

باسمه تعالی



دفترچه سوالات آزمون آزمایشی مرحله اول  
وب سایت المپیاد کامپیوتر شازرز  
جمعه - بیست و یکم دی ۱۳۹۷

تعداد سوالات	مدت آزمون (دقیقه)
۲۵	۲۱۰

**طراحی شده توسط:**

امیرمحمد ایمانی، میکائیل قربانی، مهدی جعفری

**با تشکر از:**

امید آزادی، ارشیا سلطانی، کسری مظاهری، مهرشاد میرمحمدی

**آماده شده توسط:**

حمیدرضا کلباسی، ابوالفضل سلطانی

**توضیحات**

۱- استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۲- دفترچه سوالات (به جز این صفحه) شامل ۶ صفحه است. بلافاصله پس از شروع آزمون، دفترچه‌ی خود را بررسی نمایید و در صورت هرگونه وجود نقص، مسئول جلسه را مطلع نمایید.

۳- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.

۴- استفاده از هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت، هرگونه منابع الکترونیکی (مانند اینترنت و موبایل) و وسایلی از این قبیل ممنوع است.

با توجه به متن زیر، به سوالات ۱ و ۲ و ۳ جواب بدهید.

امیر یک سکه دارد که احتمال  $p$  خط و به احتمال  $1-p$  شیر می‌آید. این سکه را آن قدر می‌اندازیم تا ۴ خط یا ۶ شیر (نه لزوماً متوالی) بیاید.

۱- اگر  $p = \frac{1}{4}$  باشد احتمال اینکه نه بار سکه را بیندازیم چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{56}{512}$  (۲)  $\frac{56}{1.24}$  (۳)  $\frac{21.}{512}$  (۴)  $\frac{56}{256}$  (۵)  $\frac{21.}{256}$

۲- اگر  $p = \frac{1}{6}$  باشد احتمال اینکه هشت بار سکه را بیندازیم چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{16 \times 161}{6561}$  (۲)  $\frac{4 \times 161}{6561}$  (۳)  $\frac{16 \times 119}{6561}$  (۴)  $\frac{8 \times 161}{6561}$  (۵)  $\frac{16 \times 182}{6561}$

۳- اگر  $p = \frac{2}{5}$  باشد امید ریاضی تعداد شیرهایی که می‌بینیم به کدام عدد نزدیکتر است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{5}{7}$  (۳) ۳ (۴)  $\frac{5}{6}$  (۵) ۴

۴- یک سینی متشکل از ۱۲ تا بشقاب متمایز که ۳ تای آن آبی، ۳ تای آن قرمز و ۳ تای آن سبز و ۳ تای آن زرد است، داریم. دو سینی دیگر نیز داریم. می‌خواهیم چهار تا بشقاب از سینی اول را به سینی دو و چهار تا را هم به سینی سه انتقال بدهیم به طوری که ترتیب رنگ های بشقاب های سینی اول با ترتیب رنگ های سینی دوم برابر باشد و برعکس ترتیب رنگ های سینی سه باشد. در هر گام می‌توانیم یک بشقاب از سینی اول برداشته و بر روی اولین سینی که کمتر از ۴ بشقاب دارد قرار دهیم. به چند حالت می‌توانیم بشقاب ها را انتقال بدهیم که به حالت مطلوب برسیم؟

- (۱) ۵۷۶ (۲) ۳۸۴ (۳) ۱۲۹۶ (۴) ۱۹۴۴ (۵) ۵۱۲

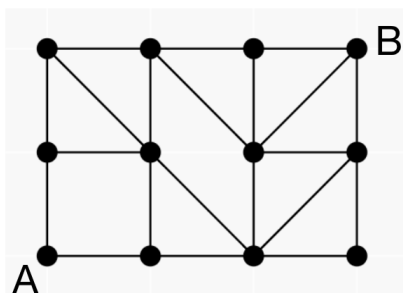
۵- تعداد رشته‌های به طول ۸ متشکل از صفر و یک که اندازه هر بلوک متشکل از یک آن، فرد باشد؟

