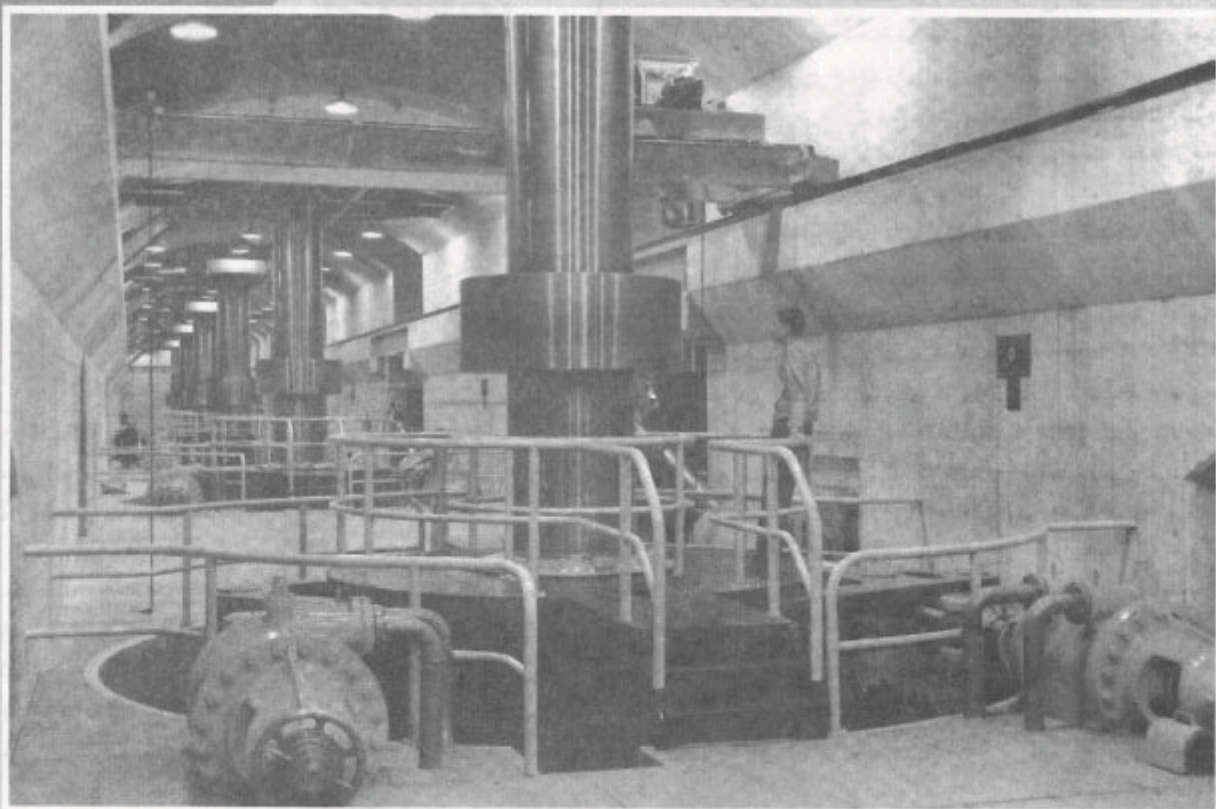




در این فصل، پیچش و تنش و تغییر شکل ناشی از آن را مطالعه می‌کنیم. در نیروگاه هیدرو الکتریکی نشان داده شده، شفت‌های عمودی که روتور مولدهای الکتریکی را می‌گردانند تحت کوبیل توربین‌ها قرار دارند.

۱-۳ مقدمه

در دو فصل قبل، نحوه محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها را در عضوهایی که تحت بارهای محوری قرار داشتند مطالعه کردیم. در این فصل، عضوهای ساختمانی و مکانیکی را تحت پیچش بررسی، و تنش و کرنش در اعضاها با مقطع عرضی دایره‌ای را تحت کوپل‌های پیچشی T و T' تحلیل می‌کنیم (شکل ۱-۳). این کوپل‌ها، که دارای مقدار یکسان T و سوهای مخالف‌اند، کمیت‌های برداری‌اند و با پیکان‌های خمیده (شکل ۱-۳ الف)، یا با بردارهای کوپل (شکل ۱-۳ ب) نشان داده می‌شوند.



الف)



ب)

شکل ۱-۳

در اغلب کاربردهای مهندسی با عضوهای تحت پیچش مواجه می‌شویم. متداول‌ترین آنها شفت است که برای انتقال قدرت از نقطه‌ای به نقطه دیگر به کار می‌رود. مثلاً، از شفت

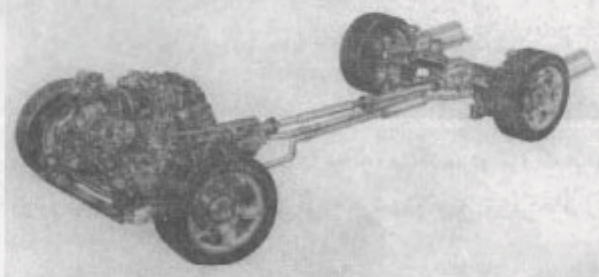
نشان داده شده در شکل ۲-۳ برای انتقال قدرت از موتور به چرخ‌های عقب اتومبیل استفاده می‌شود. این شفت‌ها به صورت توپر (شکل ۱-۳) یا تو خالی هستند.

سیستم نشان داده شده را در شکل ۳-۳ الف در نظر بگیرید. این سیستم از توربین بخاری A و مولد الکتریکی B که به شفت AB متصل است تشکیل شده است. با تجزیه این سیستم به سه قسمت (شکل ۳-۳ ب)، دیده می‌شود که توربین، کوپل پیچشی T را بر شفت، و شفت نیز کوپل T را بر مولد وارد می‌کند. مولد نیز کوپل مساوی و مخالف T' را بر شفت، و شفت کوپل T' را بر توربین اعمال می‌کند.

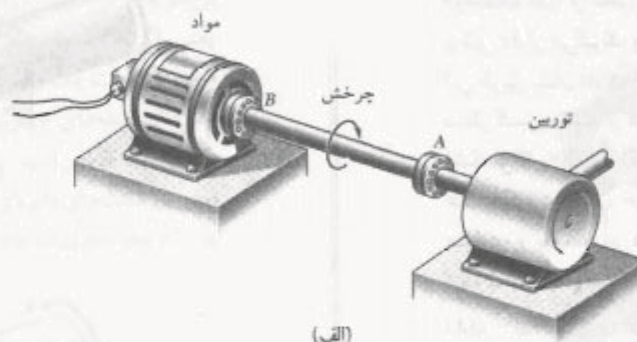
ابتدا، تنش و تغییر شکل در شفت‌های دایره‌ای را تحلیل می‌کنیم. در قسمت ۳-۳، خاصیت مهم زیر را نشان می‌دهیم: وقتی یک شفت دایره‌ای تحت پیچش قرار می‌گیرد، تمام مقاطع عرضی بصورت صفحه‌ای و بدون اعوجاج می‌مانند. یعنی، گرچه مقاطع عرضی مختلف شفت تحت زوایای متفاوت در امتداد شفت می‌چرخند، ولی این چرخش صلب‌گونه است. با این خاصیت می‌توان توزیع کرنش برشی را در یک شفت دایره‌ای تعیین کرد و نتیجه گرفت که کرنش برشی برحسب فاصله از محور شفت بصورت خطی تغییر می‌کند.

با در نظر گرفتن تغییر شکل‌ها در ناحیه الاستیک و با استفاده از قانون هوک برای تنش و کرنش برشی، توزیع تنش برشی در یک شفت دایره‌ای تعیین می‌شود و فرمول‌های پیچش الاستیک به دست می‌آیند (قسمت ۴-۳).

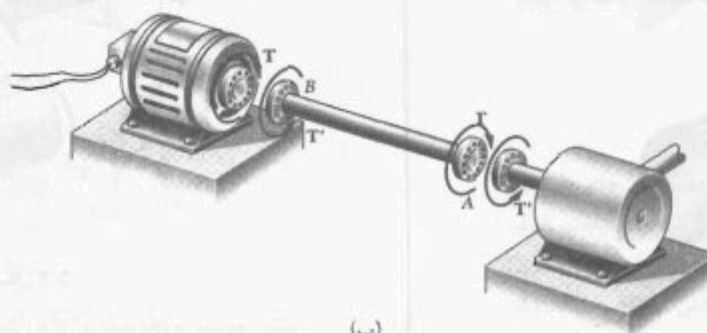
در قسمت ۵-۳، با فرض تغییر شکل الاستیک، زاویه پیچش یک شفت دایره‌ای را که تحت کوپل معینی قرار دارد تعیین می‌کنیم. در قسمت ۶-۳، مسائل شفت‌های نامعین استاتیکی را بررسی می‌کنیم.



شکل ۲-۳ در زنجیره قدرت نشان داده شده، انتقال قدرت از موتور به چرخ‌های عقب توسط شفت انجام می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۳-۳

۲-۳ مقدمه‌ای درباره تنش در شفت
شفت AB را که در نقاط A و B تحت گشتاورهای مساوی و متضاد T و T' قرار دارند در نظر می‌گیریم، و یک برش را عمود بر محور شفت از نقطه اختیاری C می‌گذرانیم (شکل ۳-۴). نمودار آزاد قسمت BC شامل نیروهای جزئی برشی dF است که قسمت AC بر قسمت BC هنگام پیچش در امتداد عمود بر شعاع شفت وارد می‌کند (شکل ۳-۵الف). تعادل قسمت BC نشان می‌دهد که سیستم نیروهای جزئی معادل است با گشتاور داخلی T ، که مساوی و مخالف T' است (شکل ۳-۵ب). مجموع لنگر* نیروهای برشی dF نسبت به محور شفت را مساوی با گشتاور T قرار داده و می‌نویسیم:

$$\int \rho dF = T$$

اما $dF = \tau dA$ ، که در آن τ تنش برشی وارد بر جزء سطح dA است. در نتیجه،

$$\int \rho (\tau dA) = T \quad (۱-۳)$$

* به آن گشتاور نیز می‌گویند - مترجم.

در قسمت ۳-۷، طراحی شفت‌ها را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، مشخصه‌های فیزیکی یک شفت را برحسب سرعت چرخش و قدرت آن تعیین می‌کنیم.

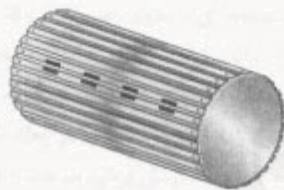
برای تعیین تنش در نزدیک مقاطعی که کوپل وارد می‌شود یا در نزدیک مقطعی که شفت ناگهان تغییر قطر می‌دهد، از فرمول‌های پیچش نمی‌توان استفاده کرد. به علاوه، این فرمول‌ها فقط در ناحیه الاستیک ماده به کار می‌روند.

در قسمت ۳-۸، تمرکز تنش را در مقطعی که قطر شفت در آن تغییر ناگهانی می‌دهد بررسی می‌کنیم. در قسمت‌های ۳-۹ تا ۳-۱۱، تنش و تغییر شکل در شفت‌های دایره‌ای چکش‌خواری را که از نقطه تسلیم خود فراتر رفته است مطالعه می‌کنیم. در این قسمت‌ها، تغییر شکل پلاستیک و تنش‌های باقیمانده را نیز بررسی می‌کنیم.

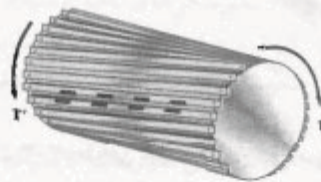
در قسمت ۳-۱۲، پیچش عضوهای غیردایره‌ای و در قسمت ۳-۱۳ توزیع تنش در شفت‌های غیردایره‌ای توخالی جدار نازک را تحلیل می‌کنیم.



با توجه به شرایط تعادل (قسمت ۱-۱۲)، وجوهی که از دو صفحه گذرا از محور شفت تشکیل می‌شوند نیز تحت تنش برشی قرار می‌گیرند. وجود این تنش‌ها را در پیچش می‌توان به این طریق نشان داد که "شفت" را متشکل از تیغه‌های مجزایی در نظر گیریم که از دو انتها به دیسک‌هایی لولا شده‌اند (شکل ۳-۷ الف). اگر زوی دو تیغه مجاور را با رنگ علامت‌گذاری کنیم، خواهیم دید که با اعمال گشتاورهای مساوی و ناهمسو بر دو انتهای "شفت" (شکل ۳-۷ ب)، دو تیغه نسبت به یکدیگر می‌لغزند. گرچه در شفت چنین لغزشی روی نمی‌دهد، ولی گرایش برای لغزش وجود دارد و نشان می‌دهد که تنش‌هایی در صفحات طولی و نیز در صفحات عمود بر محور شفت به وجود آمده‌اند*.



(الف)



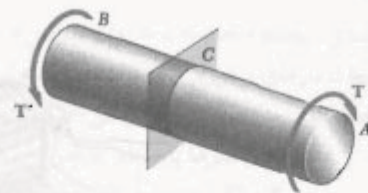
(ب)

شکل ۳-۷

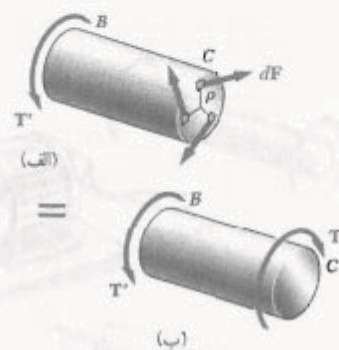
۳-۳ تغییر شکل در شفت دایره‌ای

یک شفت دایره‌ای را در نظر بگیرید که از یک انتها به تکیه‌گاه ثابتی متصل است (شکل ۳-۸ الف). اگر گشتاور T بر انتهای دیگر وارد شود، شفت می‌پیچد و انتهای آزاد آن تحت زاویه ϕ ، موسوم به زاویه پیچش، دوران می‌کند (شکل ۳-۸ ب). آزمایش نشان می‌دهد که برای گستره معینی از مقادیر T ، زاویه پیچش ϕ با T و طول L شفت متناسب است. به عبارت دیگر، اگر طول شفتی دو برابر شود، تحت گشتاور یکسان T ، دارای زاویه پیچش دو برابر خواهد بود. در اینجا می‌خواهیم رابطه بین L ،

* عموماً یک لوله مقاومتی که در جهت طولی بریده شده است نمایش دیگری از وجود تنش‌های برشی وارد بر صفحات طولی است.



شکل ۳-۴



شکل ۳-۵

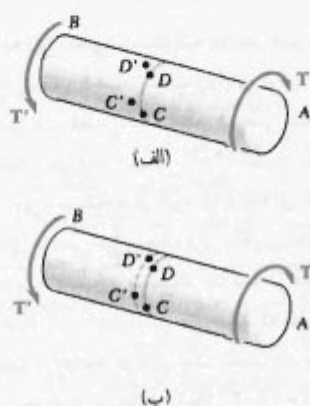
رابطه بالا گرچه مهم است، ولی درباره نحوه توزیع تنش برشی در یک مقطع عرضی چیزی نمی‌گوید. لذا، طبق قسمت ۵-۱، توزیع واقعی تنش برشی را در این حالت نمی‌توان با روش‌های استاتیک به دست آورد. در قسمت ۵-۱ فرض شد که تنش‌های قائم ناشی از بار محوری مرکزی دارای توزیع یکنواخت‌اند و در قسمت ۱۷-۲ دیدیم که این فرض قابل توجیه است به جز در مجاورت بارهای متمرکز. ولی، چنین فرضی برای توزیع تنش‌های برشی در یک شفت الاستیک اشتباه است. در واقع، قبل از تحلیل تغییر شکل در شفت، نباید درباره توزیع تنش در آن قضاوت کرد. این کار در قسمت بعد انجام می‌شود. گفتنی است که، طبق قسمت ۱-۱۲، برش فقط در یک صفحه روی نمی‌دهد. جزء کوچکی از شفت نشان داده شده در شکل ۳-۶ را در نظر می‌گیریم. با اعمال گشتاور بر شفت، وجوهی که بر محور شفت محور هستند تحت تنش برشی T قرار می‌گیرند.



