsilon] = [a]^T [\varepsilon'] [a] \qquad [\varepsilon'] = [a][\varepsilon][a]^T$$

◄ مؤلفه‌های کرنش به صورت برداری



تغییر طول نسبی در راستای $\vec{n}$: $M_n = \dfrac{|d\vec{R}| - |d\vec{r}|}{|d\vec{r}|}$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}$$

مؤلفه‌های طولی کرنش : $N_n = \dfrac{d\vec{R}\cdot d\vec{R} - d\vec{r}\cdot d\vec{r}}{2|d\vec{r}|^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\vec{R}}{|d\vec{r}|}\cdot\dfrac{d\vec{R}}{|d\vec{r}|} - \vec{n}\cdot\vec{n}\right)$

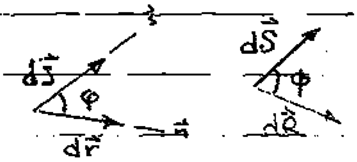
$$* \quad \frac{d\vec{R}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r} + d\vec{u}}{|d\vec{r}|} = \vec{n} + \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|} = \vec{n} + \vec{D}_n$$

$* \quad \dfrac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} n_j = (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u} = \vec{D}_n$ (مشتق جهتی در جهت $\vec{n}$)

$$\Rightarrow \quad N_n = \frac{1}{2}\left[(\vec{n}+\vec{D}_n)\cdot(\vec{n}+\vec{D}_n) - \vec{n}\cdot\vec{n}\right] = \vec{n}\cdot\vec{D}_n + \frac{1}{2}\vec{D}_n\cdot\vec{D}_n$$

$$* \quad M_n = \frac{|d\vec{R}| - |d\vec{r}|}{|d\vec{r}|} = \frac{|d\vec{R}|}{|d\vec{r}|} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|d\vec{R}|}{|d\vec{r}|} = 1 + M_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N_n = \frac{1}{2}\left[(1+M_n)^2 - 1\right] = M_n + \frac{1}{2}M_n^2}$$



مؤلفه برشی کرنش : $S = \dfrac{d\vec{R}\cdot d\vec{S} - d\vec{r}\cdot d\vec{s}}{2\,|d\vec{r}|\cdot|d\vec{s}|}$

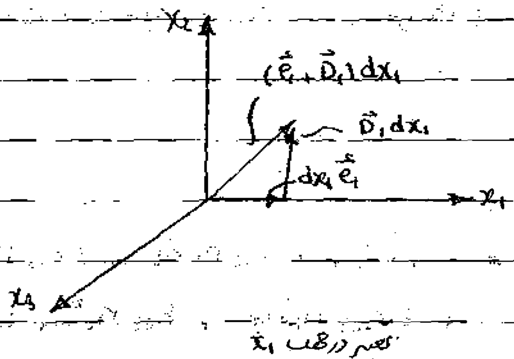
$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{d\vec{R}}{|d\vec{r}|}\cdot\frac{d\vec{S}}{|d\vec{s}|} - \vec{n}\cdot\vec{s}\right] = \frac{1}{2}\left[(\vec{n}+\vec{D}_n)\cdot(\vec{s}+\vec{D}_s) - \vec{n}\cdot\vec{s}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{n}\cdot\vec{D}_n + \vec{s}\cdot\vec{D}_n + \vec{D}_n\cdot\vec{D}_s\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\left[(1+M_n)(1+M_s)\cos\Phi - \cos\varphi\right]}$$

◄ تغییر طول - تغییر زاویه - تغییر مساحت - تغییر حجم

• تغییر طول



$$d\vec{r} = \underbrace{dx_1\vec{e}_1}_{d\vec{r}_1} + \underbrace{dx_2\vec{e}_2}_{d\vec{r}_2} + \underbrace{dx_3\vec{e}_3}_{d\vec{r}_3}$$

$$d\vec{R} = \underbrace{\frac{\partial\vec{R}}{\partial x_1}dx_1}_{d\vec{R}_1} + \underbrace{\frac{\partial\vec{R}}{\partial x_2}dx_2}_{d\vec{R}_2} + \underbrace{\frac{\partial\vec{R}}{\partial x_3}dx_3}_{d\vec{R}_3}$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 = dx_1\vec{e}_1$$

$$d\vec{R} = d\vec{R}_1 = \frac{\partial\vec{R}}{\partial x_1}\,\vec{e}_1 = \frac{\partial(\vec{r}+\vec{u})}{\partial x_1}\,dx_1 = (\vec{e}_1+\vec{D}_1)\,dx_1$$

$$M_1 = \frac{|d\vec{R}_1| - |d\vec{r}_1|}{|d\vec{r}_1|} = |\vec{e}_1+\vec{D}_1| - 1 \quad\Rightarrow\quad 1+M_1 = |\vec{e}_1+\vec{D}_1|$$

$$|d\vec{R}_1| = (1+M_1)\,dx_1$$

* با توجه به رابطه ۱ N در فصل $\rightarrow \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left[(1+M_1)^2 - 1\right]$

$$\Rightarrow (1+M_1)^2 - 1 = 2\varepsilon_{11} \Rightarrow (1+M_1)^2 = 1 + 2\varepsilon_{11} \Rightarrow 1+M_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_{11}}$$

$$\begin{cases} |d\vec{R}_1| = \sqrt{1+2\varepsilon_{11}}\; dx_1 \\ |d\vec{R}_2| = \sqrt{1+2\varepsilon_{22}}\; dx_2 \\ |d\vec{R}_3| = \sqrt{1+2\varepsilon_{33}}\; dx_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{|d\vec{R}| = \sqrt{1+2\varepsilon_{nn}}\; |d\vec{r}|}$$

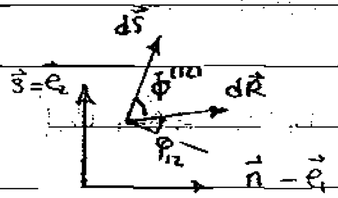
که کرنش سنج‌ها ε_{nn} را در جهتی به ما می‌دهند. (یعنی اگر گفته شود کرنش سنجی در جهت $\vec{n}$ کرنش را اندازه‌گیری کرده، ε_{nn} را به ما می‌دهد)

$$\overset{\varepsilon_{nn}}{N} = \varepsilon_{ij} n_i n_j = [n][\varepsilon][n]^T$$

$$N = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \varepsilon_{11} n_1^2 + 2\varepsilon_{12} n_1 n_2 + 2\varepsilon_{13} n_1 n_3 + 2\varepsilon_{23} n_2 n_3 + \varepsilon_{22} n_2^2 + \varepsilon_{33} n_3^2$$

⇐ برای بدست آوردن تانسور کرنش، باید ۶ کرنش سنج در ۶ جهت مختلف داشته باشیم

متغیر زاویه



$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[(1+M_1)(1+M_2)\cos\Phi^{(12)}\right]$$

$$\cos\Phi^{(12)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{12}\right) = \frac{2\varepsilon_{12}}{(1+M_1)(1+M_2)}$$

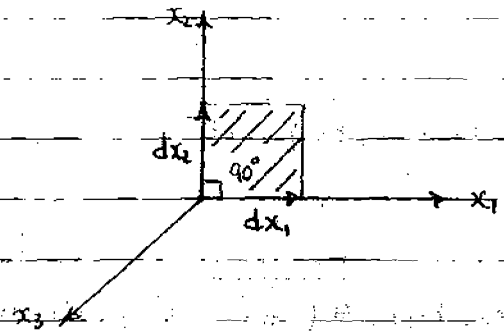
$$\boxed{\sin\varphi_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1+2(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}}}$$

تغییر زاویه : φ_{12}

تغییرشکل های کوچک : $\varphi_{12} = 2\varepsilon_{12}$ (φ_{12} در اینجا زاویه برش است)

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\varphi_{13} &= \frac{2\varepsilon_{13}}{\sqrt{1+2(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})+4\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}}} \\ \sin\varphi_{23} &= \frac{2\varepsilon_{23}}{\sqrt{1+2(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})+4\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}} \end{aligned}}$$

• تغییر مساحت



$$d\vec{r} = dx_1\vec{e}_1 + dx_2\vec{e}_2 + dx_3\vec{e}_3$$

$$d\vec{R} = \underbrace{\frac{\partial\vec{R}}{\partial x_1}}_{\vec{G}_1} dx_1 + \underbrace{\frac{\partial\vec{R}}{\partial x_2}}_{\vec{G}_2} dx_2 + \underbrace{\frac{\partial\vec{R}}{\partial x_3}}_{\vec{G}_3} dx_3$$

$$dA_0^{(12)} = (dx_1\vec{e}_1)\times(dx_2\vec{e}_2) = dx_1\,dx_2\,\vec{e}_3$$

$$dA^{(12)} = \frac{\partial\vec{R}}{\partial x_1}\times\frac{\partial\vec{R}}{\partial x_2}\,dx_1\,dx_2 = \vec{G}_1\times\vec{G}_2\,dx_1\,dx_2$$

$$* \quad (\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = \begin{vmatrix} \vec{A}\cdot\vec{C} & \vec{A}\cdot\vec{D} \\ \vec{B}\cdot\vec{C} & \vec{B}\cdot\vec{D} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{G}_1\times\vec{G}_2)\cdot(\vec{G}_1\times\vec{G}_2) = \begin{vmatrix} \vec{G}_1\cdot\vec{G}_1 & \vec{G}_1\cdot\vec{G}_2 \\ \vec{G}_2\cdot\vec{G}_1 & \vec{G}_2\cdot\vec{G}_2 \end{vmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. 84

$$* \quad \vec{G}_i \cdot \vec{G}_j = G_{ij} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_j} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_K}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow (\vec{G}_1 \times \vec{G}_2) \cdot (\vec{G}_1 \times \vec{G}_2) = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} = G_{11} G_{22} - G_{12}^2$$

$$* \quad G_{ij} = \frac{\partial (X_K + U_K)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial (X_K + U_K)}{\partial x_j} = (\delta_{iK} + U_{K,i})(\delta_{Kj} + U_{K,j})$$

$$= \delta_{ij} + U_{j,i} + U_{i,j} + U_{K,i} \cdot U_{K,j} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$$

$$\boxed{\text{کرنش گرین} : G_{ij} = X_{K,i} \cdot X_{K,j} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}}$$

$$\Rightarrow (\vec{G}_1 \times \vec{G}_2) \cdot (\vec{G}_1 \times \vec{G}_2) = G_{11} G_{22} - G_{12}^2$$

$$\Rightarrow |\vec{G}_1 \times \vec{G}_2| = \sqrt{G_{11} G_{22} - G_{12}^2} = \sqrt{(1+2\varepsilon_{11})(1+2\varepsilon_{22}) - 4\varepsilon_{12}^2}$$

$$\boxed{|d\vec{A}^{(12)}| = |\vec{G}_1 \times \vec{G}_2| \, dx_1 dx_2 = \sqrt{1 + 2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 4(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2)} \, dx_1 dx_2}$$

$$\frac{|d\vec{A}^{(12)}| - |d\vec{A}_0^{(12)}|}{|d\vec{A}_0^{(12)}|} = \sqrt{1 + 2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 4(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2)} - 1$$

$$\frac{|d\vec{A}^{(13)}| - |d\vec{A}_0^{(13)}|}{|d\vec{A}_0^{(13)}|} = \sqrt{1 + 2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + 4(\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2)} - 1$$

$$\frac{|d\vec{A}^{(23)}| - |d\vec{A}_0^{(23)}|}{|d\vec{A}_0^{(23)}|} = \sqrt{1 + 2(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 4(\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2)} - 1$$

تغییر مساحت نسبی

Homa

تغییر حجم

$$d\vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_3} dx_3$$

$$d\vec{r} = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{E}_2 + dx_3 \vec{e}_3$$

$$dv = (dx_1 \vec{e}_1) \times (dx_2 \vec{e}_2) \cdot (dx_3 \vec{e}_3) = dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$dV = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_3} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} dx_1\, dx_2\, dx_3 = J\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$G_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$$

$$|G_{ij}| = G = J^2 \quad \Rightarrow \quad J = \sqrt{G}$$

$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_{11} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} & 1+2\varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{23} & 1+2\varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (1+2\varepsilon_{11})(1+2\varepsilon_{22}+2\varepsilon_{33}+4\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - 4\varepsilon_{23}^2)$$

$$- 2\varepsilon_{12}(2\varepsilon_{12} + 4\varepsilon_{12}\varepsilon_{33} - 4\varepsilon_{13}\varepsilon_{23})$$

$$+ 2\varepsilon_{13}(4\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - 2\varepsilon_{13} - 4\varepsilon_{13}\varepsilon_{22})$$

$$G = 1 + 2\varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{33} + 4\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - 4\varepsilon_{23}^2 + 2\varepsilon_{11} + 4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}$$

$$+ 8\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - 8\varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 - 4\varepsilon_{12}^2 - 8\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{23} + 8\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}$$

$$+ 8\varepsilon_{13}\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - 4\varepsilon_{13}^2 - 8\varepsilon_{22}\varepsilon_{13}^2$$

$$G = 1 + 2I'_1 + 4I'_2 + 8I'_3$$

$$\rightarrow \boxed{dV = \sqrt{G}\, dv = \sqrt{1 + 2I'_1 + 4I'_2 + 8I'_3}\; dv}$$ تغییر حجم

تغییر حجم نسبی : $\dfrac{dV - dv}{dv} = \sqrt{1 + 2I'_1 + 4I'_2 + 8I'_3} - 1$

◄ تنسور کوچک

شرطهای لازم برای کوچک بودن تنسور عبارتند از :

۱) تغییر طول نسبی کوچک باشد $M_1 \ll 1 \quad , \quad M_2 \ll 1 \quad , \quad M_3 \ll 1$

۲) تغییر زاویه کوچک باشد $\varphi_{12} \ll 1 \quad , \quad \varphi_{13} \ll 1 \quad , \quad \varphi_{23} \ll 1$

$$|d\vec{R}_1| = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}\, dx_1 \quad ; \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left[(1 + M_1)^2 - 1\right]$$

$$|d\vec{R}_2| = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}\, dx_2 \quad ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left[(1 + M_2)^2 - 1\right]$$

$$|d\vec{R}_3| = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{33}}\, dx_3 \quad ; \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left[(1 + M_3)^2 - 1\right]$$

$$\varepsilon_{11} = M_1 + \frac{1}{2}\cancel{M_1^2}$$ چون M_1 کوچک است از توان ۲ آن صرف نظر می‌کنیم

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{11} = M_1 \;, \quad \varepsilon_{22} = M_2 \;, \quad \varepsilon_{33} = M_3$$

یعنی کرنش های عمودی نیز کوچک هستند چون $M_{11} \ll 1$ است

$$\begin{cases} |d\vec{R}_1| = (1+\varepsilon_{11})\,dx_1 \\ |d\vec{R}_2| = (1+\varepsilon_{22})\,dx_2 \\ |d\vec{R}_3| = (1+\varepsilon_{33})\,dx_3 \end{cases}$$ (در صفحهٔ کرنش های کوچک برقرار است)

$$* \quad \frac{|d\vec{R}_1| - dx_1}{dx_1} = \varepsilon_{11} = M_1$$

$$* \quad \sin\varphi_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1+2(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}} = \varphi_{12}$$

$$\begin{cases} \varphi_{12} = 2\varepsilon_{12} \ll 1 \\ \varphi_{13} = 2\varepsilon_{13} \ll 1 \\ \varphi_{23} = 2\varepsilon_{23} \ll 1 \end{cases}$$ (چون تغییر زاویه کوچک است، کرنش های برشی نیز کوچکند)

⟸ تانسور کرنش کوچک می‌شود ⟸ با برقراری این دو شرط در صفحهٔ کرنش های کوچک هستیم

* تغییر مساحت نسبی :

$$\frac{|d\vec{A}^{(12)}| - |d\vec{A}_0^{(12)}|}{|d\vec{A}_0^{(12)}|} = \sqrt{1+2(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+4(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2)} - 1$$

$$= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$$

$$\frac{|d\vec{A}^{(13)}| - |d\vec{A}_0^{(13)}|}{|d\vec{A}_0^{(13)}|} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}$$

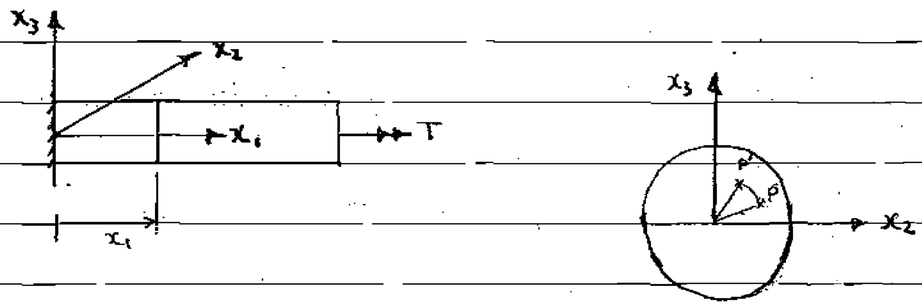
$$\frac{|d\vec{A}^{(23)}| - |d\vec{A}_0^{(23)}|}{|d\vec{A}_0^{(23)}|} = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

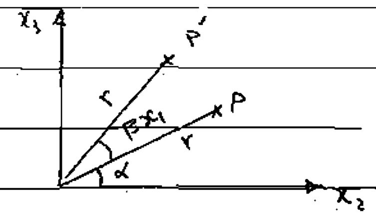
Subject:
Year. Month. Date. 88

$$* \quad \frac{dV - dv}{dv} = \sqrt{1 + 2I_1' + 4I_2' + 8I_3'} - 1 = I_1'$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV - dv}{dv} = \varepsilon_{kk}}$$

مثال)





β : تغییر زاویه در واحد طول

$$P\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right. \qquad P'\left|\begin{matrix} X_1 = x_1 \\ X_2 = r\cos(\alpha + \beta x_1) \\ X_3 = r\sin(\alpha + \beta x_1) \end{matrix}\right.$$

$$\vec{u}\left|\begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = r\cos(\alpha + \beta x_1) - x_2 = r\cos\alpha\cos\beta x_1 - r\sin\alpha\sin\beta x_1 - x_2 \\ u_3 = r\sin(\alpha + \beta x_1) - x_3 = r\sin\alpha\cos\beta x_1 + r\cos\alpha\sin\beta x_1 - x_3 \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow \vec{u}\left|\begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = (\cos\beta x_1 - 1)\,x_2 - x_3\sin\beta x_1 \\ u_3 = (\cos\beta x_1 - 1)\,x_3 + x_2\sin\beta x_1 \end{matrix}\right.$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\,u_{k,j}\right)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i} - u_{k,i}\,u_{k,j}\right)$$

با دوران‌های عظیم کرنش کوچک، بزرگ

Homa

$$* \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \beta x_2 \sin\beta x_1 - \beta x_3 \cos\beta x_1 \quad , \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \beta x_3 \sin\beta x_1 + \beta x_2 \cos\beta x_1$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \cos\beta x_1 - 1 \quad , \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \sin\beta x_1$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\sin\beta x_1 \quad , \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \cos\beta x_1 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\beta^2 x_2^2 + \beta^2 x_3^2\right) \\ \omega_{11} = \frac{1}{2}\left(\beta^2 x_2^2 + \beta^2 x_3^2\right) \end{cases}$$

$$* \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{22} = (\cos\beta x_1 - 1) + \frac{1}{2}\left[2(1 - \cos\beta x_1)\right] = 0 \\ \omega_{22} = -\frac{1}{2}\left[2(1 - \cos\beta x_1)\right] = \cos\beta x_1 - 1 \end{cases}$$

$$* \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{33} = (\cos\beta x_1 - 1) + \frac{1}{2}\left[2(1 - \cos\beta x_1)\right] = 0 \\ \omega_{33} = \cos\beta x_1 - 1 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. 90

$$* \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\beta x_2 \sin\beta x_1 - \beta x_3 \cos\beta x_1\right) + \frac{1}{2}\left[\beta x_2 \sin\beta x_1 + \beta x_3 \cos\beta x_1 - \beta x_3\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\beta x_3$$

$$* \quad \omega_{12} = \frac{1}{2}\beta x_3 \quad ; \quad \omega_{21} = -\beta x_2 \sin\beta x_1 - \beta x_3 \cos\beta x_1 + \frac{1}{2}\beta x_3$$

$$* \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\beta x_3 \sin\beta x_1 + \beta x_2 \cos\beta x_1\right) + \frac{1}{2}\left[\beta x_3 \sin\beta x_1 - \beta x_2 \cos\beta x_1 + \beta x_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\beta x_2$$

$$* \quad \omega_{13} = -\frac{1}{2}\beta x_2 \quad ; \quad \omega_{31} = -\beta x_3 \sin\beta x_1 + \beta x_2 \cos\beta x_1 - \frac{1}{2}\beta x_2$$

$$* \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(-\sin\beta x_1 + \sin\beta x_1\right) + \frac{1}{2}[0] = 0$$

$$* \quad \omega_{23} = -\sin\beta x_1 \quad ; \quad \omega_{32} = \sin\beta x_1$$

چون مقادیر x_2 و x_3 کوچک هستند $\Leftarrow$ $\beta x_2 \ll 1$, $\beta x_3 \ll 1$ (β مقدار کوچکی است)

ولی مقدار βx_1 کوچک نیست و مقدار آن به x_1 بستگی دارد و می‌تواند مقدار بزرگی داشته باشد

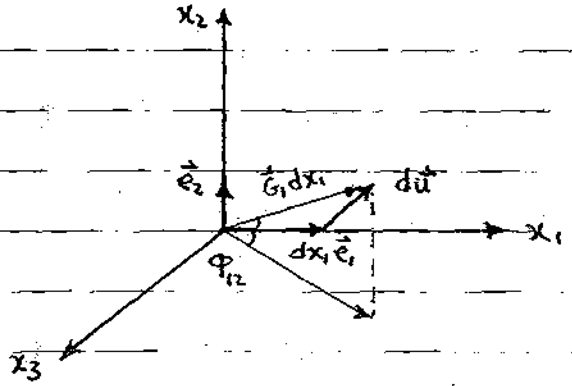
$\Leftarrow$ کرنش ها خیلی کوچک هستند ولی دوران ها می‌توانند بزرگ باشند

$\Leftarrow$ کرنش کوچک با دوران بزرگ سازگار است.

$u_{i,j} \ll 1 \longrightarrow$ کرنش خطی داریم

◄ اگر تغییر مکان نسبی و تغییر مکان مطلق هر دو کوچک باشند کرنش خطی داریم

◄ کرنش خطی



$$d\vec R = d\vec r + d\vec u$$

$$d\vec r = dx_1 \vec e_1$$

$$d\vec R = \frac{\partial \vec R}{\partial x_1} dx_1 = \vec G_1 dx_1$$

$$\Rightarrow d\vec R = \vec G_1 dx_1 = dx_1 \vec e_1 + d\vec u$$

$$\Rightarrow \vec G_1 = \vec e_1 + \frac{d\vec u}{dx_1} = \vec e_1 + \vec D_1$$

$$\frac{d\vec R}{dx_1} = \frac{\partial \vec R}{\partial x_1} \longrightarrow \frac{|d\vec R|}{dx_1} = \left|\frac{\partial \vec R}{\partial x_1}\right| = |\vec G_1| = |\vec e_1 + \vec D_1|$$

$$* \quad \frac{|d\vec R| - |d\vec r|}{|d\vec r|} = M_n \quad \Rightarrow \quad \frac{|d\vec R| - dx_1}{dx_1} = M_1$$

$$\Rightarrow \frac{|d\vec R|}{dx_1} = 1 + M_1$$

$$* \quad |\vec G_1| = |\vec e_1 + \vec D_1| = 1 + M_1$$

برای بدست آوردن زاویه $\vec G_1$ با محور x_2 $(\vec G_1 . \vec e_2)$ صفحه‌ای از x_2 و $\vec G_1$ می‌گذرانیم:

$$\vec G_1 . \vec e_2 = |\vec G_1| \sin\varphi_{12} = \frac{\partial \vec R}{\partial x_1} . \vec e_2 = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

یادآوری: $\frac{\partial \vec R}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \vec e_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \vec e_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \vec e_3$

$$\Rightarrow \quad (1+M_1)\sin\varphi_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \underbrace{\varphi_{12}}_{\text{دوران های کوچک}}$$

دوران های کوچک : $M_1 \ll 1 \quad , \quad \varphi_{12} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \ll 1$

φ_{13} : زاویه $\vec{G}_1$ با محور x_3 $(\vec{G}_1 , \vec{e}_3)$

$$(1+M_1)\sin\varphi_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \xrightarrow{M_1 \ll 1 \,,\, \varphi_{13} \ll 1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \ll 1$$

φ_{11} : زاویه $\vec{G}_1$ با محور x_1 $(\vec{G}_1 , \vec{e}_1)$

$$\vec{G}_1 . \vec{e}_1 = (1+M_1)\cos\varphi_{11} = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

اگر دوران کوچک باشد $(\varphi_{11} \ll 1)$: $(1+M_1)\left(1 - \frac{\varphi_{11}^2}{2}\right) = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$

$$\Rightarrow \quad M_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \xrightarrow{M_1 \ll 1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ll 1$$

$$u_{i,j} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + \cancel{u_{k,i}\, u_{k,j}}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ll 1 \\ \\ \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \ll 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \text{تئوری خطی الاستیسیته}$$

کرنش در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_z = \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \qquad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \qquad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0$$

$$\begin{cases} N = \vec{n} \cdot \vec{D}_n + \frac{1}{2} \vec{D}_n \cdot \vec{D}_n \\ \\ S = \frac{1}{2} (\vec{n} \cdot \vec{D}_s + \vec{s} \cdot \vec{D}_n + \vec{D}_n \cdot \vec{D}_s) \end{cases}$$

$$* \quad \vec{n} = \vec{e}_r \Rightarrow \varepsilon_{rr} = \vec{e}_r \cdot \vec{D}_r + \frac{1}{2} \vec{D}_r \cdot \vec{D}_r$$

$$\vec{D}_n = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \Rightarrow \vec{D}_r = \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} \vec{e}_z$$

$$\vec{D}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \times \frac{1}{r} \vec{e}_z$$

$$+ \frac{u_r}{r} \vec{e}_\theta - \frac{u_\theta}{r} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{D}_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta\right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r\right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_z$$

$$\vec{D}_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial u_r}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}u_r\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$* \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_r \cdot \vec{D}_\theta + \vec{e}_\theta \cdot \vec{D}_r + \vec{D}_\theta \cdot \vec{D}_r\right)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{\partial u_z}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)\right]$$

◄ کرنش در مختصات کروی

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\varphi\cos\theta \\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta \\ x_3 = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\varphi\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{e}_2 + \cos\varphi\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{e}_2 - \sin\varphi\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \qquad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \sin\varphi\, \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \cos\varphi\, \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\sin\varphi\, \vec{e}_r - \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \dfrac{1}{r\sin\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\varphi \vec{e}_\varphi + u_\theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

$$* \; \vec{D}_r = \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\vec{e}_\theta$$

$$* \; \vec{D}_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{u}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\vec{e}_\theta + \frac{u_r}{r}\vec{e}_\varphi - \frac{u_\varphi}{r}\vec{e}_r$$

$$\vec{D}_\varphi = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\vec{e}_\theta$$

$$* \; \vec{D}_\theta = \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\vec{e}_\varphi$$

$$+ \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{u_r}{r\sin\varphi} \times \sin\varphi\, \vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{u_\varphi}{r\sin\varphi}\cos\varphi\, \vec{e}_\theta - \frac{u_\theta}{r\sin\varphi}\left(\sin\varphi\, \vec{e}_r + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi\right)$$

$$\vec{D}_\theta = \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r\tan\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$+ \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\varphi}{r\tan\varphi}\right)\vec{e}_\theta$$

Subject:
Year. Month. Date. 86

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\varphi}{r\,tg\varphi}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r\,tg\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\varphi}{r\,tg\varphi}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)\right. +$$
$$\left. + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r\,tg\varphi}\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\varphi}{r\,tg\varphi}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r\,tg\varphi}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\right)\right.$$
$$\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right)\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r\,tg\varphi}\right)$$
$$\left. + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\varphi}{r\,tg\varphi}\right)\right]$$

سازگاری کرنش ها — معادلات سازگاری

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\varepsilon_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ 2\varepsilon_{13} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ 2\varepsilon_{23} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{cases}$$

اگر تغییر شکل ها مشخص باشند، کرنش ها به راحتی با استفاده از روابط بالا بدست می آیند. حال اگر کرنش ها را داشته باشیم، باید روابطی بدست آوریم تا ۳ تغییر شکل ها مشخص شوند:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \, \partial x_2^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \, \partial x_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

این معادلات برای بدست آوردن یک u واحد یا سازگار نوشته می شوند (چون کرنش ها را پیوسته در نظر می گیریم)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3}\right] & (\mathrm{I}) \\ \dfrac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right] & (\mathrm{II}) \\ \dfrac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right] & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I})+(\mathrm{II})-(\mathrm{III})} \quad -\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right]$$

به همین ترتیب می توان رابطه را برای ε_{22} و ε_{33} نیز بدست آورد:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right]$$

تمرین: معادلات سازگاری را با جبر انیشتینی بدست آورید.

$$du_i = u_{i,j}\, dx_j \quad , \quad u_i = \int_0^{u_i} du_i$$

فصل چهارم ـ رابطهٔ تنش ـ کرنش

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{در حجم } V \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & \text{در حجم } V \\ \sigma_{ij} n_j = T_i & \text{در مرز } S \end{cases}$$

$\rightarrow (\sigma_{ij}, f_i, T_i)$ میدان متعادل

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{در حجم } V \\ u_i = (u_i)_s & \text{در مرز } S \end{cases}$$

$\Rightarrow (\varepsilon_{ij}^*, u_i^*)$ میدان سازگار

معادلات = 3 معادلهٔ تعادل + 6 سازگاری = 9

مجهولات = (ε_{ij}) 6 + (σ_{ij}) 6 + (u_i) 3 = 15

← در این فصل به دنبال 6 معادله هستیم که رابطهٔ بین σ_{ij} و ε_{ij} می‌باشد

$\sigma_{ij} = F_{ijkl}(\varepsilon_{kl})$ رفتار مربوط به جسم الاستیک کوشی

$\sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}$ (Hyperelastic) جسم الاستیک گرین

← در جسم الاستیک کوشی یک رابطهٔ غیرخطی بین تنش و کرنش داریم که یک رابطهٔ یک به یک است

Subject:
Year. Month. Date.

← اگر رابطه تعادل در محیطی برقرار باشد، به آن میدان متعادل گفته می‌شود. (σ_{ij}, F_i, T_i)

چون سه معادله تعادل و 6 مجهول داریم. ← بی‌نهایت میدان متعادل داریم.

← اگر رابطه سازگاری در محیطی برقرار باشد، به آن میدان سازگار گفته می‌شود. $(\varepsilon_{ij}^*, u_i^*)$

چون [illegible] معادله [illegible] و 9 مجهول داریم ← بی‌نهایت میدان سازگار داریم.

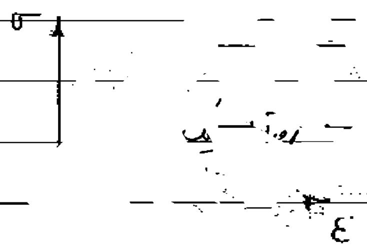
← رفتار جسم ممکن است [illegible] به [illegible] زیر باشد:

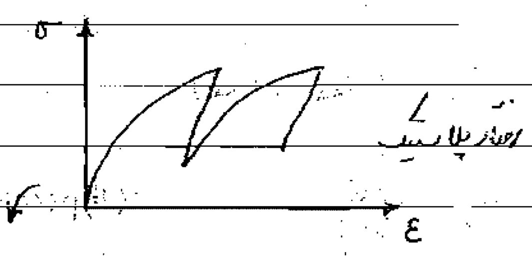
1) رفتار بستگی به زمان دارد (ویسکوالاستیک یا ویسکوپلاستیک)

2) رفتار بستگی به زمان (t) ندارد ولی [illegible] دارد (رفتار پلاستیک)

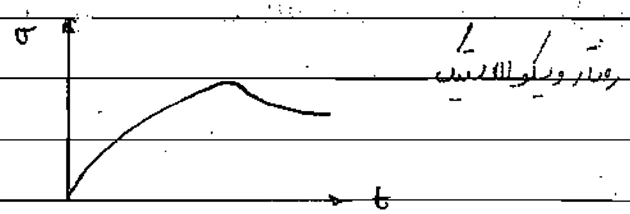
3) رفتار نه بستگی به زمان (t) دارد و نه بستگی به [illegible] (رفتار الاستیک)

یک رابطه یک‌به‌یک بین σ و ε برقرار است.



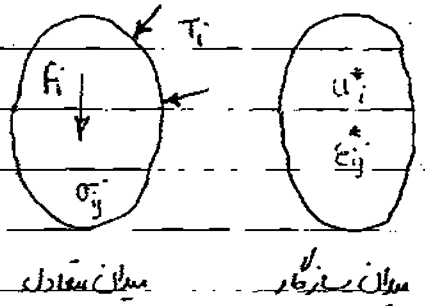


رابطه تنش و کرنش یک‌به‌یک نیست.



◄ اصل کار مجازی

طبق اصل کار مجازی ، کار مجازی داخلی برابر است با کار مجازی خارجی.



$$\boxed{\oint_s T_i u_i^* \, ds + \int_v F_i u_i^* \, dV = \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \, dV}$$

اثبات:

$$\oint_s \sigma_{ij} n_j u_i^* \, ds + \int_v F_i u_i^* \, dV \underset{\text{قضیه دیورژانس}}{=} \int_v (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} \, dV + \int_v F_i u_i^* \, dV$$

$$= \int_v \left(\sigma_{ij,j} u_i^* + \sigma_{ij} u_{i,j}^* + F_i u_i^* \right) dV$$

$$\Rightarrow = \int_v \left[u_i^* (\sigma_{ij,j} + F_i) + \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j}^* + \frac{1}{2} \sigma_{ji} u_{j,i}^* \right] dV$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \rightarrow \quad = \int_v \left[u_i^* \underbrace{(\sigma_{ij,j} + F_i)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{معادله تعادل}}} + \sigma_{ij} \underbrace{\frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)}_{\varepsilon_{ij}^*} \right] dV$$

$$= \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \, dV \qquad \text{اصل کار مجازی}$$

◄ اگر σ_{ij} ، f_i ، T_i درحال تعادل باشند ، همزمان تغییرات آنها نیز درحال تعادل هستند .

$(\dot{\sigma}_{ij}, \dot{f}_i, \dot{T}_i)$

◄ اگر ε_{ij}^* ، u_i^* درحال سازگاری باشند ، تغییرات آنها نیز سازگارند $(\dot{\varepsilon}_{ij}^*, \dot{u}_i^*)$

$$\oint_s \dot{T}_i u_i^* \, ds + \int_v \dot{f}_i u_i^* \, dV = \int_v \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^* \, dV$$

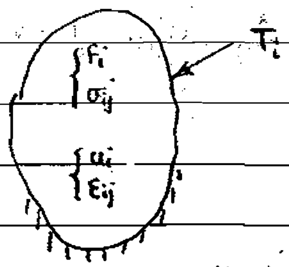
$$\oint_s T_i \dot{u}_i^* \, ds + \int_v f_i \dot{u}_i^* \, dV = \int_v \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* \, dV$$

$$\oint_s \dot{T}_i \dot{u}_i^* \, ds + \int_v \dot{f}_i \dot{u}_i^* \, dV = \int_v \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* \, dV$$

◄ اصل کار مجازی را می‌توان به چهار صورت نوشت .

◄ قضیه حداقل انرژی پتانسیل

(T_i, f_i, σ_{ij}) (u_i, ε_{ij})



معادلات سازگاری در داخل یک جسم برقرار است

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم : $(\delta\varepsilon_{ij}, \delta u_i)$

$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$ (معادله سازگاری)

قضیه کار مجازی را برای این جسم می‌نویسیم:

$$\oint_S T_i\,\delta u_i\,dS + \int_V f_i\,\delta u_i = \int_V \sigma_{ij}\,(\delta \varepsilon_{ij})\,dV$$

$T_i\,\delta u_i = \delta w_s \leftarrow$ تابع پتانسیل کامل (w_s تابع u_i است)

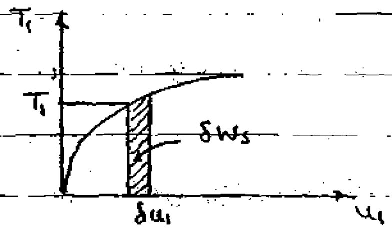
$f_i\,\delta u_i = \delta w_v$

$\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} = \delta u$ انرژی کرنشی

$$T_i\,\delta u_i = \delta w_s = \frac{\partial w_s}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial w_s}{\partial u_2}\delta u_2 + \frac{\partial w_s}{\partial u_3}\delta u_3$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{\partial w_s}{\partial u_1} \;;\; T_2 = \frac{\partial w_s}{\partial u_2} \;;\; T_3 = \frac{\partial w_s}{\partial u_3}$$

اگر پیوسته باشد : $T_i\,\delta u_i = \delta(T_i u_i)$



با ثابت نگه داشتن T_i، به u_i تغییرات می‌دهیم

$\Leftarrow$ δw_s تابعی از u_i می‌باشد

$T_1\,\delta u_1 = \delta w_s(u_1)$ (δw_s نوعی از کار است که تابع u می‌باشد)

$$\int_V u\,dV = U \Rightarrow u\,dV = dU \Rightarrow \boxed{u = \frac{dU}{dV}}$$

چگالی انرژی کرنشی

$$\oint_s \delta w_s \, ds + \int_v \delta w_v \, dV = \int_v \delta u \, dV$$

$$\delta \oint_s w_s \, ds + \delta \int_v w_v \, dV = \delta \int_v u \, dV$$

$$\underbrace{\delta W_s}_{\text{کار ناشی از نیروهای سطحی}} + \underbrace{\delta W_v}_{\text{کار ناشی از نیروهای حجمی}} = \delta U$$

$$\Rightarrow \delta W = \delta U \Rightarrow \delta U - \delta W = 0$$

انرژی پتانسیل کل : $U - W = \pi \Rightarrow \delta\pi = 0$

◄ انرژی پتانسیل کل باید اکسترمم شود. چون max انرژی، بینهایت است در نتیجه انرژی پتانسیل باید مینیمم گردد

$$\delta\pi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial u_i} = 0$$

← min کردن انرژی پتانسیل مشابه نوشتن معادلات تعادل و معادلات سازگاری است:

← جسمی در حال تعادل است که انرژی پتانسیل آن min باشد.