- (۱) ۱۰۸ (۲) ۶۱ (۳) ۱۹۷ (۴) ۹۴ (۵) ۹۵

۶- تعداد رشته‌های به طول ۲۰ متشکل از صفر و یک که اندازه هر بلوک متشکل از یک آن، زوج باشد؟

- (۱) ۴۱۸۱ (۲) ۶۷۶۵ (۳) ۴۰۹۶ (۴) ۸۱۹۲ (۵) ۵۶۴۷

۷- در شکل زیر خوبی یک نقطه که در  $i$  امین سطر از پایین و  $j$  امین ستون از چپ قرار دارد، برابر  $i+j$  است. می‌خواهیم از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  برویم به طوری که از راس تکراری عبور نکنیم و در طول مسیر هیچ وقت خوبی نقاط ما کاهش پیدا نکند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



- (۱) ۵۲ (۲) ۶۰ (۳) ۴۸ (۴) ۵۶ (۵) ۶۴

۸- گرافی ۱۰۱ راسی داریم که تمام یال های آن کشیده شده است. رئوس آن از ۰ تا ۱۰۰ شماره گذاری شده اند و روی یال متصل کننده دوراس  $i$  و  $j$  مقدار  $i \oplus j$  (یعنی  $xor$  دو عدد) را نوشته ایم. می خواهیم تعدادی یال انتخاب کنیم که به ازای هر راس حداقل یکی از یال های متصل به آن انتخاب شده باشد. حداقل مجموع وزن این یال ها چه قدر می باشد؟

(۱) ۵۰ (۲) ۵۱ (۳) ۵۲ (۴) ۵۳ (۵) ۵۴

۹- در صفحه مختصات در ابتدا بر روی نقطه  $(2, 5)$  قرار داریم. می خواهیم به نقطه  $(1, -1)$  برسیم. در هر گام می توانیم از نقطه  $(x, y)$  به نقطه  $(x+2, y-3)$  یا  $(x-2, y+2)$  برویم. به چند طریق می توانیم این کار را انجام دهیم؟

(۱)  $\binom{17}{7}$  (۲)  $\binom{21}{7}$  (۳)  $\binom{12}{7}$  (۴)  $\binom{12}{5}$  (۵)  $\binom{15}{5}$

۱۰- دنباله ای داریم که در ابتدای آن ده تا یک و در ادامه آن ده تا دو و در نهایت ده تا سه نوشته شده است. کیان عددی از یک تا سی انتخاب کرده و ما می خواهیم آن را پیدا کنیم. هر دفعه می توانیم یک عدد از کیان بپرسیم. اگر عدد ما از عدد کیان کوچکتر باشد او به ما می گوید « بیا پایین ». در غیر این صورت میگوید « نیا پایین! » هر دفعه ای که ما عنصر  $i$  ام را از کیان می پرسیم باید به اندازه  $i$  امین عنصر دنباله برآش مسئله هندسه حل کنیم. چون ما المپیاد کامپیوتری هستیم و از هندسه بدمون میاد می خواهیم کمترین تعداد مسئله رو حل کنیم. حداقل باید چند تا مسئله حل کنیم تا مطمئن باشیم می توانیم عدد کیان را پیدا کنیم؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵ (۵) ۱۶

۱۱- همان مسئله قبل را در نظر بگیرید. اگر عددی که ما انتخاب می کنیم از عدد کیان کوچکتر باشد به جای اینکه کیان بگوید بیا پایین میگوید ویش لیستتون نشون بده و چون ما نداریمش ۵ تا سوال هندسه جریمه می شویم. حداقل باید چند تا مسئله حل کنیم تا مطمئن باشیم می توانیم عدد کیان را بفهمیم؟

(۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵ (۵) ۲۶

۱۲- ش.پ هیچ چیزی از المپیاد کامپیوتر حالیش نمیشه و میخواد مرحله یک بدهد. (مث ش.پ نباشید) ش.پ هیچ سوالی را نمیتواند به طور کامل حل کند ولی قدرتی دارد که میتواند از هر سوالی مستقل از سختی آن دو گزینه را با احتمال ۹۰ درصد حذف کند. با فرض اینکه آزمون مرحله یک ۳۰ سوال پنج گزینه ای هست و جواب درست به هر سوال ۴ امتیاز مثبت و جواب منفی به هر سوال یک امتیاز منفی دارد و اینکه ش.پ هوشمند عمل میکند، امید ریاضی امتیازی که ش.پ میگیرد (از ۱۲۰ امتیاز ممکن) چقدر خواهد شد؟

(۱) ۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۸۰ (۵) ۱۰۵

13- مایک میخواد کلمه ی googoolimagooli را تایپ کند و به نقش بفرستد.