شکل ۳-۶

REB

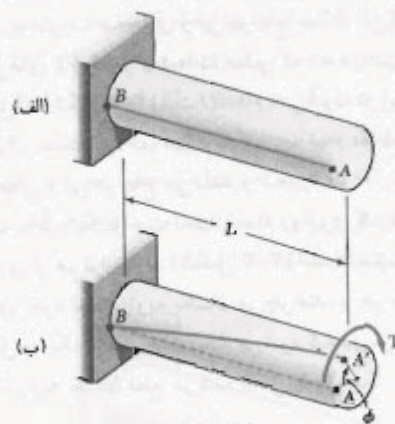
مقاطع عرضی یک شفت دایره‌ای به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند زیرا شفت دایره‌ای تقارن محوری دارد؛ یعنی، اگر از وضعیت ثابتی به آن نگاه کنیم و آن را حول محورش تحت یک زاویه اختیاری بچرخانیم، ظاهر آن تغییر نمی‌کند. (میله‌های چهارگوش نیز وقتی به اندازه 90° یا 180° می‌چرخند، ظاهر آنها تغییر نمی‌کند). با استفاده از تقارن محوری شفت‌های دایره‌ای می‌توان ثابت کرد که مقاطع عرضی این شفت‌ها به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند.



شکل ۱۰-۳

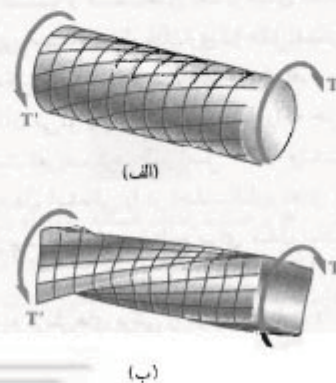
برای این منظور، نقاط C و D را روی محیط یک مقطع عرضی از شفت در نظر می‌گیریم، و وضعیت این نقاط را پس از پیچش شفت با C' و D' نشان می‌دهیم (شکل ۱۰-۳ الف). به علت تقارن محوری شفت و تقارن محوری بارگذاری، در چرخشی که D به C تغییر مکان می‌یابد D' به C' می‌رود. لذا، C' و D' روی محیط یک دایره قرار دارند، و کمان $C'D'$ با کمان CD برابر است (شکل ۱۰-۳ ب). حال، بررسی می‌کنیم که آیا دایره‌ای که روی آن C' و D' قرار دارند با دایره اولیه متفاوت است یا نه. فرض می‌کنیم که C' و D' روی دایره متفاوتی قرار دارند و دایره جدید در سمت چپ دایره اولیه است (شکل ۱۰-۳ ب). همین وضع برای سایر مقاطع عرضی برقرار است، زیرا تمام مقاطع عرضی شفت تحت گشتاور داخلی یکسان T قرار دارند، و ناظر واقع انتهای A می‌بیند که دایره به طرف خارج او حرکت می‌کند. اما ناظر واقع در انتهای B می‌بیند که دایره به طرف او حرکت می‌کند. این دو نتیجه متضاد نشان می‌دهد که فرض ما نادرست است و C' و D' روی همان دایره‌ای قرار دارند که C و D واقع‌اند. لذا، وقتی شفت می‌پیچد، بزرگترین مقطع عرضی دایره‌ای آن در صفحه خود می‌پیچد. با تکرار این استدلال برای هر دایره کوچکتر و هم مرکز واقع در

T را تعیین، و توزیع تنش برشی در شفت را بیابیم (کاری که در قسمت قبل نمی‌توانستیم صرفاً با استفاده از استاتیک انجام دهیم).



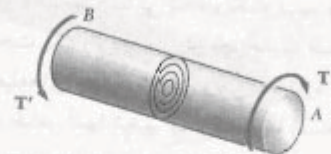
شکل ۸-۳

برای این منظور، به یکی از خواص مهم شفت‌های دایره‌ای اشاره می‌کنیم: وقتی یک شفت دایره‌ای تحت پیچش قرار می‌گیرد، تمام مقاطع عرضی آن به صورت صفحه‌ای و بدون اعوجاج می‌مانند. یعنی، گرچه مقاطع عرضی مختلف در امتداد شفت تحت زوایای متفاوت می‌پیچند، ولی این پیچش صلب‌گونه است. این موضوع در شکل ۹-۳ الف برای تغییر شکل یک مدل لاستیکی که تحت پیچش قرار دارد نشان داده شده است. خاصیت مذکور، مشخصه شفت‌های دایره‌ای توپر و توخالی است؛ در عضوها با مقطع عرضی غیردایره‌ای چنین حالتی وجود ندارد. مثلاً، وقتی میله‌ای با مقطع عرضی چهارگوش تحت پیچش قرار می‌گیرد، مقاطع عرضی مختلف آن به صورت صفحه‌ای باقی نمی‌مانند (شکل ۹-۳ ب).



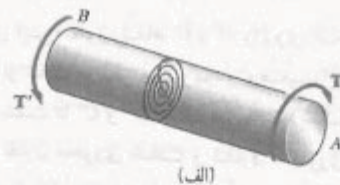
شکل ۹-۳

مقطع عرضی تحت بررسی، نتیجه می‌شود که تمام مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند (شکل ۱۱-۳).



شکل ۱۱-۳

بحث بالا به این معنی نیست که دایره هم مرکز شکل ۱۱-۳، هنگام پیچش شفت، تحت زوایای برابر می‌چرخند. زیرا، در این صورت، قطر یک مقطع عرضی به صورت یک منحنی تغییر شکل می‌دهد (شکل ۱۲-۳ الف). ناظری که این منحنی را از A می‌بیند نتیجه می‌گیرد که لایه‌های خارجی شفت بیشتر از لایه‌های داخلی می‌پیچند، ولی ناظری که این منحنی را از B می‌بیند به نتیجه متضاد یا ناظر قبیل می‌رسد (شکل ۱۲-۳ ب). این ناسازگاری می‌رساند که قطرها به صورت خطوط مستقیم، و مقاطع عرضی یک شفت دایره‌ای به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند (شکل ۱۲-۳ ج).



(الف)



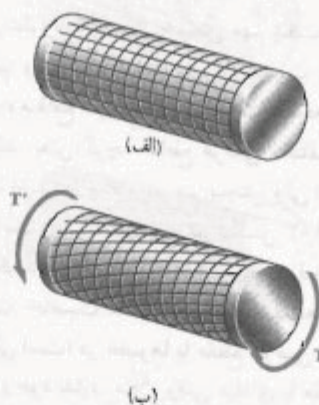
(ب)



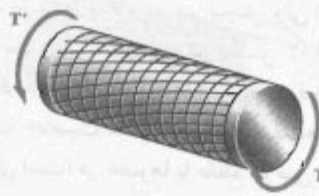
(ج)

شکل ۱۲-۳

تا به حال، نحوه اعمال کوپل‌های پیچشی T و T' را در نظر نگرفته‌ایم. برای اینکه تمام مقاطع شفت به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج بمانند، باید کوپل‌ها طوری وارد شوند که دو انتهای شفت به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج بمانند. این کار با اعمال کوپل‌های T و T' بر صفحات صلبی که به دو انتهای شفت متصل‌اند (شکل ۱۳-۳ الف) انجام می‌شود. در این صورت، می‌توان مطمئن بود که، هنگام بارگذاری، تمام مقاطع به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند و تغییر شکل در تمام طول شفت به طور یکنواخت است. تمام دایره‌ای که در فواصل مساوی از هم قرار دارند (شکل ۱۳-۳ الف) نسبت به دایره مجاور خود تحت زاویه یکسان می‌چرخند، و هر خط مستقیم تبدیل به یک منحنی (مارپیچ) می‌شود که دایره مختلف را تحت زاویه یکسان قطع می‌کند (شکل ۱۳-۳ ب).



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۳

نتایج این قسمت و قسمت‌های بعد بر مبنای صلب بودن صفحات انتهایی است. شرایط بارگذاری در عمل ممکن است با شرایط مدل شکل ۱۳-۳ متفاوت باشد. مزیت اصلی این مدل این است که با آن می‌توان یک مسئله پیچشی را که حل دقیق آن امکان‌پذیر است تعریف کرد. طبق اصل سنت-وینانت، نتایج حاصله برای مدل ایده‌آلی را در اغلب کاربردهای مهندسی می‌توان به کار برد. البته، این نتایج برای مدل شکل ۱۳-۳ هستند.

حال، توزیع کرنش‌های برشی را در یک شفت دایره‌ای به طول l و به شعاع ρ ، که تحت زاویه ϕ چرخیده است (شکل ۱۴-۳ الف) تعیین می‌کنیم. استوانه‌ای به شعاع ρ را از

REB

از معادله (۲-۳) نتیجه می‌شود که کرنش برشی در سطح شفت، که در آن $\rho = c$ ، به ماکزیمم می‌رسد:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad (۳-۳)$$

با حذف ϕ از معادله‌های (۲-۳) و (۳-۳)، کرنش برشی γ در فاصله ρ از محور شفت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (۴-۳)$$

۴-۳. تنش در ناحیه الاستیک

تا به حال، درباره رابطه بین تنش-کرنش در شفت‌های دایره‌ای تحت پیچش چیزی نگفته‌ایم. در اینجا، فرض می‌کنیم تنش برشی در شفت دارای مقدار کمتر از استقامت تسلیم τ_y است. یعنی مقدار تنش برشی در شفت کمتر از حد تناسب و نیز کمتر از حد الاستیک است (فصل ۲). لذا، قانون هوک به کار می‌رود و تغییر شکل پلاستیک وجود ندارد. با توجه به قانون هوک در قسمت ۲-۱۴،

$$\tau = G\gamma \quad (۵-۳)$$

که در آن G مدول صلابت یا مدول برشی ماده است. با ضرب کردن هر دو طرف معادله (۴-۳) در G ، می‌نویسیم:

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max}$$

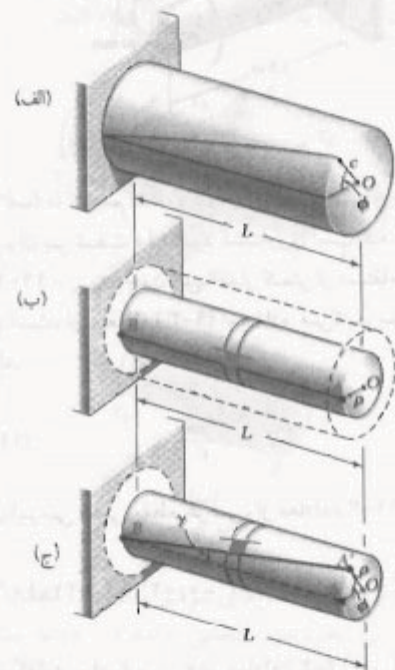
با استفاده از معادله (۵-۳)،

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \quad (۶-۳)$$

این معادله نشان می‌دهد تا وقتی هیچ قسمتی از شفت دایره‌ای از استقامت تسلیم (یا حد تناسب) فراتر نرفته است، تنش برشی در شفت برحسب فاصله ρ از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند. شکل ۱۵-۳ الف، توزیع تنش را در یک شفت توپر دایره‌ای به شعاع c ، و شکل ۱۵-۳ ب، توزیع تنش را در یک شفت دایره‌ای توخالی با شعاع‌های داخلی و خارجی c_i و c_o نشان می‌دهد. در این حالت، از معادله (۶-۳)،

$$\tau_{\min} = \frac{c_i}{c_o} \tau_{\max} \quad (۷-۳)$$

شفت جدا می‌کنیم، و جزء چهارگوش کوچکی از آن را در نظر می‌گیریم. این جزء توسط دو دایره و دو خط مستقیم، که روی سطح استوانه قبل از اعمال بار رسم می‌شوند، تشکیل شده است (شکل ۱۴-۳ ب). وقتی شفت تحت بار پیچشی قرار می‌گیرد، این جزء به صورت لوزی در می‌آید (شکل ۱۴-۳ ج). کرنش برشی γ در یک جزء معین، طبق قسمت ۲-۴، از تغییر ذوایایی که بین وجوه آن جزء تشکیل می‌شوند به دست می‌آید. چون دایره‌ای که دو وجه جزء را مشخص می‌کنند بی تغییر می‌مانند، کرنش برشی γ با زاویه بین خطوط AB و $A'B$ برابر است (γ برحسب رادیان است).



شکل ۱۴-۳

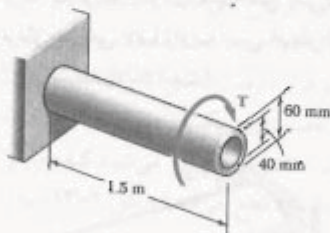
طبق شکل ۱۴-۳ ج، برای مقادیر کوچک γ می‌توان گفت $AA' = L\gamma$. از طرف دیگر، $AA' = \rho\phi$. در نتیجه $L\gamma = \rho\phi$ ، یا

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad (۲-۳)$$

که در آن ϕ و γ برحسب رادیان هستند. معادله بالا نشان می‌دهد که کرنش برشی γ در یک نقطه معین از شفت با زاویه پیچش ϕ ، و نیز با فاصله نقطه تحت بررسی تا محور شفت متناسب است. لذا، کرنش برشی در یک شفت دایره‌ای برحسب فاصله از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند.