← اگر نیرو در جهت خودش حرکت کند، انرژی پتانسیل آن کاهش می یابد. در نتیجه کار ناشی از نیروهای خارجی منفی است.

$$\delta\pi = \frac{\partial \pi}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial \pi}{\partial u_2}\delta u_2 + \frac{\partial \pi}{\partial u_3}\delta u_3$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta_1} d\delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \delta_2} d\delta_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \delta_n} d\delta_n = P_1 d\delta_1 + \dots + P_n d\delta_n$$

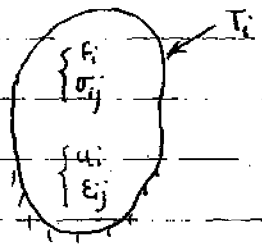
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i}$$ قضیه اول کاستیلیانو

در نقطه‌ای قضیه اول کاستیلیانو

$$\delta u = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\,\delta\varepsilon_{ij} \rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}}$$

جسم الاستیک خطی (و غیر الاستیک)

◀ قضیه اصل انرژی مکمل

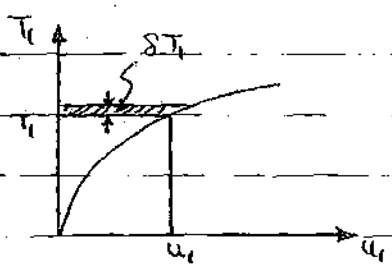


$(\delta T_i , \delta F_i , \delta \sigma_{ij})$ (ε_{ij} , u_i)

قضیه کار مجازی را می‌نویسیم :

$$\underbrace{\oint_S (\delta T_i)\, u_i \, dS}_{\delta W_s^*} + \underbrace{\int_V (\delta F_i)\, u_i \, dV}_{\delta \omega_v^*} = \underbrace{\int_V (\delta \sigma_{ij})\, \varepsilon_{ij} \, dV}_{\delta u^*}$$

جزء کار سطحی مکمل



$$\delta \int_S \omega_s^* \, dS + \delta \int_V \omega_v^* \, dV = \delta \int_V u^* \, dV$$

$$\delta W_s^* + \delta W_v^* = \delta U^*$$

$$W_s^* + W_v^* = W^* \Rightarrow \delta W^* = \delta U^*$$

$$\Rightarrow \delta U^* - \delta W^* = 0 \xrightarrow[\text{انرژی مکمل کل}]{U^* - W^* = \pi^*} \delta \pi^* = 0$$

$$\delta \pi^* = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \pi^*}{\partial P_1} = 0 & \Longleftrightarrow \dfrac{\partial U^*}{\partial P_1} = \Delta_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \pi^*}{\partial P_n} = 0 \end{cases}$$

قضیه دوم کاستیلیانو

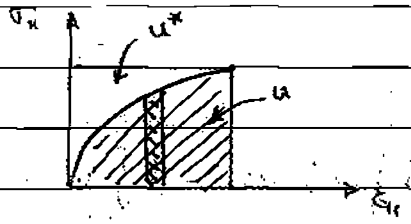
در یک سیستم سازه‌ای باید انرژی مکمل کل ، حداقل گردد.

$$\delta u^* = \varepsilon_{ij} (\delta \sigma_{ij}) \quad (\text{چگالی انرژی مکمل} : u^*)$$

$$\delta u^* = \frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{ij}} (\delta \sigma_{ij}) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \rightarrow u(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

$$du^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \rightarrow u(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}$$



$$u + u^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

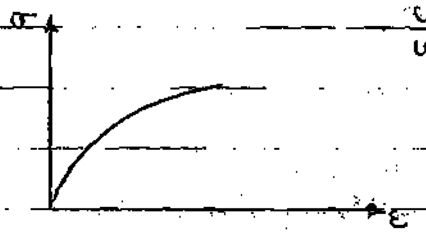
$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad , \quad u + u^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{mn}} + \frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta_{in} \delta_{jm}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{mn}} = \sigma_{mn} \quad , \quad \sigma_{ij}\,\delta_{in}\,\delta_{jn} = \sigma_{mn}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{ij}} - \varepsilon_{ij}\right)\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}}$$

مثال ۱) مقدار u و u^* را بدست آورید و همچنین نسبت $\frac{u}{u^*}$



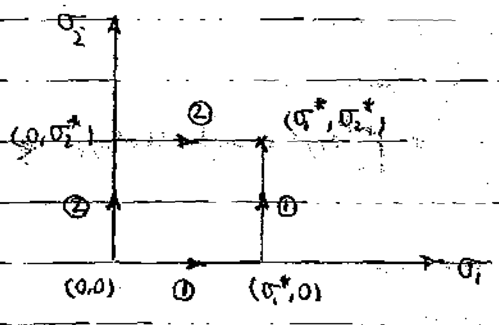
$$\sigma = A\,\varepsilon^n$$

$$u = \int_0^{\varepsilon} \sigma\, d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} A\,\varepsilon^n\, d\varepsilon = \frac{A}{n+1}\,\varepsilon^{n+1}$$

$$u^* = \int_0^{\sigma} \varepsilon\, d\sigma = \int_0^{\sigma} \varepsilon\, n A\, \varepsilon^{n-1}\, d\varepsilon = \frac{n}{n+1}\,\varepsilon^{n+1}$$

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{u^* = n\,u}$$

مثال ۲)



جسم الاستیک خطی
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2 \\ \varepsilon_2 = a_{21}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2 \end{cases}$$

$$u_1^* = \int_0^{\sigma_{ij}^*} \varepsilon_{ij}\, d\sigma_{ij} = \int_0^{\sigma_1^*} (\varepsilon_1\, d\sigma_1) + \int_0^{\sigma_2^*} (\varepsilon_2\, d\sigma_2)$$

$$u_1^* = \int_0^{\sigma_1^*} (a_{11}\sigma_1)\, d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2^*} (a_{21}\sigma_1^* + a_{22}\sigma_2)\, d\sigma_2$$

$$u_1^* = \frac{1}{2} a_{11} \sigma_1^{*2} + a_{21} \sigma_1^* \sigma_2^* + \frac{1}{2} a_{22} \sigma_2^{*2}$$

$$u_2^* = \int_0^{\sigma_2^*} \varepsilon_1 \cancel{d\sigma_1} + \varepsilon_2 \, d\sigma_2 + \int_0^{\sigma_1^*} \varepsilon_1 \, d\sigma_1 + \varepsilon_2 \cancel{d\sigma_2}$$

$$= \int_0^{\sigma_2^*} (a_{22} \sigma_2) \, d\sigma_2 + \int_0^{\sigma_1^*} (a_{11} \sigma_1 + a_{12} \sigma_2^*) \, d\sigma_1$$

$$= \frac{1}{2} a_{22} \sigma_2^{*2} + \frac{1}{2} a_{11} \sigma_1^{*2} + a_{12} \sigma_1^* \sigma_2^*$$

$\Rightarrow \quad u_1^* \neq u_2^*$ چگالی انرژی کرنشی در دو مسیر مختلف متفاوت است.

⇐ با اینکه جسم کوشی الاستیک و خطی است ولی چگالی انرژی کرنشی به مسیر بارگذاری بستگی دارد.

$$u_1^* - u_2^* = (a_{12} - a_{21}) \sigma_1^* \sigma_2^*$$

انرژی ذخیره شده در جسم کوشی به مسیر بارگذاری بستگی دارد. در نتیجه اگر ماتریس ضرایب متقارن نباشد

یعنی جسم الاستیک کوشی داریم

◄ $u(\varepsilon_{ij})$ را بسط می‌دهیم.

$$u(\varepsilon_{ij}) = C_0 + \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \beta_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \cdots$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = 0 \\ u = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_0 = 0}$$

$$\sigma_{nm} = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{nm}} = \alpha_{ij} \delta_{in} \delta_{jm} + \frac{1}{2} \beta_{ijkl} \delta_{in} \delta_{jm} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \beta_{ijkl} \varepsilon_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm}$$

Subject:
Year. Month. Date. 109

$$\Rightarrow \sigma_{nm} = \alpha_{nm} + \frac{1}{2}\beta_{nmkl}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}\beta_{ijnm}\varepsilon_{ij}$$

فرض می‌کنیم تنش پسماند نداریم $\rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{ij} = 0 \\ \sigma_{ij} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_{nm} = 0$

$$\Rightarrow \sigma_{nm} = \frac{1}{2}(\beta_{nmkl} + \beta_{klmn})\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(\beta_{ijkl} + \beta_{klij})}_{C_{ijkl}}\varepsilon_{kl} \Rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}}$$

$\boxed{C_{ijkl} = C_{klij}}$ C_{ijkl} نسبت به (ij) و (kl) متقارن است

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \underset{\sigma_{ij}=\sigma_{ji}}{=} C_{jikl}\varepsilon_{kl} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijlk}\varepsilon_{lk}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}} C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijlk}\varepsilon_{kl} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

← با در نظر گرفتن تقارن های ذکر شده برای C_{ijkl} ، تعداد درایه های آن به ۳۶ می‌رسد

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \Rightarrow \sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33}$$

$$+ 2C_{1112}\varepsilon_{12} + 2C_{1113}\varepsilon_{13} + 2C_{1123}\varepsilon_{23}$$

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\
 & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\
 & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\
 & & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\
 & & & & C_{1313} & C_{1323} \\
 & & & & & C_{2323}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}
$$

$$\sigma_{11} = \overbrace{C_{1111}}^{a_{11}} \varepsilon_{11} + \overbrace{C_{1122}}^{a_{12}} \varepsilon_{22}$$

$$\rightarrow \quad C_{1122} = C_{2211}$$

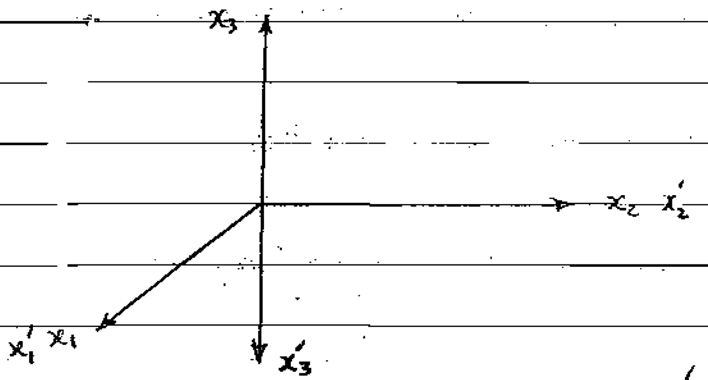
$$\sigma_{22} = \overbrace{C_{2211}}^{a_{21}} \varepsilon_{11} + \overbrace{C_{2222}}^{a_{22}} \varepsilon_{22}$$

← وقتی جسم ما ضرایب الاستیسیتی متقارن باشد ، ۲۱ در آن تعریف شده است .

◄ منوکلینیک Monoclinic

اگر جسم رفتارش نسبت به یک محور ایزوتروپ باشد به آن جسم مونوکلینیک گفته می‌شود. یعنی

یک محور ایزوتروپی دارد.



در اینجا محور ایزوتروپی x_3 است یعنی

جسم ما در جهت x_3 یا در خلاف آن (x'_3)

رفتار یکسانی نشان می‌دهد ($C'_{ijkl} = C_{ijkl}$)

در دستگاه x_1, x_2, x_3 : $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

ماتریس تبدیل $[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $[\sigma'] = [a][\sigma][a]^T$

در دستگاه x'_1, x'_2, x'_3 : $[\sigma'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon'_{kl} \quad , \quad \sigma'_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon'_{kl}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33} + 2C_{1112}\varepsilon_{12} + 2C_{1113}\varepsilon_{13} + 2C_{1123}\varepsilon_{23} \\ \sigma'_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33} + 2C_{1112}\varepsilon_{12} - 2C_{1113}\varepsilon_{13} - 2C_{1123}\varepsilon_{23} \end{cases}$$

$$\sigma_{11} = \sigma'_{11} \Rightarrow C_{1113} = 0 \quad , \quad C_{1123} = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{22} = C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22} + C_{2233}\varepsilon_{33} + 2C_{2212}\varepsilon_{12} + 2C_{2213}\varepsilon_{13} + 2C_{2223}\varepsilon_{23} \\ \sigma'_{22} = C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22} + C_{2233}\varepsilon_{33} + 2C_{2212}\varepsilon_{12} - 2C_{2213}\varepsilon_{13} - 2C_{2223}\varepsilon_{23} \end{cases}$$

$$\sigma_{22} = \sigma'_{22} \Rightarrow C_{2213} = 0 \quad , \quad C_{2223} = 0$$

$$\sigma_{33} = \sigma'_{33} \Rightarrow C_{3313} = 0 \quad , \quad C_{3323} = 0$$

$$\sigma_{12} = \sigma'_{12} \Rightarrow C_{1213} = 0 \quad , \quad C_{1223} = 0$$

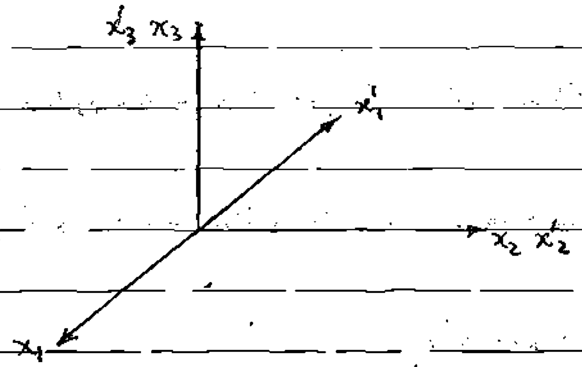
← جسم مونوکلینیک دارای (21 − 8 = 13) ضریب مستقل است.

یعنی دارای یک صفحهٔ تقارن در رفتار می‌باشد.

$$C'_{ijkl} = a_{ir}a_{js}a_{kt}a_{lu}C_{rstu}$$

$$C_{1111} = C'_{1111} = a_{1r}a_{1s}a_{1t}a_{1u}C_{rstu} = C_{1111}$$

$$C_{1113} = C'_{1113} = a_{1r}a_{1s}a_{1t}a_{3u}C_{rstu} = -C_{1113} \Rightarrow C_{1113} = 0$$



◄ حال فرض می‌کنیم جسم علاوه بر محور x_3

نسبت به محور x_2 نیز ایزوتروپ است. (ایزوتروپی در جهت x_1)

$$[a] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. 113

$$[\sigma'] = [a][\sigma][a]^T$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{23} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33} + 2C_{1112}\varepsilon_{12} \\ \sigma'_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33} - 2C_{1112}\varepsilon_{12} \end{cases}$$

$$\sigma_{11} = \sigma'_{11} \Rightarrow C_{1112} = 0$$

← در این حالت ضرایبی که تعداد ۱ آنها فرد باشد برابر صفر هستند

$$C_{2212} = 0 \qquad C_{2312} = 0 \qquad C_{1323} = 0$$

← اگر رفتار جسم ما در جهت x_2 نیز ایزوتروپ باشد، ضرایب بیشتری صفر خواهند شد.

← اگر رفتار جسمی نسبت به دو صفحه متعامد متقارن باشد نسبت به صفحه سوم نیز متقارن است ← بنابراین جسمی که نسبت به دو صفحه یا سه صفحه متقارن است (در سه جهت عمود بر هم ایزوتروپ می‌باشد) جسم ارتوتروپ گفته می‌شود.

Homa

Subject:
Year. Month. Date. 114

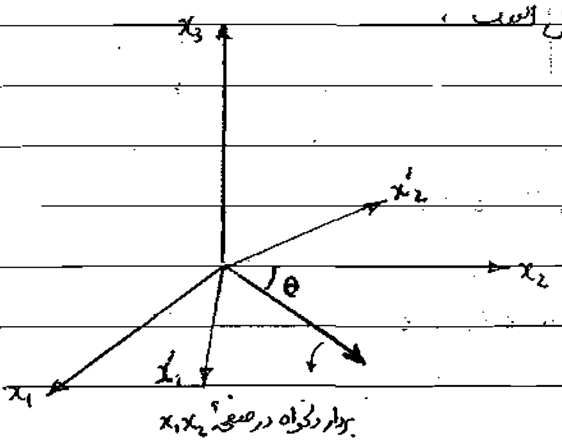
◀ ایزوتروپ جانبی Transversely Isotropic

یعنی جسم ما در یک صفحه ایزوتروپ باشد. مفهوم ایزوتروپی در صفحه این است که رفتار جسم در جهات مختلف در صفحه یکسان است.

⇐ جسم ایزوتروپ جانبی حتماً ارتوتروپ نیز هست.

بنابراین از همان ابتدا جسم دارای ۹ ضریب مستقل است.

حال بقیه ضرایب را مورد بررسی قرار می‌دهیم:



$$C'_{ijkl} = a_{ir}\, a_{js}\, a_{kt}\, a_{lu}\, C_{rstu}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} C\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C'_{1111} = C_{1111} = a_{1r}\, a_{1s}\, a_{1t}\, a_{1u}\, C_{rstu} \Rightarrow C^4\theta\, C_{1111} + 2\sin^2\theta\, C^2\theta\, C_{1122}$$

$$+\, 4\sin^2\theta\, C^2\theta\, C_{1212}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - C^4\theta)}_{\sin^2\theta(1+C^2\theta)} C_{1111} + 2\sin^2\theta\, C^2\theta\, C_{1122} + \sin^2\theta(1 - C^2\theta)\, C_{2222} + 4\sin^2\theta\, C^2\theta\, C_{1212} = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta\, C_{1111} + \sin^2\theta\, C_{2222} + \sin^2\theta\, C^2\theta\,(-C_{1111} + 2C_{1122}\;\; C_{2222} + 4C_{1212}) = 0$$

⇐ به دو معادله می‌رسیم:

Homa

$$\boxed{C_{1111} = C_{2222}} \quad ; \quad \boxed{C_{1212} = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2}}$$

$$C'_{1133} = a_{1r} a_{1s} a_{3t} a_{3u} C_{rstu} = C^2\theta \, C_{1133} + \sin^2\theta \, C_{2233} = C_{1133}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - C^2\theta)}_{\sin^2\theta} C_{1133} + \sin^2\theta \, C_{2233} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{1133} = C_{2233}}$$

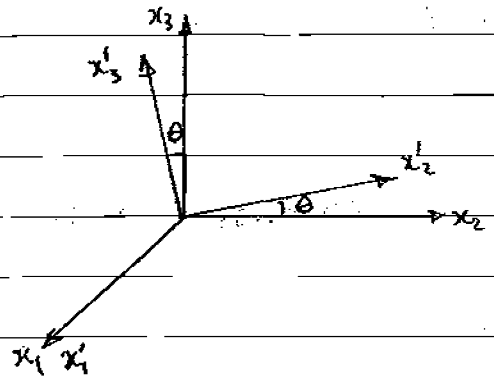
$$C'_{1313} = C_{1313} = a_{1r} a_{3s} a_{1t} a_{3u} C_{rstu} = C^2\theta \, C_{1313} + \sin^2\theta \, C_{2323}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{1313} = C_{2323}}$$

⇐ جسم ایزوتروپ جانبی دارای 5 ضریب مستقل است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

◄ حال فرض می‌کنیم جسم نسبت به صفحهٔ x_2x_3 نیز ایزوتروپ باشد.



$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

$$C'_{ijkl} = a_{ir}\, a_{js}\, a_{kt}\, a_{lu}\, C_{rstu}$$

$$C'_{1122} = C_{1122} = a_{1r}\, a_{1s}\, a_{2t}\, a_{2u}\, C_{rstu} = C^2\theta\, C_{1122} + \sin^2\theta\, C_{1133}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{1122} = C_{1133}}$$

$$C'_{3333} = C_{3333} = a_{3r}\, a_{3s}\, a_{3t}\, a_{3u}\, C_{rstu} = C^4\theta\, C_{3333} + \sin^4\theta\, C_{2222}$$

$$+ 2\sin^2\theta\, C^2\theta\, C_{2233} + 4\sin^2\theta\, C^2\theta\, C_{2323}$$

$$\Rightarrow C_{2222} = C_{3333} \Rightarrow \boxed{C_{3333} = C_{1111}}$$

$$\Rightarrow C_{2323} = \frac{C_{1111} - C_{1133}}{2} \Rightarrow C_{1313} = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2}$$

اگر جسم نسبت به صفحه x_1x_3 نیز ایزوتروپ باشد، رابطه جدیدی بدست می‌آوریم و فقط دو ثابت مستقل باقی می‌ماند.

← اگر جسمی در دو صفحه عمود بر هم ایزوتروپ باشد، رفتار آن در هر صفحه دیگری نیز ایزوتروپ است.

ماتریس ضرایب برای جسم ایزوتروپ به صورت زیر خواهد بود :

$$
\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\
 & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\
 & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \frac{C_{1111}-C_{1122}}{2} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{C_{1111}-C_{1122}}{2} & 0 \\
 & & & & & \frac{C_{1111}-C_{1122}}{2}
\end{bmatrix}
$$

که در حالت تئوری در هر جسمی این ضرایب می‌توانند متفاوت باشند و مقدارها از 0 تا ∞ است.

اگر همهٔ ضرایب در جسمی ∞ باشد یعنی جسم ما کاملاً صلب است.

$$C_{1122} = \lambda \quad ; \quad \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2} = \mu \rightarrow C_{1111} = 2\mu + \lambda$$

! به μ و λ ضرایب لامه (یا ضرایب الاستیسیته) گفته می‌شود

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
 & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
 & & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \mu & 0 & 0 \\
 & & & & \mu & 0 \\
 & & & & & \mu
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}
$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{kk} \\ \sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{kk} \\ \sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\varepsilon_{kk} \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} \\ \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}}$$

رابطه تنش - کرنش

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \quad ; \quad C_{ijkl} = \alpha\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\,\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\,\delta_{il}\delta_{jk}$$

چون ضریب C_{ijkl} ایزوتروپ است به این صورت نوشته می‌شود.

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = (\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk})\,\varepsilon_{kl}$$

$$= \alpha\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \beta\varepsilon_{ij} + \gamma\varepsilon_{ji} = (\beta+\gamma)\varepsilon_{ij} + \alpha\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$\alpha = \lambda \quad , \quad \beta + \gamma = 2\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}}$$

$$\sigma_{kk} = 2\mu\varepsilon_{kk} + 3\lambda\varepsilon_{kk} = (2\mu + 3\lambda)\,\varepsilon_{kk}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{kk} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\,\sigma_{kk}}$$

$$2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\,\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\,\sigma_{kk}\delta_{ij}}$$

۳- آزمایش کشش ساده

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$ از روی آزمایش میدانیم

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{11} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{11} = \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{E} = \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)}}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} \Rightarrow \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}$$

$$\Rightarrow \nu \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}}$$

$$E = \frac{2\mu(\mu+\lambda)+\mu\lambda}{\mu+\lambda} = 2\mu + \mu\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

$$\Rightarrow E = 2\mu + 2\nu\mu = 2\mu(1+\nu) \rightarrow \boxed{\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

$$2\nu = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2\nu} = \frac{\mu+\lambda}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{2\nu} - 1 = \frac{1-2\nu}{2\nu} \rightarrow \lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu}\,\frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

ضرایب لامه μ و λ را برحسب E و ν بدست آوردیم. حال این ضرایب را در رابطه تنش کرنش جایگزین می‌کنیم:

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}}$$

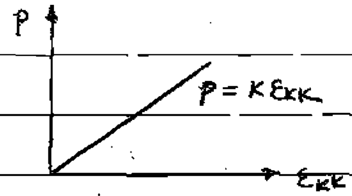
$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}}$$

• آزمایش تنش هیدرواستاتیک

$$\sigma_{kk} = (2\mu + 3\lambda)\,\varepsilon_{kk}$$

$$p = \frac{\sigma_{kk}}{3} \Rightarrow p = \frac{2\mu+3\lambda}{3}\varepsilon_{kk}$$

$$p = K\varepsilon_{kk} \rightarrow \underbrace{K = \frac{2\mu+3\lambda}{3}}_{\text{مدول حجمی}}$$

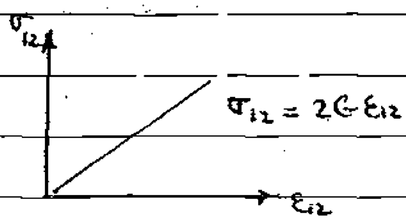


• آزمایش برش ساده

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{E}$$

G : مدول برشی



$$p = K\varepsilon_{kk}$$

$$* \quad \sigma_{ij} = S_{ij} + p\delta_{ij} \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = s_{ij} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow S_{ij} + p\,\delta_{ij} = 2\mu\, s_{ij} + 2\mu \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} + \lambda\, \varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow S_{ij} + \cancel{p\delta_{ij}} = 2\mu\, s_{ij} + \cancel{\frac{2\mu+3\lambda}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}}$$

$$\Rightarrow S_{ij} = 2\mu\, s_{ij} = 2G\, s_{ij}$$

$$\boxed{p = K\,\varepsilon_{kk}} \qquad \boxed{S_{ij} = 2G\, s_{ij}}$$

حدود ν, K, G, E ◄

آزمایش کشش ساده :
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E\varepsilon_{11} = \sigma_{11}$$

طبیعت $\sigma_{11} > 0 \rightarrow \varepsilon_{11} > 0 \Rightarrow E > 0$

آزمایش برش ساده :
$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{12} > 0 \rightarrow \varepsilon_{12} > 0 \Rightarrow G > 0$$

آزمایش کشش هیدرواستاتیک :
$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \qquad p = K\,\varepsilon_{kk}$$

$p > 0 \rightarrow \varepsilon_{kk} > 0 \Rightarrow K > 0$

آزمایش هیدرواستاتیک کششی باشد، تغییر حجم مثبت است

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \rightarrow (1+\nu) > 0 \rightarrow \nu > -1$$

$$K = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 \rightarrow (1-2\nu) > 0 \rightarrow \nu < 1/2$$

$$\Rightarrow -1 < \nu < 1/2$$

ν منفی در طبیعت دیده نشده است. (یعنی دیده نشده با کشیدن در یک جهت، جسم در جهت دیگر باز شود)

$$\boxed{0 < \nu < 1/2}$$

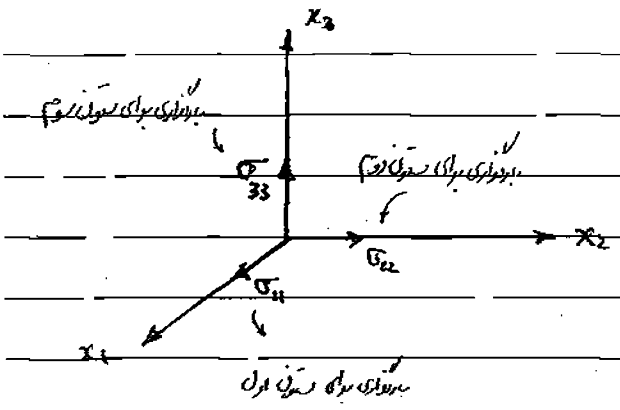
◄ اگر K بی‌نهایت باشد، یعنی جسم تغییر حجم نمی‌دهد.

(به ازای $\nu = \frac{1}{2}$ ، K بی‌نهایت می‌شود.)

تمرین) با توجه به مثبت بودن چگالی انرژی کرنش، حدود ν را بدست آورید. $u = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$
یعنی ماتریس الاستیسیته مثبت معین است

◄ رابطه تنش ـ کرنش برای ایزوتروپ جانبی

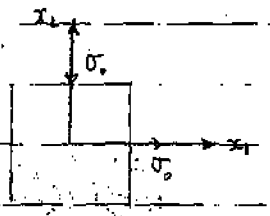
✓ جسم ما در صفحه x_1x_2 ایزوتروپ جانبی است.



σ_{12} ← بردار برای ستون ۴ ضرایب
σ_{13} ← " " " ۵ "
σ_{23} ← " " " ۶ "

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{\nu}{E} & \frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu'}{E'} & \frac{\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

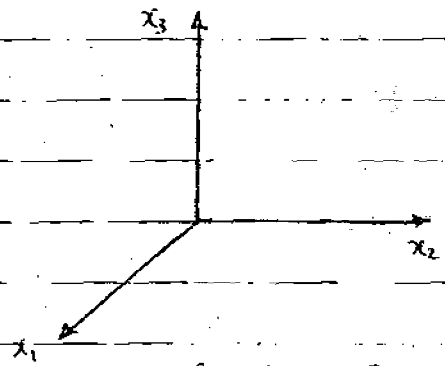
تمرین) ثابت کنید در این حالت $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



راهنمایی: محورها را 45° می‌چرخانیم و برش‌ها را می‌نویسیم

! چون صفحه‌های $x_1 - x_3$ و $x_2 - x_3$ ایزوتروپ نیستند، G'، E' و ν' مستقل از هم هستند

◄ رابطهٔ تنش کرنش برای جسم اورتوتروپ



ν_{ij}: بارگذاری ، اندازه‌گیری

بارگذاری در جهت i
اندازه‌گیری در جهت j

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

ماتریس ضرایب بایستی متقارن باشد، درنتیجه داریم :

$$\nu_{12} E_2 = \nu_{21} E_1$$
$$\nu_{13} E_3 = \nu_{31} E_1$$
$$\nu_{23} E_3 = \nu_{32} E_2$$

• ضرایب مستقل برای جسم ارتوتروپ

$$E_1 , E_2 , E_3 , \nu_{12} , \nu_{13} , \nu_{23} , G_{12} , G_{13} , G_{23}$$

چگالی انرژی کرنشی

$$u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0$$

$$u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} D_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} > 0$$

$[\varepsilon]^T [C] [\varepsilon] > 0 \rightarrow$ $[C]$ مثبت معین است

$[\sigma]^T [D] [\sigma] > 0 \rightarrow$ $[D]$ مثبت معین است

برای جسم ایزوتروپ داریم :

$$u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{kk}^2$$

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left(2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2$$

$$u = \frac{1}{2}(S_{ij} + p\delta_{ij})\left(s_{ij} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}\right) = \underbrace{\frac{1}{2} S_{ij}\, s_{ij}}_{\text{چگالی انرژی کرنشی انحراف آور } (U_d)} + \underbrace{\frac{1}{2} p\, \varepsilon_{kk}}_{\text{چگالی انرژی حجمی } (U_v)}$$

$$\Rightarrow \quad u = U_d + U_v$$

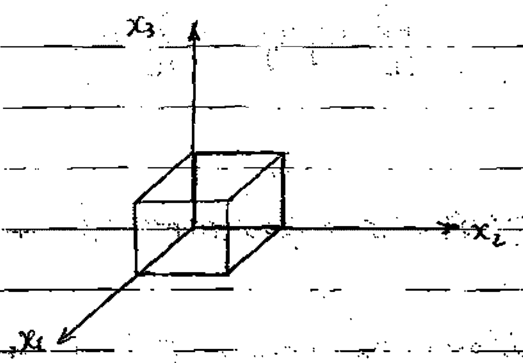
$$U_d = \frac{1}{2} S_{ij}\, s_{ij} = \mu\, s_{ij}\, s_{ij} = \frac{1}{4\mu} S_{ij} S_{ij} = 2\mu J_2' = \frac{J_2}{2\mu}$$

در جسم ایزوتروپ : $\boxed{J_2 = 4\mu^2 J_2'}$

$$U_v = \frac{1}{2} p\, \varepsilon_{kk} = \frac{K}{2} \varepsilon_{kk}^2 = \frac{1}{18K} \sigma_{kk}^2$$

◀ اثرات درجهٔ حرارت

فرض می‌کنیم جسم ما ایزوتروپ باشد و اثرات تغییر درجه حرارت را در رابطهٔ تنش ـ کرنش بررسی می‌کنیم



$$\varepsilon_{11}^t = \alpha(\Delta T)$$
$$\varepsilon_{22}^t = \alpha(\Delta T)$$
$$\varepsilon_{33}^t = \alpha(\Delta T)$$
$$\varepsilon_{12}^t = 0$$
$$\varepsilon_{13}^t = 0$$
$$\varepsilon_{23}^t = 0$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij}^t = \alpha(\Delta T)\,\delta_{ij}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{t}$$

ε_{ij}^{e} : کرنش الاستیک (ناشی از تنش)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \alpha(\Delta T)\,\delta_{ij}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha(\Delta T)\delta_{ij}}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij}^{e} + \lambda\,\varepsilon_{kk}^{e}\,\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left[\varepsilon_{ij} - \alpha(\Delta T)\delta_{ij}\right] + \lambda\left[\varepsilon_{kk} - 3\alpha(\Delta T)\right]\delta_{ij}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} - (2\mu+3\lambda)\,\alpha(\Delta T)\,\delta_{ij}}$$

$$* \quad u = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \alpha(\Delta T)\delta_{ij}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - (2\mu+3\lambda)\alpha(\Delta T)\delta_{ij}\right]\left(\varepsilon_{ij} - \alpha(\Delta T)\delta_{ij}\right)$$

$$* \quad u = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) = \frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E}\sigma_{kk}^{2}$$

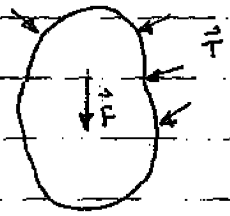
← برای جسم ایزوتروپیک صفحه‌ای برای صفحهٔ ایزوتروپ α و برای صفحات دیگر α' داریم.

← برای جسم اورتوتروپ در جهت سه محور، سه α مختلف داریم. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

← در اینجا فرض می‌کنیم E و ν با تغییر درجه حرارت تغییر نمی‌کنند. (اگر تغییر کنند، مسئله غیرخطی می‌شود)

Homa

فصل پنجم ــ معادلات لازم برای حل مسائل تئوری ارتجاعی



$S = S_T$ شرایط مرزی نیرویی (شرایط مرزی نیومن)

$S = S_u$ شرایط مرزی تغییرمکانی (شرایط مرزی دیریکله)

$S = S_T \cup S_u$

$S = S_T \cup S_u \cup S_{Tu}$

شرایط مرزی نیرویی و تغییرمکانی (مثلاً در یک نقطه در یک جهت تغییرمکان گرفته شده باشد

و در دو جهت به آن نیرو وارد شود)

← باید توجه داشته باشیم در یک نقطه از جسم ، هم نیرو و هم تغییرمکان معلوم نیست . یعنی امکان ندارد

در یک نقطه شرایط مرزی نیرویی و تغییرمکانی معلوم باشد

← ولی ممکن است در یک نقطه نیرو و تغییرمکان با هم رابطه ای داشته باشند که با S_{Tu} نشان می‌دهیم

← در اینجا دو دسته معادله داریم . از یکی تغییرمکان‌ها را بدست می‌آوریم و از یکی نیروها را

← معادله تعادل

$$\text{تعادل}\begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 & \forall \text{ در } V \\ \sigma_{ij}\, n_j = T_i & \text{روی } S_T \end{cases}$$

مرزی
$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{در } V \\ u_i = u_i^d & \text{روی } S_T \end{cases}$$

هندسی $\quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \quad$ در V

← اگر معادلات تعادل را برحسب u بنویسیم، معادلات ناویر حاصل می‌شود:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} - (2\mu + 3\lambda)\,\alpha(\Delta T)$$

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda\,u_{k,k}\,\delta_{ij} - (2\mu + 3\lambda)\,\alpha(\Delta T)\,\delta_{ij}$$

معادله تعادل $\rightarrow \quad \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda\,u_{k,ki} - (2\mu + 3\lambda)\,\alpha(\Delta T)_{,i} + f_i = 0$

$$\rightarrow \mu\,u_{i,jj} + (\mu + \lambda)\,u_{k,ki} - (2\mu + 3\lambda)\,\alpha(\Delta T)_{,i} + f_i = 0$$

$$\mu\,\nabla^2 u_i + (\mu + \lambda)\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (2\mu + 3\lambda)\,\alpha\,\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta T) + f_i = 0$$

$$\xrightarrow{\times\,\vec{e}_i} \quad \mu\,\nabla^2\vec{u} + (\mu + \lambda)\,\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (2\mu + 3\lambda)\,\alpha\,\vec{\nabla}(\Delta T) + \vec{f} = 0$$

شکل اندیسی معادلات ناویر
$$\boxed{\mu\,\nabla^2 u_i + (\mu + \lambda)\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (2\mu + 3\lambda)\,\alpha\,\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta T) + f_i = 0}$$

شکل برداری معادلات ناویر
$$\boxed{\mu\,\nabla^2\vec{u} + (\mu + \lambda)\,\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (2\mu + 3\lambda)\,\alpha\,\vec{\nabla}(\Delta T) + \vec{f} = 0}$$

$$T_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})n_j + \lambda u_{k,k} n_i - (2\mu+3\lambda)\alpha(\Delta T) n_i$$

$$T_i + (2\mu+3\lambda)\alpha(\Delta T) n_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})n_j + \lambda u_{k,k} n_i$$

نیروی حجمی معادل درجه حرارت : $(2\mu+3\lambda)\alpha\vec{\nabla}(\Delta T)$

نیروی سطحی معادل درجه حرارت : $(2\mu+3\lambda)\alpha(\Delta T)n_i$

◄ وقتی در مسئله‌ای درجه حرارت داریم ، عیناً مشابه مسئله نیرویی آن را حل می‌کنیم. درجه حرارت هم در شرایط مرزی تأثیر می‌گذارد و هم در نیروی حجمی.

◄ معادله بلترامی - میشل

وقتی مجهولات ما تغییر مکانی باشند باید از معادله تعادل استفاده کنیم و وقتی مجهولات ، نیرویی باشند از معادلات سازگاری استفاده می‌کنیم.