اول کار هیچ چیزی تو 'اونجا' نوشته نشده است. مایک در هر مرحله می تواند یکی از سه عملیات زیر را انجام دهد.

۱. یک حرف دلخواه را به یک جایی از کلمه ی نوشته شده اضافه کند.

۲. یک بازه ای از کلمه ای که نوشته شده را کپی کند.

۳. رشته ای که کپی شده را در جایی از کلمه پیست کند.

توجه کنید او می تواند یک بار کپی کند و چند بار پیست کند. کمترین تعداد مرحله ی لازم برای انجام این کار چند تاست؟

۱۰ (۱)      ۱۱ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۳ (۴)      ۱۴ (۵)

۱۴- به چند طریق می توان چهار زیر مجموعه  $A, B, C, D$  از مجموعه اعداد طبیعی ۱۵ تا ۲۴ انتخاب کرد به طوری که  $A \cap B = C$  و هیچ کدام از مجموعه های  $C \cap D$  و  $A \Delta B$  (اجتماع منهای اشتراک دو مجموعه) تهی نباشند؟

$$۷^{۱۰} - ۲ \times ۶^{۱۰} + ۵^{۱۰} \quad (۱)$$

$$۸^{۱۰} - ۲ \times ۷^{۱۰} + ۶^{۱۰} \quad (۳)$$

$$۸^{۱۰} - ۷^{۱۰} - ۴^{۱۰} + ۳^{۱۰} \quad (۵)$$

$$۷^{۱۰} - ۶^{۱۰} - ۵^{۱۰} + ۴^{۱۰} \quad (۲)$$

$$۸^{۱۰} - ۷^{۱۰} - ۶^{۱۰} + ۵^{۱۰} \quad (۴)$$

با توجه به متن زیر، به سوالات ۱۵ و ۱۶ پاسخ دهید.

امید و ارشیا با یکدیگر بازی می کنند. بازی آن ها به این صورت است که دو ظرف وجود دارد که در هر ظرف تعدادی سنگریزه قرار دارد. دو نفر به نوبت، در هر گام می توانند یکی از ۳ کار زیر را انجام دهد:

۱- دو سنگریزه از یک ظرف بردارد.

۲- یک سنگریزه از دو ظرف بردارد.

۳- به اندازه بزرگترین مقسوم علیه مشترک تعداد سنگریزه های ظرف اول و تعداد سنگریزه های ظرف دوم از ظرفی که بیشتر سنگریزه دارد، سنگریزه برمی دارد.

بازی را امید شروع می کند. کسی که در نوبت خودش نتواند سنگریزه ای بردارد، می بازد. هر دو نفر به صورت بهینه بازی می کنند و اگر کسی نتواند ببرد، تلاش خواهد کرد تا تعداد سنگریزه های طرف مقابل را کمینه کند.

حال  $S(x, y)$  برابر ۱ است اگر در وضعیت ابتدایی بازی در ظرف اول  $x$  و در ظرف دوم  $y$  سنگریزه وجود داشته باشد و امید بتواند به گونه ای بازی کند که مستقل از نحوه بازی ارشیا ببرد و در غیر این صورت برابر ۰ است.