مثال ۳-۱

یک شفت فولادی استوانه‌ای توخالی به طول ۱٫۵ m و با قطرهای داخلی و خارجی ۴۰ و ۶۰ mm است (شکل ۳-۱۶). (الف) اگر بخواهیم تنش برشی از ۱۲۰ MPa بیشتر نشود، ماکزیمم گشتاوری را که می‌توان وارد کرد چقدر است؟ (ب) مینیمم مقدار تنش برشی متناظر در شفت چقدر است؟



مثال ۳-۱۶

(الف) ماکزیمم گشتاور مجاز. ماکزیمم گشتاور مجاز T که می‌توان بر شفت وارد کرد گشتاوری است که به ازای آن $\tau_{\max} = 120 \text{ MPa}$ ، چون این مقدار کمتر از استقامت تسلیم فولاد است، از معادله (۳-۹) استفاده می‌کنیم. با حل این معادله،

$$T = \frac{J \tau_{\max}}{c} \quad (3-12)$$

ممان اینرسی قطبی مقطعی عرضی، از معادله (۳-۱۱)،

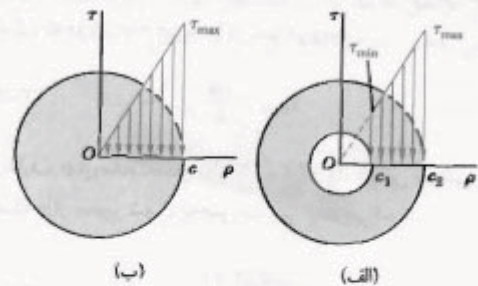
$$J = \frac{1}{4} \pi (c_o^4 - c_i^4) = \frac{1}{4} \pi (60^4 - 40^4) = 1,021 \times 10^6 \text{ m}^4$$

با جایگذاری برای J و $\tau_{\max}$ در معادله (۳-۱۲)، و با قرار دادن $c = c_o = 60 \text{ mm}$ داریم

$$T = \frac{J \tau_{\max}}{c} = \frac{(1,021 \times 10^6 \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0,06 \text{ m}} = 4,08 \text{ kN.m}$$

(ب) تنش برشی مینیمم. مینیمم مقدار تنش برشی در سطح داخلی شفت ایجاد می‌شود و آن را از معادله (۳-۷) می‌توان یافت:

$$\tau_{\min} = \frac{c_i}{c_o} \tau_{\max} = \frac{40}{60} (120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$



شکل ۳-۱۵

طبق قسمت ۳-۲، مجموع لنگر نیروهای جزئی وارده بر هر مقطع عرضی شفت با مقدار گشتاور وارد بر شفت برابر است:

$$\int \rho (\tau dA) = T \quad (3-13)$$

با جایگذاری از (۳-۶) در (۳-۱۳)، نتیجه می‌شود:

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int \rho^2 dA$$

انتگرال آخر، ممان اینرسی قطبی مقطعی عرضی را نسبت به مرکز O نشان می‌دهد. بنابراین،

$$T = \frac{\tau_{\max} J}{c} \quad (3-14)$$

با حل $\tau_{\max}$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (3-15)$$

با جایگذاری $\tau_{\max}$ از (۳-۱۵) در (۳-۶)، تنش برشی در فاصله ρ از محور شفت به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (3-16)$$

معادله‌های (۳-۹) و (۳-۱۰) را فرمول‌های پیچش الاستیک می‌گویند. از استاتیکی می‌دانیم که ممان اینرسی قطبی دایره‌ای به شعاع c چنین است: $J = \frac{1}{4} \pi c^4$. در یک شفت دایره‌ای توخالی با شعاع داخلی c_i و شعاع خارجی c_o ، ممان اینرسی قطبی برابر است با:

$$J = \frac{1}{4} \pi c_o^4 - \frac{1}{4} \pi c_i^4 = \frac{1}{4} \pi (c_o^4 - c_i^4) \quad (3-17)$$

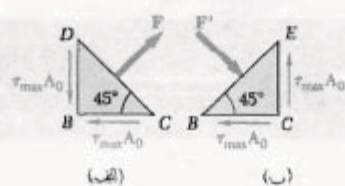
در معادله (۳-۹) یا (۳-۱۰)، T بر حسب N.m یا N.m و ρ بر حسب متر، J بر حسب m^4 و تنش برشی بر حسب N/m^2 (پاسکال، Pa) بیان می‌شود.

اکنون، جزء c را تحت زاویه 45° با محور شفت در نظر بگیرید (این جزء نشان داده نشده است). برای تعیین تنش‌های وارد بر وجوه این جزء، دو جزء مثلثی را در شکل ۱۹-۳ در نظر می‌گیریم و نمودار آزاد آنها را رسم می‌کنیم. برای جزء شکل ۱۹-۳ الف، می‌دانیم که تنش‌های وارد بر وجوه BC و BD همان تنش‌های برشی $\tau_{\max} = Tc/J$ هستند. لذا، مقدار نیروهای برشی برابر با $\tau_{\max} A_0$ است، که در آن A_0 مساحت وجه است. چون مؤلفه‌های دو نیروی برشی در امتداد DC با هم مساوی و مخالف‌اند، نیروی F وارد بر DC بر این وجه عمود است. این نیرو به‌صورت کششی است و مقدار آن چنین است:

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2} \quad (۱۳-۳)$$

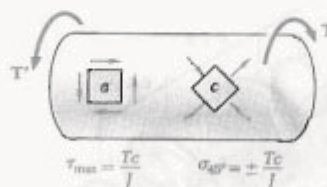
از تقسیم نیروی F بر مساحت A از وجه DC ، تنش وارد بر این وجه به‌دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max} \quad (۱۴-۳)$$



شکل ۱۹-۳

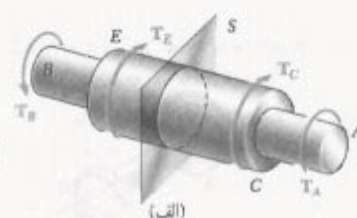
با تحلیل مشابه درباره جزء شکل ۱۹-۳ ب، دیده می‌شود که تنش وارد بر وجه BE عبارت است از $\sigma = -\tau_{\max}$. در نتیجه، وجوه جزء c که تحت زاویه 45° با محور شفت است (شکل ۲۰-۳) تحت تنش‌های قائم و برابر با $\pm \tau_{\max}$ قرار دارند. لذا، در حالی که جزء a در شکل ۲۰-۳ تحت برش خالص است، دو وجه از جزء c در همان شکل تحت تنش کششی، و دو وجه دیگر آن تحت تنش فشاری است. ضمناً، تمام تنش‌ها دارای مقدار یکسان Tc/J هستند.



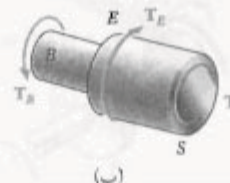
شکل ۲۰-۳

* تنش‌های وارد بر اجزا با وضعیت اختیاری، مانند جزء b در شکل ۱۸-۳، در فصل ۷ بررسی می‌شوند.

فرمول‌های (۹-۳) و (۱۰-۳) برای یک شفت با مقطع عرضی یکنواخت دایره‌ای هستند که دو انتهای آن تحت گشتاور قرار دارند. ولی، از آنها برای مقطع عرضی متغیر یا شفتی که از نقاطی غیر از دو انتهایش تحت گشتاور قرار دارد نیز می‌توان استفاده کرد (شکل ۱۷-۳ الف). توزیع تنش برشی در مقطع عرضی S از معادله (۹-۳) به‌دست می‌آید، که در آن J همان اینرسی قطبی آن مقطع، و T گشتاور داخلی در آن مقطع است. ترسیم نمودار آزاد قسمتی از شفت که در یک طرف آن مقطع قرار دارد (شکل ۱۷-۳ ب) و با مساوی صفر قرار دادن مجموع گشتاورهای وارد بر آن قسمت، شامل گشتاور داخلی T ، مقدار T به‌دست می‌آید (به مسئله نمونه ۱-۳ نگاه کنید).



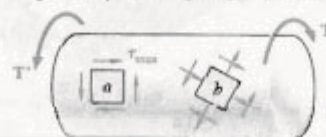
(الف)



(ب)

شکل ۱۷-۳

تا به حال، فقط تنش‌های برشی را در یک شفت تحلیل کرده‌ایم. زیرا وجوه جزء انتخابی به موازات محور شفت یا عمود بر آن بودند (شکل ۶-۳). طبق قسمت‌های ۱-۱ و ۱۲-۱، بر حسب وضعیت جزء انتخابی، ممکن است تنش قائم، برشی یا هر دو به‌وجود آیند. دو جزء a و b را که روی سطح یک شفت دایره‌ای تحت پیچش (شکل ۱۸-۳) قرار دارد در نظر بگیرید. چون وجوه جزء a به موازات و عمود بر محور شفت هستند، فقط تنش برشی $\tau_{\max} = Tc/J$ بر این جزء وارد می‌شود. ولی، جزء b ، که وجوه آن با محور شفت زوایای اختیاری می‌سازند، دارای تنش‌های قائم و برشی هستند.



شکل ۱۸-۳



حل

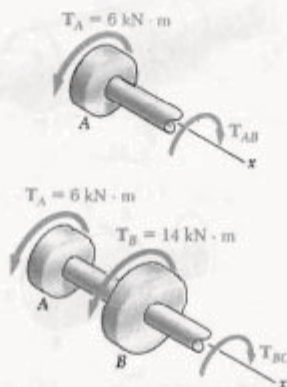
معادله‌های استاتیکی. گشتاور در شفت AB را با T_{AB} نشان می‌دهیم، و این شفت را مقطع می‌زنیم. برای نمودار آزاد نشان داده شده، می‌نویسیم:

$$\sum M_x = 0 : (6 \text{ kN.m}) - T_{AB} = 0 \Rightarrow T_{AB} = 6 \text{ kN.m}$$

حال، شفت BC را مقطع می‌زنیم، و برای نمودار آزاد نشان داده شده می‌نویسیم:

$$\sum M_x = 0 :$$

$$(6 \text{ kN.m}) + (14 \text{ kN.m}) - T_{BC} = 0 \Rightarrow T_{BC} = 20 \text{ kN.m}$$



الف. شفت BC برای این شفت توخالی،

$$J = \frac{\pi}{2} (c_1^4 - c_2^4) = \frac{\pi}{2} [(0.1 \times 60^4 - 0.045^4)] = 13,92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

تنش برشی ماکزیمم بر روی سطح خارجی،

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{T_{BC} c_1}{J} = \frac{(20 \text{ kN.m})(0.1 \times 60 \text{ m})}{13,92 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

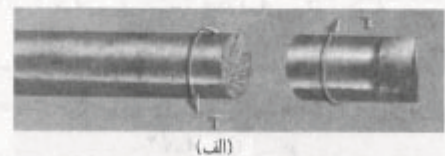
$$\tau_{\max} = 86,7 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

تنش برشی مینیمم تنش‌ها متناسب با فاصله از محور شفت هستند؛ می‌نویسیم:

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{\tau_{\min}}{86,7 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}$$

$$\tau_{\min} = 64,7 \text{ MPa}$$

طبق قسمت ۲-۳، مواد چکش‌خوار معمولاً در برش گسیخته می‌شوند. بنابراین، وقتی نمونه I از ماده چکش‌خواری تحت پیچش قرار می‌گیرد، در امتداد یک صفحه عمود بر محور طولی‌اش گسیخته می‌شود (شکل ۲۱-۳ الف). از طرف دیگر، مواد شکننده در کشش، در مقایسه با برش، ضعیف‌ترند. لذا، وقتی نمونه شکننده‌ای تحت پیچش قرار می‌گیرد، گرایش دارد در امتداد سطوح عمود بر امتداد متناظر با کشش ماکزیمم (یعنی، در امتداد سطوحی که با محور طولی نمونه زاویه 45° دارند) بشکند (شکل ۲۱-۳ ب).



(الف)

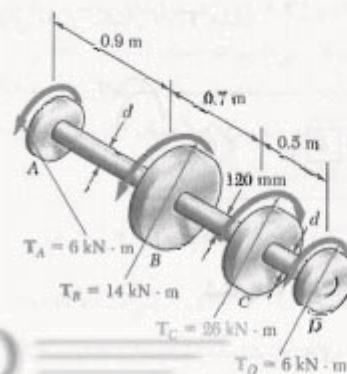


(ب)

شکل ۲۱-۳

مسئله نمونه ۱-۳

شفت BC توخالی و با قطرهای داخلی و خارجی 90 mm و 120 mm است. شفت‌های AB و CD توپر و به قطر d هستند. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) ماکزیمم و مینیمم تنش برشی در شفت BC ، (ب) قطر d ، در صورتی که تنش مجاز برشی در این شفت‌ها 65 MPa باشد.



حل

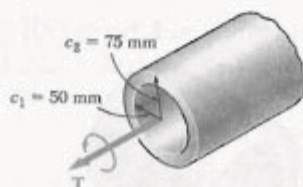
الف- شفت توخالی. برای این شفت،

$$J = \frac{\pi}{2} (c_1^4 - c_2^4) = \frac{\pi}{2} [(75 \text{ mm})^4 - (50 \text{ mm})^4] \\ = 39,88 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

از معادله (۳-۹)،

$$\tau_{\max} = \frac{T c_1}{J} \Rightarrow 84 \text{ MPa} = \frac{T (75 \text{ mm})}{39,88 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$\Rightarrow T = 24,7 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$



ب- شفت توپر با همان وزن. مساحت مقطع عرضی شفت تغییر نمی‌کند و می‌نویسیم:

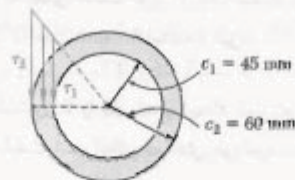
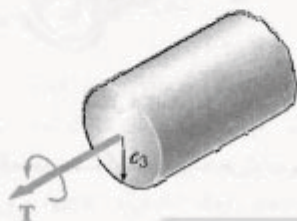
$$A_{(a)} = A_{(b)}$$

$$\pi [(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = \pi c_r^2 \quad c_r = 55,9 \text{ mm}$$

چون $\tau_{\text{all}} = 84 \text{ MPa}$ می‌نویسیم

$$\tau_{\max} = \frac{T c_r}{J} \quad 84 \text{ MPa} = \frac{T (55,9 \text{ mm})}{\frac{\pi}{2} (55,9 \text{ mm})^4}$$

$$\Rightarrow T = 22,1 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

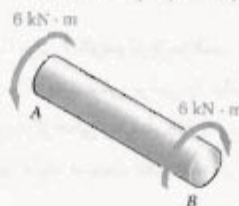


ب. شفت‌های AB و CD. در این شفت‌ها، $T = 6 \text{ kN.m}$ و $\tau_{\text{all}} = 65 \text{ MPa}$. شعاع شفت‌ها را با c نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$\tau = \frac{T c}{J} \Rightarrow 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN.m}) c}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

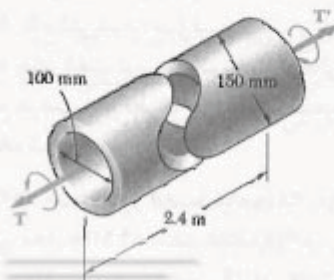
$$c^3 = 58,8 \times 10^{-9} \text{ m}^3 \Rightarrow c = 38,9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 2(38,9 \text{ mm}) \quad d = 77,8 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$



مسئله نمونه ۳-۲

شفت بزرگی که موتوری را به مولدی متصل می‌کند با قطرهای داخلی و خارجی، ۱۰۰ و ۱۵۰ mm است. اگر تنش مجاز برشی ۸۴ MPa باشد، مطلوب‌ست ماکزیمم گشتاوری که: (الف) توسط این شفت می‌توان انتقال داد، (ب) توسط شفت توپری با همان وزن می‌توان انتقال داد، (ج) توسط شفت توخالی با همان وزن و با قطر خارجی ۲۰۰ mm می‌توان انتقال داد.



REB

حل کنید که به جای شفت توپر از یک شفت توخالی با همان جرم و با قطر داخلی ۹۰ mm استفاده شود.

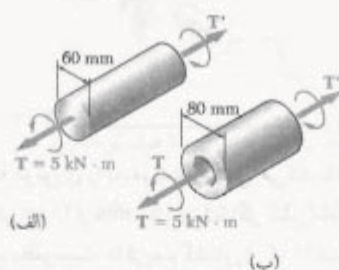
۳-۳ گشتاور T را که باعث ایجاد تنش برشی ماکزیمم 80 MPa در شفت استوانه‌ای فولادی می‌شود بیابید.



شکل ۳-۳ و ۳-۴

۴-۳ ماکزیمم تنش برشی حاصل از گشتاور $T = 65 \text{ kN.m}$ را بیابید.