با استفاده از یکی از معادلات سازگاری در حالت مسئله ایزوتروپ به معادله بلترامی میشل می‌رسیم :

$$* \quad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}$$

مسئله ایزوتروپ : $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha(\Delta T)\delta_{ij}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} + \alpha(\Delta T) \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \alpha(\Delta T) \\ \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_3^2} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \alpha\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_3^2}$$

$$+\frac{1}{E}\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_2^2} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \alpha\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_2^2} \quad (*)$$

← رابطهٔ بالا را در E ضرب کرده و در ادامه از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم :

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\sigma_{13}}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad (II)$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{13}}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0 \quad (III)$$

$$-(I)+(II)+(III) \rightarrow 2\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

← رابطهٔ بدست آمده را در $(1+\nu)$ ضرب کرده و به جای $2(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x_2\partial x_3}$ در طرف چپ رابطهٔ $(*)$

را قرار می‌دهیم :

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu\cancel{\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}} - \nu\cancel{\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_3^2}}$$

$$+(1+\nu)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_3^2} - \nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_3^2} - \nu\cancel{\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_3^2}}$$

$$+\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_2^2} - \nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu\cancel{\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}} + \alpha E\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_2^2} + \alpha E\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_3^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\sigma_{11} - \frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_2^2}$$

$$+\nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_3^2} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)$$

$$+\alpha E\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_2^2} + \alpha E\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_3^2}$$

$$\Rightarrow (1+\nu)\nabla^2\sigma_{11} - \frac{\partial^2\sigma_{KK}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\sigma_{KK}}{\partial x_3^2} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)$$

$$+\alpha E\nabla^2(\Delta T) - \alpha E\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_1^2}$$

$$\rightarrow (1+\nu)\nabla^2\sigma_{11} - \nabla^2\sigma_{KK} + \frac{\partial^2\sigma_{KK}}{\partial x_1^2} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)$$

$$+\alpha E\nabla^2(\Delta T) - \alpha E\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_1^2}$$

بطور مشابه داریم : $(1+\nu)\nabla^2\sigma_{22} - \nabla^2\sigma_{KK} + \frac{\partial^2\sigma_{KK}}{\partial x_2^2} = -(1+\nu)\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)$

$$+\alpha E\nabla^2(\Delta T) - \alpha E\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_2^2}$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{33} - \nabla^2\sigma_{kk} + \frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_3^2} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)$$

$$+ \alpha E\,\nabla^2(\Delta T) - \alpha E\,\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_3^2}$$

← سه رابطهٔ بدست آمده را باهم جمع می‌کنیم :

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{kk} - 3\nabla^2\sigma_{kk} + \nabla^2\sigma_{kk} = (1+\nu)(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) + 3\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

$$- \alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

$$\Rightarrow -(1-\nu)\nabla^2\sigma_{kk} = (1+\nu)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + 2\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

$$\boxed{\nabla^2\sigma_{kk} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} - \frac{2}{1-\nu}\,\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)}$$

$$* \quad (1+\nu)\nabla^2\sigma_{11} + \frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_1^2} + \alpha E\,\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_1^2} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) + \alpha E\,\nabla^2(\Delta T) + \nabla^2\sigma_{kk}$$

$$\rightarrow (1+\nu)\nabla^2\sigma_{11} + \frac{\partial^2\left[\sigma_{kk} + \alpha E\,(\Delta T)\right]}{\partial x_1^2} = -(1+\nu)\left(\frac{2\partial f_1}{\partial x_1} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) + \alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

$$- \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} - \frac{2}{1-\nu}\,\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

$$\div(1+\nu) \rightarrow \nabla^2\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\,\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\sigma_{kk} + \alpha E(\Delta T)\right] = -2\,\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\nu}{1-\nu}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

$$- \frac{1}{1-\nu}\,\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

⇐ معادلات بلترامی میشل به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\nabla^2\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\sigma_{kk} + \alpha E(\Delta T)\right] = -2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\nu}{1-\nu}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} - \frac{1}{1-\nu}\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

$$\nabla^2\sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\sigma_{kk} + \alpha E(\Delta T)\right] = -2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\nu}{1-\nu}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} - \frac{1}{1-\nu}\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

$$\nabla^2\sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left[\sigma_{kk} + \alpha E(\Delta T)\right] = -2\frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\nu}{1-\nu}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} - \frac{1}{1-\nu}\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)$$

$$\nabla^2\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[\sigma_{kk} + \alpha E(\Delta T)\right] = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

$$\nabla^2\sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\left[\sigma_{kk} + \alpha E(\Delta T)\right] = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}$$

$$\nabla^2\sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\left[\sigma_{kk} + \alpha E(\Delta T)\right] = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[\sigma_{kk} + \alpha E(\Delta T)\right] &= -\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \\ &\quad - \frac{\nu}{1-\nu}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,\delta_{ij} - \frac{1}{1-\nu}\alpha E\,\nabla^2(\Delta T)\,\delta_{ij}\end{aligned}}$$

← اگر تغییر حرارت نداشته باشیم، فرم کلی معادله بلترامی میشل به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i\partial x_j} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\nu}{1-\nu}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,\delta_{ij}$$

• فرض می‌کنیم نیروهای حجمی ناشی از یک تابع پتانسیل باشند یعنی $\vec{F} = \vec{\nabla}V$

• هم چنین فرض می‌کنیم این تابع پتانسیل هارمونیک باشد یعنی $\nabla^2 V = 0$

Subject:
Year. Month. Date. 134

◄ اگر $\nabla^4 V = 0$ باشد، تابع پتانسیل V، بی‌هارمونیک است.

$$\vec{F} = \vec{\nabla} V \rightarrow f_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad , \quad f_j = \frac{\partial V}{\partial x_j}$$

◄ از ... معادله اعمال می‌کنیم و داریم:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \quad \frac{\nu}{1} \quad \nabla$$

◄ با توجه به رابطه $\nabla^2 \sigma_{kk}$ را ...

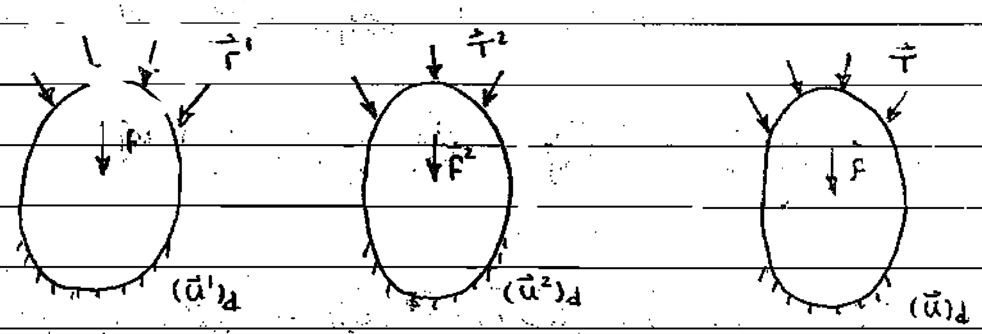
$$\nabla^2 \sigma_{kk} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \sigma_{kk} = 0$$

$\Leftarrow \sigma_{kk}$ ... هارمونیک است.

σ_{ij} تابع بی‌هارمونیک $\Rightarrow \nabla^4 \sigma_{ij} = 0$

$\nabla^4 \varepsilon_{ij} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \ldots = 0$

◄ اصل اجتماع آثار قوا



$$\begin{cases} \vec{T} = \vec{T}^1 + \vec{T}^2 \\ \vec{F} = \vec{F}^1 + \vec{F}^2 \\ (\vec{u})_d = (\vec{u}^1)_d + (\vec{u}^2)_d \end{cases}$$

σ_{ij}^1	σ_{ij}^2	$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2$
ε_{ij}^1	ε_{ij}^2	$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2$
u_i^1	u_i^2	$u_i = u_i^1 + u_i^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma^1_{ij,j} + F^1_i = 0 & \text{در } V \\ \sigma^1_{ij} n_j = T^1_i & \text{در } S_T \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma^2_{ij,j} + F^2_i = 0 & \text{در } V \\ \sigma^2_{ij} n_j = T^2_i & \text{در } S_T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^1_{ij} = \frac{1}{2}(u^1_{i,j} + u^1_{j,i}) & \text{در } V \\ u^1_i = (u^1_i)_d & \text{در } S_u \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon^2_{ij} = \frac{1}{2}(u^2_{i,j} + u^2_{j,i}) & \text{در } V \\ u^2_i = (u^2_i)_d & \text{در } S_u \end{cases}$$

$$\sigma^1_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon^1_{kl} \qquad\qquad \sigma^2_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon^2_{kl}$$

← حال دو معادله مربوط به محیط ۱ و 2 را با هم جمع می‌کنیم تا به نتیجه مورد نظر برسیم:

$$\begin{cases} (\sigma^1_{ij} + \sigma^2_{ij})_{,j} + F^1_i + F^2_i = 0 & \text{در } V \\ (\sigma^1_{ij} + \sigma^2_{ij})\, n_j = T^1_i + T^2_i & \text{در } S_T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^1_{ij} + \varepsilon^2_{ij} = \frac{1}{2}\left[(u^1_i + u^2_i)_{,j} + (u^1_j + u^2_j)_{,i}\right] & \text{در } V \\ u^1_i + u^2_i = (u^1_i)_d + (u^2_i)_d & \text{در } S_u \end{cases}$$

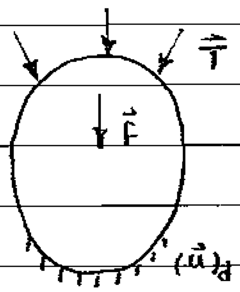
$$\sigma^1_{ij} + \sigma^2_{ij} = C_{ijkl}\,(\varepsilon^1_{kl} + \varepsilon^2_{kl})$$

! اصل انطباق آثار قوا فقط برای مسائلی صادق است که رفتار خطی می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 & \text{در } V \\ \sigma_{ij} n_j = T_i & \text{در } S_T \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{در } V \\ u_i = (u_i)_d & \text{در } S_u \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad \text{در } V$$

اصل جواب واحد



فرض می‌کنیم محیط در نظر گرفته شده دارای دو جواب باشد.

$$\begin{cases}\sigma_{ij}^{1}\\ \varepsilon_{ij}^{1}\\ u_i^{1}\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\sigma_{ij}^{2}\\ \varepsilon_{ij}^{2}\\ u_i^{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j}^{1}+F_i=0 & \text{در } V\\ \sigma_{ij}^{1}n_j=T_i & \text{در } S_T\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\sigma_{ij,j}^{2}+F_i=0 & \text{در } V\\ \sigma_{ij}^{2}n_j=T_i & \text{در } S_T\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{ij}^{1}=\frac{1}{2}(u_{i,j}^{1}+u_{j,i}^{1}) & \text{در } V\\ u_i^{1}=(u_i)_d & \text{در } S_u\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\varepsilon_{ij}^{2}=\frac{1}{2}(u_{i,j}^{2}+u_{j,i}^{2}) & \text{در } V\\ u_i^{2}=(u_i)_d & \text{در } S_u\end{cases}$$

$$\sigma_{ij}^{1}=C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{1}\quad \text{در } V\qquad\qquad \sigma_{ij}^{2}=C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{2}\quad \text{در } V$$

۱- تفریق جواب‌ها را منظور کرده و معادلات نوشته شده برای دو جواب را از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases}\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{1}-\sigma_{ij}^{2}\\ \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{1}-\varepsilon_{ij}^{2}\\ u_i=u_i^{1}-u_i^{2}\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{cases}\sigma_{ij,j}=0 & \text{در } V\\ \sigma_{ij}n_j=0 & \text{در } S_T\end{cases}\qquad \sigma_{ij}=C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) & \text{در } V\\ u_i=0 & \text{در } S_u\end{cases}$$

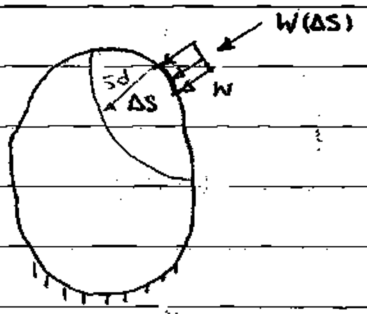
$$\int_S T_i\,\delta u_i\,dS + \int_V f_i\,\delta u_i\,dV = \int_V \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dV = 0$$

یعنی تغییرات انرژی کرنشی صفر می‌شود یعنی $\sigma_{ij}=0$ است.

$$\delta U = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{ij}=0 \;\rightarrow\; \varepsilon_{ij}=0\;,\; u_i=0$$

یعنی جواب‌ها با هم برابرند و یک جواب منحصر به فرد برای مسئله داریم

▶ اصل سن ونان



اگر باری به یک سطح کوچک جسم وارد شود و آن را با

بار معادل جایگزین کنیم، در فواصل دور از سطح،

جواب هر دو یکسان خواهد بود

← در اینجا فرض می‌کنیم که سطح اثر بار نسبت به سطح جسم کوچک باشد

← به طور تقریبی اگر به اندازه 5 برابر بعد جسم در راستای اثر بار از سطح دور شویم، جواب‌ها یکسان

خواهد بود

میدان تغییر مکان، تنش و کرنش

◄ حل مسائل الاستیسیته با استفاده از توابع پتانسیل

$\vec{\Psi}$: تابع سولونوئیدی (Solnoidal) $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\Psi} = 0$

$\vec{\Psi}$: تابع غیرچرخشی (lamelar) $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{\Psi} = 0$

تابع پتانسیل سولونوئیدی
$$\begin{cases} \vec{\Psi} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \end{cases}$$

تابع پتانسیل غیرچرخشی
$$\begin{cases} \vec{\Psi} = \vec{\nabla}\varphi \\ \varphi = x_1^3 + x_2^3 - 4x_3 + \underset{\text{ثابت}}{\alpha} \qquad (\alpha = 0) \end{cases}$$

← قضیه هلمهولتز (Helmholtz)

میدان برداری $\vec{E}$ دارای دیورژانس و کرل معین است و در بینهایت مقدار دیورژانس و کرل آن صفر می‌باشد $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E}$

هر میدان برداری که دارای این خاصیت باشد را می‌توان به صورت دو میدان برداری به صورت سولونوئیدی و غیرچرخشی نوشت.

$$\vec{E} = \underset{\text{سولونوئیدی}}{\vec{U}} + \underset{\text{غیرچرخشی}}{\vec{V}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \vec{U} = \vec{\nabla}\times\vec{\Psi} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\Psi} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \vec{V} = \vec{\nabla}\varphi \\ \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \vec{E} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$$

اثبات: قضیه ؟

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla^2\varphi \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}) - \nabla^2\psi = -\nabla^2\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\ \nabla^2\psi = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \end{cases} \longrightarrow$$ φ و ψ را بدست می‌آوریم

حل معادله ناویر

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda)\, \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{F} = 0$$

$\vec{F}$ را conservative فرض می‌کنیم : $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$
$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ f_2 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ f_3 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} \end{cases}$$

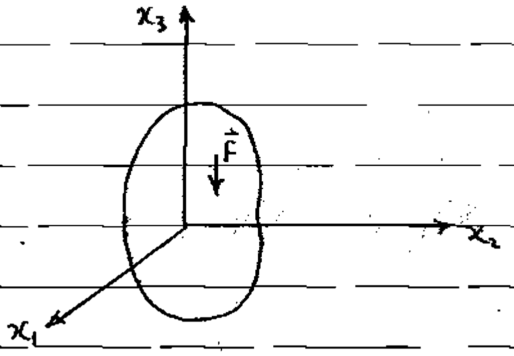
$$\vec{u} = \vec{\nabla}M \rightarrow \mu \nabla^2(\vec{\nabla}M) + (\mu + \lambda)\, \vec{\nabla}(\nabla^2 M) + \vec{\nabla}\varphi = 0$$

$$\rightarrow (2\mu + \lambda)\, \nabla^2(\vec{\nabla}M) + \vec{\nabla}\varphi = 0$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\left[(2\mu + \lambda)\, \nabla^2 M + \varphi\right] = 0$$

چون می‌خواهیم یک جواب بسیط آوریم، داخل کروشه را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\nabla^2 M = \frac{\varphi}{2\mu+\lambda}$$ (جواب کلی را نمی‌خواهیم بدست آوریم)



$$\vec{F} = -\rho g\,\vec{e}_3$$

$$(f_1 = 0\ ,\ f_2 = 0\ ,\ f_3 = -\rho g)$$

$$\Rightarrow \varphi = -\rho g x_3$$

$$\nabla^2 M = \frac{\rho g x_3}{2\mu+\lambda} \Rightarrow \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2}}}_{0} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2} = \frac{\rho g x_3}{2\mu+\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x_3} = \frac{\rho g x_3^2}{2(2\mu+\lambda)} \Rightarrow M = \frac{\rho g x_3^3}{6(2\mu+\lambda)}$$

$$\vec{u} = \frac{\rho g x_3^2}{2(2\mu+\lambda)}\,\vec{e}_3 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = \dfrac{\rho g x_3^2}{2(2\mu+\lambda)} \end{cases}$$

جواب خصوصی معادله ناویه

تئوری ارتجاعی دکتر رحیمیان

Theory of Elasticity

$$\mu\nabla^2\vec{u}+(\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})+\underbrace{\vec{f}}_{\vec{\nabla}\varphi}=0 \qquad \vec{f}=\vec{\nabla}\varphi$$

$$\mu\nabla^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})+(\mu+\lambda)\nabla^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})+\nabla^2\varphi=0 \qquad \nabla^2\varphi=0$$ هارمونیک

$$(2\mu+\lambda)\nabla^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})=0 \rightarrow \boxed{\nabla^2\varepsilon_{kk}=0 \;;\; \nabla^2\sigma_{kk}=0}$$

$$\nabla^2 \Big| \; \mu\nabla^4\vec{u}+0+0=0 \rightarrow \mu\nabla^4\vec{u}=0 \rightarrow \nabla^4 u_i=0$$ u_i بی‌هارمونیک است

ε_{ij} بی‌هارمونیک است $\qquad \boxed{\nabla^4\sigma_{ij}=0 \;;\; \nabla^4\varepsilon_{ij}=0}$

$$\nabla^2\vec{\Psi}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Psi})-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\Psi}$$

$$\boxed{(2\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})-\mu\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{U}+\vec{f}=0}$$ معادلات ناویر به حالت برداری.

$$\mu\nabla^2\vec{u}+(\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})=0$$

- **جواب عمومی معادلات ناویر**

روش تابع پتانسیل Helmholtz تابع پتانسیل کرنش

Helm Holtz Theorem $\qquad \underbrace{\vec{\nabla}\varphi}_{\text{غیر چرخشی}}+\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\Psi}}_{\text{چرخشی}}=\vec{U}$

$$\text{if } \vec{U}=0 \rightarrow \begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{\Psi}=0 & \text{چرخش [برشی]} \\ \vec{\nabla}\varphi=0 & \text{تغییر شکل حجمی}\end{cases}$$

سرعت موج برشی –

سرعت موج حجمی –

$$\mu\nabla^2(\vec{\nabla}\varphi+\vec{\nabla}\times\vec{\Psi})+(\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\nabla^2\varphi+0)=0$$ [uncoupled] جواب کلی

$$(2\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\underbrace{\nabla^2\varphi}_{\text{لاپلاس}})+\mu\vec{\nabla}\times(\underbrace{\nabla^2\vec{\Psi}}_{\text{کرل}})=0 \Longrightarrow \begin{cases}\nabla^2\varphi=0 & \text{معادله لاپلاس} \\ \nabla^2\vec{\Psi}=0 \Longrightarrow \nabla^2\Psi_i=0\end{cases}$$

- روش تابع پتانسیل [بردار] گالرکین galerkin

$$2\mu\vec{u}=2(1-\nu)\nabla^2\vec{V}-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^4 \vec{V} = 0} \rightarrow \nabla^4 V_i = 0 \quad i=1,2,3 \rightarrow \vec{u}$$

$V_1 = 0 \; ; V_2 = 0 ; \; V_3 \neq 0$ — تابع کرنش لاو [حالت خاصی از بردار گالرکین است]

برای مسائل متقارن محوری Axisymmetric قابل کاربرد است — در حالت کلی برای مسائل تئوری ارتجاعی قابل کاربرد نمی باشد .

$$2\mu \vec{u} = 2(1-\nu)(\nabla^2 V_3)\vec{e}_3 - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right)$$

Cartesian Coordinates

$$\begin{cases} 2\mu u_1 = -\dfrac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\[2ex] 2\mu u_2 = -\dfrac{\partial V^3}{\partial x_2 \partial x_3} \\[2ex] 2\mu u_3 = 2(1-\nu)\nabla^2 V_3 - \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2} \end{cases}$$

cylindrical Coordinates

$$\begin{cases} 2\mu u_r = -\dfrac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} \\[2ex] 2\mu u_\theta = -\dfrac{1 \times \partial^2 V_z}{r \times \partial \theta \partial z} \\[2ex] 2\mu u_z = 2(1-\nu)\nabla^2 V_z - \dfrac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

$$\text{if } V_z = V(r,z) \rightarrow \underset{u_r(r,z)}{u_r} \; ; \; u_\theta = 0 \; ; \; \underset{u_z(r,z)}{u_z}$$ متقارن محوری Axisymmetric

جهت تقارن نسبت به محور z است (اما تابع پیزو آزاد است)

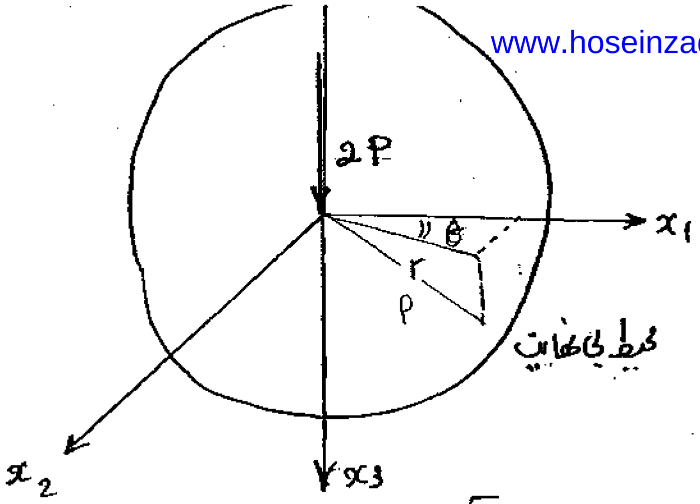
Helpful Hint

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \quad \text{or } 2\mu\vec{u}$$

$$\text{if } \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = 0 \rightarrow \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$ تابع پتانسیل لامه [تابع کرنش]

$[\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0]$ وجود ندارد .

مثال — مسئله کلوین



$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = 0 \\ V_z = V(r, z) \end{cases}$$

$\nabla^4 V_z(r, z) = 0$ بی هارمونیک V_z

$$\begin{cases} 2\mu u_r = -\dfrac{\partial^2 V_z}{\partial r\, \partial z} \\ 2\mu u_\theta = 0 \\ 2\mu u_z = 2(1-\nu)\nabla^2 V_z - \dfrac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

⊛ در بی‌نهایت u_i و ε_{ij} و σ_{ij} باید صفر باشد.

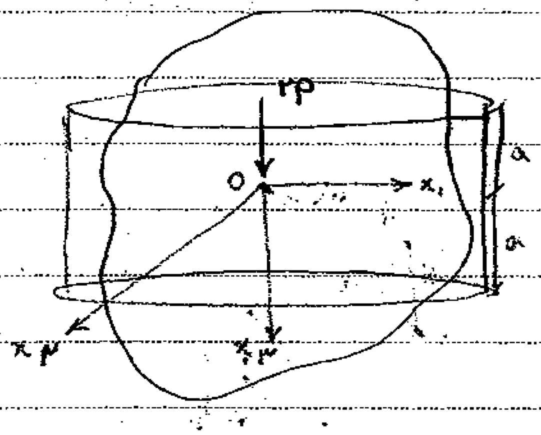
$\Rightarrow \varepsilon_{ij} \Longrightarrow \sigma_{ij}$

⊛ در صفر σ_{zz} باید بی‌نهایت شود.

$V_z = B\rho = B\sqrt{r^2 + z^2}$

Subject: تئوری ارتجاعی

Year. ۸۷ Month. ۹ Date. ۲۴ ( )



$$v_r = 0$$

$$v_\theta = 0$$

$$v_z = B\rho = B\sqrt{r^2+z^2}$$

$$2\mu \vec{u} = 2(1-\nu)\nabla^2\vec{v} - \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$2\mu u_r = -\frac{\partial^2 v_z}{\partial r\,\partial z} = \frac{Brz}{\rho^3}$$

$$2\mu u_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta\,\partial z} = 0$$

$$2\mu u_z = 2(1-\nu)\nabla^2 v_z - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = B\left[\frac{2(1-2\nu)}{\rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{z^2}{\rho^3}\right]$$

$$\sigma_{rr} = B\left[\frac{(1-2\nu)z}{\rho^3} - \frac{3r^2 z}{\rho^5}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1-2\nu)Bz}{\rho^3}$$

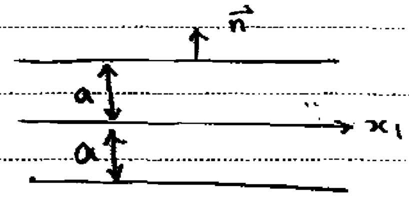
$$\sigma_{zz} = -B\left[\frac{(1-2\nu)z}{\rho^3} + \frac{3z^3}{\rho^5}\right]$$

$$\sigma_{rz} = -B\left[\frac{(1-2\nu)r}{\rho^3} + \frac{3rz^2}{\rho^5}\right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$$

اگر ρ به سمت بی نهایت میل کند، تغییر مکان ها و تنش ها به سمت صفر می روند در نتیجه شرایط مرزی بی نهایت برقرار می باشد.

اگر دو صفحه ی $z=a$ و $z=-a$ را در نظر بگیریم، مانند این است که استوانه ای با شعاع بی نهایت در نظر گرفته ایم؛ پس خواهیم داشت:



$z=-a$ $\qquad \vec{n}(0,0,-1)$

$$T_r = \sigma_{rr} n_r + \sigma_{r\theta} n_\theta + \sigma_{rz} n_z = -\sigma_{rz}$$

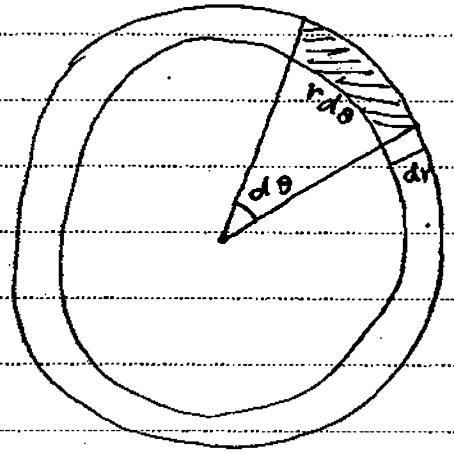
$$T_\theta = \sigma_{\theta r} \cancel{n_r} + \sigma_{\theta\theta} \cancel{n_\theta} + \cancel{\sigma_{\theta z}} n_z = 0$$

$$T_z = \sigma_{zr} n_r + \sigma_{z\theta} n_\theta + \sigma_{zz} n_z = -\sigma_{zz}$$

$z=a$ $\qquad \vec{n}(0,0,1)$

$$T_r = \sigma_{rz}$$
$$T_\theta = 0$$
$$T_z = \sigma_{zz}$$

چون مسئله متقارن محوری است، تعادل در جهت r و θ برقرار می باشد، پس باید تعادل در جهت z را برقرار کنیم



$$2P + 2\pi \int_0^\infty T_z\Big|_{z=-a} r\,dr$$

تعادل نیروها در جهت z :

$$2P + 2\pi \int_0^\infty T_z\Big|_{z=-a} r\,dr + 2\pi \int_0^\infty T_z\Big|_{z=a} r\,dr = 0$$

$$2P + 2\pi \int_0^\infty B\left[\frac{(1-2\nu)(-a)}{\rho^3} + \frac{3(-a)^3}{\rho^5}\right] r\,dr$$

$$+ 2\pi \int_0^\infty -B\left[\frac{(1-2\nu)a}{\rho^3} + \frac{3a^3}{\rho^5}\right] r\,dr = 0$$

$$\rightarrow 2P + 4\pi \int_0^\infty B\left[\frac{(1-2\nu)(-a)}{\rho^3} + \frac{3(-a)^3}{\rho^5}\right] r\,dr = 0$$

$$\rho^2 = r^2 + z^2$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \longrightarrow 2\rho\,d\rho = 2r\,dr \longrightarrow \rho\,d\rho = r\,dr$$

$$2P - 4\pi \int_a^\infty B\left[\frac{(1-2\nu)a}{\rho^3} + \frac{3a^3}{\rho^5}\right] \rho\,d\rho = 0$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{\rho^2}\,d\rho = -\frac{1}{\rho}\Big|_a^\infty = \frac{1}{a}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{3}{\rho^4}\, d\rho = -\frac{1}{\rho^3}\Big|_a^{\infty} = \frac{1}{a^3}$$

$$2P - 4\pi G B\left[(1-2\nu)+1\right] = 0$$

$$2P = 4\pi G B(3-2\nu)$$

$$\Rightarrow B = \frac{P}{4\pi G(1-\nu)}$$

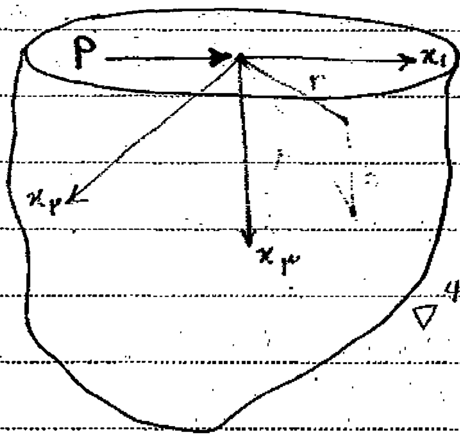
* مسأله‌ی سروتی Cerruti

یک محیط نیمه بی‌نهایت داریم با یک نیروی مماسی بر این سطح بی‌نهایت

که مسأله متقارن کروی نیست (تقارن محوری هم ندارد)

در دستگاه مختصات کارتزین کار می‌کنیم!

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ z = x_3 \end{cases}$$



$$\nabla^4 V = 0 \quad \begin{cases} V_1 = A\rho \\ V_2 = 0 \\ V_3 = B x_1 \ln(\rho + x_3) \end{cases}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \leftarrow \varphi = \frac{C x_1}{\rho + x_3}$$

$$2\mu\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi + 2(1-\nu)\nabla^2\vec{V} - \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

$$2\mu u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + 2(1-\nu)\nabla^2 V_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right]$$

چون توابع را طوری انتخاب کرده که تنش ها و کرنش ها در بی نهایت صفر می شوند، درنتیجه شرایط مرزی بی نهایت برقرار می باشد، پس برقراری شرایط مرزی را در سطح $x_3=0$ بررسی می کنیم:

$x_3 = 0$ $\quad\quad \vec{n}\,(0\,,0\,,-1)$

$$T_1 = -\sigma_{13}$$
$$T_2 = -\sigma_{23} = 0$$
$$T_3 = -\sigma_{33} = 0$$

استثنائای با مرزهای $x_3=0$ و $x_3=a$ درنظر می گیریم و معادل را می نویسیم:

$x_3 = a$ $\quad\quad \vec{n}\,(0\,,0\,,1)$

$$T_1 = \sigma_{13}$$
$$T_2 = \sigma_{23}$$
$$T_3 = \sigma_{33}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مسئله‌ی بار نقطه‌ای متمرکز ← بوسینسک

x_1 تعادل در جهت: $$P + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_1 \Big|_{x_3=a} dx_1\, dx_2 = 0 \quad ?$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{P}{4\pi(1-\nu)} \\[2ex] B = \dfrac{P(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \\[2ex] C = \dfrac{P(1-2\nu)}{2\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{P}{4\pi\mu\rho}\left[1 + \dfrac{x_1^2}{\rho^2} + (1-2\nu)\left(\dfrac{\rho}{\rho+x_3} - \dfrac{x_1^2}{(\rho+x_3)^2}\right)\right] \\[2ex] u_2 = \dfrac{P}{4\pi\mu\rho}\left[\dfrac{x_1 x_2}{\rho^2} - \dfrac{(1-2\nu)x_1 x_2}{(\rho+x_3)^2}\right] \\[2ex] u_3 = \dfrac{P}{4\pi\mu\rho}\left[\dfrac{x_1 x_3}{\rho^2} + \dfrac{(1-2\nu)x_1}{\rho+x_3}\right] \end{cases}$$

Neuber – Papkovich بردار نوبر - پاپکوویچ

اگر u صفر باشد حتماً $B, \vec{A}$ نیز صفر هستند.

بردار مکان

$$2\mu\vec{u} = \vec{A} - \vec{\nabla}\left[B + \frac{\vec{A}\cdot\vec{R}}{4(1-\nu)}\right] \qquad \vec{R} = x_i\vec{e}_i$$

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\mu+\lambda)\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\mu\nabla^2\vec{A} - (2\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\nabla^2 B) - \frac{\mu+\lambda}{2}\vec{\nabla}(\vec{R}\cdot\nabla^2\vec{A}) = 0$$

در مسائل دینامیکی دو سرعت برشی و یک سرعت طولی داریم

برای بخاری روابطی مثل باید

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} = 0 \\ \nabla^2 B = 0 \end{cases}$$

اگر برای $\vec{A}$ و B ، n جواب داشته باشیم پس ترکیب این n جواب نیز جواب مسأله می باشد:

$$a_1 \vec{A}_1 + a_2 \vec{A}_2 + \dots + a_n \vec{A}_n$$

$$b_1 B_1 + b_2 B_2 + \dots + b_n B_n$$

:note جواب های فوق باید شرایط مرزی را برقرار نمایند، که اعمال این شرایط برخی از جواب ها را حذف می کند.

:Note درواقع ما در همه مسائل معادله ناویر را باید حل کنیم و وجه تمایز مسائل شرایط مرزی آنها و اعمال آن بر معادله ناویر می باشد.

* حالت خاص: وقتی بردار ها تابع θ نباشند:

$$A_r = 0$$

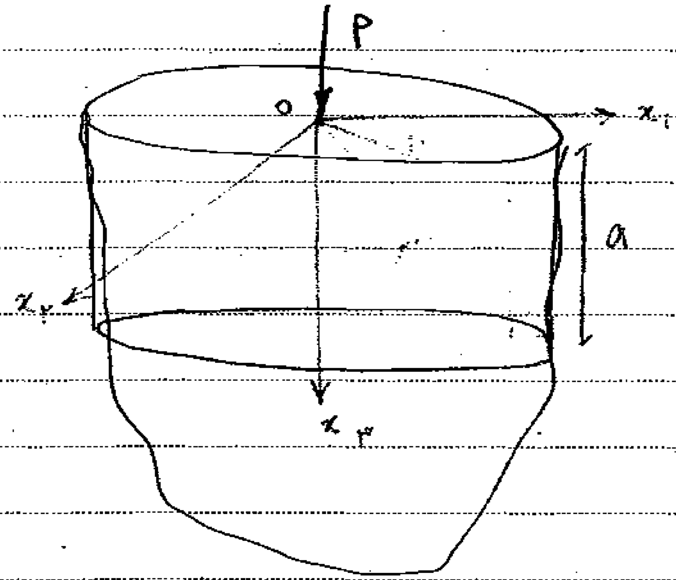
$$A_\theta = 0$$

$$A_z = A_z(r, z) = 4(1-\nu)\frac{K}{\rho}$$

$$B = B(r, z) = c\ln(\rho + z)$$

* حل مسائل متقارن محوری در کتاب

مسأله‌ی بوسینسک : Boussinesk (que)



این مسأله برای محیط نیمه بی‌نهایت و نیروی متمرکز در نظر گرفته می‌شود.

مسأله‌ی ما متقارن محوری است.
$(\sigma_{r\theta} = 0)$

$$u_r = -\frac{Cr}{2\mu\rho(\rho+z)} + \frac{kzr}{2\mu\rho^3}$$

$$u_\theta = 0$$

$$u_z = \frac{(3-4\nu)k - C}{2\mu\rho} + \frac{kz^2}{2\mu\rho^3}$$

$z = 0$ $\qquad \vec{n}\,(0, 0, -1)$

$$\begin{cases} T_r = -\sigma_{rz} = 0 \\ T_\theta = -\sigma_{\theta z} = 0 \\ T_z = -\sigma_{zz} \end{cases}$$

$$\sigma_{rz} = \frac{r}{\rho^3}\left[C - k(1-2\nu) - \frac{3kz^2}{\rho^2}\right]$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3kz^3}{\rho^5}$$

Subject: تئوری ارتجاعی

Year. Month. Date. ( )

$$z=0 \longrightarrow \sigma_{rz}=0 \longrightarrow C=K(1-2\nu)$$

استفاده ای با سطح $z=0$ و $z=a$ در نظر بگیریم ، از متعادل در جهت قائم خواهیم داشت :

$$P+\int_0^\infty \sigma_{zz}\Big|_{z=a} 2\pi r\,dr=0$$

$$\xrightarrow{r\,dr=\rho\,d\rho} P+2\pi\int_a^\infty -\frac{3Ka^3}{\rho^5}\rho\,dr=0$$

$$\Rightarrow P-2\pi K\times\cancel{\int_a^\infty \frac{3a^3}{\rho^4}d\rho}^{\,1}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{K=\frac{P}{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C=\frac{(1-2\nu)P}{2\pi}}$$

$$\begin{cases} u_r=\dfrac{P}{4\pi\mu\rho}\left[\dfrac{rz}{\rho^2}-\dfrac{(1-2\nu)r}{\rho+z}\right] \\ u_\theta=0 \\ u_z=\dfrac{P}{4\pi\mu\rho}\left[2(1-\nu)+\dfrac{z^2}{\rho^2}\right] \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi\rho^2}\left[-\frac{3r^2 z}{\rho^3} + \frac{(1-2\nu)\rho}{\rho+z}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi\rho^2}\left[\frac{z}{\rho} - \frac{\rho}{\rho+z}\right]$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3Pz^3}{2\pi\rho^5}$$

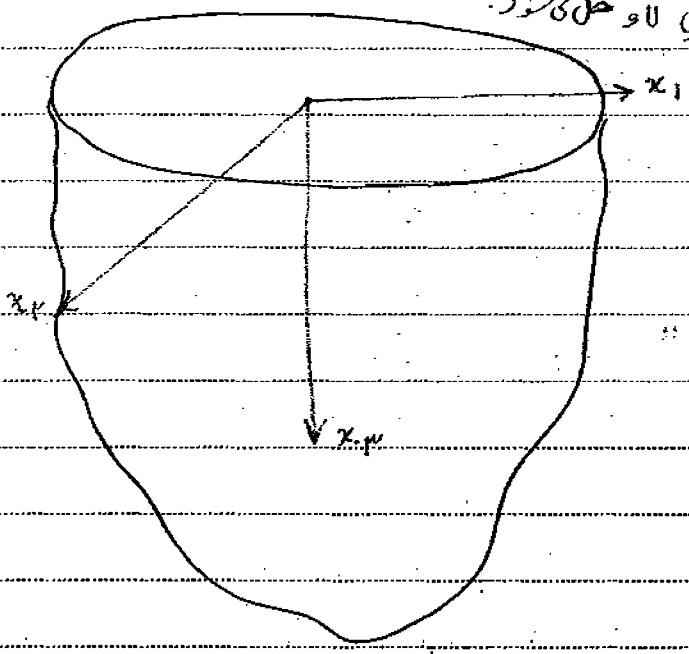
$$\sigma_{rz} = -\frac{3Prz^2}{2\pi\rho^5}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$$

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = -\frac{1+\nu}{3\pi}\,\frac{Pz}{\rho^3}$$

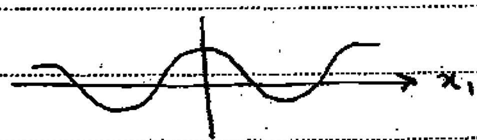
مسأله

با تابع پتانسیل لاو حل می‌شود.