۱۵- مقدار  $S(۲۱, ۲۴) + S(۲۰۱۸, ۲۰۱۸) \times ۲ + S(۱۳۹۷, ۱۳۹۷) \times ۴$  کدام است؟

۰ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)

۱۶- اگر در وضعیت ابتدایی بازی در ظرف اول ۲۱ و در ظرف دوم ۲۴ سنگریزه وجود داشته باشد، برنده حداکثر چند سنگریزه می تواند بردارد؟

۲۱ (۱)      ۲۲ (۲)      ۲۳ (۳)      ۲۴ (۴)      ۲۵ (۵)

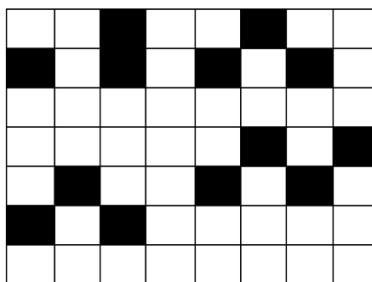
۱۷- الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

- ۱- مقدار  $i$  را برابر  $x$  و مقدار  $s$  را برابر صفر قرار بده.
- ۲- اگر  $i \& 7$  زوج بیت یک (در مبنای دو) داشت به مرحله ۳ برو و در غیر این صورت به مرحله ۴ برو.
- ۳- مقدار  $i$  را برابر  $i \oplus 2$  قرار بده و  $s$  را یک واحد زیاد کن. سپس به مرحله ۵ برو.
- ۴- مقدار  $i$  را برابر  $i \oplus 5$  قرار بده.
- ۵- اگر  $i$  بیشتر از ۱۰۲۳ شد به مرحله ۷ برو.
- ۶- مقدار  $i$  را دو برابر کن و به مرحله ۲ برگرد.
- ۷- عدد  $s$  را گزارش کن.

منظور از  $\&$ ، عملیات and بیتی در مبنای دو و منظور از  $\oplus$ ، xor بیتی در مبنای دو است. خروجی برنامه بالا را  $f(x)$  می نامیم. جمع همه  $f(x)$  هایی که  $x$  در بازه  $[600, 1000]$  باشد چه قدر است؟

- ۱) ۷۹۸      ۲) ۷۹۹      ۳) ۸۰۰      ۴) ۸۰۱      ۵) ۸۰۲

۱۸- جدولی  $8 \times 7$  داریم که برخی از خانه های آن مسدود شده اند.  $f(k)$  را تعریف می کنیم کوچکترین  $x$  به طوری که بتوان  $k$  مهره در جدول قرار داد که فاصله هر خانه مسدود نشده تا حداقل یکی از مهره ها کمتر مساوی  $x$  باشد. مسیر یعنی دنباله ای از خانه های جدول به طوری که هر خانه حداکثر یک بار در دنباله ظاهر شده باشد و هر دو خانه مجاور در دنباله در جدول مجاور ضلعی باشند. فاصله بین دو خانه یعنی تعداد خانه های کوتاه ترین مسیر بین آن دو خانه منهای یک. حال جمع همه  $f(i)$  هایی که  $i$  از یک تا ده باشد چه قدر خواهد بود؟



- ۱) ۳۲  
۲) ۳۴  
۳) ۳۶  
۴) ۳۸  
۵) ۴۰

۱۹- ۲۰۱۹ تا وزنه‌ی یک شکل و با وزن‌های متمایز داریم که وزن هر کدام توانی از ۲ است. یک ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داریم. در هر بار «تست» می‌توانیم تعدادی از وزنه‌ها را در یک کفه و بقیه‌ی وزنه‌ها را در کفه‌ی دیگر قرار دهیم (همه‌ی وزنه‌ها باید در دو کفه‌ی ترازو قرار گیرند) و مجموع وزن وزنه‌های موجود در دو کفه را با هم مقایسه کرد. با حداقل چند بار تست می‌توان سنگین‌ترین وزنه را پیدا کرد؟

- ۱) ۱۰      ۲) ۱۱      ۳) ۲۰      ۴) ۲۱      ۵) ۲۲

۲۰- دنباله‌ای شامل ۱۰ صفر داریم. در هر گام می‌توانیم یک عدد  $i$  بین ۱ تا ۱۰ انتخاب کنیم و مقدار تمام خانه‌هایی که اندیس آن‌ها بر  $i$  بخش پذیر است را یک واحد افزایش دهیم. به چه تعداد از دنباله‌های زیر می‌توانیم برسیم؟ (اعضای دنباله به ترتیب از چپ به راست هستند)