۵-۳ (الف) برای استوانه توپر به قطر ۶۰ mm و بارگذاری نشان داده شده، ماکزیمم تنش برشی را بیابید. (ب) مطلوبست قطر داخلی استوانه توخالی، با قطر خارجی ۸۰ mm، که به ازای آن تنش ماکزیمم مانند قسمت الف باشد.



شکل ۵-۳

۶-۳ (الف) مطلوبست گشتاوری که می‌توان بر یک شفت توپر با قطر ۲۰ mm وارد کرد بدون اینکه تنش برشی مجاز از 50 MPa بیشتر شود. (ب) قسمت الف را با این فرض حل کنید که به جای شفت توپر از یک شفت توخالی با همان مساحت مقطع عرضی و با قطر داخلی برابر با نصف قطر خارجی‌اش استفاده شود.

۷-۳ محور توپر AB به قطر $d_s = 38 \text{ mm}$ و از فولاد با تنش برشی مجاز 84 MPa است. غلاف CD از برنج با تنش برشی مجاز 50 MPa است. ماکزیمم گشتاور T را که می‌توان در A وارد کرد بیابید.

ج- شفت توخالی با قطر ۲۰۰ mm برای وزن مساوی، مساحت مقطع عرضی تغییر نمی‌کند و می‌نویسیم:

$$A_{(a)} = A_{(c)}$$

$$\pi [(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = \pi [(100 \text{ mm})^2 - c_2^2]$$

$$\Rightarrow c_2 = 82.9 \text{ mm}$$

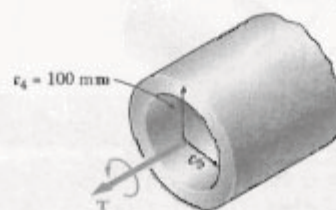
برای $c_2 = 82.9 \text{ mm}$ و $c_1 = 100 \text{ mm}$

$$J = \frac{\pi}{2} [(100 \text{ mm})^4 - (82.9 \text{ mm})^4] = 827.89 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

با $c_1 = 100 \text{ mm}$ و $\tau_{\text{all}} = 84 \text{ MPa}$

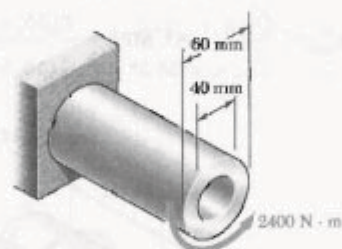
$$\tau_{\text{max}} = \frac{T c_1}{J} \quad 84 \text{ MPa} = \frac{T (100 \text{ mm})}{827.89 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$T = 69.6 \text{ kN.m} \quad \leftarrow$$



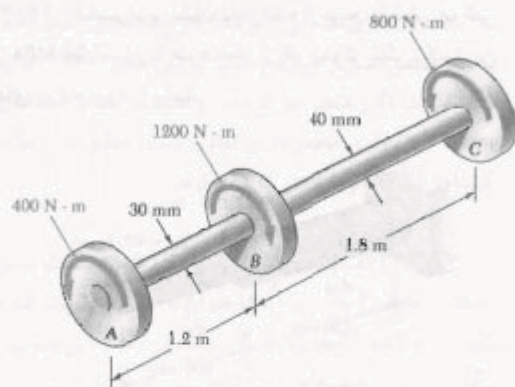
مسائل

۱-۳ (الف) برای شفت توخالی نشان داده شده، ماکزیمم تنش برشی را بیابید. (ب) مطلوبست قطر شفت توپر که به ازای آن ماکزیمم تنش برشی مانند قسمت الف باشد.



شکل ۱-۳

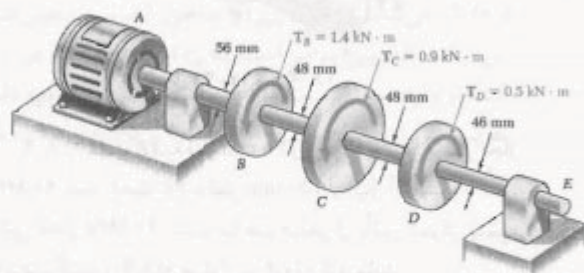
۲-۳ (الف) مطلوبست گشتاوری که می‌توان بر یک شفت توپر با قطر خارجی ۹۰ mm وارد کرد بدون اینکه تنش مجاز برشی از 75 MPa بیشتر شود. (ب) قسمت الف را با این فرض



شکل م ۱۱-۳ و م ۱۲-۳

۱۲-۳ اگر تنش مجاز برشی در هر شفت 60 MPa باشد، مطلوبست کمترین قطر مجاز برای: (الف) شفت AB ، (ب) شفت BC .

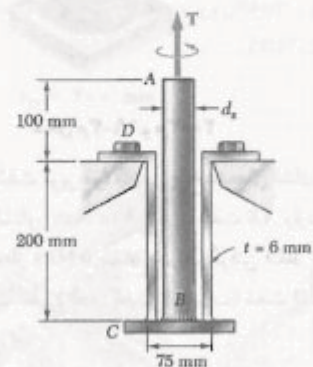
۱۳-۳ در شرایط کارکرد عادی، موتور الکتریکی گشتاور $2.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ را بر شفت AB وارد می‌کند. اگر شفت‌ها توپر باشند، مطلوبست ماکزیمم تنش برشی: (الف) در شفت AB ، (ب) در شفت BC ، (ج) در شفت CD .



شکل م ۱۳-۳

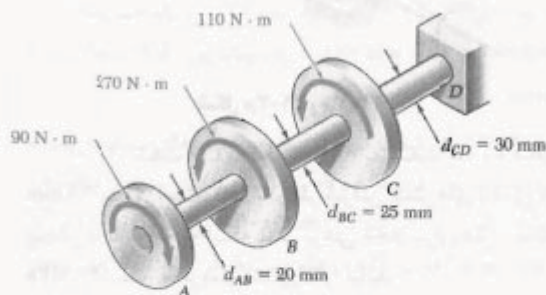
۱۴-۳ برای کاهش جرم کل مجموعه مسئله ۱۳-۳، طرح جدیدی بررسی می‌شود که در آن شفت BC با قطر کمتر گرفته می‌شود. مطلوبست کمترین قطر برای شفت BC که به ازای آن ماکزیمم مقدار تنش برشی در مجموعه افزایش نیابد.

۸-۳ محور توپر AB از فولاد با تنش برشی مجاز 84 MPa است. غلاف CD از برنج با تنش برشی مجاز 50 MPa است. مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاور T که می‌توان در A وارد کرد با این شرط که تنش مجاز برشی در AB از تنش مجاز برشی در CD بیشتر نشود، (ب) قطر d_x محور AB .



شکل م ۷-۳ و م ۸-۳

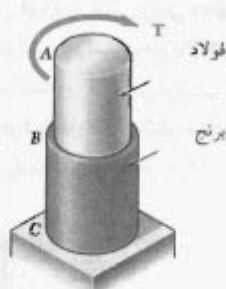
۹-۳ اگر هر یک از شفت‌های AB ، BC و CD به صورت میله‌های استوانه‌ای توپر باشند، مطلوبست: (الف) شفتی که ماکزیمم تنش برشی در آن روی می‌دهد، (ب) مقدار این تنش.



شکل م ۹-۳ و م ۱۰-۳

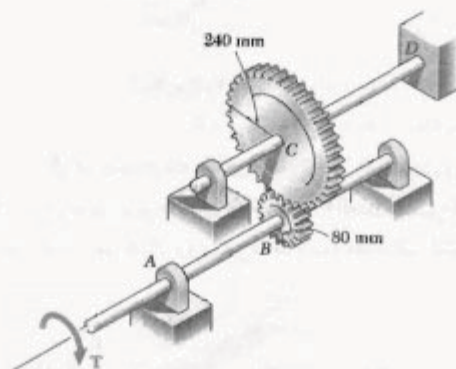
۱۰-۳ اگر سوراخی به قطر 10 mm در هر یک از شفت‌های AB ، BC و CD تعبیه شود، مطلوبست: (الف) شفتی که ماکزیمم تنش برشی در آن روی می‌دهد، (ب) مقدار این تنش.

۱۱-۳ گشتاورهای نشان داده شده بر پولی‌های A ، B و C وارد شده‌اند. اگر شفت‌ها توپر باشند، مطلوبست ماکزیمم تنش برشی: (الف) در شفت AB ، (ب) در شفت BC .



شکل م ۱۹-۳ و م ۲۰-۳

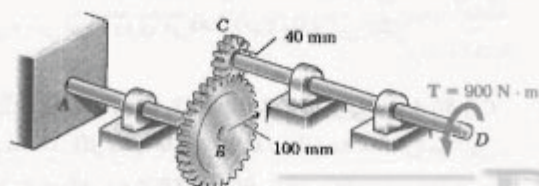
۲۱-۳ دو شفت توپر فولادی با چرخنده‌های نشان داده شده به هم متصل‌اند. گشتاور $T = 900 \text{ N.m}$ بر شفت AB وارد می‌شود. اگر تنش برشی مجاز 5 MPa باشد، بادر نظر گرفتن فقط تنش‌های پیچشی، مطلوب‌ست قطر: (الف) شفت AB ، (ب) شفت CD .



شکل م ۲۱-۳ و م ۲۲-۳

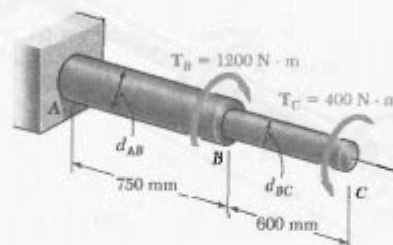
۲۲-۳ شفت CD به قطر 66 mm به شفت AB به قطر 48 mm متصل است. فقط بادر نظر گرفتن تنش‌های ناشی از پیچش و با توجه به اینکه تنش برشی مجاز برای هر شفت 60 MPa است، ماکزیمم گشتاور T را بیابید.

۲۳-۳ گشتاور $T = 900 \text{ N.m}$ مطابق شکل، در D وارد می‌شود. اگر قطر شفت AB برابر با 60 mm و قطر شفت CD برابر با 45 mm باشد، مطلوب‌ست بیشترین تنش برشی در: (الف) شفت AB ، (ب) شفت CD .



شکل م ۲۳-۳ و م ۲۴-۳

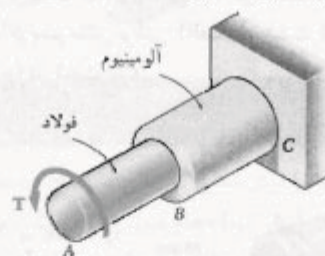
۱۵-۳ شفت توپر نشان داده شده از برنج با تنش برشی مجاز 55 MPa است. با صرف‌نظر از اثر تمرکز تنش، کمترین قطرهای d_{AB} و d_{BC} را بیابید.



شکل م ۱۵-۳ و م ۱۶-۳

۱۶-۳ مسئله ۱۵-۳ را با این فرض حل کنید که جهت T_C برعکس شود.

۱۷-۳ شفت AB از فولاد با تنش برشی 90 MPa و شفت BC از آلومینیوم با تنش برشی مجاز 60 MPa ساخته شده‌است. اگر قطر شفت BC برابر با 50 mm باشد، با صرف‌نظر از تأثیر تمرکز تنش، مطلوب‌ست: (الف) ماکزیمم گشتاور T که می‌توان بر A وارد کرد، (ب) قطر متناظر شفت AB .



شکل م ۱۷-۳ و م ۱۸-۳

۱۸-۳ شفت AB به قطر 30 mm و از فولاد با تنش برشی مجاز 90 MPa است. شفت BC به قطر 50 mm و از آلومینیوم با تنش برشی مجاز 60 MPa است. با صرف‌نظر از تأثیر تمرکز تنش، ماکزیمم گشتاور T را که می‌توان بر A وارد کرد بیابید.

۱۹-۳ تنش مجاز در میله فولادی AB به قطر 36 mm برابر با 100 MPa و در میله برنجی BC به قطر 40 mm برابر با 60 MPa است. با صرف‌نظر از تمرکز تنش، بیشترین گشتاوری را که می‌توان در A وارد کرد بیابید.

۲۰-۳ تنش مجاز در میله فولادی AB برابر با 100 MPa و در میله برنجی BC برابر با 60 MPa است. اگر گشتاور $T = 900 \text{ N.m}$ در A وارد شود، مطلوب‌ست قطر: (الف) میله AB ، (ب) میله BC .

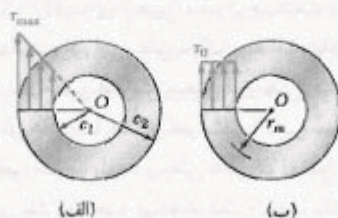
۲۸-۳ دو شفت توپر توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل‌اند و از فولاد با تنش برشی مجاز 50 MPa ساخته شده‌اند. اگر قطر دو شفت، به ترتیب، $d_{BC} = 40 \text{ mm}$ و $d_{EF} = 32 \text{ mm}$ و مجموعه در تعادل باشد، مطلوبست ماکزیمم گشتاور T_C که می‌توان در C وارد کرد.

۲۹-۳ (الف) برای تنش مجاز داده شده، نسبت ماکزیمم گشتاور مجاز T به وزن واحد طول w را برای شفت توخالی نشان داده شده بیابید. (ب) اگر (T/w) مقدار این نسبت برای شفت توپری با شعاع c_1 باشد، نسبت T/w را برای شفت توخالی برحسب (T/w) و c_1/c_2 بیابید.



شکل م-۲۹

۳۰-۳ گرچه توزیع دقیق تنش برشی در یک شفت استوانه‌ای توخالی مانند شکل م-۳۰ الف است، ولی با فرض توزیع یکنواخت تنش روی مساحت A مقطع عرضی (شکل م-۳۰ ب) و نیز با فرض اینکه تمام نیروهای برشی جزئی در فاصله‌ای برابر با شعاع متوسط مقطع عرضی، $r_m = \frac{1}{4}(c_1 + c_2)$ ، از O اثر می‌کنند، می‌توان τ_{max} را به‌طور تقریبی تعیین کرد. این مقدار تقریبی برابر است با $\tau_o = T/A r_m$ که در آن T گشتاور وارده است. نسبت ماکزیمم تنش برشی τ_{max} را به مقدار تقریبی τ_o برای c_1/c_2 برابر با 0.50 و 0.75 و 0.95 و 1 بیابید.

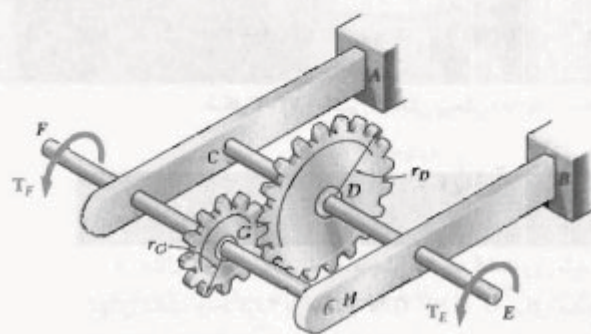


شکل م-۳۰

۲۴-۳ گشتاور $T = 900 \text{ N.m}$ ، مطابق شکل، در D وارد می‌شود. اگر تنش برشی مجاز در هر شفت 50 MPa باشد، مطلوبست قطر: (الف) شفت AB ، (ب) شفت CD .

۲۵-۳ در شرایط عادی، موتور گشتاور $T_F = 150 \text{ N.m}$ را در F وارد می‌کند. اگر تنش برشی مجاز در هر شفت 75 MPa باشد، برای داده‌های زیر، مطلوبست قطر: (الف) شفت CDE ، (ب) شفت FGH .