یک محیط نیمه بی‌نهایت داریم، که بارگذاری زیر در تمام سطح به آن اعمال می‌شود

$$T_3 = K\cos\frac{\pi x_1}{l}\cos\frac{\pi x_2}{l}$$



در x_2 هم به همین صورت می‌باشد.

هر بارگذاری را با تجمع توابع فوریه [illegible]

$$c^2 = (\pi/\ell)^2 + (\pi/L)^2 \longrightarrow ?$$

$$\Gamma_1 = 0$$

$$\Gamma_2 = 0$$

$$\Gamma_3 = (A + BC\, x_3)\, \psi$$

$$\nabla^2 \Gamma_3 = (A + BC\, x_3)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + (A + B + C\, x_3)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}$$

$$+ (A + B\cancel{C}\, x_3)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} + \cancel{BC\psi} \longrightarrow ?\ !$$

$$BC\frac{\partial \psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla^2 \Gamma_3 = (A + BC x_3)\nabla^2 \psi + 2BC\frac{\partial \psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla^4 \Gamma_3 = (A + BC x_3)\nabla^4 \psi + 4BC\frac{\partial}{\partial x_3}\nabla^2 \psi$$

شرایط مرزی: $x_3 = 0 \qquad \vec{n}(0, 0, -1)$

$$\nabla^2 \psi = 0 \qquad \begin{cases} T_1 = -\sigma_{13} = 0 \\ T_2 = -\sigma_{23} = 0 \\ T_3 = -\sigma_{33} \end{cases}$$

$$\psi = \cos\frac{\pi x_1}{\ell}\cos\frac{\pi x_2}{L}\, f(x_3)$$

$$\nabla^2 \psi = -\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cos\frac{\pi x_1}{\ell}\cos\frac{\pi x_2}{L}\, f(x_3) - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\cos\frac{\pi x_1}{\ell}\cos\frac{\pi x_2}{L}\, f(x_3)$$

$$+ \cos\frac{\pi x_1}{\ell}\cos\frac{\pi x_2}{L}\, f''(x_3) = 0$$

$$-\Big[\overbrace{\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}^{c^2}\Big] f(x_3) + f''(x_3) = 0$$

$$f''(x_3) - c^2 f(x_3) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f(x_3) = e^{-cx_3}$$

$$\psi = \cos\frac{\pi x_1}{l}\cos\frac{\pi x_2}{L}\, e^{-cx_3}$$

با داشتن ψ ، ε ها و σ ها را بدست می آوریم و سپس شرایط مرزی را اعمال می کنیم تا مجهول های A و B را بدست آوریم :

$$\sigma_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\,2\nu BC^2 - (A + BCx_3)C^2\,\right]\psi$$

$x_3 = 0$

$$\sigma_{13} = 0$$

$$A = 2\nu B$$

$$\sigma_{33} = BC^3(1 + Cx_3)\psi$$

$x_3 = 0$

$$\sigma_{33} = -K\cos\frac{\pi x_1}{l}\cos\frac{\pi x_2}{L}$$

$$B = \frac{-K}{C^3}$$

$$A = -\frac{2\nu K}{C^3}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{l} \qquad \beta = \frac{\pi}{L}$$

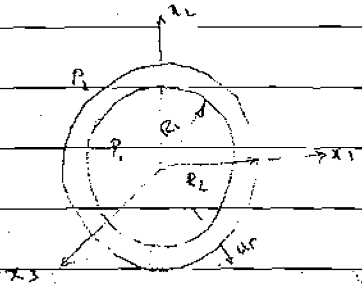
$$u_1 = \frac{K\alpha}{2\mu c^2}(-1+2\nu + c x_3)\sin\alpha x_1 \cos\beta x_2 \, e^{-c x_3}$$

$$u_2 = \frac{K\beta}{2\mu c^2}(-1+2\nu + c x_3)\cos\alpha x_1 \quad \beta x_2 \, e^{-c x_3}$$

$$u_3 = \frac{K}{2\mu c}\left[2(1-\nu) + 2 x_3\right]\cos\alpha x_1 \cos\beta x_2 \, e^{-c x_3}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



• چون مسئله متقارن محوری است ⟸ $u_\theta = 0$

• استوانه را آنقدر طولانی در نظر می‌گیریم که هر صفحه‌ای، صفحه تقارن آن باشد

⟸ $u_z = 0$

• به ازای هر مقداری از θ صفحه، صفحه تقارن است یعنی تقارن از درجه $N = \frac{2\pi}{\theta}$ می‌باشد.

⟸ u_r تابع θ نیست

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r \quad , \quad u_r = u_r(r)$$

معادله ناویر : $(2\mu+\lambda)\,\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} \quad \mu\,\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right]$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right]\right\}\vec{e}_r = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) = C_1$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) = C_1 r \quad \Rightarrow \quad r u_r = \frac{C_1}{2} r^2 + C_2$$

$$u_r = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_r = A r + \frac{B}{r}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2} \quad , \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{kk} = 2A$$

← چون شرایط مرزی مسئله نیرویی است بایستی ابتدا تنش ها را بدست آورده و با اعمال شرایط مرزی ضرایب A و B را محاسبه کنیم:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2\mu\left(A - \frac{B}{r^2}\right) + 2A\lambda = 2(\mu+\lambda)A - 2\mu\frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\left(A + \frac{B}{r^2}\right) + 2A\lambda = 2(\mu+\lambda)A + 2\mu\frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = 2A\lambda \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

$$r = R_1 \qquad \vec{n} : (-1, 0, 0) \longrightarrow \begin{cases} T_r = -\sigma_{rr} = -2(\mu+\lambda)A + 2\mu\frac{B}{r^2} \\ T_\theta = -\sigma_{r\theta} = 0 \\ T_z = -\sigma_{rz} = 0 \end{cases}$$

$$r = R_1 \ , \ T_r = P_1 \Rightarrow \boxed{P_1 = -2(\mu+\lambda)A + 2\mu\frac{B}{R_1^2}}$$

$$r = R_2 \qquad \vec{n} : (1, 0, 0) \longrightarrow \begin{cases} T_r = \sigma_{rr} \\ T_\theta = \sigma_{r\theta} = 0 \\ T_z = \sigma_{rz} = 0 \end{cases}$$

Homa

$$r = R_2 \;,\; T_r = -P_2 \;\rightarrow\; \boxed{P_2 = 2(\mu+\lambda)A - 2\mu \frac{B}{R_2^2}}$$

با اعمال شرایط مرزی ، با استفاده از دو معادله بدست آمده می‌توان A , B را محاسبه نمود :

$$\begin{cases} 2(\mu+\lambda)A - 2\mu \dfrac{B}{R_1^2} = -P_1 \\ 2(\mu+\lambda)A - 2\mu \dfrac{B}{R_2^2} = -P_2 \end{cases} \rightarrow 2\mu B\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) = P_2 - P_1$$

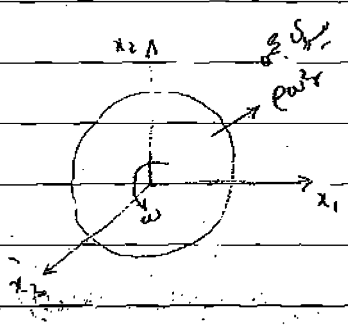
$$\rightarrow 2\mu B \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 R_2^2} = P_2 - P_1 \rightarrow \boxed{B = \frac{R_1^2 R_2^2 (P_2 - P_1)}{2\mu (R_1^2 - R_2^2)}}$$

$$2(\mu+\lambda)A = \frac{2\mu}{R_1^2} \frac{R_1^2 R_2^2 (P_2 - P_1)}{2\mu (R_1^2 - R_2^2)} - P_1$$

$$2(\mu+\lambda)A = \frac{R_2^2 P_2 - R_2^2 P_1 - P_1 R_1^2 + P_1 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \rightarrow \boxed{A = \frac{P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2}{2(\mu+\lambda)(R_1^2 - R_2^2)}}$$

با بدست آمدن ضرایب A , B ، تغییر مکان ، تنش و کرنش در مسئله مشخص خواهد بود

حال مسئله‌ای را حل می‌کنیم که استوانه‌ای با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد



$$(2\mu+\lambda)\, \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{F} = 0$$

$$(2\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right] \vec{e}_r + \rho\omega^2 r\, \vec{e}_r = 0$$

$$\rightarrow (2\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right] + \rho\omega^2 r = 0$$

$$\Rightarrow (2\mu+\lambda)\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + C_1$$

$$\Rightarrow (2\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^3 + C_1 r$$

$$\Rightarrow (2\mu+\lambda)(ru_r) = -\frac{1}{8}\rho\omega^2 r^4 + \frac{C_1}{2}r^2 + C_2$$

$$\Rightarrow (2\mu+\lambda)u_r = -\frac{1}{8}\rho\omega^2 r^3 + \frac{C_1}{2}r + \frac{C_2}{r}$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم :

$$r=0\ ,\ u_r=0 \Rightarrow C_2=0$$

$$r=R \rightarrow T_r = T_\theta = T_z = 0$$ سطح عاری از تنش

$$\boxed{u_r = -\frac{\rho\omega^2 r^3}{8(2\mu+\lambda)} + \frac{C_1 r}{2(2\mu+\lambda)}}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = -\dfrac{3\rho\omega^2 r^2}{8(2\mu+\lambda)} + \dfrac{C_1}{2(2\mu+\lambda)} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = -\dfrac{\rho\omega^2 r^2}{8(2\mu+\lambda)} + \dfrac{C_1}{2(2\mu+\lambda)} \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{kk} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{2(2\mu+\lambda)} + \frac{C_1}{2\mu+\lambda}$$

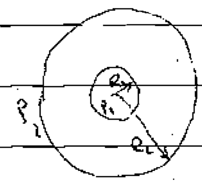
برای اعمال شرایط مرزی نیرویی، تنش‌ها را بدست می‌آوریم :

$$
\begin{cases}
\sigma_{rr} = -\dfrac{\rho\omega^2 r^2}{(2\mu+\lambda)}\left(\dfrac{3\mu+2\lambda}{4}\right) + \dfrac{C_1}{(2\mu+\lambda)}(\mu+\lambda) \\[2ex]
\sigma_{\theta\theta} = -\dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2\mu+\lambda}\left(\dfrac{\mu+2\lambda}{4}\right) + \dfrac{C_1}{2\mu+\lambda}(\mu+\lambda) \\[2ex]
\sigma_{zz} = \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2(2\mu+\lambda)}\lambda \quad \dfrac{C_1\lambda}{2\mu+\lambda} \\[2ex]
\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0
\end{cases}
$$

$$
r = R \ : \ \vec{n} = (1,0,0) \longrightarrow \begin{cases} T_r = \sigma_{rr} = 0 \\ T_\theta = \sigma_{r\theta} = 0 \\ T_z = \sigma_{rz} = 0 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \frac{\rho\omega^2 R^2}{2\mu+\lambda}\,\frac{3\mu+2\lambda}{4} = \frac{C_1(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\rho\omega^2 R^2(3\mu+2\lambda)}{4(\mu+\lambda)}}
$$

با حل معادله ناویه یک جواب خصوصی داریم که مشخص است و در معادله صدق می‌کند و یک جواب عمومی داریم که ضرایب مجهول آن را با اعمال شرایط مرزی بدست می‌آوریم.



بعلت تقارن مرکزی : $\vec{u} = u_r\vec{e}_r$, $u_r = u_r(r)$

$$
(2\mu+\lambda)\vec\nabla\,\vec\nabla\cdot\vec{u} + \mu\,\vec\nabla\times\underbrace{\vec\nabla\times\vec{u}}_{0} = 0
$$

$\vec\nabla\times\vec{u} = 0 \leftarrow$ بعلت تقارن مرکزی، چرخش صفر است

$$\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\,\vec{u} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\varphi\, u_r\right)\right] = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right)\right]$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right)\right]\right\}\vec{e}_r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right)\right]\right\} = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right)\right\} = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right) = C_1 r^2 \Rightarrow r^2 u_r = \frac{C_1}{3} r^3 + C_2$$

$$\rightarrow u_r = \frac{C_1}{3} r + \frac{C_2}{r^2} \rightarrow \boxed{u_r = A r + \frac{B}{r^2}}$$

چون کرنش‌ها را از روی تغییرمکان بدست می‌آوریم شرایط سازگاری برقرار خواهد بود و نیازی به کنترل کردن آن نیست:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} = A - \dfrac{2B}{r^3} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \dfrac{u_r}{r} = A + \dfrac{B}{r^3} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u_r}{r} = A + \dfrac{B}{r^3} \\ \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta\varphi} = 0 \end{cases} \rightarrow \varepsilon_{kk} = 3A$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = (2\mu + 3\lambda)A - 4\mu\dfrac{B}{r^3} & \sigma_{\theta\theta} = (2\mu+\lambda)A + 2\mu\dfrac{B}{r^3} \\ \sigma_{\varphi\varphi} = (2\mu + 3\lambda)A + 2\mu\dfrac{B}{r^3} & \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\theta} = 0 \end{cases}$$

$$r = R_1 \; : \; \vec{n} = (-1,0,0) \longrightarrow \begin{cases} T_r = -\sigma_{rr} \\ T_\varphi = -\sigma_{r\varphi} = 0 \\ T_\theta = -\sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_1} = P_1 \Rightarrow (2\mu+3\lambda)A - 4\mu\frac{B}{R_1^3} = -P_1 \quad (I)$$

$$r = R_2 \; : \; \vec{n} = (1,0,0) \longrightarrow \begin{cases} T_r = \sigma_{rr} \\ T_\varphi = \sigma_{r\varphi} = 0 \\ T_\theta = \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_2} = P_2 \Rightarrow (2\mu+3\lambda)A - 4\mu\frac{B}{R_2^3} = P_2 \quad (II)$$

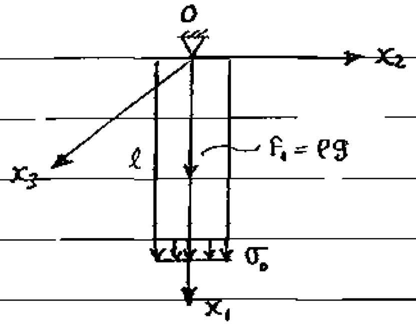
$$(I),(II) \Rightarrow 4\mu B\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3}\right) = P_2 - P_1$$

$$4\mu B\,\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^3 R_2^3} = P_2 - P_1 \Rightarrow \boxed{B = \frac{R_1^3 R_2^3 (P_2 - P_1)}{4\mu (R_1^3 - R_2^3)}}$$

$$\boxed{A = \frac{P_2 R_2^3 - P_1 R_2^3}{(2\mu+3\lambda)(R_1^3 - R_2^3)}}$$

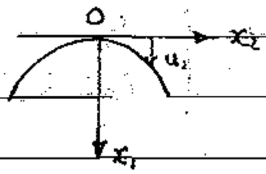
◀ مسائل یک بعدی (فصل هفتم)

الف) تنش یک بعدی :



O $\Big|$ $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$

(میله منشوری است)

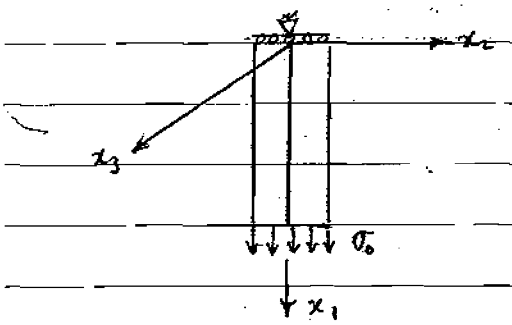


$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$$ (دوران حول x_3 صفر است)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

قبل از حل مسئله بالا، مسئله‌ای را حل می‌کنیم که یک میله منشوری را در بالا با یک سری غلتک گرفته‌ایم

این مسئله به طور دقیق حل می‌شود ولی در مسئله بالا یک تقریب خواهیم داشت.



$x_1 = 0 \;:\; u_1 = 0$

O $\Big|$ 0 0 0 $\;:\; u_2 = u_3 = 0 \;,\; \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$

در این مسئله تنش در کل میله یکسان و برابر با σ_0 می‌باشد. ولی در مسئله اول با قبول برقراری

اصل ونان می‌توان تنش را یک بعدی در نظر گرفت. بنابراین در مسئله اول فرض می‌کنیم ابعاد

میله به گونه‌ای است که اصل ونان برقرار است.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} \quad , \quad \varepsilon_{22} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} \quad , \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0 \end{cases}$$

• معادلات سازگاری باید برقرار باشند که از نوشتن این معادلات به روابط زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_3^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_{11} = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D$$

معادلات تعادل: $\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + F_1 = 0 \rightarrow A + \rho g = 0 \rightarrow \boxed{A = -\rho g}$

$$x_1 = l : \quad \vec{n} = (1,0,0) \rightarrow \begin{cases} T_1 = \sigma_{11} = \sigma_0 \\ T_2 = \sigma_{12} = 0 \\ T_3 = \sigma_{13} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{11}\Big|_{x=l} = \sigma_0 \Rightarrow -\rho g l + Bx_2 + Cx_3 + D = \sigma_0$$

$$\Rightarrow B = 0 \ , \ C = 0 \ , \ D = \sigma_0 + \rho g l$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = -\rho g x_1 + \sigma_0 + \rho g l$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{11} = \rho g (l - x_1) + \sigma_0}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} = \dfrac{\rho g}{E}(l - x_1) + \dfrac{\sigma_0}{E} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\[2ex]
\varepsilon_{22} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} = -\dfrac{\nu}{E}\left[\rho g(l - x_1) + \sigma_0\right] = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\[2ex]
\varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} = -\dfrac{\nu}{E}\left[\rho g(l - x_1) + \sigma_0\right] = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \\[2ex]
\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0
\end{cases}
$$

$$u_1 = \frac{1}{E}\left[\rho g\left(l x_1 - \frac{1}{2}x_1^2\right) + \sigma_0 x_1\right] + f(x_2, x_3)$$

$$u_2 = -\frac{\nu}{E}\left[\rho g(l x_2 - x_1 x_2) + \sigma_0 x_2\right] + g(x_1, x_3)$$

$$u_3 = -\frac{\nu}{E}\left[\rho g(l x_3 - x_1 x_3) + \sigma_0 x_3\right] + h(x_1, x_2)$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\nu \rho g}{E} x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial f(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\nu \rho g}{E} x_2}_{} = \underbrace{-\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}}_{} = g_1(x_3)$$

تابعی از x_2, x_3 تابعی از x_1, x_2 ← هر دو طرف تابع x_3 هستند

$$* \quad \frac{\partial f(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -\frac{\nu \rho g}{E} x_2 + g_1(x_3)$$

$$\rightarrow f(x_2, x_3) = -\frac{\nu \rho g}{2E} x_2^2 + x_2 g_1(x_3) + g_2(x_3)$$

$$* \quad -\frac{\partial g(x_1, x_3)}{\partial x_1} = g_1(x_3) \rightarrow g(x_1, x_3) = -x_1 g_1(x_3) + g_3(x_3)$$

$$2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \boxed{\frac{\partial f(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1}} + \frac{\nu \rho g}{E} x_3 = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow x_2 \frac{\partial g_1(x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial g_2(x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial h(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\nu \rho g}{E} x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial h(x_1,x_2)}{\partial x_1}}_{\text{تابعی از } x_1,x_2} = \underbrace{-x_2 \frac{\partial g_1(x_3)}{\partial x_3} - \frac{\partial g_2(x_3)}{\partial x_3} - \frac{\nu \rho g}{E} x_3}_{\text{تابعی از } x_2,x_3}$$

$\rightarrow$ هر دو طرف تابع x_2

$$\frac{\partial g_1(x_3)}{\partial x_3} = F \Rightarrow \boxed{g_1(x_3) = F x_3 + G}$$

$$\frac{\partial g_2(x_3)}{\partial x_3} = -\frac{\nu \rho g}{E} x_3 - I \Rightarrow \boxed{g_2(x_3) = -\frac{\nu \rho g}{2E} x_3^2 - I x_3 + H}$$

$$\frac{\partial h(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -F x_2 + I \Rightarrow \boxed{h(x_1,x_2) = -F x_1 x_2 + I x_1 + h_1(x_2)}$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -2F x_1 + \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial h_1(x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$\Rightarrow -2F x_1 + \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3} = -\frac{\partial h_1(x_2)}{\partial x_2} = J$$

$$\Rightarrow \boxed{F = 0 \quad , \quad h_1(x_2) = J x_2 + K}$$

$$g_3(x_3) = J x_3 + L$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{E}\left[\rho g\left(l x_1 - \frac{1}{2} x_1^2\right) + \sigma_0 x_1\right] - \frac{\nu \rho g}{2E} x_2^2 + G x_2 - \frac{\nu \rho g}{2E} x_3^2 - I x_3 + H \\ u_2 = -\frac{\nu}{E}\left[\rho g (l x_2 - x_1 x_2) + \sigma_0 x_2\right] - G x_1 + J x_3 + L \\ u_3 = -\frac{\nu}{E}\left[\rho g (l x_3 - x_1 x_3) + \sigma_0 x_3\right] + I x_1 - J x_2 + K \end{cases}$$

Homa

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف- با اعمال شرایط مرزی، ثابت ها را بدست می آوریم :

$$O \left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow H = L = K = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow G = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow I = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow J = 0$$

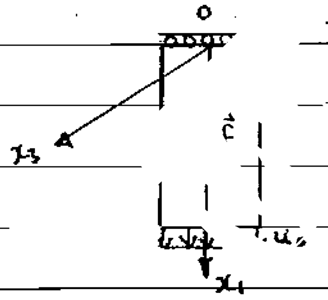
ب- با کرنش یک بعدی :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلات سازگاری

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\quad^2} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\quad^2} \quad \frac{\quad_{11}}{\partial x_3} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11} = x_2 f(x_1) + x_3 g(x_1) + h(x_1)$$



$x_1 = 0 \; : \; u_1 = 0$

$$O \left| \begin{array}{ll} x_1 = 0 & u_1 = 0 \\ x_2 = 0 & u_2 = 0 \\ x_3 = 0 & u_3 = 0 \end{array} \right. \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{(برای نقطه‌ای از دیواره)}$$

$$\vec{F} = \rho g \vec{e}_1$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\, \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda \varepsilon_{11} \\ \sigma_{33} = \lambda \varepsilon_{11} \end{cases} \qquad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

حل معادلات تعادل را می نویسیم :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \rho g = 0 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \lambda f(x_1) = 0 \rightarrow f(x_1) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \rightarrow \lambda g(x_1) = 0 \rightarrow g(x_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_{11} = h(x_1)$$

$$\xrightarrow{(*)} (2\mu+\lambda)\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \rho g = 0 \Rightarrow \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\rho g}{2\mu+\lambda}$$

$$\Rightarrow h(x_1) = -\frac{\rho g}{2\mu+\lambda} x_1 + A$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11} = -\frac{\rho g}{2\mu+\lambda} x_1 + A$$

ε_{11} بدست آمده را در معادلات کرنش - تغییر مکان قرار می دهیم :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\rho g}{2\mu+\lambda} x_1 + A \rightarrow u_1 = -\frac{\rho g}{2(2\mu+\lambda)} x_1^2 + A x_1 + f(x_2, x_3)$$

اعمال شرایط مرزی : $x_1 = 0 : \; u_1 = f(x_2, x_3) = 0$

$$\Rightarrow u_1 = -\frac{\rho g}{2(2\mu+\lambda)} x_1^2 + A x_1$$

$$x_1 = l : \; u_1 = -\frac{\rho g}{2(2\mu+\lambda)} l^2 + A l = u_0 \Rightarrow A = \frac{u_0}{l} + \frac{\rho g}{2(2\mu+\lambda)} l$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{\rho g}{2(2\mu+\lambda)} x_1^2 + \left(\frac{u_0}{l} + \frac{\rho g}{2(2\mu+\lambda)} l\right) x_1}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \rightarrow g(x_1, x_3) = u_2$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \rightarrow h(x_1, x_2) = u_3$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial g(x_1, x_3)}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow g(x_1, x_3) = g_1(x_3)$$

$$2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow h(x_1, x_2) = h_1(x_2)$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g_1(x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial h_1(x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial g_1(x_3)}{\partial x_3}}_{\text{تابعی از } x_3} = \underbrace{-\frac{\partial h_1(x_2)}{\partial x_2}}_{\text{تابعی از } x_2} = B$$

$$\Rightarrow g_1(x_3) = Bx_3 + C \quad , \quad h_1(x_2) = -Bx_2 + D$$

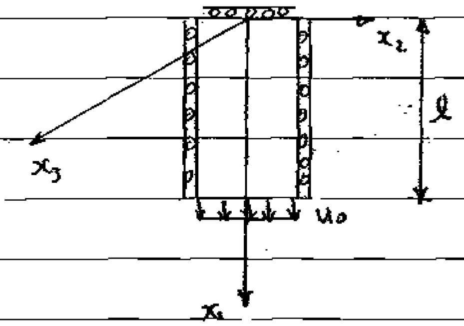
$$\Rightarrow u_2 = Bx_3 + C \quad , \quad u_3 = -Bx_2 + D$$

اعمال شرایط مرزی : در مبدا : $u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow C = D = 0$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = u_3 = 0}$$

Homa



▸ برای اینکه کرنش یک بعدی داشته باشیم، نقاط بالا

در یک جهت u داشته باشیم

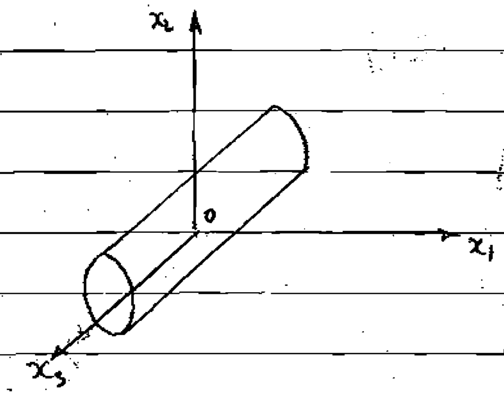
یعنی بالا در دو طرف جسم هم تکیه گاه داشته باشیم

تا جلوی تغییر مکان در جهت 2 و 3 گرفته شود.

▸ مسائل دو بعدی (فصل هشتم)

الف) کرنش مسطح (Plane Strain):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1,x_2) \\ u_2 = u_2(x_1,x_2) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

تغییر فیزیکی

▸ اگر مقطعی به موازات ox_3 برش بزنیم و در راستای خودش

تغییر شکل دهد و اگر مقطع‌های عمودی حول ox_3 داشته باشیم، در واقع مقطع

تغییر شکل دهد ⇐ کرنش مسطح داریم.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \qquad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij} + \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij}$$ (رابطه تنش - کرنش)

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\, \varepsilon_{11} + \lambda\, \varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} = \lambda\, \varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\, \varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda\, (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{12} = 2\mu\, \varepsilon_{12} \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\, \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\, \sigma_{kk}\, \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\, \sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\, (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\, \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \left[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right]$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu)\, \sigma_{11} - \nu\, \sigma_{22} \right] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \left[-\nu\, \sigma_{11} + (1-\nu)\, \sigma_{22} \right] \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\, \sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \end{cases}$$

معادلات تعادل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \\ 0 + 0 + f_3 = 0 \end{cases}$$

شرط مرزی

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \\ T_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \\ T_3 = \sigma_{33} n_3 \end{cases}$$

نیروی مرزی: $T_1 = T_1(x_1, x_2) \quad , \quad T_2 = T_2(x_1, x_2) \quad , \quad T_3 = 0$

مجهولات $= 8$: $u_1, u_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$

معادلات $= 8$: تعادل (2) ; ε, u (3) ; σ, ε (3)

معادله ناویه: $(2\mu + \lambda) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad \mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{F} = 0$

سازگاری: $\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$

بلترامی میشل: $\nabla^2(\sigma_{kk}) = \dfrac{1+\nu}{1-\nu} \vec{\nabla} \vec{F}$

که تابع پتانسیل داریم:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \longrightarrow f_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \quad , \quad f_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial(\sigma_{11}-V)}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial(\sigma_{22}-V)}{\partial x_2}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{12}=-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \sigma_{11}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+V \\ \sigma_{22}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+V \end{cases}$$

فرض

← اگر تابع φ را طوری بدست آوریم که روابط بالا برقرار باشد مطمئن هستیم که معادلات تعادل برقرارند

به تابع φ، تابع تنش ایری گفته می‌شود.

← این تنش‌ها زمانی جواب مسئله هستند که سازگار باشند:

$$\nabla^2\left[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\right]=\frac{1+\nu}{1-\nu}(-\nabla^2 V)$$

$$\Rightarrow (1+\nu)\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})=\frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla^2 V$$

$$\Rightarrow \nabla^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+2V\right)=\frac{1}{1-\nu}\nabla^2 V$$

$$\Rightarrow \nabla^4\varphi+2\nabla^2 V=\frac{1}{1-\nu}\nabla^2 V \Rightarrow \nabla^4\varphi=-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\nabla^2 V$$

در غیاب نیروهای حجمی $\boxed{\nabla^4\varphi=0}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

• مسئله کرنش مسطح در دستگاه استوانه‌ای

$$\begin{cases} u_r = u_r(r,\theta) \\ u_\theta = u_\theta(r,\theta) \\ u_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right) \\ \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0 \end{cases}$$

روابط کرنش - تغییر مکان

روابط تنش - کرنش (الاستیک):

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}\right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1+\nu}{E}\left[-\nu\sigma_{rr} + (1-\nu)\sigma_{\theta\theta}\right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \end{cases}$$

معادلات تعادل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \end{cases}$$

بلترامی - میشل :
$$\nabla^2\sigma_{kk} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

تابع تنش ایری :

$$* \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow f_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad f_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} + V \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + V \ ; \quad \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \end{cases}$$

Homa

این تنش‌ها زمانی جواب مسئله هستند که سازگار باشند :

$$\nabla^2 \left[\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \right] = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -\frac{1}{1-\nu} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + 2V \right) = -\frac{1}{1-\nu} (-\nabla^2 V)$$

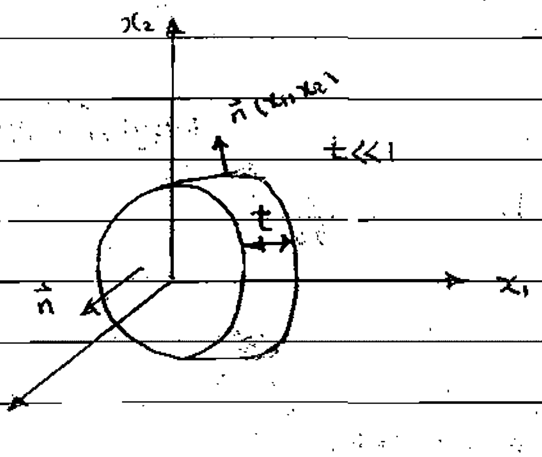
$$\Rightarrow \nabla^2 (\nabla^2 \varphi + 2V) = \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 V \Rightarrow \nabla^4 \varphi = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 V$$

در غیاب نیروهای حجمی $\boxed{\nabla^4 \varphi = 0}$

ب) تنش مسطح :

(Plane Stress)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$\vec{n} : (0, 0, 1)$

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{13} = 0 \\ T_2 = \sigma_{23} = 0 \\ T_3 = \sigma_{33} = 0 \end{cases}$$

هرچه صفحه ضخیم‌تر باشد، از تعریف خارج می‌شوم!

← در مسئله کرنش مسطح، طول صفحه بی‌نهایت است و در مسئله تنش مسطح ضخامت صفحه خیلی کم است

مسئله کرنش مسطح به طور دقیق حل می‌شود ولی مسئله تنش مسطح با تقریب حل می‌شود. مگر اینکه ضخامت صفحه صفر باشد.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$ رابطه تنش - کرنش

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \quad ; \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{cases}$$

رابطه کرنش - تغییر مکان

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad ; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{cases}$$

معادلات تعادل

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + F_2 = 0 \\ F_3 = 0 \end{cases}$$

* تعبیر فیزیکی تنش مسطح:
یک صفحه داریم که نیروها در داخل صفحه هستند

* تعبیر فیزیکی کرنش مسطح:
مسئله دارای بینهایت صفحه تعادل است (چه از نظر هندسه چه بارگذاری) و نیروها در داخل صفحه هستند.

شرایط مرزی بر روی صفحه

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \\ T_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \\ T_3 = 0 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} = 2\,\frac{1+\nu}{E}\,\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

← از معادله تعادل اول نسبت به x_1 و از معادله تعادل دوم نسبت به x_2 مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\,\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

← حال مقدار بدست آمده برای $\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$ را در رابطه سازگاری بالا جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{1}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} = \frac{1+\nu}{E}\left(-\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} = -(1+\nu)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}}$$

⇐ معادله بلترامی - میشل برای مسئله تنش صفحه را بدست آوردیم.

Homa

که تابع تنش ایری :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + V \\ \sigma_{22} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + V \\ \sigma_{12} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \vec{F} = -\vec{\nabla} V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

← این تنش ها باید سازگار باشند ⇐ در معادله بلترامی - میشل قرار می دهیم :

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi + 2V) = (1-\nu) \nabla^2 V$$

$$\Rightarrow \nabla^4 \varphi = -(1-\nu) \nabla^2 V \xrightarrow[\text{؟}]{\nabla^2 V = 0} \boxed{\nabla^4 \varphi = 0}$$

نیروی حجمی از تابع پتانسیل ناشی می شود که هارمونیک است.

تابع φ باید به نحوی تعیین شود که بی هارمونیک باشد.

← حال می خواهیم شرطی پیدا کنیم که با برقراری ε_{33} نیز مسئله تنش مسطح باشد :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{33} = A x_1 + B x_2 + C}$$

اگر ε_{33} خطی باشد، مسئله به طور دقیق تنش مسطح است.

ولی به ندرت در مسائل ε_{33} خطی می شود. به همین دلیل در تنش مسطح تقریب داریم.

در مسأله تنش مسطح با تقریب از معادلات سازگاری ε_{33} صرف نظر می‌کنیم.

• مسأله تنش مسطح در دستگاه مختصات استوانه‌ای :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r,\theta) & \sigma_{r\theta}(r,\theta) & 0 \\ \sigma_{r\theta}(r,\theta) & \sigma_{\theta\theta}(r,\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{1}{E}\sigma_{rr} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{rr} + \dfrac{1}{E}\sigma_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\ 2\varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \end{cases}$$

ناویه : $\mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda)\,\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -(1+\nu)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{f_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$* \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow f_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad f_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

تابع تنش ایری:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} + V \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + V \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2V\right) = (1+\nu)\nabla^2 V$$

$$\Rightarrow \nabla^2(\nabla^2\varphi + 2V) = (1+\nu)\nabla^2 V \Rightarrow \nabla^4\varphi = -(1-\nu)\nabla^2 V$$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^4 \varphi = 0}$$

در غیاب نیروهای حجمی ($\nabla^2 V = 0$) تابع تنش ایری (φ) در مسئله تنش مسطح و کرنش مسطح یکی است

یعنی تنش‌ها در دو محیط ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$) یکسان خواهند بود ولی کرنش‌ها یکسان نیستند.