- ۳, ۴, ۳, ۸, ۴, ۴, ۴, ۱۱, ۵, ۵
- ۱, ۳, ۶, ۶, ۲, ۱۰, ۲, ۶, ۸, ۷
- ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ۳, ۲, ۶, ۴, ۵
- ۱, ۲, ۲, ۳, ۲, ۵, ۲, ۵, ۳, ۴

- (۱) ۰      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳      (۵) ۴

با توجه به متن زیر، به سوالات ۲۱، ۲۲ و ۲۳ پاسخ دهید.

$f(n, m, k)$  تعداد حالاتی است که می‌توانیم  $k$  تا از یال‌های یک شبکه  $n \times m$  را رنگ کنیم به طوری که هیچ دو یال رنگ شده‌ای با هم اشتراک راسی نداشته باشند.

۲۱-  $f(۱۳, ۲۲, ۱)$  کدام است؟

- (۱) ۲۸۶      (۲) ۲۵۲      (۳) ۳۲۲      (۴) ۵۷۲      (۵) ۶۰۷

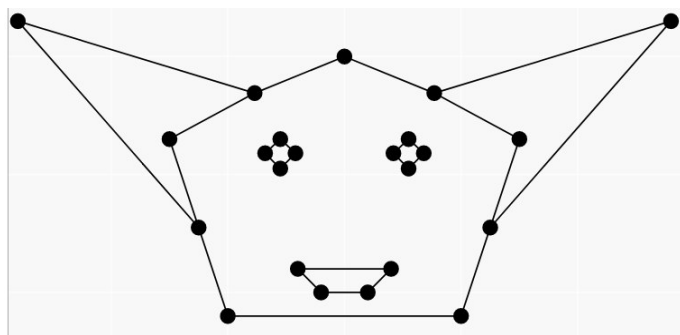
۲۲-  $f(۳, ۲, ۲)$  کدام است؟

- (۱) ۱۹۸      (۲) ۲۰۰      (۳) ۲۰۲      (۴) ۲۰۴      (۵) ۲۰۶

۲۳-  $f(۳, ۳, ۸)$  کدام است؟

- (۱) ۲۸      (۲) ۳۰      (۳) ۳۲      (۴) ۳۴      (۵) ۳۶

۲۴- میکائیل یک گراف  $Q_{۱۷}$  از مهدی گرفته است. ( $Q_{۱۷}$  گرافی است با  $2^{۱۷}$  راس که هر راس یک رشته دودویی متمایز به طول ۱۷ است و دوراس به یکدیگر یال دارند اگر فقط در یک بیت در با هم فرق داشته باشند.) میکائیل میخواهد بدانند  $Q_{۱۷}$  چند زیرگراف به شکل یک گره دارد. به یک گراف گره گوئیم اگر به شکل زیر باشد. فرض کنید جواب  $t$  است. باقی‌مانده  $t$  در تقسیم بر ۵ کدام است؟



- (۱) ۰  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳  
(۵) ۴

۲۵- ۲۰۰۳ نفر در یک جزیره زندگی می‌کنند. این افراد به دو دسته‌ی راستگویان که همیشه راست می‌گویند و دروغگویان که همیشه دروغ می‌گویند تقسیم شده‌اند. هر فرد در این جزیره یا المپیادی است یا کنکوری و یا بیکار. از هر کدام از افراد سه پرسش کرده‌ایم.

1. آیا شما المپیادی هستید؟

2. آیا شما کنکوری هستید؟

3. آیا شما بیکار هستید؟

میدانیم ۱۰۰۰ نفر به پرسش یکم، ۷۰۰ نفر به پرسش دوم و ۵۰۰ نفر به پرسش سوم پاسخ مثبت داده‌اند. در این جزیره چند دروغگو وجود دارد؟

(۱) ۱۰۵      (۲) ۱۸۳      (۳) ۱۹۷      (۴) ۳۱۹      (۵) ۲۰۳