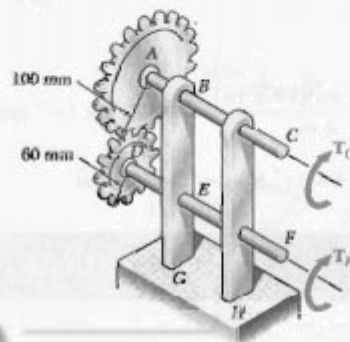
$$r_G = 75 \text{ mm} \quad r_D = 200 \text{ mm}$$



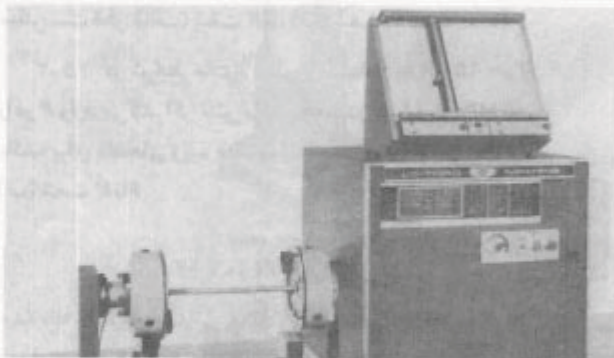
شکل م-۲۵ و م-۲۶

۲۶-۳ در شرایط عادی، موتور گشتاوری T_F را در F وارد می‌کند. شفت‌ها از فولاد با تنش برشی مجاز 85 MPa و با قطرهای $d_{FGH} = 20 \text{ mm}$ و $d_{CDE} = 22 \text{ mm}$ هستند. اگر $r_D = 150 \text{ mm}$ و $r_G = 100 \text{ mm}$ ، بیشترین مقدار مجاز T_F را بیابید.

۲۷-۳ دو شفت توپر توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده بر هم متصل‌اند و از فولاد با تنش برشی مجاز 60 MPa ساخته شده‌اند. اگر گشتاور $T_C = 600 \text{ N.m}$ در C وارد شود و مجموعه در تعادل باشد، مطلوبست قطر: (الف) شفت BC ، (ب) شفت EF .



شکل م-۲۷ و م-۲۸



شکل ۲۳-۳ ماشین آزمایش پیچش.

مثال ۳-۲

در مثال ۳-۱، برای زاویه پیچش 2° چه گشتاوری باید بر انتهای شفت وارد کرد؟ از مقدار $G = 77 \text{ GPa}$ برای مدول صلابت فولاد استفاده کنید.

از معادله (۳-۱۶)،

$$T = \frac{JG}{L} \phi$$

با جایگذاری مقادیر داده شده،

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \quad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

در مثال ۳-۱ ددیم که برای مقطع عرضی داده شده،

$$J = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

بنابراین،

$$T = \frac{JG}{L} \phi =$$

$$\frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}} (34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$\Rightarrow T = 1.829 \times 10^3 \text{ N.m} = 1.829 \text{ kN.m}$$

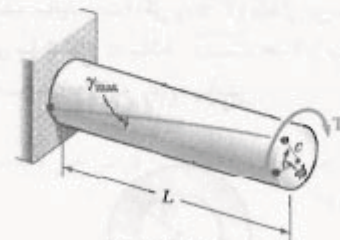
مثال ۳-۳

در مثال‌های ۳-۱ و ۳-۲، اگر تنش برشی وارد بر سطح داخلی شفت فولادی توخالی 70 MPa باشد، زاویه پیچش چقدر است؟

۳-۵ زاویه پیچش در ناحیه الاستیک

در این قسمت، رابطه بین زاویه پیچش ϕ یک شفت دایره‌ای به طول L و شعاع C را که انتهای آزاد آن تحت گشتاور T قرار دارد به دست می‌آوریم (شکل ۳-۲۲). فرض می‌کنیم شفت به طور الاستیک می‌ماند. طبق قسمت ۳-۳، و زاویه پیچش ϕ و ماکزیم کرنش برشی $\gamma_{\max}$ دارای رابطه زیر هستند:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad (3-23)$$



شکل ۲۲-۳

در ناحیه الاستیک، تنش در هیچ نقطه‌ای از تنش تسلیم بیشتر نمی‌شود. طبق قانون هوک، $\gamma_{\max} = \tau_{\max}/G$. از معادله (۳-۹)،

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG} \quad (3-15)$$

ممت راست معادله‌های (۳-۳) و (۳-۱۵) را مساوی هم قرار می‌دهیم و ϕ را حل می‌کنیم:

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (3-16)$$

در رابطه بالا، ϕ برحسب رادیان است. رابطه حاصل نشان می‌دهد که، در ناحیه الاستیک، زاویه پیچش ϕ با گشتاور T وارد بر شفت متناسب است. این موضوع با آزمایشی که در آغاز قسمت ۳-۳ به آن اشاره شد هماهنگ است.

از معادله (۳-۱۶) برای تعیین مدول صلابت یک ماده می‌توان استفاده کرد. برای این منظور، یک میله استوانه‌ای با قطر و طول معلوم را در ماشین آزمایش پیچش قرار می‌دهند (شکل ۳-۲۳). گشتاورهایی با مقدار افزایشی T بر نمونه وارد می‌کنند، و مقادیر متناظر زاویه پیچش ϕ در طول نمونه را ثبت می‌کنند. تا وقتی تنش موجود بیشتر از تنش تسلیم نشده است، نقاطی که با ترسیم ϕ برحسب T به دست می‌آیند روی یک خط راست قرار دارند. شیب این خط کمیت G/L را نشان می‌دهد و از روی آن می‌توان G را محاسبه کرد.



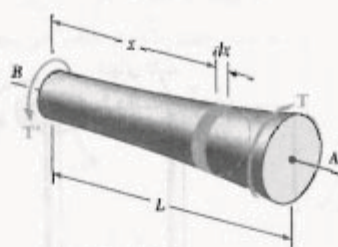
گشتاور داخلی T_i در هر قسمت شفت با عبور یک مقطع از آن قسمت و با ترسیم نمودار آزاد قسمتی از شفت که در یک طرف آن مقطع است به دست می‌آید. این روش، که قبلاً در قسمت ۳-۴ به کار رفت و در شکل ۱۷-۳ نشان داده شده است، در مسئله نمونه ۳-۳ به کار می‌رود.

در یک شفت با مقطع عرضی متغیر دایره‌ای (شکل ۲۵-۳)، فرمول (۱۶-۳) را برای دیسکی با ضخامت dx می‌توان به کار برد. زاویه چرخش یک وجه دیسک نسبت به وجه دیگر چنین است:

$$d\phi = \frac{T dx}{JG}$$

که در آن J تابعی از x است. با انتگرال‌گیری برحسب x از ۰ تا L ، زاویه کل پیچش شفت را می‌یابیم:

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{JG} \quad (۱۸-۳)$$



شکل ۲۵-۳

شفت نشان داده شده در شکل ۲۲-۳، که برای استنتاج فرمول (۱۶-۳) به کار رفت و شفت شکل ۱۶-۳ که در مثال‌های ۲-۳ و ۳-۳ بررسی شد، هر دو از یک انتها به تکیه‌گاه ثابتی متصل‌اند. لذا، در هر دو حالت، زاویه پیچش ϕ با زاویه دوران انتهای آزاد شفت برابر بود. اگر هر دو انتهای شفت بچرخند، زاویه پیچش شفت برابر است با زاویه چرخش یک انتهای شفت نسبت به انتهای دیگر. مثلاً، مجموعه شکل ۲۶-۳ الف را در نظر بگیرید. این مجموعه متشکل است از شفت‌های الاستیک AD و BE ، هر یک به طول L ، شعاع c و مدول صلابت G ، که به چرخ‌دنده‌هایی متصل‌اند (این چرخ‌دنده‌ها در نقطه C درگیر شده‌اند). با اعمال گشتاور T بر B (شکل ۲۶-۳ ب)، هر دو شفت می‌پیچند. چون انتهای D شفت AD ثابت است، زاویه پیچش AD با زاویه دوران انتهای A

ابتدا، از معادله (۱۰-۳)، گشتاور T متناظر با مقدار داده شده τ را می‌یابیم. سپس، با استفاده از معادله (۱۶-۳)، زاویه پیچش ϕ را به دست می‌آوریم.

روش دیگر: ابتدا، با استفاده از قانون هوک، کرنش برشی را در سطح داخلی شفت محاسبه می‌کنیم:

$$\gamma_{\min} = \frac{r_{\min}}{G} = \frac{V_0 \times 10^6 \text{ Pa}}{77 \times 10^9 \text{ Pa}} = 9.9 \times 10^{-6}$$

از معادله (۲-۳)،

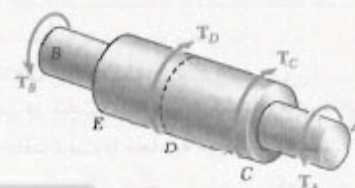
$$\phi = \frac{L\gamma_{\min}}{c_1} = \frac{1500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} (9.9 \times 10^{-6}) = 68.7 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

برحسب درجه،

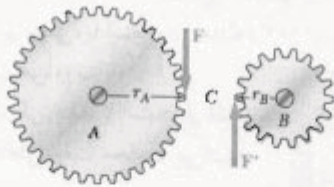
$$\phi = (68.7 \times 10^{-3} \text{ rad}) \left(\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \right) = 3.91^\circ$$

فرمول (۱۶-۳) را فقط وقتی می‌توان به کار برد که شفت همگن (با G ثابت) دارای مقطع عرضی یکنواخت و فقط در انتها بارگذاری شده باشد. اگر شفت در نقاطی غیر از دو انتها تحت گشتاور قرار گیرد یا اگر از قسمت‌های مختلف با مقاطع عرضی گوناگون و از مواد مختلف تشکیل شده باشد، آن را باید به قسمت‌هایی تقسیم کرد که هر کدام شرایط مورد نیاز را برای کاربرد فرمول (۱۶-۳) برقرار کنند. مثلاً در شفت AB در شکل ۲۴-۳، چهار قسمت مختلف زیر را باید در نظر گرفت: AC ، CD ، DE و EB . زاویه کل پیچش شفت (یعنی، زاویه چرخش انتهای A نسبت به انتهای B) از جمع جبری زوایای پیچش هر قسمت به دست می‌آید. اگر گشتاور داخلی، طول، ممان اینرسی قطبی مقطع عرضی و مدول صلابت قسمت i ام را، به ترتیب، با G_i ، J_i ، L_i ، T_i نشان دهیم، زاویه کل پیچش شفت چنین است:

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad (۱۷-۳)$$



شکل ۲۴-۳



شکل ۲۷-۳

چون انتهای D از شفت AD ثابت است، زاویه چرخش چرخ‌دنده A با زاویه پیچش شفت برابر است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi_A = \frac{T_{AD} L}{JG} = \frac{2 TL}{JG}$$

دو قوس CC' و CC'' در شکل ۲۶-۳ ب برابرند، و می‌نویسم، در نتیجه،

$$\phi_B = (r_A/r_B) \phi_A = 2 \phi_A$$

بنابراین،

$$\phi_B = 2 \phi_A = \frac{4 TL}{JG}$$

حال، شفت BE را در نظر می‌گیریم. زاویه پیچش آن برابر است با زاویه چرخش انتهای E نسبت به انتهای B . لذا،

$$\phi_{E/B} = \frac{T_{BE} L}{JG} = \frac{TL}{JG}$$

زاویه چرخش انتهای E از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{E/B}$$

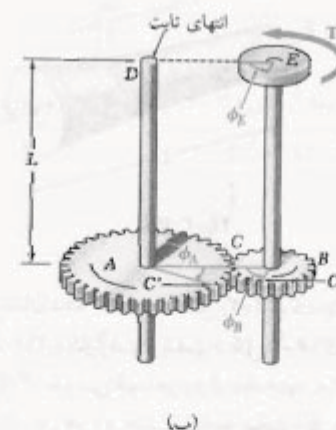
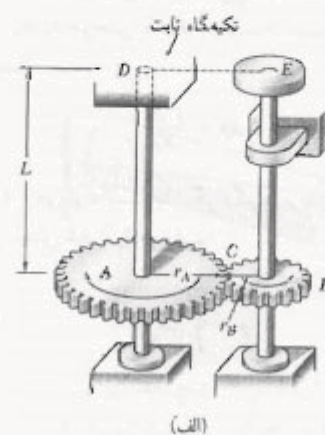
$$= \frac{4 TL}{JG} + \frac{TL}{JG} = \frac{5 TL}{JG}$$

۳-۶ شفت‌های نامعین استاتیکی

برای تعیین تنش در شفت، ابتدا باید گشتاورهای داخلی در قسمت‌های مختلف شفت را محاسبه می‌کردیم (قسمت ۳-۲). برای این منظور، نمودار آزاد قسمتی از شفت را که در یک طرف مقطع داده شده قرار دارد رسم می‌کردیم و مجموع گشتاورهای

برابر است. از طرف دیگر، چون هر دو انتهای شفت BE می‌چرخند، زاویه پیچش BE برابر است با اختلاف زوایای چرخش ϕ_E و ϕ_B ؛ یعنی، زاویه پیچش با زاویه چرخش انتهای E نسبت به انتهای B برابر است. اگر این زاویه دوران نسبی را با $\phi_{E/B}$ نشان دهیم، داریم:

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

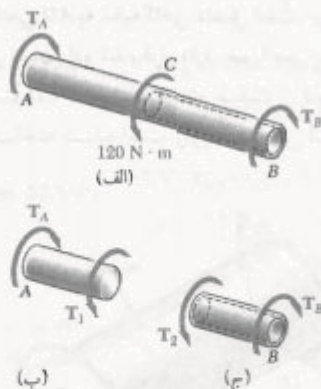


شکل ۲۶-۳

مسئله ۳-۴

در شکل ۲۶-۳، $r_A = 2r_B$. زاویه دوران انتهای E از شفت BE را بر اثر اعمال گشتاور T بیابید.

ابتدا، گشتاور T_{AD} وارد بر شفت AD را می‌یابیم. با توجه به اینکه نیروهای مساوی و متضاد F و F' در C بر دو چرخ‌دنده وارد می‌شوند (شکل ۲۷-۳) و $r_A = 2r_B$ ، گشتاور وارد بر شفت AD دو برابر گشتاور وارد بر شفت BE است؛ یعنی، $T_{AD} = 2T$.



شکل ۲۹-۳

از نمودار آزاد قسمت کوچکی از شفت، شامل انتهای A (شکل ۲۹-۳ ب)، دیده می‌شود که گشتاور داخلی T_1 در AC با T_A برابر است؛ از نمودار آزاد قسمت کوچکی از شفت، شامل انتهای B (شکل ۲۹-۳ ج)، دیده می‌شود که گشتاور داخلی T_1 در CB با T_B برابر است. از معادله (۱۶-۳) و با توجه به اینکه قسمت‌های AC و CB شفت در جهت‌های مخالف می‌پیچند، داریم

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_t G} - \frac{T_B L_2}{J_t G} = 0$$

با حل T_B ،

$$T_B = \frac{L_1 J_t}{L_2 J_t} T_A$$

با جایگذاری داده‌های عددی،

$$L_1 = L_2 = 125 \text{ mm}$$

$$J_t = \frac{1}{2} \pi (0.011 \text{ m})^4 = 230 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_t = \frac{1}{2} \pi [(0.011 \text{ m})^4 - (0.008 \text{ m})^4] = 165.6 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

در نتیجه،

$$T_B = 0.72 T_A$$

با جایگذاری این عبارت در معادله تعادل، داریم:

$$1.72 T_A = 120 \text{ N.m}$$

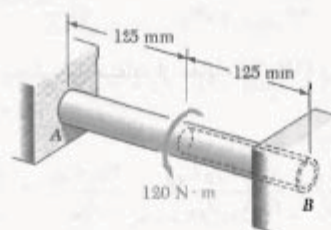
$$\Rightarrow T_A = 69.8 \text{ N.m} \quad T_B = 50.4 \text{ N.m}$$

وارد بر آن قسمت را مساوی صفر قرار می‌دادیم. به این ترتیب، گشتاورهای داخلی فوق‌الذکر را صرفاً با استاتیک به‌دست می‌آوردیم.