حالت خاصی را حل می‌کنیم که φ فقط تابعی از r باشد:

$$\nabla^4 \varphi(r) = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right]$$

$$\nabla^4 \varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \nabla^2 \varphi}{\partial r}\right)\right]$$

$$\nabla^4 \varphi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right)\right]\right\} = 0$$

$$\rightarrow r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right) = c_1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right] = \frac{C_1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = C_1 \ln r + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = C_1 r \ln r + C_2 r$$

$$\Rightarrow r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = C_1\left(\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right) + C_2\frac{r^2}{2} + C_3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial r} = C_1 r\ln r + C_2 r + \frac{C_3}{r}$$

$$\Rightarrow \varphi = C_1\left(\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right) + \frac{1}{2}C_2 r^2 + C_3\ln r + C_4$$

$$\boxed{\varphi = Ar^2\ln r + Br^2 + C\ln r + D}$$

* در جدول صفحه 232 کتاب تئوری ارتجاعی توابع مختلف تنش ایری در دستگاه مختصات استوانه‌ای آورده شده است.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 2Ar\ln r + Ar + 2Br + \frac{C}{r}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 2A\ln r + A + 2B + \frac{C}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 2A\ln r + 3A + 2B - \frac{C}{r^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = 2A\ln r + A + 2B + \dfrac{C}{r^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad , \quad \sigma_{r\theta} = 0 \\ \sigma_{\theta\theta} = 2A\ln r + 3A + 2B - \dfrac{C}{r^2} \end{cases}$$

Homa

تا اینجا مسئله کرنش مسطح و تنش مسطح یکسان بود ولی برای بدست آوردن کرنش ها باید نوع مسئله را مشخص کنیم. در اینجا کرنش ها را برای مسئله تنش مسطح بدست می آوریم:

کرنش و تغییر مکان مربوط به تنش مسطح

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{rr} = \dfrac{1}{E}\sigma_{rr} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{\theta\theta} = \dfrac{1}{E}\left[2A\ln r + A + 2B + \dfrac{C}{r^2}\right] \\
\qquad - \dfrac{\nu}{E}\left[2A\ln r + 3A + 2B - \dfrac{C}{r^2}\right] = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\
\varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{E}\sigma_{\theta\theta} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{rr} = \dfrac{1}{E}\left[2A\ln r + 3A + 2B - \dfrac{C}{r^2}\right] \\
\qquad - \dfrac{\nu}{E}\left[2A\ln r + A + 2B + \dfrac{C}{r^2}\right] = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\
\varepsilon_{r\theta} = 0
\end{cases}
$$

$$u_r = \frac{1}{E}\left[2Ar\ln r - 2Ar + (A+2B)r - \frac{C}{r}\right]$$

$$\qquad - \frac{\nu}{E}\left[2Ar\ln r + Ar + 2Br + \frac{C}{r}\right] + f(\theta)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \Rightarrow \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r\varepsilon_{\theta\theta} - u_r$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{E}\left[4Ar\right] - f(\theta)$$

$$u_\theta = \frac{4A}{E}r\theta - \int f(\theta)\,d\theta + g(r)$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \cancel{\frac{4A}{E}\theta} + \frac{\partial g(r)}{\partial r}$$

$$- \cancel{\frac{4A}{E}\theta} - \frac{g(r)}{r} + \frac{1}{r}\int f(\theta)\,d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \int f(\theta)\,d\theta = g(r) - r\frac{\partial g(r)}{\partial r} = K \quad (\text{مقدار ثابت})$$

$$* \int f(\theta)\,d\theta = F(\theta) \Rightarrow F''(\theta) + F(\theta) = K$$

$$\Rightarrow F(\theta) = G\cos\theta + H\sin\theta + K$$

$$\boxed{f(\theta) = F'(\theta) = -G\sin\theta + H\cos\theta}$$

$$* \; g(r) = r^m \rightarrow \frac{\partial g(r)}{\partial r} = m r^{m-1}$$

$$\Rightarrow r^m - r(m r^{m-1}) = K \Rightarrow m = 1$$

$$\boxed{g(r) = Ir + K}$$

دوران جسم صلب

$$u_\theta = \frac{4A}{E} r\theta - G\cos\theta - H\sin\theta + Ir$$

(Ir) بیانگر دوران جسم صلب است ∴ در نتیجه برای حذف دوران صلب I=0 باید باشد

$$u_r = \frac{1}{E}[\dots] - \frac{\nu}{E}[\dots] + G\sin\theta + H\cos\theta$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

← جمله $G\sin\theta + H\cos\theta$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیانگر تغییرمکان جسم صلب می‌باشد

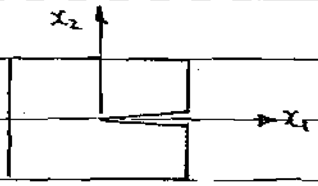
با حذف دوران جسم صلب و تغییرمکان جسم صلب u_r و u_θ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{E}\left[2Ar\ln r - Ar + 2Br - \frac{C}{r}\right] - \frac{\nu}{E}\left[2Ar\ln r + Ar + 2Br + \frac{C}{r}\right] \\ u_\theta = \frac{4A}{E}\, r\theta \end{cases}$$

$$u_\theta\Big|_{\theta=2\pi} - u_\theta\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \frac{4A}{E}\, r(2\pi) = 0 \Rightarrow \boxed{A=0}$$

$$\Rightarrow \quad u_r = Ar + \frac{B}{r} \quad , \quad u_\theta = 0$$

(از حل معادلات ناویر نیز به همین نتیجه می‌رسیم)



در این حالت u_θ به ازای $\theta=0$, $\theta=2\pi$ یکسان نخواهد بود.

در این حالت $A \neq 0$ می‌باشد.

⇐ تابع $r^2\ln r$ زمانی کاربرد دارد که در محیط ناپیوستگی داشته باشیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

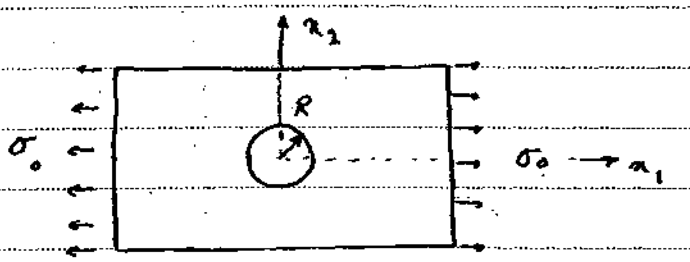
Homa

مثال

مسئله تمرکز تنش :

1) صفحه به اندازه ∞

2) صفحه محدود با R واحد



در $R=\infty$:
$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = a_{ir}\, a_{js}\, \sigma_{rs}$$

$$[\sigma'] = [a][\sigma][a]^T$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_0 \cos^2\theta & -\sigma_0 \sin\theta\cos\theta \\ -\sigma_0 \sin\theta\cos\theta & \sigma_0 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_0 \cos^2\theta = \sigma_0/_2 + \sigma_0/_2 \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} = \dfrac{-\sigma_0}{2} \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\sigma_0}{2} - \dfrac{\sigma_0}{2} \cos 2\theta \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = f_1(r) + f_2(r)\cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} = f_3(r) + f_4(r)\sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} = f_5(r) + f_6(r)\cos 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \end{cases}$$

اگر بگیریم $\nabla^4\varphi = 0 \quad , \quad \varphi = f(r) + g(r)\cos 2\theta$

تمرین : از اینجا $f(r)$, $g(r)$ بدست آید.

طبق صورتهای کتاب :

$$\varphi = Ar^2 + B\ln r + C\theta + Dr^2\cos 2\theta + E\frac{\cos 2\theta}{r^2} + F\cos 2\theta$$

$$\sigma_{rr} = 2A + \frac{B}{r^2} - 2D\cos 2\theta - 6E\frac{\cos 2\theta}{r^4} - 4F\frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{C}{r^2} + 2D\sin 2\theta - 6E\frac{\sin 2\theta}{r^4} - 2F\frac{\sin 2\theta}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2} + 2D\cos 2\theta + 6E\frac{\cos 2\theta}{r^4}$$

$$2\mu u_r = A(\chi - 1)r - \frac{B}{r} - 2Dr\cos 2\theta + 2E\frac{\cos 2\theta}{r^3} - F(\chi - 1)\frac{\cos 2\theta}{r}$$

برای تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای فرق دارد.

Subject:
Year. 87 Month. 10 Date. 15 ( )

$$2\mu u_\theta = -\frac{C}{r^2} + 2Dr\sin 2\theta + 2E\frac{\sin 2\theta}{r^3} - F(\chi-1)\frac{\sin 2\theta}{r}$$

* اگر جواب اضافه برای φ بگذاریم، مشکلی ندارد و جواب اضافه خودش حذف می‌شود. با ضریب مربع داشتن شرایط مرزی صفر در می‌آید.

اگر جواب کم بگذاریم، شرایط مرزی را نمی‌توانیم ارضاء کنیم.

← $\ln r$ نمی‌تواند جواب φ باشد چون σ_{rr} را در $r=\infty$، ∞ می‌کند.

$r^4\cos 2\theta$ هم همین طور.

← طرز استفاده از جدول: ترکیبی که فقط تابع r هستند (در اینجا) و تابع θ نیستند، و σ ی آنها در $r=\infty$، ∞ نباشد.

← اگر ضرایب (A تا F) بدست آید یعنی تابع φ درست است. اگر بدست نیاید یعنی ناقص است.

← در مرحله بعد r را به ∞ میل می‌دهیم و ضرایب را بدست می‌آوریم.

$$\sigma_{rr}\Big|_{r\to\infty} = 2A - 2D\cos 2\theta = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sigma_0}{4}, \quad D = -\frac{\sigma_0}{4}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$r = R \qquad \vec{n} = (-1, 0) \qquad \begin{Bmatrix} T_r \\ T_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_{rr} \\ -\sigma_{\theta r} \end{Bmatrix}$$

$$T_R = -\sigma_{rr} = 0$$

$$= -\left[\frac{\sigma_0}{2} + \frac{B}{R^2} + \left(\frac{\sigma_0}{2} - 6\frac{E}{R^4} - 4\frac{F}{R^2} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$T_\theta = -\sigma_{r\theta} = 0$$

$$= -\left[\frac{C}{R^2} + \left(-\frac{\sigma_0}{2} - \frac{6E}{R^4} - \frac{2F}{R^2} \right) \sin 2\theta \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_0}{2} - \frac{6E}{R^4} - \frac{4F}{R^2} = 0 \qquad \frac{C}{R^2} = 0$$

$$\frac{\sigma_0}{2} - \frac{6E}{R^4} - \frac{2F}{R^2} \qquad \frac{\sigma_0}{2} - \frac{B}{R^2} = 0$$

$$\sigma_0 - \frac{2F}{R^2} = 0$$

$$\frac{2E}{R^4} = -\sigma_0/2$$

$$B = -\frac{\sigma_0 R^2}{2}, \quad C = 0, \quad F = \frac{\sigma_0 R^2}{2}, \quad E = -\frac{\sigma_0 R^4}{4}$$

* همه معادلات (سازگاری، تعادل، روابط تنش - کرنش) ارضا شده‌اند.

$\nabla^4 \varphi = 0$ $\quad$ 2θ از φ بدست آمده.

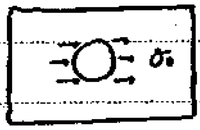
* اگر در معادلات شرایط مرزی ارضا نشد، یعنی φ کامل نیست.

$$\sigma_{\theta\theta} = \left(\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2}\frac{R^2}{r^2}\right) + \left(-\frac{\sigma_0}{2} - \frac{3\sigma_0}{2}\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \quad *$$

در $\theta = \pi/2$ و $r = R$ ، $\sigma_{\theta\theta} = 3\sigma_0$ بدست می آید. این برای تنش در

مقاومت مصالح هم بدست می آید.

* مسئله می تواند به صورت زیر باشد :



$$T_r = \sigma_0 \cos\theta$$

$$n = (-1, 0)$$

$$T_r = \sigma_{rr} = -\sigma_0 \cos\theta \ , \ r = R$$

$$T_\theta = -\sigma_0 \sin\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_0 \sin\theta \ , \ r = R$$

← اگر در مسائل به این صورت یک ضریب اضافه داشتیم، یک معادله به این صورت اضافه

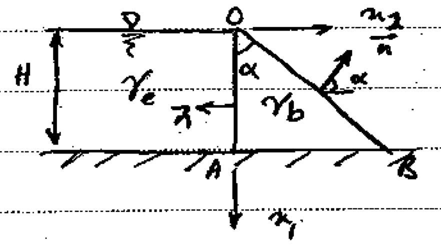
می کنیم :

$$u_r\Big|_{\theta = 2\pi} - u_r\Big|_{\theta = 0} = 0$$

Subject:
Year . Month . Date . ( )

مثال

سد بتنی



← چون مختصات کارتزین است . φ را چند جمله‌ای می‌گیریم .

$$\varphi = Ax_1^3 + Bx_1^2x_2 + Cx_1x_2^2 + Dx_2^3 + Ex_1^2 + Fx_1x_2 + Gx_2^2$$

جملات x_1 و x_2 را نمی‌نویسیم چون مشتق آنها ثابت است .

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + V \\[2ex] \sigma_{12} = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \\[2ex] \sigma_{22} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + V \end{cases}$$

$$\nabla^4\varphi = \frac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial x_2^4}$$

← $\nabla^4\varphi$ صفر می‌شود چون φ از درجه $\underline{3}$ است . اگر این φ شرایط مرزی را ارضا نکند

یعنی ناقص است . در این صورت باید جملات $Hx_1^4 + Ix_1^3x_2 + Jx_1^2x_2^2 + Kx_1x_2^3 + Lx_2^3$

را نیز اضافه کنیم به φ . در این صورت یک معادله ـ معادلات اضافه می‌شود :

$$\nabla^4\varphi = 24H + 8J + 24L = 0$$

البته در این مسئله اصلاً نیاز به این کار نیست.

$$\begin{cases} f_1 = \gamma_b = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \rightarrow \quad V = -\gamma_b x_1 \\ f_2 = 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + V = 2Cx_1 + 6Dx_2 + 2G - \gamma_b x_1 \\ \sigma_{12} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -(2Bx_1 + 2Cx_2 + F) \\ \sigma_{22} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + V = 6Ax_1 + 2Bx_2 + 2E - \gamma_b x_1 \end{cases}$$

$\underline{OA}$: $\vec{n} = (0, -1)$, $x_2 = 0$

$$\begin{cases} T_1 = -\sigma_{12} = 0 \Rightarrow 2Bx_1 + F = 0 \Rightarrow B = F = 0 \\ T_2 = -\sigma_{22} = \gamma_e x_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow 6Ax_1 + 2E - \gamma_b x_1 = -\gamma_e x_1$$

$$\rightarrow E = 0$$

$$A = \frac{\gamma_b - \gamma_e}{6}$$

$\underline{OB}$: $\vec{n} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$

$$\begin{cases} T_1 = -\sin\alpha\,(\sigma_{11}) + \cos\alpha\,(\sigma_{12}) = 0 \\ T_2 = -\sin\alpha\,(\sigma_{12}) + \cos\alpha\,(\sigma_{22}) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{T_1 = 0} tg\,\alpha\,(2Cx_1 + 6Dx_1\,tg\,\alpha + 2G - \gamma_b x_1 + 2Cx_1) = 0$$

$$\Rightarrow G = 0 \quad , \quad 4C + 6D\,tg\,\alpha = \gamma_b$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\tau_2=0 \Rightarrow (tg\,\alpha)(2c\,x_1\,tg\,\alpha) + ((-\gamma_e)x_1) = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{\gamma_e}{2tg^2\alpha} \quad , \quad D = \frac{\gamma_b}{6tg\,\alpha} - \frac{\gamma_e}{3tg^3\alpha}$$

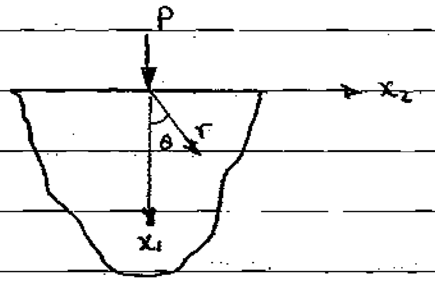
در ادامه ε ، u بدست می آید.

شرط عدم واژگونی: در نقطه $x_1 = H$ ، $x_2 = 0$ ، $\sigma_{11} < 0$

$$\begin{cases} \sigma_{11} < 0 \\ x_1 = H \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \sigma_{11} = \frac{\gamma_e}{tg^2\alpha}H - \gamma_b H < 0 \Rightarrow \frac{\gamma_e}{tg^2\alpha} < \gamma_b$$

Subject:
Year. ...... Month. ...... Date. ...... ( )

مسائل دو بعدی - روش آنالیز ابعادی



$$P = \overset{\text{order}}{O}\,[FL^{-1}]$$

$$\sigma = O\,[FL^{-1}]$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \quad , \quad \varphi = O\,[F]$$

بی‌بعد

$$f(\theta) = O\,[1] \quad , \quad r = O\,[L] \quad , \quad \frac{\varphi}{Pr} = O\,[1]$$

$$\frac{\varphi}{Pr} = f(\theta) \quad \longrightarrow \quad \varphi = Pr\,f(\theta)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{P}{r} f''(\theta) + \frac{P}{r} f(\theta)$$

$$\nabla^4 \varphi = \frac{P}{r^3} f^{IV}(\theta) - \frac{P}{r^3} f''(\theta) + \frac{2P}{r^3} f''(\theta) + \frac{P}{r^3} f''(\theta) \quad \frac{P}{r^3} f(\theta)$$

$$+ \frac{2P}{r^3} f(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f^{IV}(\theta) + 2f''(\theta) + f(\theta) = 0$$

ریشه مضاعف

$$f(\theta) = e^{\alpha\theta} \quad \longrightarrow \quad \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha^2 = -1 \quad \longrightarrow \quad \alpha = \pm i$$

$$f(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta + C\theta\cos\theta + D\theta\sin\theta$$

$$(f(\theta) = A_1 e^{i\theta} + A_2 e^{-i\theta} + A_3 \theta e^{i\theta} + A_4 \theta e^{-i\theta})$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\varphi = Pr\,(A\cos\theta + B\sin\theta + C\theta\cos\theta + D\theta\sin\theta)$$

توابع $Ar\cos\theta$ و $Br\sin\theta$ توابع بی اثری هستند چون با قرار دادن این توابع در رابطهٔ σ_{rr} ، $\sigma_{r\theta}$ و $\sigma_{\theta\theta}$ مشتق آنها صفر می‌شود

$\Leftarrow$ درنتیجهٔ $A\cos\theta$ و $B\sin\theta$ را از رابطهٔ φ حذف می‌کنیم:

$$\varphi = Pr\,(C\theta\cos\theta + D\theta\sin\theta)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = C\cos\theta + D\sin\theta - C\theta\sin\theta + D\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -2C\sin\theta + 2D\cos\theta - C\theta\cos\theta - D\theta\sin\theta$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{P}{r}(-2C\sin\theta + 2D\cos\theta - C\theta\cos\theta - D\theta\sin\theta)$$

$$+\frac{P}{r}(C\theta\cos\theta + D\theta\sin\theta)$$

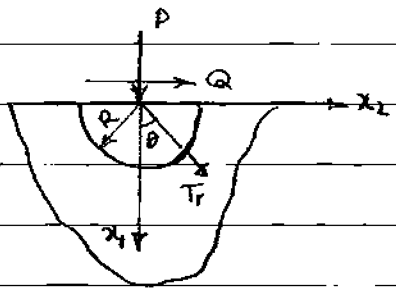
$$\Rightarrow \sigma_{rr} = \frac{2P}{r}(-C\sin\theta + D\cos\theta)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}[Pr\,g(\theta)]\right) = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{2P}{r}(-C\sin\theta + D\cos\theta) \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \end{cases}$$

● معادلات را در دوایره‌ای به شعاع R می‌نویسیم : (برای اعمال شرایط مرزی)



$$\vec{n} = (1,0) \longrightarrow \begin{cases} T_r = \sigma_{rr} \\ T_\theta = \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\sum F_{x_1} = 0 \longrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_r (\cos\theta) R \, d\theta + P = 0 \qquad (I)$$

$$\sum F_{x_2} = 0 \longrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_r (\sin\theta) R \, d\theta + Q = 0 \qquad (II)$$

$$(I) \longrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2P}{R} \left(C \sin\theta \cos\theta + D \cos^2\theta \right) R \, d\theta + P = 0$$

$$\Rightarrow 2D \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow D\pi + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{D = -\frac{1}{\pi}}$$

← برای اینکه حالت کلی را بررسی کنیم ، نیروی Q در جهت x_2 را نیز در نظر می‌گیریم :

$$(II) \longrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2P}{R} \left(C \sin^2\theta + D \sin\theta \cos\theta \right) R \, d\theta + Q = 0$$

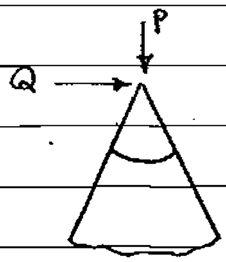
$$\Rightarrow PC\pi + Q = 0 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{Q}{\pi P}}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2P}{r} \left(-\frac{Q}{\pi P} \sin\theta - \frac{1}{\pi} \cos\theta \right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\sigma_{rr} = -\frac{2}{\pi r} \left(Q \sin\theta + P \cos\theta \right)}$$

← می‌توانیم بدون وارد شدن در حل معادلات دیفرانسیل، با استفاده از جدول صفحه 232 کتاب تئوری الاستیسیته مسئله را حل کنیم.

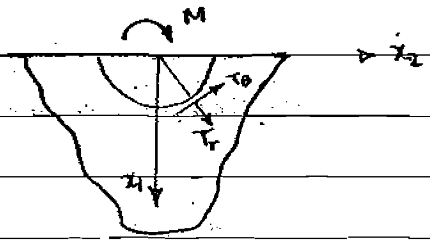
تمرین) همین مسئله را با استفاده از جدول حل کنید.



← مسئله گوه نیز مانند مسئله محیط نیمه بینهایت حل می‌شود

فقط برای اعمال شرایط مرزی باید تعادل را در قسمتی از یک استوانه بنویسیم. ← فقط ضرایب C و D با مسئله قبل فرق می‌کند.

◄ اگر در مسئله قبل، بار متمرکز M داشته باشیم:



$$M = O[F] \quad , \quad \varphi = O[F]$$

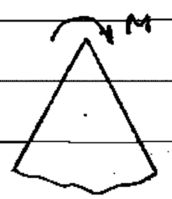
$$\frac{\varphi}{M} = f(\theta) \rightarrow \varphi = M f(\theta)$$

تعادل نیروی

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tau_\theta(R)\, R\, d\theta - M = 0$$

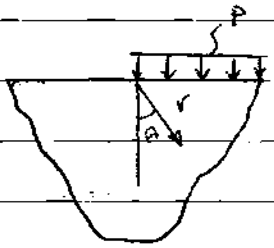
$$\varphi = A\theta + B\sin 2\theta + D\cos 2\theta$$

← مسئله گوه با بار متمرکز هم به طور مشابه حل می‌شود:



Subject:
Year. Month. Date. ( )

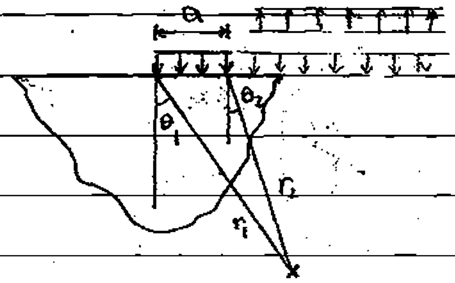
مسئله‌ی دیگر، محیط نیم بینهایت با بار گسترده است :



$P = 0\ [FL^{-2}]$

$\frac{\varphi}{r^2 P} = f(\theta) \rightarrow \varphi = P r^2 f(\theta)$

اگر بار گسترده در طول محدودی وارد شود :



یک بار نیم بینهایت بارگذاری می‌کنیم با مختصات θ_1 و r_1 و یکی هم از فاصله a تا بینهایت

بارگذاری می‌کنیم با مختصات θ_2 و r_2

$$\begin{cases} a = r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2 \\ r_1 \cos\theta_1 = r_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

رابطه بین دستگاه مختصات

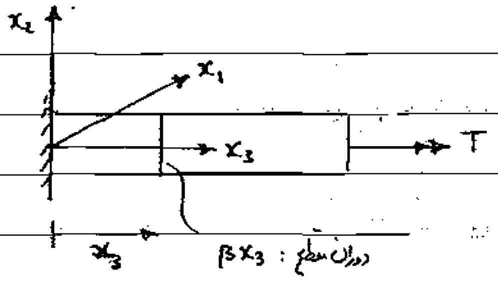
Subject:
Year. Month. Date. ( )

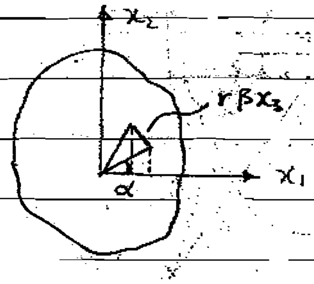
فصل نهم مسئله پیچش

در اینجا روش حل ، روش نیمه معکوس است .

روش معکوس این است که مقداری برای u ها فرض می‌کنیم و نیروها را بدست می‌آوریم

در روش نیمه معکوس ، یک سری از u ها مشخص بوده و برای یک سری نیز مقدار فرض می‌کنیم

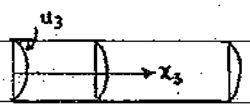




β : دوران پیچشی در واحد طول

$$
\begin{cases}
u_1 = -r\beta x_3 \sin\alpha = -\beta x_2 x_3 \\
u_2 = r\beta x_3 \cos\alpha = \beta x_1 x_3 \\
u_3 = \beta\varphi(x_1, x_2)
\end{cases}
$$

φ : تابع طبیعی ، فرض می‌کنیم تابع φ در طول تیر یکسان است



u_3 در طول تیر در همه نقاط یکسان است .

یعنی در جهت x_3 آزاد است و به طور یکسان در طول تیر اعوجاج رخ می‌دهد .

φ : تابع اعوجاج

چون φ مجهول است ، روش نیمه معکوس می‌باشد .

← برای حل مسئله با استفاده از تابع‌های فرضی باید کرنش‌ها را بدست آوریم:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(-\beta x_2 + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\beta x_1 + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} = G\beta\left(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) \\ \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} = G\beta\left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) \end{cases} \quad ; \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{33} = 0$$

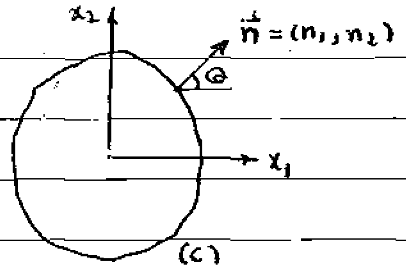
← چون از تابع‌ها استفاده می‌کنیم، معادلات سازگاری برقرارند بنابراین معادلات تعادل را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \longrightarrow G\beta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}\right) + G\beta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0 \quad A_0 \text{ روی سطح}$$

! تابع اعوجاج باید تابع هارمونیک باشد

← حال باید شرایط مرزی را اعمال کنیم:



$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 \end{Bmatrix}$$

سطح جانبی عاری از تنش $\rightarrow T_3 = 0 \rightarrow \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0$

$$\rightarrow G\beta\left(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) n_1 + G\beta\left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) n_2 = 0$$

$$\rightarrow \left(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) n_1 + \left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) n_2 = 0$$ روی مرز C

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & \text{روی سطح مقطع } A_0 \\ \left(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) n_1 + \left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) n_2 = 0 & \text{روی مرز } C \end{cases}$$

← با استفاده از روابط بدست آمده می‌توان تابع φ را بدست آورد.

اعمال شرایط مرزی در سطح انتهایی $(x_3 = L)$: $\vec{n} = (0, 0, 1)$

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{13} \\ T_2 = \sigma_{23} \\ T_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_{A_0} T_3 \, dA = 0 \\ M_1 = \int_{A_0} T_3 x_2 \, dA = 0 \\ M_2 = \int_{A_0} T_3 x_1 \, dA = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ شرایط مرزی برای T_3 که برقرارند چون $T_3 = 0$ می‌باشد.

www.hoseinzadeh.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\int_{A_0} T_1\, dA = 0 \quad , \quad \int_{A_0} T_2\, dA = 0$$

$$T = \int_{A_0} (T_2 x_1 - T_1 x_2)\, dA$$! جمع تنش‌ها باید برابر با گشتاور پیچشی T شود

به سه شرط مرزی نوشته شده باید روی سطح مقطع A_0 برقرار باشد :

$$\int_{A_0} T_1\, dA = \int_{A_0} \sigma_{13}\, dA = \int_{A_0} \left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) dA$$

$$= \int_{A_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left[-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_1\left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\right] \right\} dA$$

جزء طول

$$= \int_C \underbrace{\left[n_1 x_1\left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) + n_2 x_1 \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\right]}_{\text{روی مرز C این مقدار صفر است.}} dS = 0$$

شرط مرزی برقرار است

$$\int_{A_0} T_2\, dA = \int_{A_0} \sigma_{23}\, dA = \int_{A_0} \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) dA$$

$$= \int_{A_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_2\left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_2\left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\right] \right\} dA$$

$$= \int_C \left[n_1 x_2\left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) + n_2 x_2\left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\right] dS = 0$$

Homa

$$* \int_{A_\circ} \left(x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) dA = \int_{A_\circ} \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 \varphi) - \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2 \varphi) \right] dA$$

$$= \int_C (n_2 x_1 \varphi - n_1 x_2 \varphi)\, ds = \int_C \varphi \left(n_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) ds$$

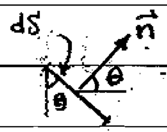
$$= -\int_{A_\circ} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) \right] dA = -\int_{A_\circ} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 \right] dA$$

$$\Rightarrow \int_{A_\circ} \left[\left(x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 \right] dA = 0$$

$$J = \int_{A_\circ} \left[x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - 2x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 \right] dA$$

$$= \int_{A_\circ} \left[\left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 \right] dA$$

$$= \int_{A_\circ} \frac{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}{(G\beta)^2}\, dA = \int_{A_\circ} \left(\frac{\tau}{G\beta} \right)^2 dA$$



$$ds\,(\mathrm{Cos}\,\theta) = dx_2$$

$$ds\,(\mathrm{Sin}\,\theta) = dx_1$$

$$\vec{n} = (n_1, n_2, 0) = (\mathrm{Cos}\,\theta, \mathrm{Sin}\,\theta, 0) = \left(\frac{dx_2}{ds}, -\frac{dx_1}{ds}, 0 \right)$$

$\rightarrow$ شرط مرزی c : $\left(x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \frac{dx_2}{ds} - \left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \frac{dx_1}{ds} = 0$

شرایط کوشی ریمان : $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\rightarrow \nabla^2\psi = 0 \qquad \text{در حوزه } A_0$$

روی مرز C: $\left(-x_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{ds} - \left(x_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{ds} = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} = x_2\frac{dx_2}{ds} + x_1\frac{dx_1}{ds}$$

$$\rightarrow \frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\rightarrow \frac{d}{ds}\left[\psi - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] = 0$$

$$\begin{cases} \nabla^2\psi = 0 & \text{در حوزه } A_0 \\ \frac{d}{ds}\Big[\underbrace{\psi - \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}_{\text{تابع تنش پرانتل : } \phi}\Big] = 0 & \text{روی مرز C} \end{cases}$$

$$\sigma_{13} = G\beta\left(-x_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) \quad ; \quad \sigma_{23} = G\beta\left(x_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)$$

$$J = \int_{A_0}\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)dA$$

$$* \quad \phi = \psi - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow \nabla^2\phi = -2 \qquad \text{در حوزه } A_0$$

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \rightarrow \phi = K \qquad \text{روی مرز C}$$

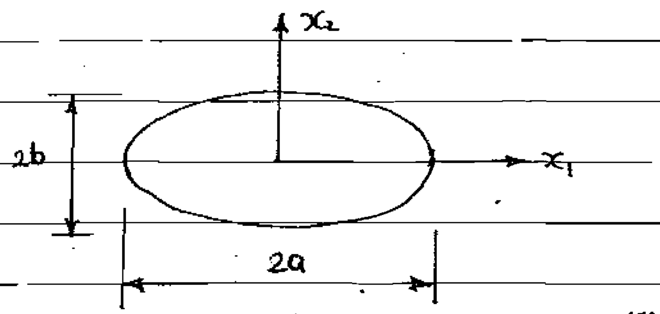
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_1 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_2 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$$

$$\Rightarrow J = \int_{A_0} \left[x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right] dA = \int_{A_0} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^2 \right] dA$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = -2 & \text{روی سطح } A_0 \\ \phi = K & \text{روی مرز} \end{cases}$$

مثال) حل مسئله پیچش برای تیری با مقطع بیضی



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{معادله بیضی}$$

تابع انتخابی : $\phi = K\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}\right)$

ϕ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مقدار آن روی مرز برابر با K شود

$$\nabla^2 \phi = K\left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}\right) = -2 \Rightarrow K\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow K \frac{a^2+b^2}{a^2 b^2} = -1 \Rightarrow \boxed{K = -\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\phi = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}\right)$$

که این تابع ϕ می‌تواند مسئله را حل کند.

$$\sigma_{13} = G\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) = -2G\beta\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)x_2$$

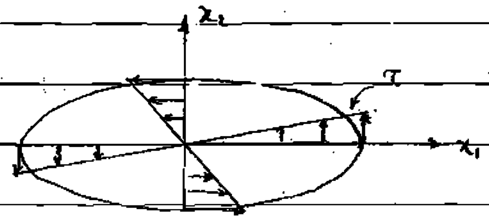
$$\sigma_{23} = G\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) = 2G\beta\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)x_1$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2} = \frac{2G\beta}{a^2+b^2}\sqrt{a^4x_1^2+b^4x_1^2}$$

حال τ_{max} را از روابط ریاضی بالا بدست آورید.

که τ_{max} در نقطه $\left|\begin{smallmatrix}0\\b\end{smallmatrix}\right.$ رخ می‌دهد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{2G\beta a^2b^2}{a^2+b^2}}$$



$$J = \int_{A_0}\left[\frac{4a^4x_2^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{4b^2x_1^2}{(a^2+b^2)^2}\right]dA = \frac{4}{(a^2+b^2)^2}\left[a^4\int_{A_0}x_2^2\,dA + b^4\int_{A_0}x_1^2\,dA\right]$$

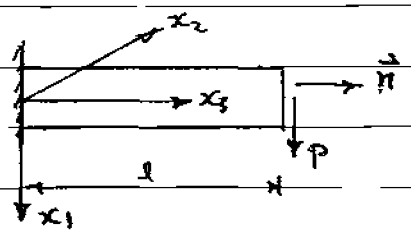
$$= \frac{4}{(a^2+b^2)^2}\left[a^4 I_{11} + b^4 I_{22}\right]$$

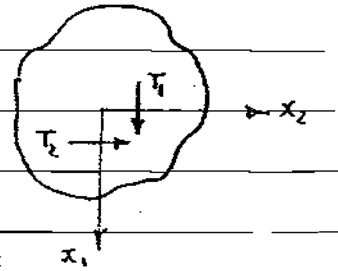
$$J = \frac{4}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{\pi a^5b^3}{4}+\frac{\pi a^3b^5}{4}\right] = \frac{4}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{\pi a^3b^3}{4}(a^2+b^2)\right]$$

ممان اینرسی قطبی : $J = \dfrac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}$

Homa

◀ مسئله خمش (بخش دوم)





$$\vec{n} = (0,0,1)$$

◀ با به کاربردن اصل سن ونان روی این سطح به معادلات زیر می رسیم:

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{13} \\ T_2 = \sigma_{23} \\ T_3 = \sigma_{33} \end{cases}$$

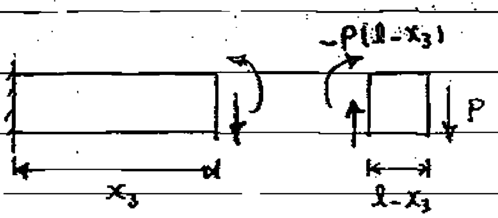
$$\int_{A_0} \sigma_{13}\, dA = P \qquad \int_{A_0} \sigma_{23}\, dA = 0$$

$$\int_{A_0} \sigma_{33}\, dA = 0$$

$$M_2 = -\int_{A_0} \sigma_{33}\, x_1\, dA = 0 \qquad M_1 = \int_{A_0} \sigma_{33}\, x_2\, dA = 0$$

$$M_3 = \int_{A_0} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2)\, dA = 0$$

◀ حال اصل سن ونان را در مقطعی به فاصله x_3 از مبدأ بکار می بریم:



$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$$

$$\int_{A_0} \sigma_{13}\, dA = P \qquad \int_{A_0} \sigma_{23}\, dA = 0 \qquad \int_{A_0} \sigma_{33}\, dA = 0$$

$$\int_{A_0} \sigma_{33}\, x_1\, dA = -P(l - x_3) \qquad (I)$$

$$M_1 = \int_{A_0} \sigma_{33} x_2\, dA = 0 \quad (II) \quad ; \quad M_3 = \int_{A_0} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2)\, dA = 0 \quad (III)$$

با توجه به رابطهٔ (I)، σ_{33} را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sigma_{33} = P(Ax_1 + Bx_2 + C)(l - x_3)$$

$$\int x_1\,dA = Q_2 \qquad \int x_2\,dA = Q_2$$

$$\int x_1^2\,dA = I_{22} \qquad \int x_2^2\,dA = I_{11} \qquad \int x_1 x_2\,dA = I_{12}$$

$$(I) \rightarrow P(l-x_3)(AI_{22} + BI_{12} + CQ_2) = -P(l-x_3)$$

$$(II) \rightarrow P(l-x_3)(AI_{12} + BI_{11} + CQ_1) = 0$$

$$(III) \rightarrow P(l-x_3)(AQ_2 + BQ_1 + CA_0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AI_{22} + BI_{12} + CQ_2 = 1 \\ AI_{12} + BI_{11} + CQ_1 = 0 \\ AQ_2 + BQ_1 + CA_0 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{12} & Q_2 \\ I_{12} & I_{11} & Q_1 \\ Q_2 & Q_1 & A_0 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{I_{11}A_0 - Q_1^2}{\Delta}, \quad B = \frac{I_{12}A_0 - Q_1Q_2}{\Delta}, \quad C = \frac{I_{12}Q_1 - I_{11}Q_2}{\Delta}$$

از وزن تیر صرف نظر می‌کنیم و معادلات تعادل را می‌نویسیم:

$$(1)\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \qquad (2)\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۳) $$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \quad P(Ax_1 + Bx_2 + C) = 0$$

که معادلات تعادل باید در کل حجم برقرار باشند (در معادله با x_3 تمام) ، در نتیجه این معادله شرایط

باید روی سطح A_0 برقرار باشد

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\underbrace{\left[\sigma_{13} - \frac{P}{2}(Ax_1^2 + Cx_1)\right]}_{\frac{P}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2}} + \frac{\partial}{\partial x_2}\underbrace{\left[\sigma_{23} - \frac{P}{2}(Bx_2^2 + Cx_2)\right]}_{\frac{P}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1}} = 0 \qquad \text{روی } A_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{13} = \frac{P}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_2} + Ax_1^2 + Cx_1\right] \\ \sigma_{23} = \frac{P}{2}\left[-\frac{\partial F}{\partial x_1} + Bx_2^2 + Cx_2\right] \end{cases}$$

← برای داشتن u واحد ، باید معادلات سازگاری (بلترامی - میشل) برقرار باشند:

$$* \quad \nabla^2 \sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu}(-AP) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \sigma_{13} = \frac{AP}{1+\nu} \quad ①$$

$$* \quad \nabla^2 \sigma_{23} \quad \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \sigma_{23} = \frac{BP}{1+\nu} \quad ②$$

$$① \rightarrow \frac{P}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2 F + 2A\right] = \frac{AP}{1+\nu} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2 F = -\frac{2A\nu}{1+\nu}$$

$$② \rightarrow \frac{P}{2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 F + 2B\right] = \frac{BP}{1+\nu} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 F = \frac{2B\nu}{1+\nu}$$

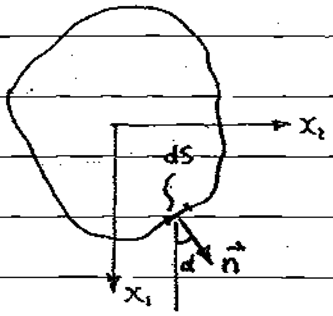
Homa

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 F = \dfrac{2B\nu}{1+\nu} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 F = -\dfrac{2A\nu}{1+\nu} \end{cases} \Rightarrow d(\nabla^2 F) = \frac{2B\nu}{1+\nu}\, dx_1 - \frac{2A\nu}{1+\nu}\, dx_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 F = \frac{2B\nu}{1+\nu}\, x_1 - \frac{2A\nu}{1+\nu}\, x_2 - 2C_0}$$ رابطه A.