گاهی، گشتاورهای داخلی را صرفاً با استاتیک نمی‌توان به‌دست آورد. در این موارد، از روابطی که شامل تغییرشکل‌های شفت هستند و از هندسه مسئله به‌دست می‌آیند، همراه با معادله‌های تعادل، باید استفاده کرد. از این‌رو، شفت را نامعین استاتیکی می‌گویند. در مثال زیر، و نیز در مسئله نمونه ۳-۵، شفت نامعین استاتیکی تحلیل شده است.

مثال ۳-۵

شفت دایره‌ای AB متشکل است از یک استوانه فولادی به طول ۲۵۰ mm و به قطر ۲۲ mm که در آن سوراخی به طول ۱۲۵ mm و به قطر ۱۶ mm تعبیه شده است. شفت از دو انتها ثابت است، و گشتاور ۱۲۰ N.m در وسط آن وارد می‌شود (شکل ۲۸-۳). گشتاور وارده از تکیه‌گاه‌ها را بیابید.



شکل ۲۸-۳

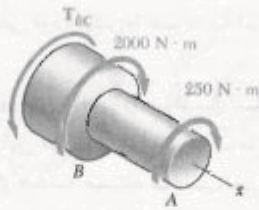
نمودار آزاد شفت را رسم می‌کنیم و گشتاورهای وارده از تکیه‌گاه‌ها را با T_A و T_B نشان می‌دهیم (شکل ۲۹-۳ الف). با توجه به تعادل شفت،

$$T_A + T_B = 120 \text{ N.m}$$

چون این معادله برای تعیین دو مجهول T_A و T_B کافی نیست، شفت نامعین استاتیکی است.

چون شفت AB از دو انتها مقید است. لذا، زاویه کل پیچش آن صفر است. با این معلومات می‌توان گشتاورهای T_A و T_B را به‌دست آورد. زوایای پیچش قسمت‌های AC و CB را، به‌ترتیب، با ϕ_1 و ϕ_2 نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

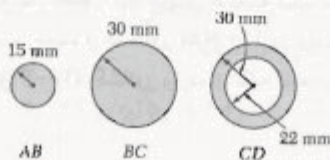


ممان اینرسی قطبی:

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.015 \text{ m})^4 = 0.000000795 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.03 \text{ m})^4 = 1.272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{2} [(0.03 \text{ m})^4 - (0.022 \text{ m})^4] = 0.000000904 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



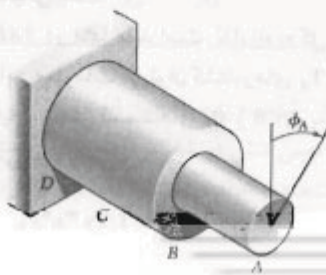
زاویه پیچش، با استفاده از معادله (۱۷-۳) و با توجه به $G = 77 \text{ GPa}$

$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G} \left(\frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{J_{CD}} \right)$$

$$\phi_A = \frac{1}{77 \text{ GPa}} \left[\frac{(2000 \text{ N.m})(0.6 \text{ m})}{0.000000795 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2250 \text{ N.m})(0.2 \text{ m})}{1.272 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2250 \text{ N.m})(0.4 \text{ m})}{0.000000904 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \right]$$

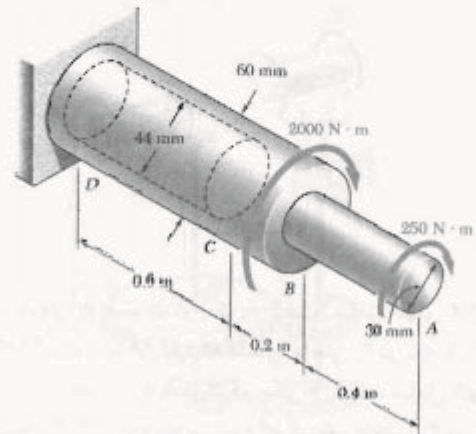
$$= 0.001634 + 0.000459 + 0.001939 = 0.00403 \text{ rad}$$

$$\phi_A = (0.00403 \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \Rightarrow \phi_A = 2.31^\circ$$



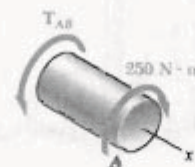
مسئله نمونه ۳-۳

قاعده D از شفت افقی AD به تکیه گاهی متصل است. این شفت تحت گشتاورهای نشان داده شده قرار دارد. سوراخی به قطر 44 mm در قسمت CD مته شده است. شفت از فولاد، با $G = 77 \text{ GPa}$ ساخته شده است. زاویه پیچش انتهای A را بیابید.



حل

چون شفت از سه قسمت AB ، BC و CD ، هر یک با مقطع عرضی یکنواخت و با گشتاور داخلی ثابت، تشکیل شده است، معادله (۱۷-۳) را می توان به کار برد.



استاتیک. با عبور یک مقطع در شفت بین نقاط A و B ، و با استفاده از نمودار آزاد نشان داده شده، داریم:

$$\sum M_x = 0: (250 \text{ N.m}) - T_{AB} = 0 \Rightarrow T_{AB} = 250 \text{ N.m}$$

با عبور یک مقطع جدید بین B و C ، می نویسیم:

$$\sum M_x = 0:$$

$$(250 \text{ N.m}) + (2000 \text{ N.m}) - T_{BC} = 0 \Rightarrow T_{BC} = 2250 \text{ N.m}$$

چون هیچ گشتاوری در C وارد نمی شود،

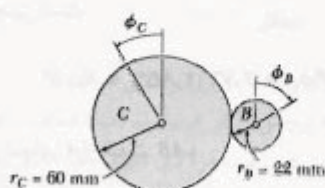
$$T_{CD} = T_{BC} = 2250 \text{ N.m}$$

$$T_0 = 7471 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$

شفت CD از (۱)، $T_{CD} = 2.73 T_0$ ، با $c = 12.5 \text{ mm}$ و $\tau_{all} = 55 \text{ MPa}$ داریم:

$$\tau = \frac{T_{CD} c}{J} \Rightarrow 55 \text{ MPa} = \frac{2.73 T_0 (12.5 \times 10^{-3} \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (12.5 \times 10^{-3} \text{ m})^4}$$

$$T_0 = 6178 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$



ماکزیمم گشتاور مجاز. مقدار کوچکتر را برای T_0 انتخاب می‌کنیم:

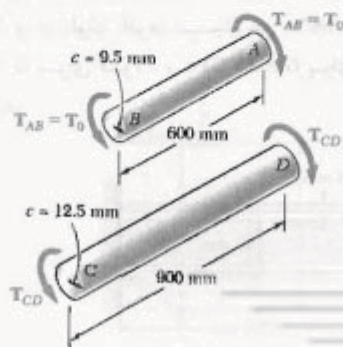
$$T_0 = 6178 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$

ب. زاویه چرخش انتهای A . ابتدا، زاویه پیش هر شفت را محاسبه می‌کنیم.

شفت AB . برای $T_{AB} = T_0 = 6178 \text{ N.m}$

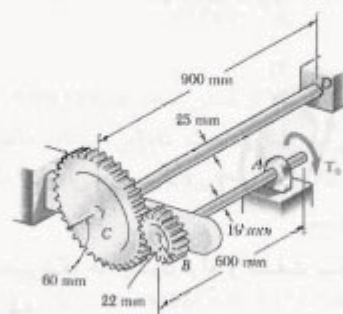
$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB} L}{JG} = \frac{(6178 \text{ N.m})(0.6 \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (0.0095 \text{ m})^4 (77 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$= 0.0276 \text{ rad} = 2.15^\circ$$



مسئله نمونه ۳-۴

دو شفت توپر فولادی توسط چرخ‌دنده‌هایی به هم متصل شده‌اند. اگر برای هر شفت $G = 77 \text{ GPa}$ و تنش برشی مجاز 55 MPa باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاور T_0 که می‌توان بر انتهای A از شفت AB وارد کرد؛ (ب) زاویه دوران انتهای A .



حل

استاتیک. مقدار نیروی مماسی بین دندانه‌های چرخ‌دنده را با F نشان می‌دهیم، و می‌نویسیم

$$\text{چرخ‌دنده } B: \sum M_B = 0: F(22 \text{ mm}) - T_0 = 0$$

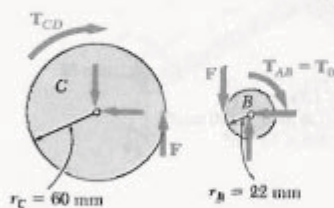
$$\text{چرخ‌دنده } C: \sum M_C = 0: F(60 \text{ mm}) - T_{CD} = 0$$

$$T_{CD} = 2.73 T_0 \quad (1)$$

سینماتیک. حرکت‌های محیطی چرخ‌دنده‌ها برابرند، و می‌نویسیم:

$$r_B \phi_B = r_C \phi_C \Rightarrow \phi_B = \phi_C \frac{r_C}{r_B} = \phi_C \frac{60 \text{ mm}}{22 \text{ mm}}$$

$$= 2.73 \phi_C \quad (2)$$



الف. گشتاور T_0

شفت AB . با $c = 9.5 \text{ mm}$ ، $T_{AB} = T_0$ و ماکزیمم تنش مجاز برشی 55 MPa ، می‌نویسیم:

$$\tau = \frac{T_{AB} c}{J} \Rightarrow 55 \text{ MPa} = \frac{T_0 (9.5 \times 10^{-3} \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (9.5 \times 10^{-3} \text{ m})^4}$$

REB

حل

استاتیکی. نمودار آزاد دیسک. گشتاور وارده از لوله بر دیسک را با T_1 و گشتاور وارده از شفت را با T_2 نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$T_o = T_1 + T_2 \quad (1)$$

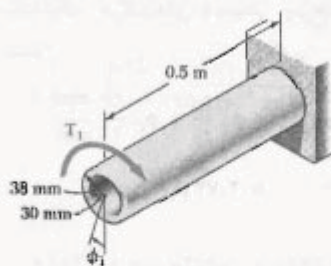


تغییر شکل‌ها. چون لوله و شفت به دیسک صلب متصل‌اند،

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$

$$\frac{T_1 (0.5 \text{ m})}{(7.0 \times 10^{-8} \text{ m}^4)(27 \text{ GPa})} = \frac{T_2 (0.5 \text{ m})}{(0.614 \times 10^{-8} \text{ m}^4)(77 \text{ GPa})}$$

$$T_2 = 0.874 T_1 \quad (2)$$



$$\begin{aligned} G_1 &= 27 \text{ GPa} \\ J_1 &= \frac{\pi}{2} [(38 \text{ mm})^4 - (30 \text{ mm})^4] \\ &= 2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

تنش‌های برشی. فرض می‌کنیم که شرط $\tau_{\text{آلومینیوم}} \leq 70 \text{ MPa}$ تعیین‌کننده است. برای لوله آلومینیومی،

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{آلومینیوم}} J_1}{c_1} = \frac{(70 \text{ MPa})(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.019 \text{ m}} = 7.44 \text{ N.m}$$

شفت CD.

$$T_{CD} = 2.72 T_o = 2.72 (61.8 \text{ N.m}) = 168.7 \text{ N.m}$$

$$\begin{aligned} \phi_{CD} &= \frac{T_{CD} L}{JG} = \frac{(168.7 \text{ N.m})(0.9 \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (0.0125 \text{ m})^4 (77 \times 10^9 \text{ Pa})} \\ &= 0.014 \text{ rad} = 0.8^\circ \end{aligned}$$

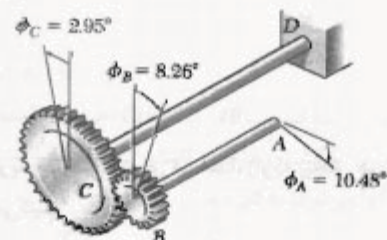
چون انتهای D از شفت CD ثابت است، $\phi_C = \phi_{CD} = 0.8^\circ$ با استفاده از (2)، زاویه چرخش چرخ‌دنده B چنین است:

$$\phi_B = 2.72 \phi_C = 2.72 (0.8^\circ) = 2.18^\circ$$

برای انتهای A از شفت AB،

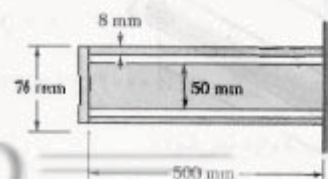
$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 2.18^\circ + 0.8^\circ$$

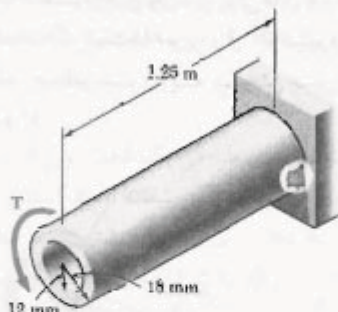
$$\phi_A = 2.98^\circ \quad \blacktriangleleft$$



مسئله نمونه ۵-۳

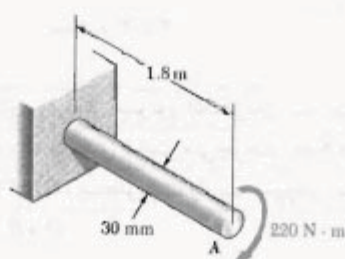
یک شفت فولادی و یک لوله آلومینیومی به یک تکیه‌گاه ثابت و یک دیسک صلب، با مقطع عرضی نشان داده شده، متصل شده‌اند. اگر تنش‌های اولیه صفر باشند، ماکزیمم گشتاور T_o را که می‌توان بر دیسک وارد کرد بیابید. تنش مجاز در شفت فولادی 120 MPa و در لوله آلومینیومی 70 MPa است. $G = 77 \text{ GPa}$ برای فولاد و $G = 27 \text{ GPa}$ برای آلومینیوم استفاده کنید.





شکل م ۳۱-۳

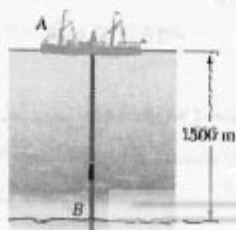
۳۲-۳ (الف) برای شفت توپر فولادی نشان داده شده $(G = 77 \text{ GPa})$ ، زاویه پیچش را در A بیابید. (ب) قسمت الف را با این فرض حل کنید که شفت فولادی دارای قطر خارجی ۳۰ mm و قطر داخلی ۲۰ mm است.



شکل م ۳۲-۳

۳۳-۳ مطلوب است ماکزیمم قطر مجاز میله فولادی $(G = 77 \text{ GPa})$ به طول ۳ m در صورتی که بخواهیم تنش برشی ایجاد شده در میله بر اثر پیچش ۳۰۰ MPa از ۸۰ MPa بیشتر نشود.