که با درنظرگرفتن $\nabla^2 F$ به صورت بالا هم معادلات سازگاری و هم معادلات تعادل ارضا می‌شوند.

حال باید شرایط مرزی را اعمال کنیم:



$$(ds)\,Cos\alpha = dx_2$$
$$(ds)\,Sin\alpha = -dx_1$$

$$\vec{n} = (n_1, n_2, 0) = (Cos\alpha, Sin\alpha, 0)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_1}{ds}, 0\right)$$

$$\Rightarrow T_1 = 0 \quad , \quad T_2 = 0 \quad , \quad T_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0$$

$$T_3 = \frac{P}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_2} + A x_1^2 + C x_1\right]\frac{dx_2}{ds} + \frac{P}{2}\left[-\frac{\partial F}{\partial x_1} + B x_2^2 + C x_2\right]\left(-\frac{dx_1}{ds}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{ds} = -(A x_1^2 + C x_1)\frac{dx_2}{ds} + (B x_2^2 + C x_2)\frac{dx_1}{ds}$$ روی مرز.

$$\begin{cases} \nabla^2 F = \dfrac{2B\nu}{1+\nu} x_1 - \dfrac{2A\nu}{1+\nu} x_2 - 2C_0 & \text{روی } A_0 \\ \dfrac{dF}{ds} = -(Ax_1^2 + Cx_1)\dfrac{dx_2}{ds} + (Bx_2^2 + Cx_2)\dfrac{dx_1}{ds} & \text{روی مرز } C \end{cases}$$

◄ اگر F را از دو معادله بالا بدست آوریم، مسئله بطور کامل حل خواهد شد.

◄ اگر محورهای مختصات را همان محورهای مختصات اصلی در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$I_{12} = Q_1 = Q_2 = 0 \Rightarrow B = C = 0$$

$$A = \frac{I_{11} A_0}{I_{11} I_{22} A_0} = \frac{1}{I_{22}} = \frac{1}{I}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 F = \dfrac{2\nu}{(1+\nu) I} x_2 - 2C_0 & \text{روی } A_0 \\ \dfrac{dF}{ds} = \dfrac{1}{I} x_1^2 \dfrac{dx_2}{ds} & \text{روی مرز } C \end{cases}$$

◄ در مسئله پیچش، دوران حول x_3 را برابر βx_3 در نظر گرفتیم. یعنی دوران در طول تیر متغیر است.

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}\right)$$

$$\frac{1}{A_0}\int_{A_0} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}\, dA = \beta \qquad \text{تغییرات دوران پیچشی در راستای محور } x_3$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$* \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \quad ; \quad \begin{cases} \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G}\sigma_{23} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G}\sigma_{13} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = \frac{1}{2G}\left(\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2}\right)$$

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \frac{P}{2}\left[\partial F/\partial x_2 - 1/I \; x_1^2\right] \\ \sigma_{23} = \frac{P}{2}\left[-\partial F/\partial x_1\right] \end{cases} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \dots = \frac{P}{2}\left[-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right] = -\frac{P}{2}\nabla^2 F$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = -\frac{P}{4G}\nabla^2 F = \frac{P}{4G}\left(\frac{2\nu}{(1+\nu)I}x_2 - 2C_0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{P}{4G}(2C_0) = -\frac{PC_0}{2G}} \qquad \left(2C_0 = -\frac{4\beta G}{P}\right)$$

◀ β یا C_0 در مسئله مجهول است (C_0 بیانگر هندسهٔ پیچش است) پس از حل مسئله، با نوشتن

رابطهٔ زیر می‌توانیم مجهول C_0 یا β را بدست آوریم:

$$M_3 = T = \int_{A_0}(\sigma_{23}x_1 - \sigma_{13}x_2)\,dA = 0$$

! البته این مسئله زمانی است که محورهای مختصات بر محورهای مختصات اصلی منطبق باشد

یعنی مرکز سطح و مرکز پیچش بر هم منطبق باشند و نیرو در مرکز سطح وارد شود

Homa

اگر محور x_1 ، محور تقارن سازه باشد ← $\beta = C_0 = 0$

به عبارت دیگر متوسط پیچش در داخل سطح صفر است. (مرکز سطح و مرکز پیچش منطبق می‌شوند)

اگر در مسئله‌ای C_0 داشته باشیم، تابع F هم تابع خمش است و هم تابع پیچش ولی اگر $C_0 = 0$ باشد، به F ، تابع خمش گفته می‌شود. حال می‌خواهیم تابع خمش را بدست آوریم:

$$\nabla^2 F = \frac{2\nu}{(1+\nu)I} x_2$$

برای سطح مقطع [illegible] بیضی، دایره و ... از این استفاده می‌کنیم

$$F(x_1, x_2) = \frac{2}{P}\left[\phi(x_1, x_2) + h(x_2)\right]$$

$$\nabla^2 F = \frac{2}{P}\left[\nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 h(x_2)}{\partial x_2^2}\right] = \frac{2\nu}{(1+\nu)I} x_2$$

$$\rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 h(x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{\nu P}{(1+\nu) I} x_2$$

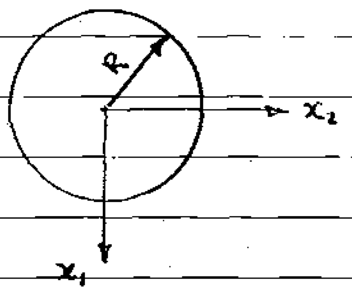
$$\frac{\partial h(x_2)}{\partial x_2} = f(x_1) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = \frac{\nu P}{(1+\nu) I} x_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}}$$ روی A_0

$$\frac{dF}{ds} = \frac{2}{P}\left[\frac{d\phi}{ds} + \frac{dh}{dx_2}\frac{dx_2}{ds}\right] = \frac{1}{I} x_1^2 \frac{dx_2}{ds}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{ds} = \left[\frac{P}{2I} x_1^2 - f(x_1)\right]\frac{dx_2}{ds}}$$ روی مرز C

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال)



$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

$$x_1^2 = R^2 - x_2^2 \Rightarrow \frac{P}{2I}x_1^2 = \frac{P}{2I}(R^2 - x_2^2)$$

$$f(x_2) = \frac{P}{2I}(R^2 - x_2^2)$$

$f(x_2)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\frac{d\phi}{ds}$ روی مرز صفر باشد

$$\frac{d\phi}{ds} = \left[\frac{P}{2I}x_1^2 - f(x_2)\right]\frac{dx_2}{ds} \quad \text{روی مرز } C \quad \rightarrow \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \text{روی مرز } C$$

حال باید ϕ را به گونه‌ای بدست آوریم که $\frac{d\phi}{ds}$ آن صفر باشد و $\nabla^2\phi$ آن برابر رابطه زیر شود:

$$\nabla^2\phi = \frac{\nu P}{(1+\nu)I}x_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \text{روی سطح } A$$

$$\phi = (x_1^2 + x_2^2 - R^2)\, g(x_1, x_2)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\nu P}{(1+\nu)I}x_2 + \frac{P}{I}x_2 = \frac{P(1+2\nu)}{I(1+\nu)}x_2 \quad (I)$$

$g(x_1,x_2)$ نمی‌تواند ثابت باشد، چون رابطه بالا برقرار نمی‌شود

$g(x_1,x_2)$ را خطی تابعی از x_1 در نظر می‌گیریم:

$$\phi = (x_1^2 + x_2^2 - R^2)\, m x_1 = m(x_1^3 + x_2^2 x_1 - R^2 x_1) \longrightarrow m = 0 \quad \times$$

$g(x_1,x_2)$ را خطی تابعی از x_2 در نظر می‌گیریم:

$$\phi = (x_1^2 + x_2^2 - R^2)\, m x_2 = m(x_1^2 x_2 + x_2^3 - R^2 x_2) \longrightarrow \nabla^2\phi = 8 m x_2 \quad \checkmark$$

Homa

اگر بقیه حالات را برای $g(x_1,x_2)$ بررسی کنیم . ضرایب جملات مربوط صفر می‌شود . فقط ضریب x_2
مخالف صفر خواهد بود . در نتیجه خواهیم داشت :

$$\phi = (x_1^2 + x_2^2 - R^2)\, m x_2 \quad \rightarrow \quad \nabla^2\phi = 8 m x_2 \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}),\ (\mathrm{II}) \rightarrow m = \frac{P(1+2\nu)}{8I(1+\nu)}$$

$$\rightarrow \boxed{\phi = \frac{P(1+2\nu)}{8I(1+\nu)} \left(x_1^2 x_2 + x_2^3 - R^2 x_2 \right)}$$

$$f(x_2) = \frac{P}{2I}(R^2 - x_2^2) = \frac{\partial h}{\partial x_2}$$

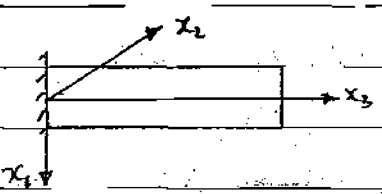
$$F(x_1,x_2) = \frac{2}{P}\left[\phi(x_1,x_2) + h(x_2)\right]$$

$$* \ \sigma_{13} = \frac{P}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{1}{I}x_1^2\right] = \left\{ \left[\frac{P(1+2\nu)}{8(1+\nu)I}(x_1^2 + 3x_2^2 - R^2) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{P}{2I}(R^2 - x_2^2) \right] - \frac{P}{2I}x_1^2 \right\}$$

$$\sigma_{13} = \frac{P(1+2\nu)}{8(1+\nu)I}(x_1^2 + 3x_2^2 - R^2) + \frac{P}{2I}(R^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

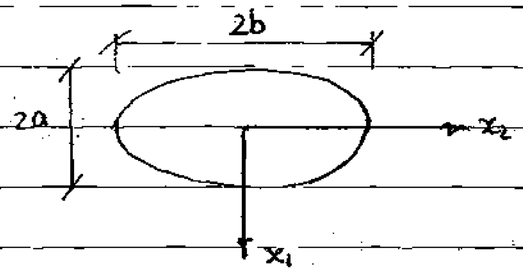
$$* \ \sigma_{23} = -\frac{P}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = -\frac{P}{2}\left[\frac{2}{P}\left(\frac{P(1+2\nu)}{4(1+\nu)I}x_1 x_2\right)\right] = -\frac{P(1+2\nu)}{4(1+\nu)I}x_1 x_2$$



$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{33} = P\left(-\frac{1}{I}x_1\right)(l - x_3)$$

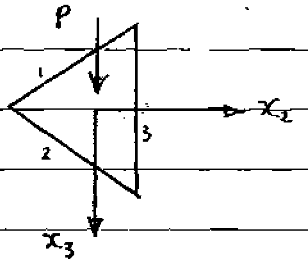
مثال) اگر در مسئله قبل مقطع شکل به صورت بیضی باشد:



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

فقط معادله روی مرز تغییر می‌کند و بقیه روند حل

مشابه مثال قبل خواهد بود.



مثال) تیر طره‌ای با مقطع مثلث متساوی الاضلاع

که نیروی P در مرکز سطح آن وارد می‌شود.

! C_0 یا β در این مسئله مجهول است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

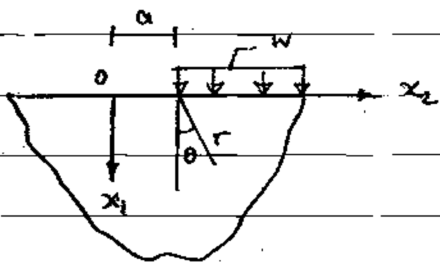
$$\int_{A_0} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2)\, dA = 0$$

! معادله برای مرزهای 1 و 2 بدست آورده و در هم ضرب می‌کنیم و برابر با $f(x_2)$ قرار می‌دهیم.

عبارت داخل کروشه $\frac{d\phi}{ds}$ باید با این انتخاب $f(x_2)$ در همه جا صفر شود. (روی مرز 1، 2، 3)

◀ مثال‌هایی از مسائل دوبعدی

مثال ۱)



$$w = 0\,[F L^{-2}]$$

$$\varphi = 0\,[F] \longrightarrow \frac{\varphi}{w r^2} = 0\,[1]$$

$$\Rightarrow \varphi = w r^2 f(\theta)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 4w f(\theta) + w f''(\theta)$$

$$\nabla^4\varphi = \frac{1}{r^2}\left(4w f''(\theta) + w f^{iv}(\theta)\right) = 0$$

$$\Rightarrow f^{iv}(\theta) + 4 f''(\theta) = 0$$ معادله‌ی مشخصه

$$f(\theta) = e^{\alpha\theta} \longrightarrow \alpha^4 + 4\alpha^2 = 0 \longrightarrow \alpha = 0\ ,\ \alpha = \pm 2i$$

ریشه مضاعف

$$f(\theta) = A + B\theta + C\cos 2\theta + D\sin 2\theta$$

$$\varphi = w r^2 (A + B\theta + C\cos 2\theta + D\sin 2\theta)$$

◀ حال از جدول کتاب تئوری ارتجاعی استفاده می‌کنیم:

$$\varphi = A r^2 + B r^2\theta + C r^2\cos 2\theta + D r^2\sin 2\theta$$

$$\sigma_{rr} = 2A + 2B\theta - 2C\cos 2\theta - 2D\sin 2\theta$$

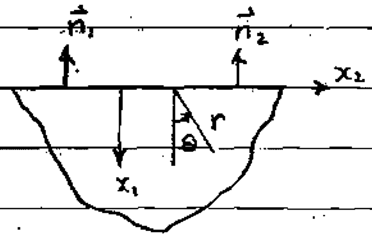
$$\sigma_{r\theta} = -B + 2C\sin 2\theta - 2D\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2A + 2B\theta + 2C\cos 2\theta + 2D\sin 2\theta$$

$$2\mu u_r = A(\chi-1)r + B(\chi-1)r\theta - 2Cr\cos 2\theta - 2Dr\sin 2\theta$$

$$2\mu u_\theta = -B(\chi+1)r\ln r + 2Cr\sin 2\theta - 2Dr\cos 2\theta$$

← با بدست آوردن تنش‌ها و جابجایی‌ها با استفاده از جدول، می‌توانیم با اعمال شرایط مرزی، ضرایب مجهول را بدست آوریم



$$* \quad \theta = -\frac{\pi}{2} : \quad \vec{n}_1 = (0,-1) \longrightarrow \begin{cases} T_r = -\sigma_{r\theta} = 0 \\ T_\theta = -\sigma_{\theta\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -B + 2D = 0 & (1) \\ 2A - B\pi + 2C = 0 & (2) \end{cases}$$

$$* \quad \theta = \frac{\pi}{2} : \quad \vec{n}_2 = (0,1) \longrightarrow \begin{cases} T_r = \sigma_{r\theta} = 0 \\ T_\theta = \sigma_{\theta\theta} = -W \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -B + 2D = 0 & (3) \\ 2A + \pi B - 2C = -W & (4) \end{cases}$$

$$(4) - (2) \longrightarrow 4\pi B = W \Rightarrow B = -\frac{W}{2\pi}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

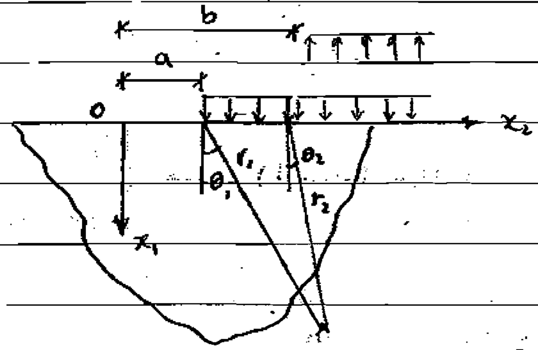
$$(1) \rightarrow D = -\frac{B}{2} \rightarrow D = -\frac{W}{4\pi}$$

$$(2) \rightarrow 2A - 2C = -\frac{W}{4} \rightarrow A - C = -\frac{W}{4}$$

$$\boxed{B = \frac{W}{2\pi}, \quad D = -\frac{W}{4\pi}, \quad A - C = \frac{W}{4}}$$

• چون بارگذاری تا بی‌نهایت ادامه دارد، ضرایب به طور کامل بدست نمی‌آیند. ولی اگر بارگذاری در طول محدودی وارد شود می‌توان ضرایب را بدست آورد.

مثال 2)



$b - a = \alpha$

← برای حل مسئله بارگذاری را تا بی‌نهایت ادامه می‌دهیم و از فاصله b به بعد برمی‌داریم.

$$\varphi = Ar^2 + Br^2\theta + Cr^2 \cos 2\theta + Dr^2 \sin 2\theta$$

$$\rightarrow \varphi = A(r_1^2 - r_2^2) - \frac{W}{2\pi}(r_1^2\theta_1 - r_2^2\theta_2)$$

$$+ C(r_1^2 \cos 2\theta_1 - r_2^2 \cos 2\theta_2) - \frac{W}{4\pi}(r_1^2 \sin 2\theta_1 - r_2^2 \sin 2\theta_2)$$

از حل مسئله قبل برای بارگذاری بی‌نهایت بدست آمده است.

$$* \quad r_1 \cos\theta_1 = r_2 \cos\theta_2, \quad r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2 = \alpha$$

Homa

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با جوابها (u, ε, σ) به ازای تابع $(r_1^2 - r_2^2)$ صفر می‌شوند. در نتیجه تابع $(r_1^2 - r_2^2)$

تابع بی اثر خواهد بود و می‌توان از جملات φ آن را حذف نمود.

$$C\left(r_1^2 \cos 2\theta_1 - r_2^2 \cos 2\theta_1\right) = C\left[r_1^2\left(2\cos^2\theta_1 - 1\right) + r_2^2\left(2\cos^2\theta_2 - 1\right)\right]$$

$$= C\left[2r_1^2 \cancel{\cos^2\theta_1} - 2r_2^2 \cancel{\cos^2\theta_2} - r_1^2 + r_2^2\right] = -C\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

جمله مربوط به ضریب C نیز بی اثر خواهد بود

[illegible] $\rightarrow$ $$-\frac{w}{4\pi}\left(2r_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 - 2r_2^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2\right) = \frac{w\alpha}{2\pi} r_1 \cos\theta_1$$

$$r_1 \cos\theta_1 = x_1 \Rightarrow \frac{w\alpha}{2\pi} r_1 \cos\theta_1 = \frac{w\alpha}{2\pi} x_1$$

$\varphi = r\cos\theta$ که $r\cos\theta$ تابع بی اثر می‌باشد.

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0 \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{w}{2\pi}\left(r_1^2 \theta_1 - r_2^2 \theta_2\right)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{w}{\pi}\left(\theta_1 - \theta_2\right) \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{w}{\pi}\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

Homa

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در دستگاه مختصات کارتزین :

$$\begin{cases} r_1^2 = x_1^2 + (x_2 - a)^2 \\ tg\,\theta_1 = \dfrac{x_2 - a}{x_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_2^2 = x_1^2 + (x_2 - b)^2 \\ tg\,\theta_2 = \dfrac{x_2 - b}{x_1} \end{cases}$$

می‌توانیم این روابط را در φ جایگزین کرده و جوابها را بدست آوریم.

* اگر در این مسئله بیشتر P را داشتیم :

$$\alpha = \Delta a \quad , \quad b = a + \Delta a$$

$$W(\Delta a) = P \quad , \quad \Delta a \to 0$$

$$\varphi = \frac{W}{2\pi}(r_1^2\theta_1 - r_2^2\theta_2) = \frac{W}{2\pi}\left[f(x_1, x_2, a) - f(x_1, x_2, a + \Delta a)\right]$$

$$= \frac{W(\Delta a)}{2\pi} \lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(x_1, x_2, a + \Delta a) - f(x_1, x_2, a)}{\Delta a}$$

$$= \frac{P}{2\pi}\frac{\partial f(x_1, x_2, a)}{\partial a} \qquad (r_1^2\theta_1 = f(x_1, x_2, a))$$

$$= \frac{P}{2\pi}\left(2r_1 \frac{\partial r_1}{\partial a}\theta_1 + r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial a}\right)$$

$$* \; r_1^2 = x_1^2 + (x_2 - a)^2 \longrightarrow 2r_1 \frac{\partial r_1}{\partial a} = 2(x_2 - a) = 2r_1 \sin\theta_1$$

$$* \; tg\,\theta_1 = \frac{x_2 - a}{x_1} \longrightarrow \frac{1}{\cos^2\theta_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial a} = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{r_1 \cos\theta_1}$$

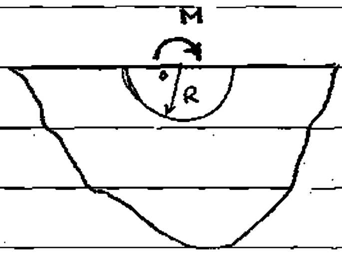
$$\Rightarrow \frac{\partial \theta_1}{\partial a} = \frac{\cos\theta_1}{r_1}$$

$$\rightarrow \quad \varphi = \frac{P}{2\pi}\left(2 r_1 \theta_1 \sin\theta_1 + r_1 \cos\theta_1\right)$$

تغییر نیرو ار

$$\rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{P}{\pi}\, r\theta \sin\theta}$$

مثال ۴)



در عرض نشده است

$$M = 0\,[F]$$

$$\frac{\varphi}{M} = f(\theta) \quad \Rightarrow \quad \varphi = M f(\theta)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{M}{r^2} f''(\theta)$$

$$\nabla^4\varphi = \frac{4M}{r^4} f''(\theta) + \frac{M}{r^4} f^{IV}(\theta) = 0$$

$$\rightarrow \quad f^{IV}(\theta) + 4 f''(\theta) = 0$$

$$f(\theta) = A + B\theta + C\cos 2\theta + D\sin 2\theta \quad \Rightarrow \quad \varphi = M f(\theta)$$

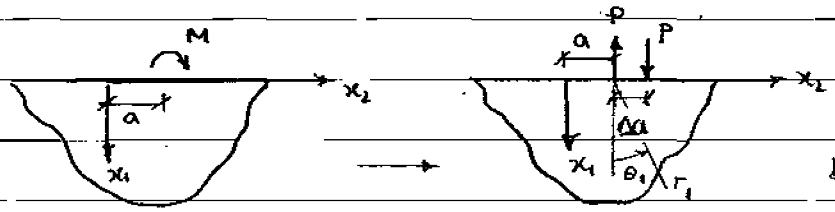
شرایط مرزی در استوانه ای به شعاع R

$$\longrightarrow \begin{cases} \sum F_{x_1} = 0 \\ \sum F_{x_2} = 0 \\ \sum M_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

ضرایب مجهول بدست می آید

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۴)



$b = a + \Delta a$

$$M = P(\Delta a)$$
$$\Delta a \to 0$$

$$\varphi = \frac{P}{\pi}\left(r_1\theta_1 \sin\theta_1 - r_2\theta_2 \sin\theta_2\right)$$

$$\begin{cases} r_1^2 = x_1^2 + (x_2 - a)^2 \;, & \operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{x_2 - a}{x_1} \\ r_2^2 = x_1^2 + (x_1 - b)^2 \;, & \operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{x_2 - b}{x_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{P(\Delta a)}{\pi(\Delta a)}\left[f(x_1, x_2, a) - f(x_1, x_2, a + \Delta a)\right]$$

$$= \frac{M}{\pi}\;\frac{f(x_1, x_2, a+\Delta a) - f(x_1, x_2, a)}{\Delta a}$$
$$\Delta a \to 0$$

$$= \frac{M}{\pi}\;\frac{\partial f(x_1, x_2, a)}{\partial a} \qquad \left(f(x_1, x_2, a) = r_1\theta_1 \sin\theta_1\right)$$

$$= \frac{M}{\pi}\left[\frac{\partial r_1}{\partial a}\theta_1 \sin\theta_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial a} r_1 \sin\theta_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial a} r_1\theta_1 \cos\theta_1\right]$$

$$* \; 2r_1 \frac{\partial r_1}{\partial a} = -2r_1 \sin\theta_1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial r_1}{\partial a} = -\sin\theta_1$$

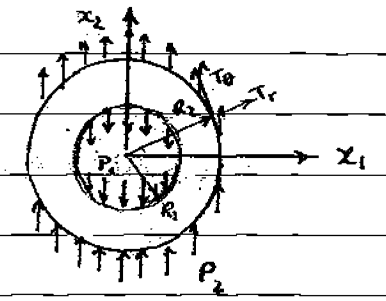
$$* \; \frac{1}{\cos^2\theta_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial a} = \frac{1}{r_1\cos\theta_1} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \theta_1}{\partial a} = \frac{\cos\theta_1}{r_1}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{M}{\pi}\left[\theta_1 \sin^2\theta_1 - \sin\theta_1 \cos\theta_1 - \theta_1 \cos^2\theta_1\right]$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{M}{\pi}\left[\theta_1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{M}{2\pi}\left[2\theta + \sin 2\theta\right]}$$

مثال ۵)



$R_1P_1 = R_2P_2$

برای حل مسئله، شرایط مرزی را می‌نویسیم :

$$* \; r = R_2 : \vec{n} = (1,0) \rightarrow \begin{cases} T_r = \sigma_{rr} = P_2 \sin\theta \\ T_\theta = \sigma_{r\theta} = P_2 \cos\theta \end{cases}$$

$$* \; r = R_1 : \vec{n} = (-1,0) \rightarrow \begin{cases} T_r = -\sigma_{rr} = -P_1 \sin\theta \\ T_\theta = -\sigma_{r\theta} = -P_1 \cos\theta \end{cases}$$

! حال به سراغ جدول کتاب می‌رویم و جوابی در σ_{rr} ، $\sin\theta$ داشتیم را انتخاب می‌کنیم :

$$\varphi = A r^3 \sin\theta + B r \cos\theta + C r \ln r \sin\theta + D\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\sigma_{rr} = 2Ar\sin\theta - 2B\frac{\sin\theta}{r} + C\frac{\sin\theta}{r} - 2D\frac{\sin\theta}{r^3}$$

$$\sigma_{r\theta} = -2Ar\cos\theta + 0 - C\frac{\sin\theta}{r} + 2D\frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 6Ar\sin\theta + 0 + C\frac{\sin\theta}{r} + 2D\frac{\sin\theta}{r^3}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$* \quad 2\mu u_r = A(\chi-2)r^2 \sin\theta + \frac{B}{2}\left[(\chi-1)\theta\cos\theta - (\chi+1)\ln r \sin\theta + \sin\theta\right]$$

$$+ \frac{C}{2}\left[-(\chi+1)\theta\cos\theta + (\chi-1)\ln r \sin\theta - \sin\theta\right] + D\frac{\sin\theta}{r^2}$$

$$* \quad 2\mu u_\theta = -A(\chi+2)r^2\cos\theta + \frac{B}{2}\left[-(\chi-1)\theta\sin\theta - (\chi+1)\ln r\cos\theta + \cos\theta\right]$$

$$+ \frac{C}{2}\left[(\chi+1)\theta\sin\theta - (\chi-1)\ln r\cos\theta + \cos\theta\right] - D\frac{\cos\theta}{r^2}$$

اعمال شرائط مرزی :

$$r = R_2 \rightarrow \begin{cases} 2AR_2 - \dfrac{2B}{R_2} + \dfrac{C}{R_2} - \dfrac{2D}{R_2^3} = -P_2 \\ -2AR_2 - \dfrac{C}{R_2} + \dfrac{2D}{R_2^3} = P_2 \quad (I) \end{cases} \rightarrow B = -R_2P_2$$

$$r = R_1 \rightarrow \begin{cases} 2AR_1 - \dfrac{2B}{R_1} + \dfrac{C}{R_1} - \dfrac{2D}{R_1^3} = P_1 \\ -2AR_1 - \dfrac{C}{R_1} + \dfrac{2D}{R_1^3} = -P_1 \quad (II) \end{cases} \rightarrow B = R_1P_1$$

از هر کدام از شرائط مرزی به یک معادله می رسیم ⇐ دو معادله داریم و سه مجهول

باید معادله دیگری از u ها بدست آوریم :

$$u_r\Big|_{\theta=2\pi} - u_r\Big|_{\theta=0} = \frac{B}{2}\left[(\chi-1)2\pi\right] + \frac{C}{2}\left[-(\chi+1)2\pi\right] = 0$$

$$\Rightarrow B(\chi-1) = C(\chi+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{B = C\,\frac{\chi+1}{\chi-1}} \quad (III)$$

Homa

بسمه تعالی

امتحان میان ترم تئوری ارتجاعی، کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی (۱)

۱- در یک تغییر شکل صفحه‌ای، مولفه‌های بردار تغییر مکان بصورت زیر داده شده‌اند:

$$u_1 = (x-1)\sqrt{x^2+y^2}\,\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$u_2 = -(x+1)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$u_3 = 0$$

که در آن $x = 3-4\nu$ می‌باشد. حدود تغییرات ν را چنان تعیین کنید که تغییر شکل فوق در $y=0$ و $x=\infty$ قابل قبول باشد (۴ نمره).

۲- تانسور تنش زیر داده شده است:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & e \\ d & e & c \end{bmatrix}$$

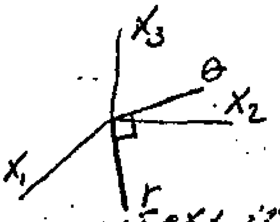
بردار نرمال گذرنده از X_3 را چنان پیدا کنید که بردار تنش بر آن فقط مولفه‌های مماسی داشته باشد. شرایط معادله‌ای تانسور تنش را نیز بیابید (۴ نمره).

۳- [illegible] به مقطع α تحت اثر گشتاور پیچشی T قرار گرفته و تانسور تنش در [illegible]:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -GY\beta \\ 0 & 0 & GX\beta \\ -GY\beta & GX\beta & 0 \end{bmatrix}$$

که Z محور طولی میله و G و $\beta=\beta(T)$ ثابت هستند. محورهای اصلی تنش و تنش‌های اصلی را در یک نقطه روی سطح جانبی را بیابید. دوایر موهر را برای این تانسور تنش بیابید (۶ نمره).

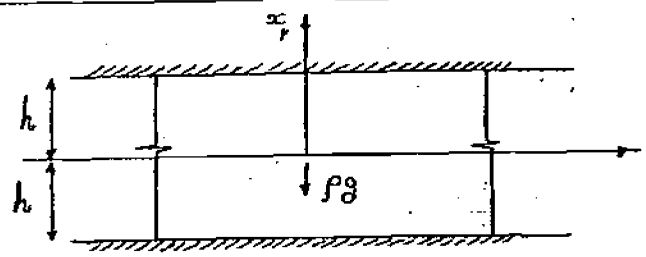
۴- یک محیط ارتجاعی خطی در دستگاه $X_1X_2X_3$ را در نظر بگیرید. اگر C_{ijkl} تانسور مرتبه چهار ارتباط تنش و کرنش باشد، چه ارتباطی بین مولفه‌های این تانسور وجود دارد، اگر خصوصیات ماده در امتداد هر محوری که در صفحه X_1X_2 انتخاب کنیم (مثلاً محور ۳) با خواص ماده در امتداد محور عمود بر آن (محور θ) در آن صفحه برابر باشند. به این نوع ایزوتروپی، ایزوتروپی استوانه‌ای می‌گویند (۶ نمره).



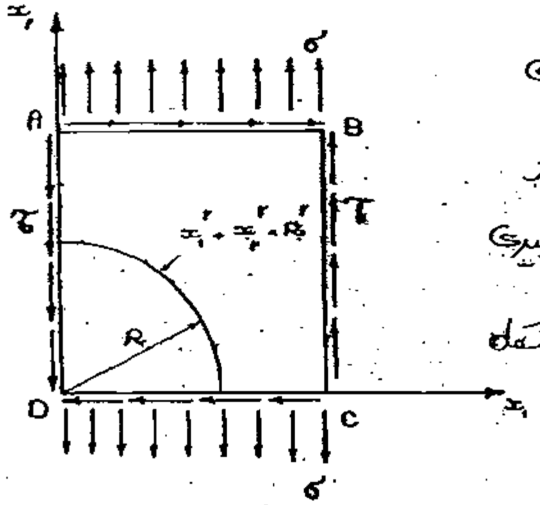
۳ و θ در صفحه X_1X_2 هستند.

۲

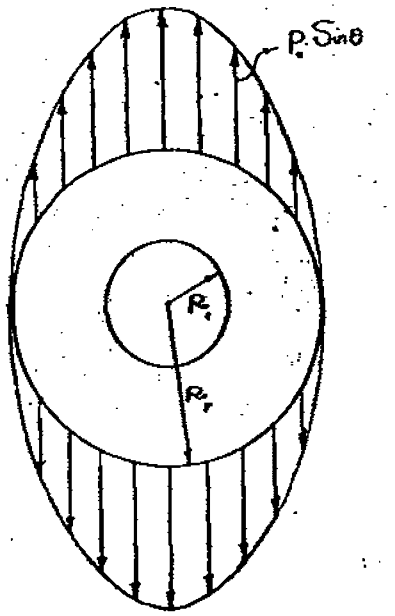
امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی، کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی



مسئله اول - یک صفحه نازک به ارتفاع $2h$ در امتداد x_2 و طول خیلی زیاد در امتداد x_1 مطابق شکل مفروض است. این صفحه در $x_2 = \pm h$ گیردار است و تحت اثر وزن خود قرار دارد. تانسورهای تنش، کرنش و مؤلفه‌های بردار تغییر مکان را بیابید.



مسئله دوم - صفحه ABCD تحت اثر تنش‌های مرزی مطابق شکل قرار گرفته است. اگر صرفاً حرکات در امتداد x_1 و x_2 و از دوران حول x_3 جلوگیری کنیم، شکل دایره $x_1^2+x_2^2=R^2$ را پس از تغییر شکل بدست آورید.



مسئله سوم - لوله‌ای استوانه‌ای به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 مفروض است. این لوله تحت اثر فشار خارجی مطابق شکل قرار گرفته است. تانسورهای تنش، کرنش و مؤلفه‌های تغییر مکان را برای حالت تنش مسطح و کرنش مسطح بدست آورید.

۷۳/۹/۶

بسمه تعالی

۳

امتحان میان ترم تئوری ارتجاعی گروه عمران دانشکده فنی

مدت ۲,۵ ساعت

مسأله اول: تانسور تنش در نقطه‌ای از جسم در مختصات کارتزین بصورت زیر است:

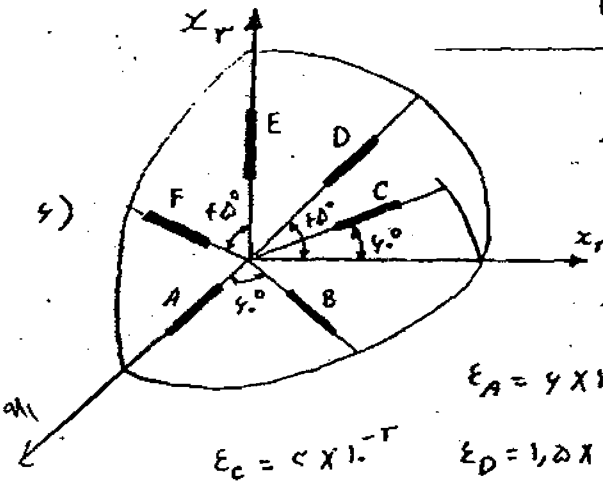
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 0.6\alpha & 0 \\ 0.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2.6 \end{bmatrix}$$

الف - تنش‌ها و محورهای اصلی را بدست آورید.
اگر α تغییر کند، اثر آن بر تنش‌های اصلی چیست؟

ب - با فرض $\alpha = 1$، حالت تنش را در صفحاتی که عمود بر آنها $(0,0,1)$ و $(0,1,0)$ باشد، رسم کنید.

ج - با فرض $\alpha = 1$ بردار تنش را در صفحه‌ای که عمود بر آن $(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ باشد بدست آورده و تنش‌های عمودی و برشی را روی این صفحه محاسبه کنید. تنش‌های عمودی و برشی هشت وجهی را در این حالت، بدست آورید. (۸ نمره)

(۶



مسأله دوم: شش کرنش سنج مطابق شکل (B و C در صفحهٔ x_1x_2 ، D در صفحهٔ x_2x_3 و F در صفحهٔ x_1x_3) در نقطهٔ M از جسمی نصب شده و کرنش‌های محوری در امتداد محورهای مربوط بصورت: $\varepsilon_A = 6\times10^{-3}$ $\varepsilon_B = 4.5\times10^{-3}$

$\varepsilon_C = 4\times10^{-3}$ $\varepsilon_D = 1.5\times10^{-3}$ $\varepsilon_E = 0$ $\varepsilon_F = 3\times10^{-3}$

الف: تانسور کرنش در نقطهٔ M را محاسبه کنید. ب - کرنش‌های برشی را در امتداد کرنش سنج‌ها بدست آورید.

مسأله سوم: تانسور تنش در جسمی بصورت $\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3)$ و $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$ می‌باشد. σ_{11} و نیروهای حجمی چه توابعی می‌توانند باشند. ضرایب الاستیک را ν و E فرض (۳ نمره)

مسأله چهارم: ثابت کنید: (۳ نمره)

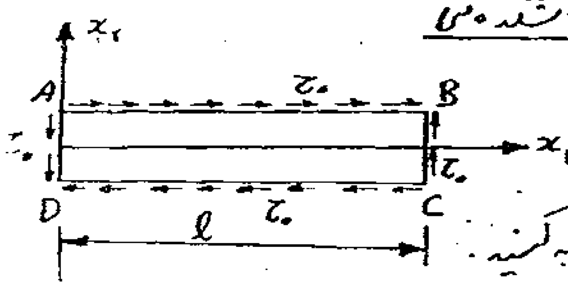
1) $\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij}$

2) $\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ik}S_{jk} + \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij}$

«موفق باشید».

۷۳/۱۰/۲۴ بسمه تعالی مدت ۲/۵ ساعت B

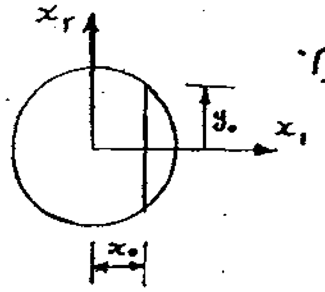
امتحان پایان ترم درس تئوری ارتجاعی دانشکده فنی



مسأله ۱- تیر ABCD به طول l با مقطع مستطیلی با ضخامت واحد، تحت اثر نیروی برشی ثابت τ_0 قرار گرفته است. از نیروهای حجمی صرفنظر کرده و مؤلفه‌های تنش، کرنش و تغییر مکان را محاسبه کنید.

مسأله با فرض تابع تنش ایری بصورت چند جمله‌ای درجه دوم حل می‌شود. در صفحهٔ $x_1=0$ داریم:

$u_1=u_2=u_3=0$ (۵ نمره)



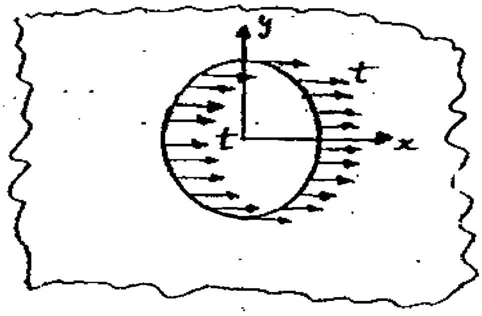
مسأله ۲- استوانهٔ توپری که محور آن در امتداد x_3 است را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که در هر نقطهٔ استوانه تانسور تنش بصورت زیر باشد:

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & -kx_2 \\ \sigma_{12} & 0 & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & 0 \end{bmatrix}$$

k مقدار ثابتی است.

الف- اگر استوانه در حال تعادل بوده و سطح جانبی آن عاری از تنش باشد، مقدار σ_{12} را محاسبه کنید. (۳ نمره)

ب- صفحهٔ $x_1=x_0$ را در استوانه در نظر می‌گیریم. اگر این صفحه مستطیلی به ابعاد $2y_0$ و $2z_0$ بسازد (یعنی: $|x_2|\leqslant y_0$ و $|x_3|\leqslant z_0$). برآیند نیروها و گشتاورها را در مرکز صفحه بدست آورید. (۲ نمره)



مسأله ۳- الف- صفحهٔ بینهایتی دارای سوراخ دایره شکلی به شعاع R است که تحت اثر تنش ثابت t در جهت محور x_1 قرار گرفته است. تابع تنش ایری و مؤلفه‌های تنش σ_{rr}، $\sigma_{r\theta}$، $\sigma_{\theta\theta}$ را طوری محاسبه کنید که صفحه در بینهایت تحت هیچگونه تنشی نباشد.

راهنمایی: تغییر مکانها یک مقداره می‌باشند. (۷ نمره)

ب- برآیند نیروهای اعمال شده به محیط دایره را F فرض می‌کنیم. اگر F را ثابت بگیریم، R را به سمت صفر میل دهید و تابع تنش ایری و مؤلفه‌های تنش را برای نیروی متمرکز F در یک صفحهٔ بینهایت محاسبه کنید. (۳ نمره)

مسأله را در حالت تنش و کرنش مسطح حل کنید.

موفق باشید

بسمه تعالی

[redacted] امتحان میان‌ترم [redacted] کارشناسی ارشد مهندسی عمران . دانشکده فنی . مدت ۲،۵ ساعت ۱۲،۲،۲۲

مسئله اول . حالت تنش در نقطه‌ای از محیط مختصات داده شده به صورت زیر است :

۴

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}$$

$k>0$ عدد حقیقی است .

الف- تنش‌های اصلی و محورهای اصلی را بدست آورید . (۲ نمره)

ب- دایره موهر مربوطه را رسم کنید و حالت تنش در صفحات عمود بر محورهای مختصات را روی ترسیم خود مشخص نشان دهید . (۱ نمره)

ج- چه روابطی بین (J_1 , I_1) ، (J_2 , I_2) و (J_3 , I_3) وجود دارد ؟ چرا ؟ (۱ نمره)

د- اگر جسم مورد نظر همگن ، ایزوتروپ و خطی بوده و دارای ضریب الاستیسیته E و ضریب پواسون ν باشد ، چگالی انرژی تغییر شکل نقطه مورد نظر را بدست آورید . (۱ نمره)

مسئله دوم - در مکعب $|x_1| \le a$ ، $|x_2| \le a$ و $|x_3| \le a$ حالت کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} x_2 & \varphi(x_1 , x_2) + \psi(x_3) & 0 \\ \varphi(x_1 , x_2) + \psi(x_3) & \phi(x_1 , x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \psi(x_3) \end{bmatrix} 2k$$

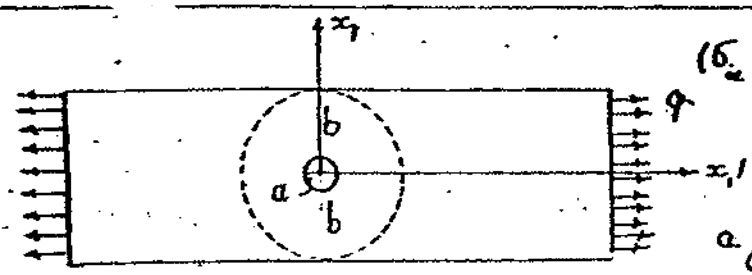
از نیروهای حجمی صرف نظر می‌کنیم . مکعب همگن ، ایزوتروپ و خطی با ثابت‌های λ و μ در نظر گرفته می‌شود .

الف- با توجه به معادلات تعادل و روابط سازگاری ، شکل توابع φ و ψ را بدست آورید . (۳ نمره)

ب- فرض کنیم که تنش در نقطه $B(0,0,a)$ در صفحه عمود بر x_3 برابر صفر باشد ، همچنین فرض کنیم که تنش مماسی در نقطه $A(a,0,0)$ در صفحه عمود بر x_1 برابر $(\lambda+2\mu)\frac{a}{2}$ باشد . در این صورت توابع φ و ψ را بدست آورید . (۳ نمره)

ج- نیروها و تنش‌های موجود در صفحه $x_1 = a$ را در مبنای مختصات محاسبه کنید . (۲ نمره)

مسئله سوم . صفحه نازکی را در تنش مسطح فرض کنید $(\sigma_{33}=0)$

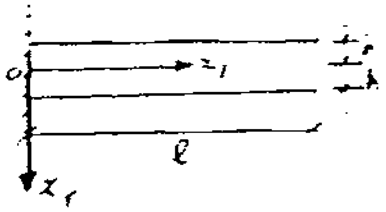


طول صفحه خیلی زیاد (بینهایت) و عرض آن $2b$ فرض می‌کنیم . سوراخ دایره شکل به شعاع a مطابق شکل در این صفحه وجود دارد . این صفحه تحت اثر نیروی کششی ثابت q در بی‌نهایت و فشار P در داخل سوراخ واقع شده است . فرض کنیم $a \ll b$. با استفاده از اصل سن ونان ، شرایط مرزی را در دایره‌های به شعاع a و b در مختصات استوانه‌ای بنویسید . ۵ نمره

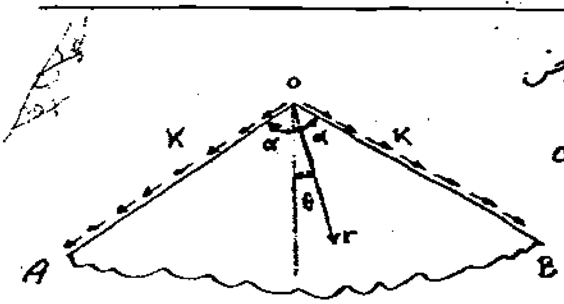
[redacted]

امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی دانشکده فنی

مدت ۲/۵ ساعت



۱- در تیر طره‌ای شکل مقابل چنانچه تانسور تنش برابر ... $= 0$ باشد. بارگذاری خارجی را محاسبه و بر روی تیر رسم کنید. مشخص است حالت تنش یا کرنش مسطح است. (۳ نمره)



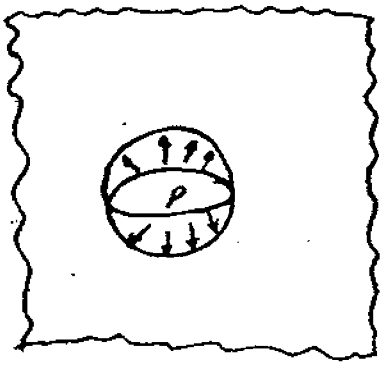
۲- صفحهٔ نازک نیمه بینهایت با زاویهٔ 2α مفروض است ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$). چنانچه در دو وجه OA و OB آن تنش یکنواخت K بر واحد سطح اعمال شود و از نیروی وزن صرف نظر کنیم،

الف: تابع تنش ایری را محاسبه کنید. (۲ نمره)

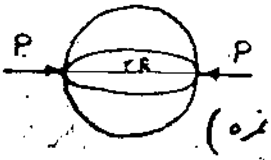
ب: ضرایب ثابت تابع تنش را بدست آورید (۲ نمره)

ج: مؤلفه‌های تنش، کرنش و تغییر شکل را بدست آورید (۲ نمره)

د: با در نظر گرفتن معیار ترسکا، در اولین نقطه پلاستیک شدن K را بر حسب α و ج (تنش برشی تسلیم در برش خالص) بدست آورید.



۳- در یک محیط بینهایت سه بعدی الاستیک خطی با ضرایب لامه λ و μ حفره‌ای به شکل کره به شعاع R قرار گرفته است. این حفره تحت اثر فشار داخلی P می‌باشد. مطلوبست مؤلفه‌های تنش، کرنش و تغییر مکان در محیط (۶ نمره)



۴- کرهٔ الاستیک خطی به شعاع R و ضرایب الاستیک ν و E مفروض است. این کره تحت اثر دو نیروی مساوی و در جهت مخالف P در امتداد یکی از قطرها قرار گرفته است. تغییر حجم کره را محاسبه کنید. (۳ نمره)

[redacted] تانی [redacted]

مدت ۲ ساعت

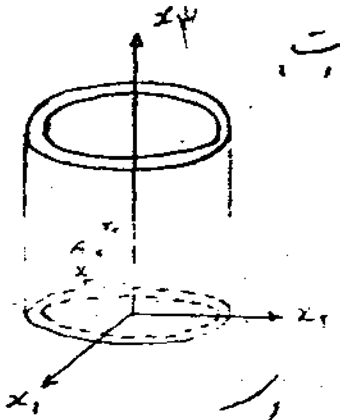
۵

امتحان میان ترم تئوری الاستیسیته گروه ... شنبه ...

مسئله اول: ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه وضعیت تنش در یک نقطه از جسم در حالت یک‌سویی باشد آن است که تانسور تنش در آن نقطه σ_{ij} شرایط زیر را اقناع کند.

$$\sigma_{11}\sigma_{22}=\sigma_{12}\sigma_{12} \qquad \sigma_{22}\sigma_{33}=\sigma_{23}\sigma_{23} \qquad \sigma_{33}\sigma_{11}=\sigma_{13}\sigma_{13}$$

(۶ نمره)



مسئله دوم: استوانه توخالی زیر تحت تغییر شکل زیر واقع شده است:

$$\theta = \gamma x_3 \qquad R=\left(1+\frac{c}{r}\right)r$$

در آن $r_1 \le r \le r_2$ شعاع هر نقطه از استوانه قبل از تغییر شکل و R شعاع همان نقطه بعد از تغییر شکل و c مقدار ثابت می‌باشد. طول استوانه به قدر کافی بزرگ است و $u_3=0$ منظور می‌شود.

مطلوبست محاسبه بزرگترین کرنش اصلی در نقطه $A(2, 0, x_3)$

(۸ نمره)

مسئله سوم: استوانه‌ای میان تهی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 که محور آن همان محور x_3 باشد مفروض است. تانسور تنش در نقطه M به مختصات (x_1, x_2, x_3) بصورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_{11}=A-B\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2x_2^2}{r^4}\right) \qquad \sigma_{12}=2B\frac{x_1x_2}{r^4} \qquad \sigma_{13}=0$$

$$\sigma_{22}=A-B\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2x_1^2}{r^4}\right) \qquad \sigma_{23}=0 \qquad \sigma_{33}=A$$

که در آن A و B مقادیر ثابت و $r^2=x_1^2+x_2^2$ می‌باشد.

الف: تنش‌های اصلی و محورهای اصلی را محاسبه کنید

ب - نیروهای حجمی و نیروهای سطحی وارد بر سطوح داخلی و خارجی استوانه را بدست آورید.

(۶ نمره)

[redacted]

امتحان پایان ترم تئوری ... دانشکده فنی

۱- تانسور تنش در جسمی در مختصات کارتزین برابر

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\,x_3 \\ 0 & \sqrt{2} & x_1 \\ \sqrt{2}\,x_3 & x_1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

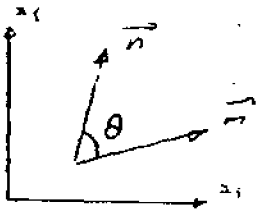
می باشد. بردار تنش را در نقطه $\left|\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right.$ در صفحه $x_1+x_2+x_3=1$ بدست آورید. (۳ نمره)

۲- مولفه‌های تانسور تنش در یک نقطه در مختصات کارتزین برابر

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

می باشد. امتدادی را پیدا کنید که بردار تنش روی صفحه عمود بر این امتداد بصورت $(t_1=0\,,\ t_2=0\,,\ t_3)$ باشد و t_3 را نیز بدست آورید. (۳ نمره)

۳- در یک جسم دو بعدی تانسور کرنش ε_{ij} معلوم است. دو امتداد اولیه $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2$ و $\vec{m} = m_1\vec{e}_1 - m_2\vec{e}_2$ که با یکدیگر زاویه θ می سازند را در نظر بگیرید. تغییر زاویه این دو امتداد را تحت تغییر شکل اعمال شده محاسبه کنید. (۶ نمره)



۴- یک جسم ایزوتروپ را فرض کنید که کشش و فشار در سطح تسلیم بی تاثیر است و نیز سطح تسلیم مستقل از فشار هیدرواستاتیک می باشد. جسم را تحت آزمایش سه محوری قرار می دهیم. بدون در نظر گرفتن معیار تسلیم بخصوصی، جسم در نقطه $A_1 \left|\begin{smallmatrix}\sigma_1=25\\ \sigma_2=5\\ \sigma_3=0\end{smallmatrix}\right.$ به تسلیم می رسد. نشان دهید که جسم در نقاط زیر نیز به تسلیم خواهد رسید. با استفاده از این نقاط سطح تسلیم را در مختصات دو بعدی رسم کنید.

$A_2 \left|\begin{smallmatrix}5\\25\\0\end{smallmatrix}\right.$ $A_3 \left|\begin{smallmatrix}-25\\-5\\0\end{smallmatrix}\right.$ $A_4 \left|\begin{smallmatrix}-5\\-25\\0\end{smallmatrix}\right.$ $B_1 \left|\begin{smallmatrix}-15\\-25\\0\end{smallmatrix}\right.$ $B_2 \left|\begin{smallmatrix}-25\\-15\\0\end{smallmatrix}\right.$

$B_3 \left|\begin{smallmatrix}15\\25\\0\end{smallmatrix}\right.$ $B_4 \left|\begin{smallmatrix}25\\15\\0\end{smallmatrix}\right.$ $C_1 \left|\begin{smallmatrix}15\\-5\\0\end{smallmatrix}\right.$ $C_2 \left|\begin{smallmatrix}-5\\15\\0\end{smallmatrix}\right.$ $C_3 \left|\begin{smallmatrix}-25\\5\\0\end{smallmatrix}\right.$ $C_4 \left|\begin{smallmatrix}5\\-25\\0\end{smallmatrix}\right.$

(۴ نمره)

۵- نشان دهید که در مواد ایزوتروپ، برای اینکه انرژی تغییر شکل مثبت باشد باید $\mu>0$ و $K>0$ باشد.
(۴ نمره)

www.hoseinzadeh.net

بسمه تعالی

۷۵/۳/۱۲

(۶)

امتحان میان ترم تئوری ارتجاعی گروه مهندسی عمران دانشکده فنی

۱- تانسور تنش در جسمی در مختصات کارتزین برابر:

$$\sigma_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\,x_2 \\ 0 & \sqrt{3} & x_1 \\ \sqrt{3}\,x_2 & x_1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

می باشد. بردار تنش را در نقطه $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ در صفحه $x_1+x_2+x_3=1$ بدست آورید.

(۳/۵)

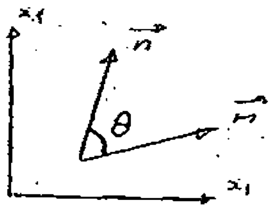
۲- مؤلفه های تانسور تنش در یک نقطه در مختصات کارتزین برابر

$$\sigma_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

می باشد. امتدادی را پیدا کنید که مؤلفه های بردار تنش روی صفحه عمود بر این امتداد بصورت $(t_1=0\ ,\ t_2=0\ ,\ t_3)$ باشد و t_3 را نیز بدست آورید.

(۳/۵ نمره)

۳- در یک محیط دو بعدی تانسور کرنش ε_{ij} معلوم است. در امتداد $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2$ و $\vec{m} = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2$ که با یکدیگر زاویه θ می سازند را در نظر بگیریم. تغییر زاویه این دو امتداد را تحت تغییر شکل اعمال شده به محیط محاسبه کنید.



(۶ نمره)

۴- در یک جسم ایزوتروپ، فرض کنید که کشش و فشار در سطح تسلیم بی تاثیر است و نیز سطح تسلیم مستقل از فشار هیدرواستاتیک می باشد: جسم را تحت آزمایش سه محوری قرار می دهیم، بدون در نظر گرفتن معیار تسلیم بخصوصی، جسم در نقطه A_1 به تسلیم می رسد. $A_1\begin{vmatrix}\sigma_1=3\sigma \\ \sigma_2=\sigma \\ \sigma_3=0\end{vmatrix}$ نشان دهید که جسم در نقاط زیر نیز به تسلیم خواهد رسید. با استفاده از این نقاط سطح تسلیم را در مختصات دو بعدی رسم کنید.

$A_2\begin{vmatrix}\sigma \\ 3\sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $A_3\begin{vmatrix}-3\sigma \\ -\sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $A_4\begin{vmatrix}-\sigma \\ -3\sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $B_1\begin{vmatrix}-2\sigma \\ -3\sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $B_2\begin{vmatrix}-3\sigma \\ -2\sigma \\ 0\end{vmatrix}$

$B_3\begin{vmatrix}2\sigma \\ 3\sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $B_4\begin{vmatrix}3\sigma \\ 2\sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $C_1\begin{vmatrix}2\sigma \\ -\sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $C_2\begin{vmatrix}-\sigma \\ 2\sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $C_3\begin{vmatrix}-2\sigma \\ \sigma \\ 0\end{vmatrix}$ $C_4\begin{vmatrix}\sigma \\ -2\sigma \\ 0\end{vmatrix}$

(۴ نمره)

۵- نشان دهید که در مواد ایزوتروپ، برای اینکه انرژی تغییر شکل مثبت باشد باید: $\mu>0$ و $K>0$ باشد.

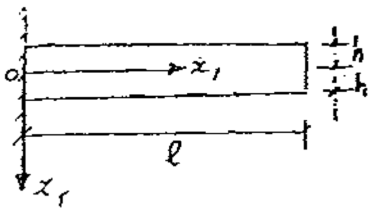
(۴ نمره)

۱۴/۱۰/۸۲

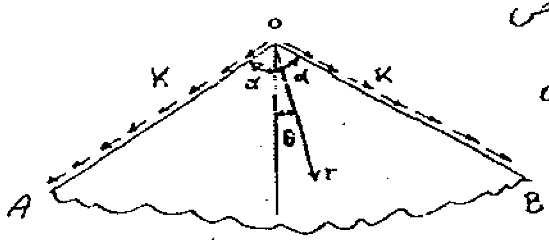
مدت ۲/۵ ساعت

امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی دانشکده فنی

E



۱- در تیر طره‌ای شکل مقابل چنانچه تابع تنش ایری $\varphi = A x_1^2 x_2$ باشد. بارگذاری خارجی را محاسبه و بر روی تیر رسم کنید. مشخصه حالت تنش و یا کرنش مسطح است. (۳ نمره)



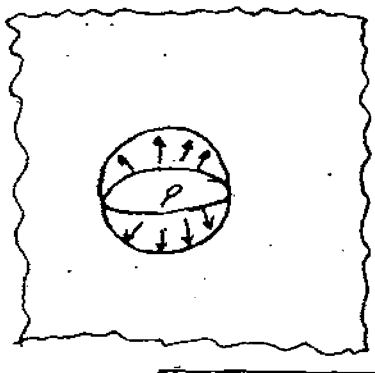
۲- صفحه نازک نیمه بینهایت به زاویه 2α مفروض است $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$. چنانچه در دو وجه OA و OB آن تنش یکنواخت K بر واحد سطح اعمال شود و از نیروی وزن صرفنظر کنیم؛

الف: تابع تنش ایری را محاسبه کنید. (۲ نمره)

ب: ضرایب ثابت تابع تنش را بدست آورید (۲ نمره)

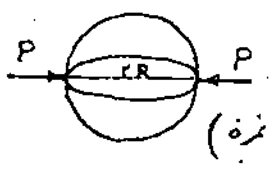
ج: مؤلفه‌های تنش، کرنش و تغییر مکان را بدست آورید (۲ نمره)

د: با در نظر گرفتن معیار ترسکا، در اولین لحظه پلاستیک شدن K را بر حسب α و τ (تنش برشی تسلیم در برش خالص) بدست آورید.



۳- درون یک محیط بینهایت سه بعدی، الاستیک خطی با ضرایب لامه λ و μ حفره‌ای به شکل کره به شعاع R قرار گرفته است. این حفره تحت اثر فشار داخلی P می‌باشد. مطلوبست محاسبه مؤلفه‌های تنش، کرنش و تغییر مکان در محیط (۶ نمره)

۴- کره الاستیک خطی به شعاع R و ضرایب الاستیک ν و E مفروض است.



این کره تحت اثر دو نیروی مساوی و در جهت مخالف P در امتداد یکی از قطرها قرار گرفته است. تغییر حجم کره را محاسبه کنید. (۳ نمره)

بسمه تعالی

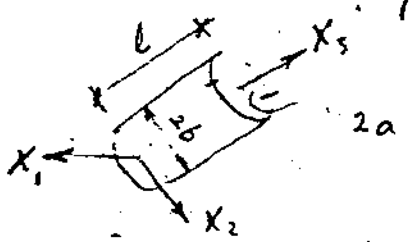
امتحان پایان ترم درس تئوری ارتجاعی - گروه عمران - دانشکده فنی   دیماه ۱۳۷۲

مسئله اول: میله استوانه‌ای با مقطع بیضی شکل تحت اثر نیروهای انتهایی در $x_3=l$ و $x_3=0$ قرار داشته و تغییرمکان‌های زیر بدست آمده است:

$$u_1=-\beta x_2 x_3 \quad , \quad u_2=\beta x_1 x_3 \quad , \quad u_3=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\beta x_1 x_2$$

که در آن $2a$ و $2b$ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی می‌باشند. β ثابت است.

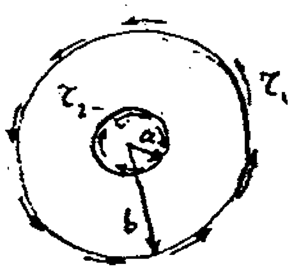
نیروهای انتهایی را در $x_3=0$ بدست آورید.



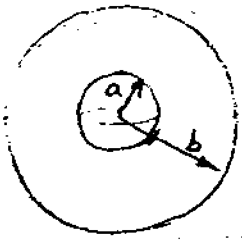
مسئله دوم: دیسکی توخالی با شعاع خارجی b و شعاع داخلی a تحت اثر تنش‌های برشی شکل زیر قرار دارد. تابع تنش لازم را برای حل مسئله بیابید.

تنش‌های برشی و تغییرمکان‌ها را در هر نقطه بدست آورید.

راهنمایی: تغییرمکان شعاعی برابر صفر می‌باشد.

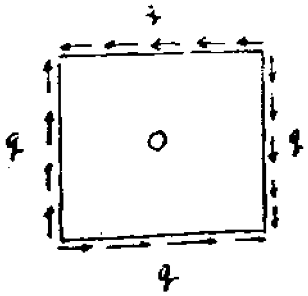


مسئله سوم: کره‌ای توخالی با شعاع خارجی b و شعاع داخلی a تحت اثر تغییر درجه حرارت $\Delta T=Ar+B$ و بار حجمی $f_r=Cr^2+Dr+E$ قرار دارد، بطوریکه A، B، C، D و E ثابت هستند. تغییرمکان‌ها و تنش‌ها را بدست آورید.

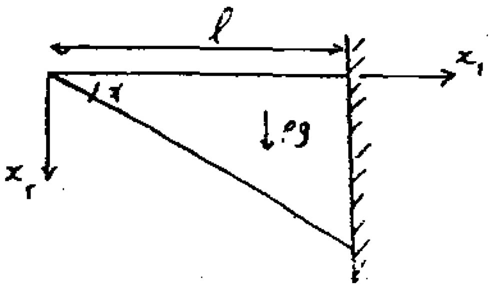


۷۵/۳/۲

[redacted] امتحان درس تئوری الاستیسیته گروه مهندسی مکانیک دانشکده فنی



مسئله اول: صفحه مستطیل شکلی تحت اثر نیروی برشی q مطابق شکل قرار گرفته است. اگر این صفحه دارای سوراخ دایره‌ای شکل کوچکی در وسط آن باشد، میدان تنش و جابجایی در صفحه را بیابید. حداکثر تنش در اطراف سوراخ چقدر است.



مسئله دوم: تیر گوه‌ای شکل مثلثی شکل مطابق شکل تحت اثر وزن خود قرار گرفته است. با استفاده از تابع تنش، مؤلفه‌های تنش را بیابید.

مسئله سوم: کره‌ای به شعاع a تحت اثر نیروهای حجمی به شکل

$$\begin{cases} f_\rho = -2\,\dfrac{\rho}{a} \\ f_\theta = 0 \\ f_\varphi = 0 \end{cases}$$

در واحد حجم در مختصات کروی قرار گرفته است. با استفاده از تابع پتانسیل جابجایی $\varphi = A r^n$ و حدس زدن جواب خصوصی (معادلات ناویر) مؤلفه‌های تغییر شکل و تنش را محاسبه کنید. در چه محدوده‌ای از کره انقباض و در چه محدوده‌ای انبساط مشاهده می‌گردد.

موفق باشید

۷۶,۹,۲
مدت ۲,۵ ساعت

۸

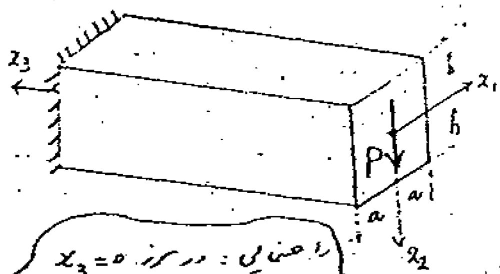
« بسمه تعالی »

امتحان میان ترم تئوری ارتجاعی گروه عمران دانشکده فنی

مسأله اول: در تانسور تنش
$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & \tau\\ 0 & \tau & 5\end{bmatrix}:$$

الف) τ را طوری بدست آورید که تانسور تنش، دو تنش اصلی مساوی هم داشته باشد.

ب) اگر این جسم تحت آزمایش کشش ساده به ازای $\sigma_y=12$ به حالت خمیری برسد، درصورت پیروی از هر کدام از معیارهای ترسکا و وان میزس، مقداری از τ را که به ازای آن این نقطه وارد مرحله خمیری می‌شود را بدست آورید.

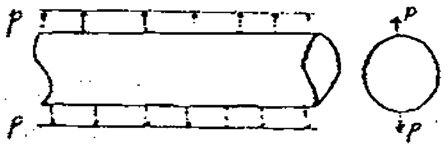


راهنمایی: در مرز $x_3=0$ از اصل سن ونان استفاده کنید.

مسأله دوم: یک تیر گیردار با مقطع مستطیلی در $x_3=l$ گیردار می‌باشد. این تیر در سر آزاد ($x_3=0$) بوسیله نیروی P در امتداد x_2 تحت اثر خمش قرار می‌گیرد. با صرفنظر از وزن تیر، تانسور تنش به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A+Bx_2^2\\ 0 & A+Bx_2^2 & Cx_2x_3\end{bmatrix}$$
(A، B، C ثابت هستند)

با ارضای معادلات تعادل و همچنین ارضای شرایط مرزی نیرویی در مرزهای $x_3=0$ و $x_2=\pm\frac{h}{2}$، مقادیر ثابتها را بدست آورید.



مسأله سوم: استوانه‌ای طویل به شعاع R (استوانه توپر) با ضرایب الاستیک E و ν تحت اثر بار خطی P مطابق شکل قرار گرفته است. تغییر حجم در قطعه‌ای به طول L از استوانه را بدست آورید.

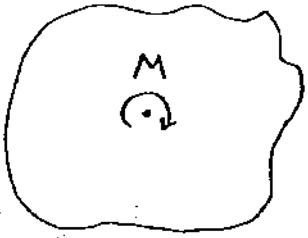
مسأله چهارم: در یک ماده الاستیک ایزوتروپ رابطه انرژی مکمل برحسب ثابتهای تنش به شکل $\Omega=aJ_2+bI_1J_2$ می‌باشد که a و b مقادیری ثابت هستند. در آزمایش کشش ساده رابطه تنش-کرنش به شکل $\varepsilon=10^{-4}\sigma+10^{-5}\sigma^2$ بدست آمده است. مقادیر کرنش‌ها را در نقاطی که تنش‌ها برابر
$$\underset{(1)}{\begin{bmatrix}30 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}} \quad \text{و} \quad \underset{(2)}{\begin{bmatrix}0 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$
می‌باشند، بدست آورید.

«بسمه تعالی»

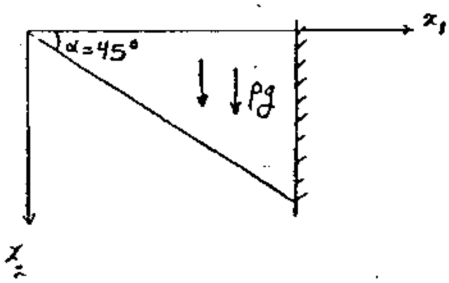
۷۶/۱۱/۱

مدت ۲/۵ ساعت

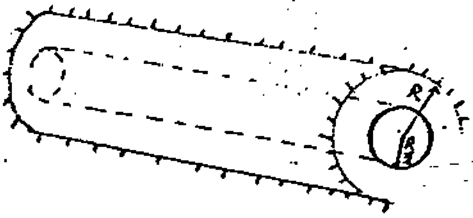
امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی گروه عمران دانشکده فنی



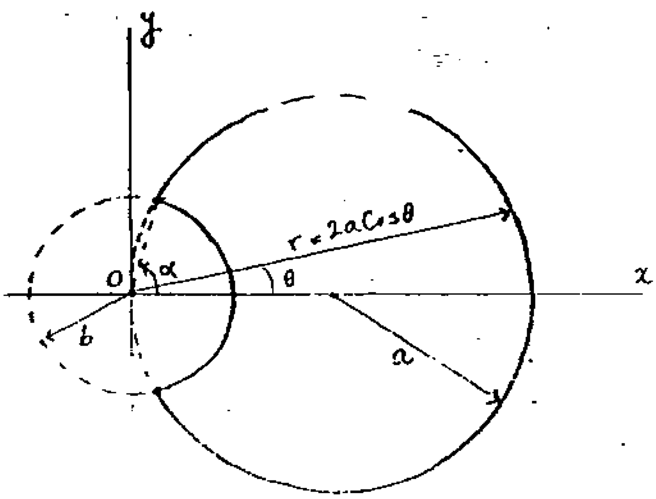
مساله اول: مقادیر تنش‌ها را در صفحه بی‌نهایت مقابل، تحت اثر لنگر M بدست آورید. (مساله کرنش صفحه‌ای)



مساله ... : ... شکل مقابل تحت اثر وزن خود ... باشد، قرار گرفته است. مولفه‌های تنش را بدست ... (تنش صفحه‌ای)



مساله سوم: استوانه توخالی طویلی به شعاع ... R ... داخلی $R/2$ تحت تغییر درجه حرارت $\frac{T_1 r}{R}$ ...
اگر سطح داخلی عاری از تنش باشد و جلو تغییر مکانها ... خارجی گرفته شده باشد، مقادیر تنش‌ها و تغییر مکان‌ها را بدست ...



مساله چهارم: در مقطع شکل مقابل، مقادیر تنش در هر نقطه را برحسب لنگر پیچشی موجود در مقطع بدست آورید.

(دایره بزرگتر بر محور yها مماس می‌باشد)

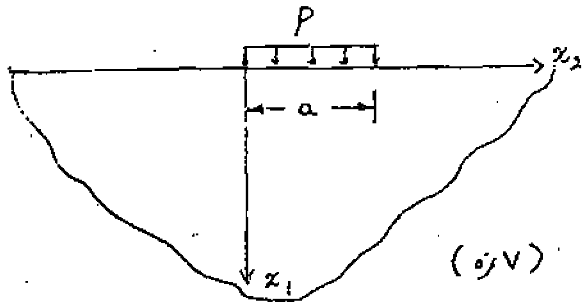
بسمه تعالی

امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی گروه عمران دانشکده فنی

۷۷/۱۰/۲۷

مدت ۲ ساعت

۲۹

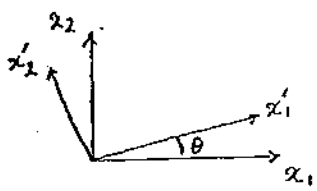


مسأله اول: در محیط نیمه بی‌نهایت شکل مقابل مقادیر تنش را بدست آورید. (جوابها را تا زمان به یک درجهای ساده نمائید.) (استفاده از اجتماع آثار بار متمرکز نمره کامل را نخواهد داشت.) (۷ نمره)

مسأله دوم: کره‌ای توخالی به شعاع داخلی R و شعاع خارجی $2R$ تحت اثر تغییر درجه حرارت $\Delta T = \frac{T_0 r^2}{R^2}$ قرار گرفته است. در سطح خارجی کره از کلیه تغییر مکانها جلوگیری شده است و سطح داخلی کره عاری از تنش می‌باشد. مقادیر تغییر مکانها و تنش‌ها را در کره بدست آورید. (۷ نمره)

مسأله سوم: جسم نازکی در صفحه x_1x_2 قرار دارد و در آن صفحه ارتوتروپ می‌باشد. روابط تنش-کرنش در این صفحه به صورت زیر می‌باشد. مقادیر $E(\theta)$ و $\nu(\theta)$ (مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در جهت θ) را محاسبه نمائید. (۶ نمره)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$



باسمه تعالی

امتحان میان ترم تئوری ارتجاعی گروه عمران دانشکده فنی

مدت ۲ ساعت ۱۳۷۸/۹/۷

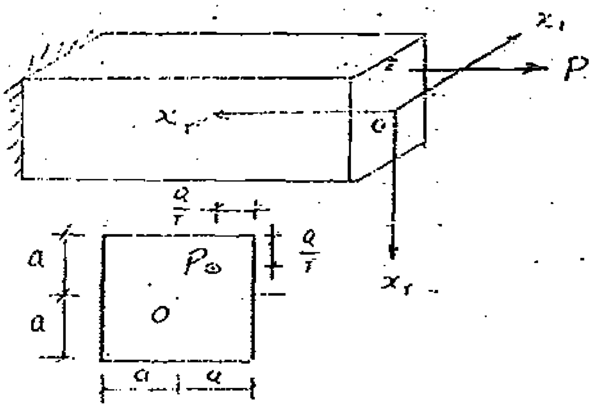
۱. در جسمی تانسور تنش مطابق شکل مقابل است $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sigma & \tau \\ ۰ & \tau & ۲ \end{bmatrix}$. اگر در آزمایش کشش ساده جسم تحت تأثیر تنش σ_0 به حالت تسلیم رسد، منحنی سطح تسلیم به ازای σ و τ را مطابق معیارهای ترسکا و ون میزس رسم کنید. $\sigma_0 = ۴$ فرض کنید.

۲. اگر داشته باشیم : $\vec{u} = \vec{A} - \vec{\nabla}\left[B + \frac{\vec{A}\cdot\vec{R}}{۴(۱-\nu)}\right]$ با قرار دادن $\vec{u}$ در معادلات ناویه بدون طرف ثانی ثابت کنید:

$$\mu \nabla^۲ \vec{A} - (۲\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\nabla^۲ B) - \frac{\mu+\lambda}{۲}\vec{\nabla}(\vec{R}\cdot\nabla^۲\vec{A}) = ۰$$

$\vec{R}$ بردار مکان است.

۳. اگر در تیر شکل مقابل تنش ها به شکل زیر باشند، مقادیر ثابت را بدست آورید. (از نیروهای حجمی صرفنظر کنید.)