۳۴-۳ یک کشتی، از نقطه A ، عملیات حفاری نفت را از کف اقیانوسی به عمق ۵۰۰۰ ft شروع کرده است. اگر نوک لوله متع فولادی $(G = 77 \text{ GPa})$ به قطر ۲۰۰ mm قبل از شروع عملیات سرشته B دو دور کامل بزند، ماکزیمم تنش برشی در لوله را بر اثر پیچش بیابید.



شکل م ۳۴-۳

با استفاده از معادله (۲)، مقدار T_r را محاسبه می‌کنیم و سپس ماکزیمم تنش برشی را در شفت فولادی می‌یابیم.

$$T_r = 0.874 T_1 = 0.874 (3690) = 3225 \text{ N.m}$$

$$\tau_{\text{در } r} = \frac{T_r c_r}{J_r} = \frac{(3225 \text{ N.m})(0.025 \text{ m})}{0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 131.3 \text{ MPa}$$

دیده می‌شود که مقدار بالا از تنش مجاز فولاد (۱۲۰ MPa) بیشتر است؛ لذا، فرض ما اشتباه است. بنابراین، گشتاور ماکزیمم T_0 را با استفاده از $\tau_{\text{در } r} = 120 \text{ MPa}$ به دست می‌آوریم. ابتدا، گشتاور T_r را می‌یابیم:

$$T_r = \frac{\tau_{\text{در } r} J_r}{c_r} = \frac{(120 \text{ MPa})(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.025 \text{ m}} = 2950 \text{ N.m}$$

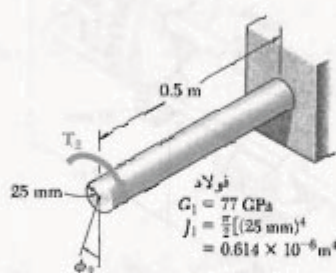
از معادله (۲)،

$$2950 \text{ N.m} = 0.874 T_1 \Rightarrow T_1 = 3375 \text{ N.m}$$

با استفاده از معادله (۱)، ماکزیمم گشتاور مجاز را به دست می‌آوریم:

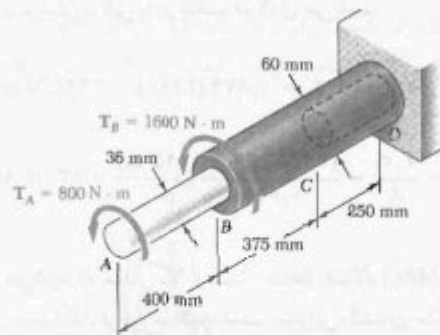
$$T_0 = T_1 + T_r = 3375 \text{ N.m} + 2950 \text{ N.m}$$

$$T_0 = 6.325 \text{ kN.m} \leftarrow$$



مسائل

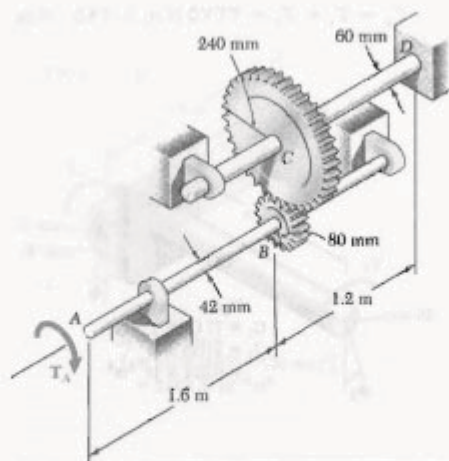
۳۱-۳ برای شفت آلومینیومی نشان داده شده $(G = 27 \text{ GPa})$ ، مطلوب است: (الف) گشتاور T که باعث زاویه پیچش ۴° می‌شود، (ب) زاویه پیچش که همان گشتاور T را در شفت توپر استوانه‌ای با همان طول و مقطع عرضی ایجاد می‌کند.



شکل م ۳۷-۳

۳۸-۳ مسئله ۳۷-۳ را با این فرض حل کنید که قسمت BD به صورت یک میله توپر به قطر 60 mm و به طول 625 mm باشد.

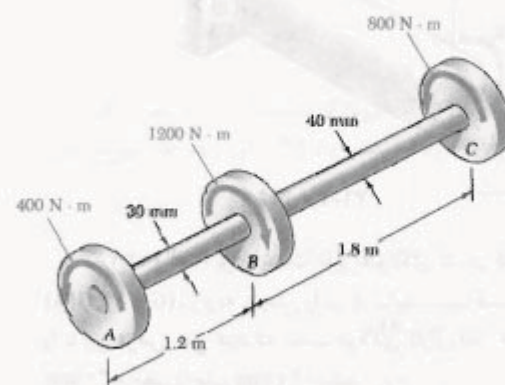
۳۹-۳ دو شفت توپر فولادی ($G = 77 \text{ GPa}$) توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل شده‌اند. زاویه چرخش انتهای A را بر اثر اعمال $T_A = 1200 \text{ N}\cdot\text{m}$ بیابید.



شکل م ۳۹-۳

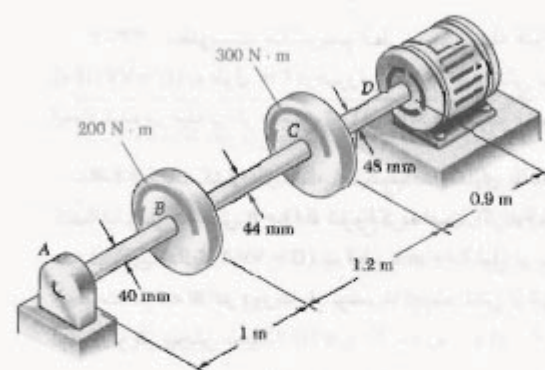
۴۰-۳ مسئله ۳۹-۳ را با این فرض حل کنید که قطر هر شفت 52 mm است.

۳۵-۳ گشتاورهای وارده بر پولی‌های A و B در شکل نشان داده شده‌اند. اگر شفت‌ها توپر و از آلومینیوم ($G = 29 \text{ GPa}$) باشند، مطلوب است زاویه پیچش بین: (الف) A و B ، (ب) A و C .



شکل م ۳۵-۳

۳۶-۳ گشتاور وارده از موتور الکتریکی به شفت آلومینیومی $ABCD$ ، که با نندی ثابت می‌چرخد، $500 \text{ N}\cdot\text{m}$ است. اگر $G = 27 \text{ GPa}$ ، مطلوب است زاویه پیچش بین: (الف) B و C ، (ب) B و D .



شکل م ۳۶-۳

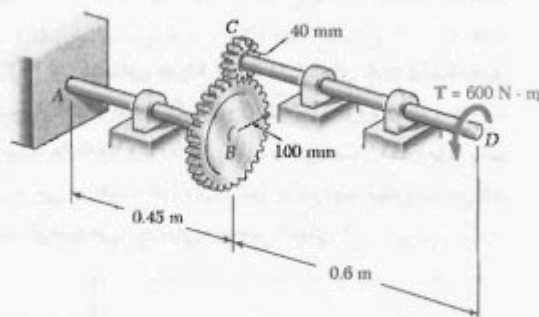
۳۷-۳ میله آلومینیومی AB ($G = 27 \text{ GPa}$) به میله برنجی BD ($G = 39 \text{ GPa}$) متصل است. اگر قسمت CD از میله برنجی توخالی و دارای قطر داخلی 40 mm باشد، زاویه پیچش A را بیابید.

۴۴-۳ مسئله ۳-۴۱ را با این فرض حل کنید که شعاع چرخ‌دنده B برابر با 150 mm و شعاع چرخ‌دنده E برابر با 110 mm باشد.

۴۵-۳ مشخصه‌های طراحی یک شفت توپر استوانه‌ای به طول 2 m ایجاب می‌کند که وقتی شفت تحت گشتاور 7 kN.m قرار می‌گیرد، زاویه پیچش آن از 0.5° بیشتر نشود. مطلوب است قطر شفت، در صورتی که شفت: (الف) از فولاد با تنش برشی مجاز 87 MPa و مدول صلابت 77 GPa تشکیل شده باشد.

۴۶-۳ مشخصه‌های طراحی یک شفت توپر استوانه‌ای به طول 1.2 m ایجاب می‌کند که وقتی شفت تحت گشتاور 750 N.m قرار می‌گیرد، زاویه پیچش آن از 4° بیشتر نشود. مطلوب است قطر شفت، در صورتی که شفت از فولاد با تنش برشی مجاز 90 MPa و مدول صلابت 77.2 GPa تشکیل شده باشد.

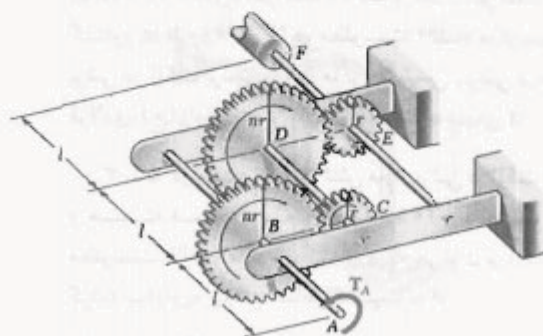
۴۷-۳ طراحی سیستم چرخ‌دنده-شفت نشان داده شده ایجاب می‌کند که شفت‌های فولادی AB و CD دارای قطر یکسان باشند، و نیز $\tau_{\max} \leq 55 \text{ MPa}$ و زاویه چرخش انتهای D از شفت CD بیشتر از 2° نشود. اگر $G = 77 \text{ GPa}$ ، قطر مورد نیاز شفت‌ها را بیابید.



شکل م ۴۷-۳ و م ۴۸-۳

۴۸-۳ در مجموعه نشان داده شده، قطر شفت‌ها عبارتند از $d_{AB} = 50 \text{ mm}$ و $d_{CD} = 38 \text{ mm}$. اگر $G = 77 \text{ GPa}$ ، زاویه چرخش انتهای D را بیابید.

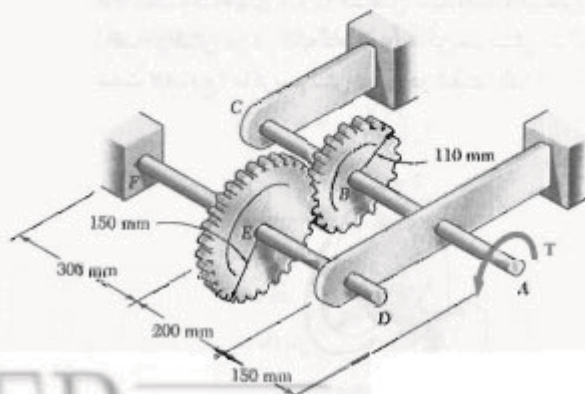
۴۹-۳ کدگذار F ، که برای ثبت دیجیتالی چرخش شفت A به کار می‌رود، توسط زنجیره چرخ‌دنده‌ای نشان داده شده به این شفت متصل شده است. زنجیره از چهار چرخ‌دنده و سه شفت توپر فولادی، هر کدام به قطر d ، تشکیل شده است. دو تا از چرخ‌دنده‌ها به شعاع r و دو تای دیگر به شعاع nr هستند. اگر از چرخش کدگذار F جلوگیری شود، زاویه چرخش انتهای A را بر حسب J, G, l, T و n بیابید.



شکل م ۴۹-۳

۴۲-۳ برای زنجیره چرخ‌دنده‌ای در مسئله ۳-۴۳، زاویه چرخش انتهای A را برای $T = 0.75 \text{ N.m}$ ، $l = 60 \text{ mm}$ ، $G = 77 \text{ GPa}$ و $d = 4 \text{ mm}$ و $n = 2$ بیابید.

۴۳-۳ دو شفت، هر یک به قطر 22 mm ، توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل شده‌اند. اگر $G = 77 \text{ GPa}$ و شفت F ثابت باشد، زاویه چرخش انتهای A را بر اثر اعمال گشتاور 130 N.m بیابید.



شکل م ۴۳-۳

۵۳-۳ شفت مرکب نشان داده شده با اعمال گشتاور T در انتهای A می‌پیچد. اگر مدول صلابت فولاد و آلومینیوم، به ترتیب، ۷۷ GPa و ۲۷ GPa باشد، مطلوبست بیشترین زاویه چرخش انتهای A در صورتیکه بخواهیم تنش‌ها از مقادیر مجاز $\tau_{\text{فولاد}} = ۶۰ \text{ MPa}$ و $\tau_{\text{آلومینیوم}} = ۴۵ \text{ MPa}$ بیشتر نشوند.

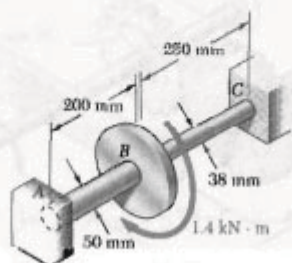
۵۴-۳ شفت مرکب نشان داده شده متشکل است از ژاکت برنجی ($G = ۳۹ \text{ GPa}$) به ضخامت ۵ mm که به هسته فولادی ($G = ۷۷.۲ \text{ GPa}$) به قطر ۴۰ mm متصل است. اگر شفت تحت گشتاور ۶۰۰ N.m قرار گیرد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در ژاکت برنجی، (ب) ماکزیمم تنش برشی در هسته فولادی، (ج) زاویه پیچش انتهای B نسبت به انتهای A .

۵۵-۳ در مسئله ۵۴-۳، تنش مجاز برشی در ژاکت برنجی و هسته فولادی، به ترتیب، ۲۰ MPa و ۴۵ MPa است. مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاوری که می‌توان بر ژاکت وارد کرد، (ب) زاویه پیچش متناظر B نسبت به A



شکل م ۵۴-۳ و م ۵۵-۳

۵۶-۳ دو شفت توپر فولادی ($G = ۷۷.۲ \text{ GPa}$) به دپسک B و تکیه‌گاههای A و C متصل شده‌اند، مطلوبست: (الف) واکنش در هر تکیه‌گاه، (ب) ماکزیمم تنش برشی در شفت AB ، (ج) ماکزیمم تنش برشی در شفت BC .

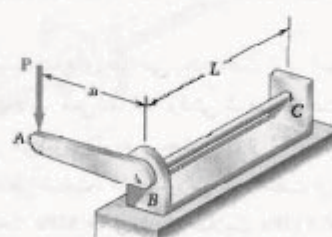


شکل م ۵۶-۳

۴۹-۳ میله توپر استوانه‌ای BC به بازوی صلب AB و به تکیه‌گاه ثابت C متصل است. نیروی عمودی P که در A وارد می‌شود تغییر شکل کوچک Δ را در نقطه A ایجاد می‌کند. نشان دهید که ماکزیمم تنش برشی در میله عبارت است از:

$$\tau = \frac{Gd}{4La} \Delta$$

که در آن d قطر میله و G مدول صلابت است.