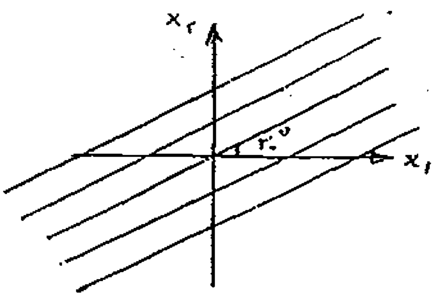
$$\sigma_{۱۱} = \sigma_{۱۲} = \sigma_{۱۳} = ۰$$

$$\sigma_{۲۲} = A x_۲ + B x_۲^۲ + C x_۲^۳$$

$$\sigma_{۲۳} = D x_۳ + E x_۲ x_۳ + F x_۳ x_۲^۲$$

$$\sigma_{۳۳} = G + H x_۲ + I x_۲ x_۳ + J x_۳ x_۲^۲ + K x_۱$$

۴. در یک محیط ایزوتروپ سه بعدی با ضرایب E و ν تارهایی نازک با مشخصات زیر در جسم قرار داده شده اند. رابطه تنش-کرنش در مختصات کارتزین را بدست آورید. یک دسته از تارها به موازات محور $x_۳$ قرار دارند، با سطح مقطع $A_۲$ و تعداد $n_۲$ تار در واحد سطح عمود بر تارها. دسته دیگر عمود بر محور $x_۳$ با سطح مقطع $A_۱$ وتعداد $n_۱$ تار در واحد سطح عمود بر تار مطابق شکل قراردارند. ضرایب ارتجاعی تارها را E_f و ν_f فرض کنید.



موفق باشید

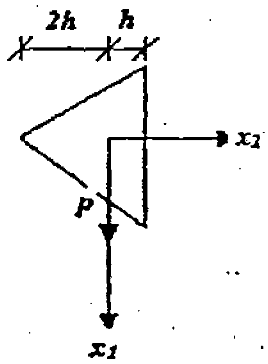
۱۰

باسمه تعالی

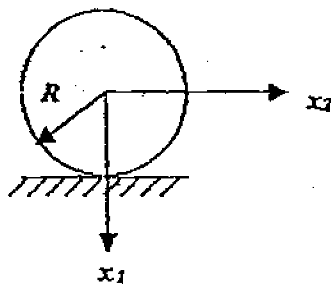
امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی گروه مهندسی عمران دانشکده فنی ۷۸/۱۱/۷

مدت ۲/۵ ساعت

مسأله ۱ : تیر طره ای به طول l و مقطع مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a مفروض است. این تیر در انتهای آزاد تحت اثر نیروی متمرکز P قرار گرفته است. میدان تنش بدست آمده در تیر را محاسبه کنید. ضرایب ارتجاعی را E و ν فرض کنید. $(\nu = \frac{1}{4})$



مسأله ۲ : صفحه دایره شکلی به ضخامت واحد و شعاع R و وزن مخصوص γ بر روی زمین صلب واقع شده است، میدان تنش، کرنش و تغییر مکان این صفحه را بدست آورید. مسأله را در حالت تنش مسطح با ضرایب ارتجاعی E و ν حل کنید.



((موفق باشید))

۶۱۱

« بسمه تعالی »

امتحان میان ترم درس تئوری ارتجاعی ، مهندسی عمران   دانشکده فنی   ۷۹/۱۰/۲۵   مدت ۲/۵ ساعت

۱- سه عدد کرنش سنج در امتدادهای ۰ ، ۳۰ و ۹۰ درجه در یک نقطه از یک جسم دوبعدی نصب شده‌اند و تغییر طول‌های نسبی زیر را به دست داده‌اند:

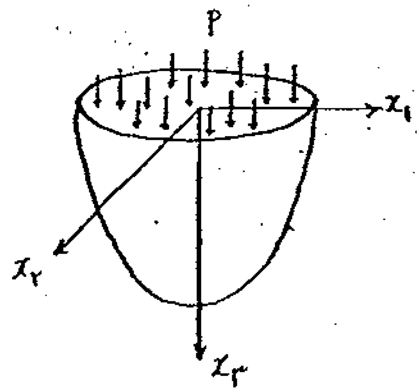
$\varepsilon_0 = \alpha \qquad \varepsilon_{30} = \beta \qquad \varepsilon_{90} = \gamma$

تانسور کرنش را محاسبه کنید.

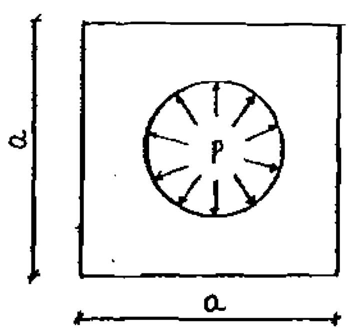
۲- دستگاه مختصات سهموی (u, v, φ) با روابط زیر داده شده است:

$x_1 = uv\cos\varphi \qquad x_2 = uv\sin\varphi \qquad x_3 = \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$

که در آن $u \geq 0$ ، $v \geq 0$ و $2\pi > \varphi \geq 0$: المان حجم dV را محاسبه نموده و جمله کریستوفل‌های این دستگاه مختصات را به دست آورید.



۳- یک محیط نیم بی‌نهایت تحت فشار یکنواخت P در سطح آزاد قرار دارد. یک نقطه از این محیط را در نظر می‌گیریم. اگر در این نقطه $\sigma_{22} = 0$ باشد، تانسور تنش و کرنش را در این نقطه محاسبه نمایید.



۴- محیطی دوبعدی در وضعیت کرنش مسطح مفروض است. مقطع این محیط مربعی به ضلع a است که در مرکز آن سوراخ دایره‌ای شکل به شعاع r قرار گرفته است. چنانچه فشار داخلی حفره برابر با مقدار ثابت P باشد، مطلوب است محاسبه شرایط مرزی نیرویی در محیط خارجی مربع بطوریکه تنها مولفه تغییر مکان، u_r باشد.

موفق باشید

باسمه تعالی

امتحان میان ترم درس تئوری ارتجاعی ، مهندسی عمران　　دانشکده فنی　　۷۹/۱۰/۲۵　　مدت ۲/۵ ساعت

۱- سه عدد کرنش سنج در امتدادهای ۰، ۳۰ و ۹۰ درجه در یک نقطه از یک جسم دوبعدی نصب شده‌اند و تغییر طول‌های نسبی زیر را به دست داده‌اند:

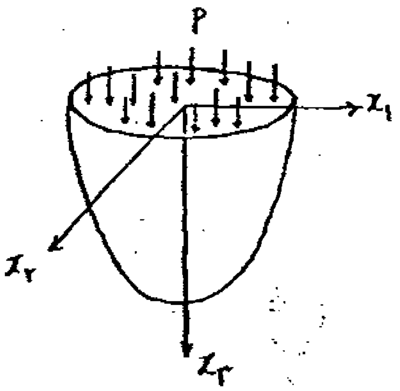
$\varepsilon_0 = \alpha$　　$\varepsilon_{30} = \beta$　　$\varepsilon_{90} = \gamma$

تانسور کرنش را محاسبه کنید.

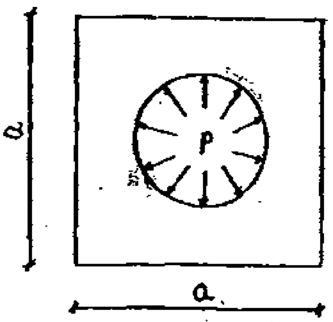
۲- دستگاه مختصات سهموی (u,v,φ) با روابط زیر داده شده است:

$x_1 = uv\cos\varphi$　　$x_2 = uv\sin\varphi$　　$x_3 = \frac{1}{2}(v^2-u^2)$

که در آن $u \geq 0$ ، $v \geq 0$ و $0 \leq \varphi < 2\pi$. المان حجم dV را محاسبه نموده و جدول کریستوفل‌های این دستگاه مختصات را به دست آورید.



۳- یک محیط نیمه بی‌نهایت تحت فشار یکنواخت P در سطح آزاد قرار دارد. یک نقطه از این محیط را در نظر می‌گیریم. اگر در این نقطه $\sigma_{22} = \sigma$ باشد، تانسور تنش و کرنش را در این نقطه محاسبه نمایید.



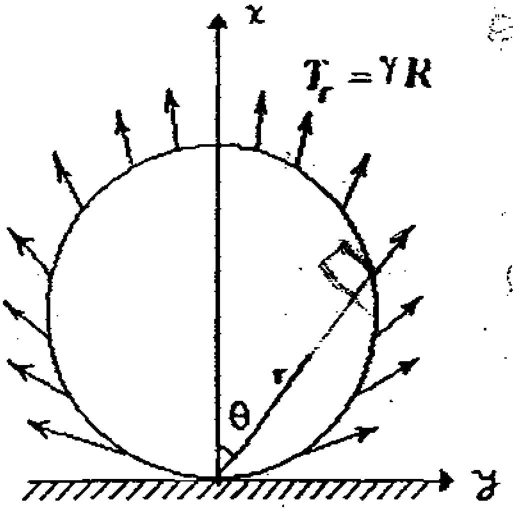
۴- محیطی دوبعدی در وضعیت کرنش سطح مفروض است. مقطع این محیط مربعی به ضلع a است که در مرکز آن سوراخ دایره‌ای شکل به شعاع r قرار گرفته است. چنانچه فشار داخلی حفره برابر با مقدار ثابت P باشد، مطلوبست محاسبه شرایط مرزی نیرویی در محیط خارجی مربع به طوری که تنها مؤلفه تغییرمکان u_r باشد.

موفق باشید

باسمه تعالی

امتحان پایان ترم تئوری الاستیسیته [illegible] دانشکده فنی 79/11/3 مدت 2/5 ساعت

% %

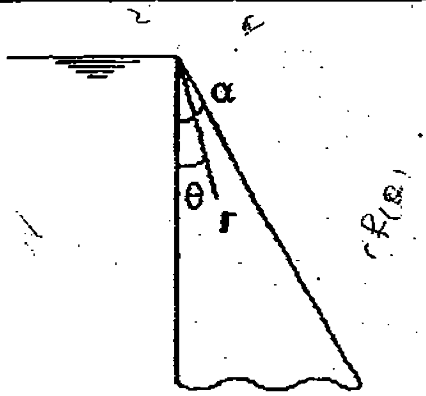


دیسک دایره شکلی با ضخامت واحد و وزن مخصوص γ بر روی جسم صلبی قرار گرفته و تحت اثر نیروی مرزی $T_r = \gamma R$ قرار دارد.

الف) ثابت کنید نیروی وارد بر جسم صلب صفر است. (3نمره)

ب) میدان تنش در دیسک را در مختصات کارتزین محاسبه کنید. (5 نمره)

ج) آیا این میدان تنش در معادلات تعادل صدق می‌کند. (2نمره)



گوه نامتناهی به اندازه α مطابق شکل مفروض است. اگر این گوه تحت اثر فشار هیدرواستاتیک مایعی با وزن مخصوص γ_r قرار گیرد با استفاده از روش آنالیز ابعادی تابع تنش ایری در مختصات قطبی (از جدول هم می‌توانید استفاده کنید) را بدست آورید. (4نمره)

یک تیر طره ای با طول L تحت اثر نیروی متمرکز P در سر آزاد قرار دارد. شکل مقطعی را بدست آورید که در آن تنش برشی فقط مؤلفه قائم داشته باشد.

راهنمایی : $\frac{\delta F}{\delta x_1} = 0$ در نتیجه $\phi = 0$ و $F(x_1, x_2) = h(x_1)$

(6نمره)

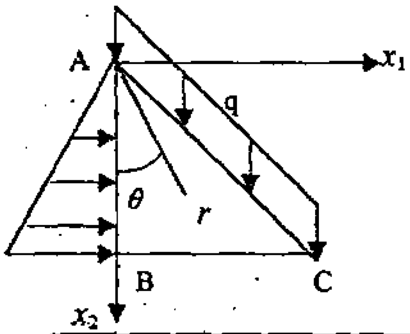
موفق باشید

۲۱۲

بسمه تعالی

امتحان میان ترم تئوری ارتجاعی گروه مهندسی عمران دانشکده فنی (مدت: ۲ ساعت) ۸۰/۱۰/۲

۱- گوه دو بعدی مطابق شکل تحت اثر بار گسترده یکنواخت q در $\theta = \alpha$ و فشار سیال با وزن مخصوص γ در $\theta = 0$ قرار دارد. شرایط مرزی برای مرزهای AB و AC را در دستگاه مختصات قطبی و کارتزین بنویسید.



۲- لاپلاسین بردار U را در دستگاه مختصات سهموی با روابط زیر محاسبه کنید.

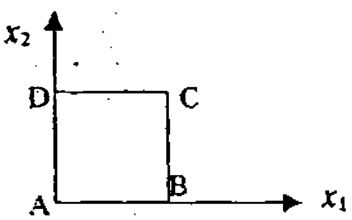
$$x_1 = uv\cos\varphi$$
$$x_2 = uv\sin\varphi$$
$$x_3 = (v^2 - u^2)/2 \qquad 0 < \varphi < 2\pi \qquad v \geq 0 \quad u \geq 0$$

۳- وضعیت تغییر مکان هر نقطه در تغییر شکل خاصی بصورت زیر است.

$$u_1 = kx_2 \qquad u_2 = u_3 = 0.0$$

الف- تانسور کرنش کوشی (گرین) را برای این تغییر شکل بدست اورید.

ب- تانسور کرنش گرین-لاگرانژ را در این تغییر شکل بدست اورید و با تانسور تغییر شکلهای کوچک مقایسه کنید.



ج- تغییر طول لبه های AB و AD و نیز تغییر طول قطرهای AC ,BD را با استفاده از تانسور گرین-لاگرانژ بدست اورید.

د- تغییر زاویه A رابدست اورید.

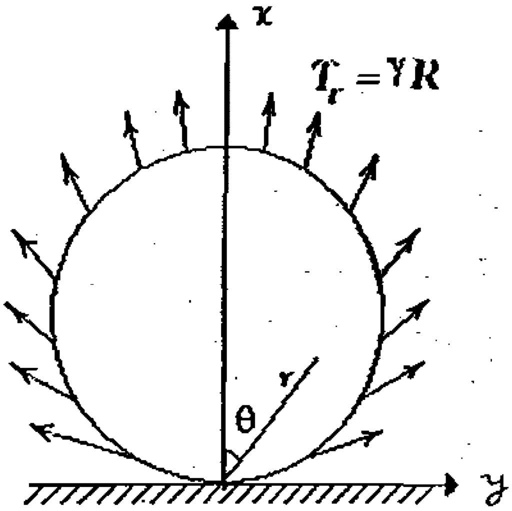
موفق باشید

باسمه تعالی

امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی مهندسی عمران دانشکده فنی $79/11/3$ مدت $2/5$ ساعت

% %

دیسک دایره شکلی با ضخامت واحد و وزن مخصوص γ بر روی جسم صلبی قرار گرفته و تحت اثر نیروی مرزی $T_r = \gamma R$ قرار دارد.

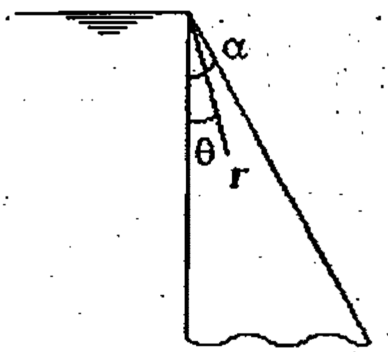


الف) ثابت کنید نیروی وارد بر جسم صلب صفر است. (3 نمره)

ب) میدان تنش در دیسک را در مختصات کارتزین محاسبه کنید. (5 نمره)

ج) آیا این میدان تنش در معادلات تعادل صدق می‌کند. (2 نمره)

گوه نامتناهی به اندازه α مطابق شکل مفروض است. اگر این گوه تحت اثر فشار هیدرواستاتیک مایعی با وزن مخصوص γ_r قرار گیرد با استفاده از روش آنالیز ابعادی تابع تنش ایری در مختصات قطبی (از جدول هم می‌توانید استفاده کنید) را بدست آورید. (4 نمره)



یک تیر طره ای با طول L تحت اثر نیروی متمرکز P در سر آزاد قرار دارد. شکل مقطعی را بدست آورید که در آن تنش برشی فقط مؤلفه قائم داشته باشد.

راهنمایی : $\dfrac{\delta F}{\delta x_1} = 0$ در نتیجه $\phi = 0$ و $F(x_1, x_2) = h(x_1)$

(6 نمره)

موفق باشید

۱۳

به نام خدا

امتحان میان ترم تئوری ارتجاعی دانشکده فنی ۸۱/۱۰/۱۵ مدت ۲ ساعت

۱/ اگر ازدیاد طول نسبی در صفحه ای در امتداد °۰ ، °۶۰ و °۶۰- از محور افقی به ترتیب برابر ۰/۰۵- و ۰/۰۵+ و ۰/۱ — باشد (الف) مؤلفه های تانسور کرنش را محاسبه کنید. (ب) تغییر زاویه بین امتدادهای °۶۰ و °۶۰- را بدست آورید. (۵ نمره)

۲/ جسمی تحت اثر تغیر شکل زیر قرار گرفته است.

$X_1=Ax_1^2$ $\qquad$ $X_2=Bx_2^2$ $\qquad$ $X_3=Cx_3^2$

X_i و x_i به ترتیب مختصات تغییر شکل یافته و تغییر شکل نیافته و A ، B و C ضرایب ثابت می باشند. چه شرطی باید وجود داشته باشد تا المانی که از نقطه (۱ ، ۱ ، ۱) می گذرد و در امتداد $n=(\cos\beta\ ,\ \sin\beta\ ,0)$ قرار گرفته است تغییر طول ندهد: میدان تنش و نیروهای حجمی را در این جسم محاسبه کنید. (۵ نمره)

۳/ کره ای به شعاع r تحت اثر درجه حرارت $\Delta T = kr$ قرار گرفته (r مختصه شعاعی است) و در هر نقطه از مرز خارجی مهار شده است (تغییر مکان مرز صفر است). تنش ، کرنش ، تغییر مکان و انرژی کرنشی در واحد حجم این کره را بدست آورید. ضریب انبساط حرارتی را α و ضرایب لامه را λ و μ فرض کنید. (۵ نمره)

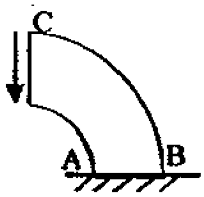
۴/ در مسئله بوسینسک، نیم کره ای به مرکز نقطه اثر نیروی متمرکز در نظر می گیریم. با استفاده از مقادیر تنش های بدست آمده در محیط، ثابت کنید که نیروهای وارده بر این نیم کره در حال تعادل هستند. (۵ نمره)

موفق باشید

باسمه تعالی

امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی دانشکده فنی دانشگاه تهران   ۸۰/۱۱/۲   مدت ۳ ساعت

۱- تیر خمیده دایره ای به شعاع داخلی R1 و شعاع خارجی R2 مفروض است. اگر نیروی P بر انتهای ازاد ان اثر کند. تابع تنش ایری را محاسبه کنید. (۴ نمره)



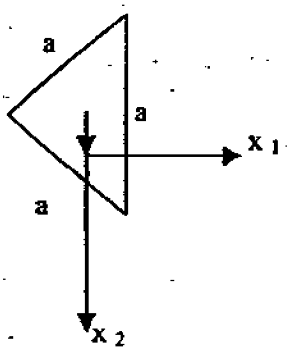
۲- اگر تابع کرنشی لاو بصورت $V_z = \rho^4$ باشد.توابع تنش کرنش و تغییر مکان را محاسبه کنید. (۶ نمره)

۳- تیر طره ای با مقطع مثلث متساوی الاضلاع به طول a مفروض است.اگر نیروی P در مرکز سطح انتهای ازاد (مطابق شکل) به تیر اعمال شود. زاویه پیچش در واحد طول تیر و مرکز برش مقطع تیر را محاسبه کنید
ضریب پواسون را $\upsilon=0.5$ در نظر بگیرید. (۶ نمره)

$$\iint_{A_0} x_2^{\,3} dA_0 = -a^5/480$$

$$\iint_{A_0} x_1^{\,2} x_2 dA_0 = a^5/480$$

$$I_{11} = I_{22} = a^4\sqrt{3}/96$$



۴- در محیط اورتوتروپ ثابت کنید:

الف- $\upsilon_{12}+\upsilon_{21}+\upsilon_{23}+\upsilon_{32}+\upsilon_{13}+\upsilon_{31}\leq 3$ (۲ نمره)

ب- $\upsilon_{12}+\upsilon_{23}+\upsilon_{31}\leq 3/2$ (۲ نمره)

بسمه‌تعالی

آزمون پایان‌ترم تئوری ارتجاعی ـ دانشکده مهندسی عمران ـ دانشگاه تهران

تاریخ ۸۶/۱۱/۱۱ **مدت ۳ ساعت**

۱- میدان کرنش زیر را مد نظر قرار می‌دهیم. با چه شرایطی این میدان می‌تواند از یک میدان تغییرمکان تک‌مقداره حاصل شده باشد؟ (۲ نمره)

یعنی باید در معادلات سازگاری صدق کند.

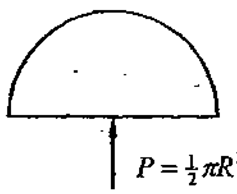
$$\varepsilon_{11} = Ax_2^3 \qquad \varepsilon_{22} = Bx_2^4 \qquad \varepsilon_{12} = Cx_1x_2^2$$

$-\frac{A}{r^2}$ $\sigma\left(-\frac{A}{r^2}\right)$ $-\frac{A}{r^2}$

۲- آیا تابع پتانسیل $\varphi = A\theta$، که در آن $\theta = \mathrm{Arctg}(x_2/x_1)$ است، می‌تواند یک تابع پتانسیل لامه باشد؟ چرا؟ اگر این تابع پتانسیل مساله‌ای را حل کند، میدان تغییرمکان، کرنش و تنش در آن مساله را به دست آورید. (۴ نمره)

۳- اگر فرض کنیم در حالت تنش مسطح $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ و در حالت کرنش مسطح $\chi = 3-4\nu$ باشد، روابط تنش ـ کرنش در دو حالت تنش مسطح و کرنش مسطح یکسان می‌شود. آن روابط را به دست آورید. (۴ نمره)

۴- نیم‌استوانه‌ای (در حالت تنش و کرنش مسطح) به وزن مخصوص γ و شعاع R با نیروی P در حالت تعادل است. میدان تنش، کرنش و تغییرمکان را به دست آورید (برای سادگی در محاسبات، ضخامت واحد فرض می‌شود). (۵ نمره)



$P = \frac{1}{2}\pi R^2\gamma$

۵- کره‌ای به شعاع R از ماده‌ای الاستیک با ضرایب λ و μ ساخته شده است. اگر این کره حول یکی از محورهای تقارنش با سرعت زاویه‌ای ω در حال دوران باشد، تغییر حجم آن را محاسبه کنید. (۵ نمره)

موفق باشید

$u_r = u_r(r)$

$u_\theta = 0$

$u_\varphi = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2 \cdot \rho}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right)\right]\right] = -\rho\omega^2 r$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right)\right) = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + C$$

بسمه‌تعالی

آزمون پایان‌ترم تئوری ارتجاعی ـ دانشکده مهندسی عمران ـ دانشگاه تهران

تاریخ ۸۶/۱۱/۱۱ مدت ۳ ساعت

۱- میدان کرنش زیر را مد نظر قرار می‌دهیم. با چه شرایطی این میدان می‌تواند از یک میدان تغییرمکان تک‌مقداره حاصل شده باشد؟ (۲ نمره)

$$\varepsilon_{11} = Ax_2^4 \qquad \varepsilon_{22} = Bx_2^4 \qquad \varepsilon_{12} = Cx_1x_2^2$$

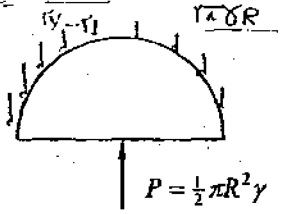
۲- آیا تابع پتانسیل $\varphi = A\theta$، که در آن $\theta = \mathrm{Arctg}(x_2/x_1)$ است، می‌تواند یک تابع پتانسیل لامه باشد؟ چرا؟ اگر این تابع پتانسیل مساله‌ای را حل کند، میدان تغییرمکان، کرنش و تنش در آن مساله را به دست آورید. (۴ نمره)

$\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu} \longrightarrow \chi(1+\nu) = 3-\nu \longrightarrow \nu(\chi+1) = 3-\chi \longrightarrow \nu = \frac{3-\chi}{\chi+1}$

۳- اگر فرض کنیم در حالت تنش مسطح $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ و در حالت کرنش مسطح $\chi = 3-4\nu$ باشد، روابط تنش ـ کرنش در دو حالت تنش مسطح و کرنش مسطح یکسان می‌شود. آن روابط را به دست آورید. (۴ نمره)

۴- نیم‌استوانه‌ای (در حالت تنش و کرنش مسطح) به وزن مخصوص γ و شعاع R با نیروی P در حالت تعادل است. میدان تنش، کرنش و تغییرمکان را به دست آورید (برای سادگی در محاسبات، ضخامت واحد فرض می‌شود). (۵ نمره)

$\frac{\nu}{1-\nu} = \frac{\frac{3-\chi}{\chi+1}}{1-\frac{3-\chi}{\chi+1}}$ $\quad \frac{1}{4}R\gamma$



۵- کره‌ای به شعاع R از ماده‌ای الاستیک با ضرایب λ و μ ساخته شده است. اگر این کره حول یکی از محورهای تقارنش با سرعت زاویه‌ای ω در حال دوران باشد، تغییر حجم آن را محاسبه کنید. (۵ نمره)

موفق باشید

$$(x_1^2+x_2^2)^{-1} \Rightarrow -(x_1^2+x_2^2)^{-2} \times 2x_2$$

$$= \frac{-2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{-x_2}{x_1^2}$$

$$-x_2\,(x_1^2+x_2^2)^{-1}$$

$$= x_2\,(x_1^2+x_2^2)^{-2} \times 2x_1$$

باسمه تعالی

امتحان میان‌ترم تئوری ارتجاعی دانشکده مهندسی عمران دانشگاه تهران   مدت : ۲ ساعت   ۸۷/۱۰/۱

۱- نشان دهید: $\dfrac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij}$ (۲ نمره).

۲- تانسور تنش در نقطه‌ای برحسب MP_a برابر $\begin{bmatrix} 4 & b & b \\ b & 7 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix}$ می‌باشد. اگر تنش‌های اصلی $\sigma_3 = 3MP_a$ و $\sigma_1 = 2\sigma_2$ باشد، الف) مقادیر تنش اصلی را محاسبه کنید (۱ نمره). ب) مقدار b را به‌دست آورید (۱ نمره). ج) جهت تنش اصلی σ_2 را به‌دست آورید (۱ نمره).

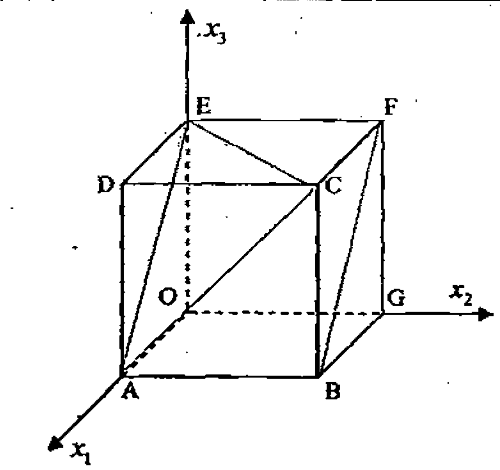
۳- ماتریس تنش در نقطه‌ای در دستگاه مختصات $x_1x_2x_3$ برابر است با $\begin{bmatrix} 5 & a & -a \\ a & 0 & b \\ -a & b & 0 \end{bmatrix}$. اگر در همان نقطه نسبت به دستگاه مختصات $x'_1x'_2x'_3$ ماتریس تنش به شکل $\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$ و اندازه‌ی تنش برشی حداکثر در آن نقطه برابر ۵/۵ باشد، σ_1 و σ_3 را محاسبه کنید (۲ نمره).

۴- میدان تنش در یک محیط پیوسته بدون درنظر گرفتن نیروهای حجمی برابر است با $\begin{bmatrix} x_1+x_2 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & x_1-x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}$ که در آن σ_{12} تابعی از x_1 و x_2 می‌باشد. اگر بردار تنش روی صفحه‌ی $x_1 = 1$ به صورت $\overline{T} = (1+x_2)\overline{e_1} + (6-x_2)\overline{e_2}$ ارائه شود، σ_{12} را به صورت تابعی از x_1 و x_2 بیان کنید (۳ نمره).

۵- اگر محور x_1 یک محور متقارن مرتبه‌ی $N = 2$ برای رفتار ماده باشد، ماتریس ضرائب الاستیک C_{ijkl} را برای جسم الاستیک گرین محاسبه کنید. محور تقارن مرتبه‌ی N وقتی است که با دوران θ $\left(N = \dfrac{2\pi}{\theta}\right)$ حول آن محور، رفتار ماده تغییر نکند (۴ نمره).

۶- محیط پیوسته‌ای به شکل مکعب به طول واحد مطابق شکل تحت تغییر شکل زیر قرار می‌گیرد:

$X_1 = \lambda_1 x_1 \quad X_2 = \lambda_2 x_2 \quad X_3 = \lambda_3 x_3$ که در آن λ_1، λ_2 و λ_3 ثابت هستند. رابطه‌ی بین ثابت‌ها را طوری به‌دست آورید که الف) طول قطر OC بدون تغییر باقی بماند (۲ نمره). ب) مساحت مستطیل $ABEF$ بدون تغییر باقی بماند (۲ نمره). ج) مساحت مثلث ACE بدون تغییر باقی بماند (۲ نمره).



موفق باشید

بسمه‌تعالی

آزمون پایان‌ترم تئوری ارتجاعی ـ دانشکده مهندسی عمران ـ دانشگاه تهران

تاریخ ۸۵/۱۱/۱ مدت ۳ ساعت

۱- تونلی به مقطع دایره به شعاع R در یک محیط بی‌نهایت دوبعدی الاستیک قرار گرفته است. اگر این تونل پر از آب شود، میدان تنش و تغییرمکان را در محیط محاسبه کنید. (۸ نمره)

۲- دستگاه مختصات (α,β,γ) که $\alpha \ge 0$، $\beta \ge 0$ و $0 \le \gamma < 2\pi$ است را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

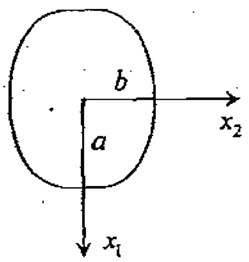
$$x_1 = \alpha\beta\cos\gamma$$
$$x_2 = \alpha\beta\sin\gamma$$
$$x_3 = \tfrac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$$

محیط الاستیکی با ضرایب لامه μ و λ، تغییرشکلی برابر $\vec{u} = \dfrac{u_\gamma}{\alpha\beta}\vec{e}_\gamma$ می‌دهد که در آن فقط u_γ تابع γ است. با صرفنظر کردن از نیروهای حجمی، u_γ را محاسبه کنید. (۶ نمره)

راهنمایی: از معادله ناویه به صورت زیر استفاده کنید:

$$(2\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \mu\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$$

۳- تیر طره‌ای به طول l تحت اثر نیروی متمرکز P در سر آزاد در امتداد محور x_1 قرار دارد. مقطع تیر که در شکل نشان داده شده است با معادلات زیر مشخص می‌شود:



$$\left(\frac{x_2}{b}\right)^3 = 1 - \frac{x_1^2}{a^2}; \quad -a < x_1 < a,\ x_2 > 0$$
$$-\left(\frac{x_2}{b}\right)^3 = 1 - \frac{x_1^2}{a^2}; \quad -a < x_1 < a,\ x_2 < 0$$

تنش‌های برشی را در این تیر محاسبه کنید. ممان اینرسی مقطع حول محور x_2 برابر I و $\upsilon = 1/3$ فرض شود. (۶ نمره)

راهنمایی: تابع $f(x_2)$ و $\phi(x_1,x_2)$ را برای $x_2 > 0$ و $x_2 < 0$ به طور جداگانه به دست آورید.

موفق باشید

بسمه‌تعالی

آزمون میان‌ترم تئوری ارتجاعی ـ دانشکده مهندسی عمران ـ دانشگاه تهران

تاریخ ۸۵/۱۰/۵ مدت ۲ ساعت

۱- تانسور تنش در محیطی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$\sigma_{rr}=\frac{r^2z}{(r^2+z^2)^{5/2}},\ \sigma_{rz}=\frac{rz^2}{(r^2+z^2)^{5/2}},\ \sigma_{zz}=\frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta z}=\sigma_{\theta\theta}=0$$

الف) ثابت کنید که این حالت تنش، یکبعدی است. (۴ نمره)

ب) دستگاه مختصاتی که در آن تنش یکبعدی است را به دست آورید. (۳ نمره)

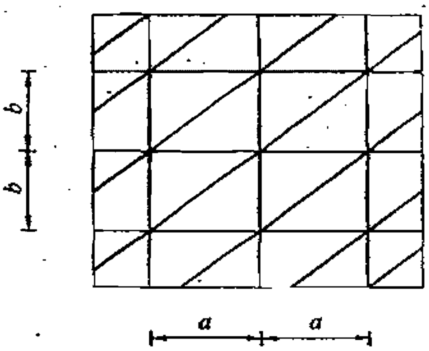
ج) تانسور تنش این محیط را در مختصات کروی محاسبه کنید. (۴ نمره)

۲- تعدادی میله با ضرایب الاستیک E و ν به صورت افقی، قائم و مورب مطابق شکل زیر مفروض است. محل اتصال میله‌ها را مفصلی فرض می‌کنیم.

الف) محیط همگنی جانشین این میله‌ها فرض کنید و ضرایب الاستیسیته محیط فرضی را محاسبه کنید. (۶ نمره)

ب) از لحاظ ایزوتروپی این محیط چه وضعیتی دارد؟ (۱ نمره)

ج) چه پیشنهادی برای اورتوتروپ شدن محیط دارید؟ (۲ نمره)



موفق باشید

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم تئوری ارتجاعی - گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

تاریخ: ۱۳۸۳/۱۱/۱ مدت: ۳ ساعت

۱- اگر تمامی مولفه‌های تانسور کرنش ثابت باشند؛ این حالت را حالت کرنش همگن گویند. اگر محیطی کروی به معادله $x^2+y^2+z^2=R^2$ در حالت کرنش همگن قرار گیرد، پس از تغییرمکان این محیط به چه شکلی در می‌آید؟ کره در مرکز دارای شرایط زیر است:

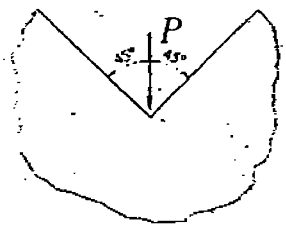
$$u_1=u_2=u_3=0 \quad و \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}=0$$

تانسور کرنش را نیز به صورت زیر فرض نمایید:

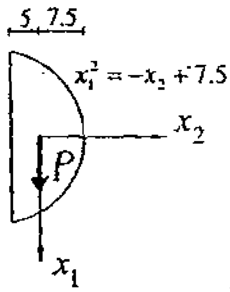
$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}=cte$$

(۵ نمره)

۲- محیطی دوبعدی مطابق شکل تحت اثر باری به شدت P در واحد ضخامت قرار گرفته است. میدان تنش و کرنش را در محیط به دست آورید. مساله را با فرض کرنش مسطح، مصالح ارتجاعی و ایزوتروپ با ضرایب لامه E و ν و صرفنظر از نیروی وزن حل کنید: (۷ نمره)



۳- تیری طره‌ای با مقطع مطابق شکل مفروض است. این تیر در انتهای خود تحت اثر بار P قرار گرفته است. مقادیر تنشها در این تیر را به دست آورید. $\nu=0.25$ فرض شود. (۸ نمره)



موفق باشید

بسمه‌تعالی

آزمون میان‌ترم تئوری ارتجاعی ـ دانشکده مهندسی عمران ـ دانشگاه تهران

تاریخ ۸۴/۱۰/۲۰ مدت ۲/۵ ساعت

۱- در یک محیط پیوسته سه بعدی الاستیک و ایزوتروپ با ضرایب لامه λ و μ ، فرض می‌نماییم ناشی از نیروهای حجمی f_i و بردار تنش (Traction) T_i ، میدان تنش σ_{ij} و میدان تغییرمکان u_i حاصل شود و ناشی از نیروهای حجمی f_i^* و بردار تنش T_i^* ، میدان تنش σ_{ij}^* و میدان تغییرمکان u_i^* حاصل گردد. با فرض:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) u_i^* \, dV = 0$$

ثابت کنید:

$$\int_V \sigma_{ij,j}^* u_i \, dV + \int_V f_i u_i^* \, dV = -\int_S T_i u_i^* \, dS + \int_S T_i^* u_i \, dS$$

که در آن V حجم محیط و S سطح خارجی آن است. (۷ نمره)

۲- میدان تنش در یک تیر به طول L با سطح مقطع بیضی شکل به معادله $x_2^2 + 2x_3^2 = 1$ به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -2x_3 & x_2 \\ -2x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

محور x_1 در امتداد محور تیر است و دو انتهای چپ و راست تیر به ترتیب در $x_1 = 0$ و $x_1 = L$ واقع شده‌اند.

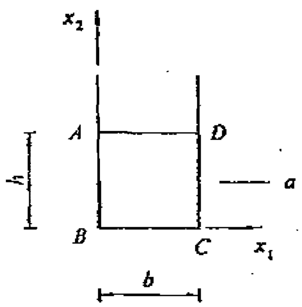
الف- بردار تنش (Traction) در روی کلیه سطوح جانبی تیر را به دست آورید. (۳ نمره)

ب- نیروها و لنگرهای وارد بر انتهای چپ تیر به دست آورید. (۳ نمره)

۳- ظرفی مکعب مستطیل به ضخامت واحد، طول b و ارتفاع زیاد به ارتفاع h از سیالی به چگالی ρ پر شده است. این ظرف در راستای افقی تحت شتاب ثابت a در حال حرکت است.

الف- میدان فشار در داخل سیال را محاسبه نمایید. (۳ نمره)

ب- برآیند نیروهای وارد بر سطوح افقی و قائم ظرف را به دست آورده، تعادل ظرف را در راستای افقی و قائم تحقیق نمایید. (۳ نمره)



موفق باشید