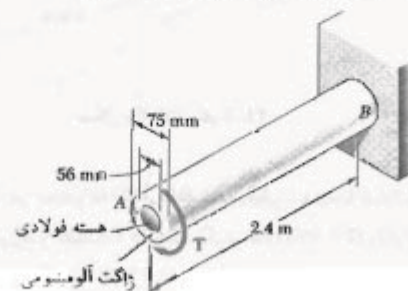
شکل م ۴۹-۳، م ۵۰-۳ و م ۵۱-۳

۵۰-۳ و ۵۱-۳ میله توپر استوانه BC به طول $L = ۰.۶ \text{ m}$ به بازوی صلب AB ، به طول $a = ۰.۴ \text{ m}$ ، و به تکیه‌گاه C متصل است. تغییر مکان A تحت بار $P = ۴۰۰ \text{ N}$ نباید از ۲۵ mm بیشتر شود. قطر میله را در شرایط زیر بیابید:

۵۰-۳ فولاد: $G = ۷۷ \text{ GPa}$ ، $\tau_{\text{max}} = ۸۴ \text{ MPa}$

۵۱-۳ آلومینیوم: $G = ۲۷ \text{ GPa}$ ، $\tau_{\text{max}} = ۶۲ \text{ MPa}$

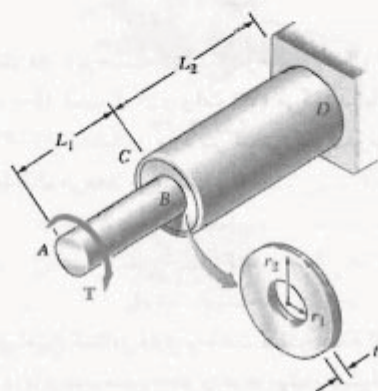
۵۲-۳ گشتاور $T = ۴ \text{ kN.m}$ در انتهای A از یک شفت مرکب وارد شده است. اگر مدول صلابت فولاد و آلومینیوم، به ترتیب، ۷۷ GPa و ۲۷ GPa باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در هسته فولادی، (ب) ماکزیمم تنش برشی در ژاکت آلومینیومی، (ج) زاویه پیچش انتهای A .



شکل م ۵۲-۳ و م ۵۳-۳

۶۲-۳ از یک ورق حلقوی با ضخامت t و مدول صلابت G برای اتصال شفت AB به شعاع r_1 به لوله CD با شعاع داخلی r_2 استفاده شده است. اگر گشتاور T بر انتهای A از شفت AB وارد شود و انتهای D لوله CD ثابت باشد، (الف) مقدار و مکان ماکزیم تنش برشی در ورق حلقوی را بیابید، (ب) نشان دهید که زاویه چرخش انتهای B نسبت به انتهای C لوله عبارت است از:

$$\phi_{BC} = \frac{T}{4\pi Gt} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$



شکل م ۶۲-۳ و م ۶۳-۳

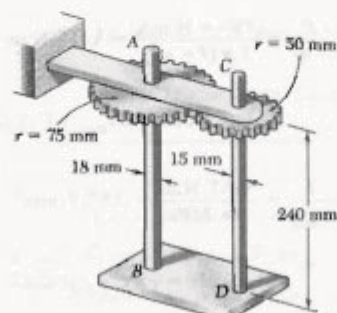
۶۳-۳ از ورق حلقوی به برنجی ($G = 39 \text{ GPa}$)، با ضخامت $t = 6 \text{ mm}$ ، برای اتصال شفت برنجی AB ، به طول $L_1 = 50 \text{ mm}$ و شعاع $r_1 = 30 \text{ mm}$ ، به لوله برنجی CD ، به طول $L_2 = 125 \text{ mm}$ ، شعاع داخلی $r_2 = 75 \text{ mm}$ و ضخامت 3 mm استفاده شده است. اگر گشتاور $T = 278 \text{ kN.m}$ بر انتهای A از شفت AB وارد شود و انتهای D از لوله CD ثابت باشد، (الف) ماکزیم تنش برشی در سیستم شفت-لوله، (ب) زاویه چرخش انتهای A (راهنمایی: از فرمول به دست آمده در مسئله ۶۲-۳ برای حل قسمت ب استفاده کنید).

۷-۳ طراحی شفت‌های انتقال قدرت

مشخصات اصلی در طراحی یک شفت انتقال قدرت عبارتند از قدرتی که شفت باید انتقال دهد، و سرعت چرخش شفت. نقش طراح، انتخاب ماده و ابعاد مقطع عرضی شفت است، به طوری که ماکزیم تنش برشی در ماده هنگام انتقال قدرت در یک سرعت مشخص شده از مقدار مجاز خود بیشتر نشود.

۵۷-۳ در مسئله ۵۶-۳، شفت AB را با یک شفت توخالی جایگزین کنید که دارای همان قطر خارجی و با قطر داخلی 25 mm باشد.

۵۸-۳ با جلوگیری از چرخش انتهای پایینی هر شفت، گشتاور 80 N.m بر انتهای A از شفت AB وارد می‌شود. اگر برای هر دو شفت $G = 77.2 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) ماکزیم تنش برشی در شفت CD ، (ب) زاویه چرخش انتهای A .



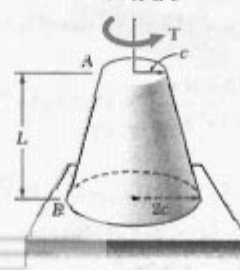
شکل م ۵۸-۳

۵۹-۳ مسئله ۵۸-۳ را با این فرض حل کنید که گشتاور 80 N.m بر انتهای C از شفت CD وارد شود.

۶۰-۳ یک شفت توپر و یک شفت توخالی از ماده یکسان و با وزن و طول یکسان ساخته شده‌اند. اگر $\sigma_1/\sigma_2 = n$ ، نشان دهید که نسبت گشتاور T_1 در شفت توپر به گشتاور T_2 در شفت توخالی، برابر است با: (الف) $\sqrt{1-n^2}/(1+n^2)$ در صورتی که ماکزیم تنش برشی در هر شفت دارای مقدار یکسان باشد، (ب) $(1-n^2)/(1+n^2)$ در صورتی که زاویه پیچش هر دو شفت یکسان باشد.

۶۱-۳ گشتاور T ، مطابق شکل، بر شفت توپر مخروطی AB وارد می‌شود، با انتگرال‌گیری نشان دهید که زاویه پیچش در انتهای A عبارت است از:

$$\phi = \frac{\sqrt{TL}}{12\pi Gc^2}$$



شکل م ۶۱-۳

ابتدا قدرت موتور را برحسب N.m/s و فرکانس آن را برحسب سیکل بر ثانیه (هرتز) بیان می‌کنیم.

$$P = 3.7 \text{ kW} = 3700 \text{ N.m/s}$$

$$f = (3600 \text{ rpm}) \frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 60 \text{ Hz} = 60 \text{ s}^{-1}$$

گشتاور وارد بر شفت را از معادله (۲۱-۳) می‌یابیم:

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{3700 \text{ N.m/s}}{2\pi (60 \text{ s}^{-1})} = 9.87 \text{ N.m}$$

با جایگذاری T و $\tau_{\max}$ در معادله (۲۲-۳)،

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{9.87 \text{ N.m}}{60 \text{ MPa}} = 163.7 \text{ mm}^3$$

برای یک شفت توپر، $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$. بنابراین،

$$\frac{1}{2}\pi c^3 = 163.7 \text{ mm}^3$$

$$c = 4.7 \text{ mm}$$

$$d = 2c = 9.4 \text{ mm}$$

از شفتی به قطر ۱۰ mm استفاده می‌شود.

مثال ۷-۳

شفتی که از یک لوله فولادی با قطر خارجی ۵۰ mm تشکیل شده است قدرت ۱۰۰ kW را در فرکانس دوران ۲۰ هرتز انتقال می‌دهد. مطلوبست ضخامت لوله به طوری که تنش برشی از ۶۰ MPa بیشتر نشود.

گشتاور وارد بر شفت را از معادله (۲۱-۳) می‌یابیم:

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{100 \times 10^3 \text{ W}}{2\pi (20 \text{ Hz})} = 795.8 \text{ N.m}$$

حداقل مقدار J/c را از معادله (۲۲-۳) تعیین می‌کنیم:

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{795.8 \text{ N.m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 13.26 \times 10^{-9} \text{ m}^3 \quad (23-3)$$

از معادله (۱۰-۳)،

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2c} (c_o^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{2 \times 0.050} [(0.025)^4 - c_i^4] \quad (24-3)$$

از دینامیک می‌دانیم که قدرت P برای جسم صلب پرخانی که تحت گشتاور T قرار دارد چنین است:

$$P = T\omega \quad (19-3)$$

که در آن، ω سرعت زاویه‌ای جسم برحسب رادیان بر ثانیه است. اما $\omega = 2\pi f$ ، که در آن f فرکانس دوران (تعداد دوران‌ها در یک ثانیه) است. واحد فرکانس s^{-1} است و آن را هرتز (Hz) می‌گویند. با جایگذاری ω در معادله (۱۹-۳)،

$$P = 2\pi f T \quad (20-3)$$

در واحدهای SI، f برحسب Hz، T برحسب N.m، و قدرت برحسب N.m/s است که آن را وات (W) می‌گویند. با حل T از معادله (۲۰-۳)، گشتاور وارد بر شفتی که قدرت P را در فرکانس f انتقال می‌دهد می‌یابیم:

$$T = \frac{P}{2\pi f} \quad (21-3)$$

پس از تعیین گشتاور وارد بر شفت و انتخاب ماده، طرح مقادیر T و ماکزیمم تنش مجاز را در فرمول پیچش الاستیک (۹-۳) قرار می‌دهد. با حل J/c ،

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (22-3)$$

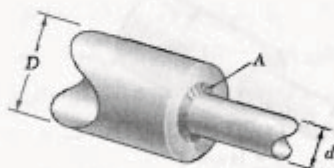
به این ترتیب، مینیمم مقدار مجاز پارامتر J/c به دست می‌آید. در واحدهای SI، T برحسب N.m، $\tau_{\max}$ برحسب Pa (N/m²) و J/c برحسب m³ است. در یک شفت توپر استوانه‌ای، $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$ و $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$ ؛ با جایگذاری در معادله (۲۲-۳) و با حل c ، مینیمم مقدار مجاز برای شعاع شفت به دست می‌آید. در یک شفت استوانه‌ای توخالی، J/c پارامتر تعیین‌کننده است (c_o شعاع خارجی شفت است)؛ مقدار این پارامتر را از معادله (۱۱-۳) می‌توان تعیین و واریسی کرد که آیا مقطع عرضی داده شده قابل قبول است یا نه.

مثال ۶-۳

اندازه شفت روتور موتوری به قدرت ۳.۷ kW که با ۳۶۰۰ rpm می‌چرخد، بقدر باشد تا تنش برشی در شفت از ۶۰ MPa بیشتر نشود؟

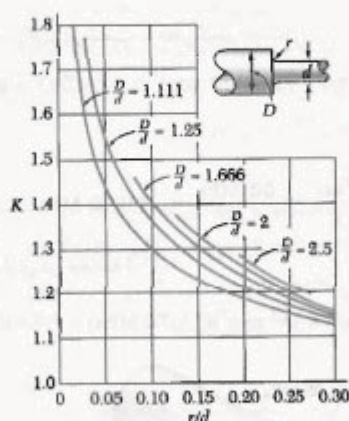
به وجود می‌آید. مثلاً، در شکل ۳-۳۱ تنش بزرگی در مقطع A به وجود آمده است. این تنش‌ها را با استفاده از گرده (مابه‌چیه) می‌توان کاهش داد. ماکزیمم مقدار تنش برشی در گرده چنین است:

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J} \quad (۲۵-۳)$$



شکل ۳-۳۱

که در آن، Tc/J تنش است که برای شفت با قطر کمتر محاسبه شده، و K ضریب تمرکز تنش است. ضریب K فقط به نسبت دو قطر و نسبت شعاع گرده به قطر شفت کوچکتر بستگی دارد. لذا، آن را می‌توان محاسبه و به صورت جدول یا نمودار نشان داد (شکل ۳-۳۲). گفتنی است که تعیین تنش‌های برشی موضعی باین روش فقط تا وقتی صحت دارد که مقدار $\tau_{\max}$ از حد تناسب ماده بیشتر نشود، زیرا مقدار K در شکل ۳-۳۲ بر مبنای رابطه خطی بین تنش برشی و کرنش برشی است. اگر تغییر شکل پلاستیک روی دهد، تنش ماکزیمم از آنچه که با معادله (۲۵-۳) به دست می‌آید کمتر خواهد بود.



شکل ۳-۳۲ ضرایب تمرکز تنش برای گرده‌ها در شفت‌های دایره‌ای.*

* W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1997.

سمت راست معادله‌های (۳-۲۳) و (۳-۲۴) را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(0.025)^3 - c_1^3 = \frac{0.050}{\pi} (13.26 \times 10^{-9})$$

$$c_1^3 = 390.6 \times 10^{-9} - 211.0 \times 10^{-9} = 179.6 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$c_1 = 20.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 20.6 \text{ mm}$$

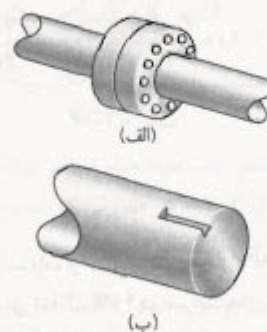
ضخامت لوله چنین است:

$$c_2 - c_1 = 25 \text{ mm} - 20.6 \text{ mm} = 4.4 \text{ mm}$$

از لوله‌ای با ضخامت ۵ mm استفاده می‌شود.

۳-۸ تمرکز تنش در شفت‌های دایره‌ای

فرمول $\tau_{\max} = Tc/J$ در قسمت ۳-۴ برای یک شفت دایره‌ای با مقطع عرضی یکنواخت به کار می‌رود. به علاوه، در قسمت ۳-۳ فرض شد که شفت از طریق صفحات صلبی که به دو انتهای شفت متصل‌اند از دو انتها بارگذاری می‌شود. ولی، در عمل، گشتاورها معمولاً از طریق کوپلینگ‌های فلاتچی بر شفت وارد می‌شوند (شکل ۳-۳۰ الف). در هر دو حالت، ممکن است در مقطعی که بر آن گشتاور وارد می‌شود، یا در نزدیک آن، توزیع تنش را نتوان با فرمول پیش‌شده داده شده در بالا بیان کرد. مثلاً، تمرکز تنش بزرگی در مجاورت خار شکل ۳-۳۰ ب به وجود می‌آید. برای تعیین این تنش‌های موضعی می‌توان از روش‌های آزمایشی، و گاهی از نظریه الاستیسته استفاده کرد.



شکل ۳-۳۰

طبق قسمت ۳-۴، از فرمول پیش‌شده برای شفت با مقطع عرضی متغیر دایره‌ای نیز می‌توان استفاده کرد. ولی، در مقطع عرضی شفتی که قطر آن ناگهان تغییر می‌کند، تمرکز تنش



قدرت. $f = (900 \text{ rpm}) \frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 15 \text{ Hz} = 15 \text{ s}^{-1}$ می‌نویسیم:

$$P_a = 2\pi fT = 2\pi (15 \text{ s}^{-1})(6960 \text{ N.m}) = 656 \text{ kN.m/s} = 656 \text{ kW}$$

$$P_a = 656 \text{ kW} \quad \blacktriangleleft$$

ب. طرح نهایی برای $r = 24 \text{ mm}$

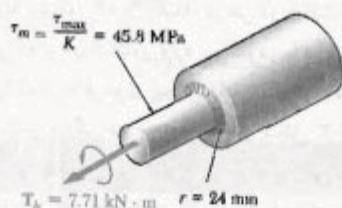
$$\frac{D}{d} = 2 \quad \frac{r}{d} = \frac{24 \text{ mm}}{95 \text{ mm}} = 0.250 \quad K = 1.20$$

با استفاده از روش بالا، می‌نویسیم:

$$\frac{\tau_{\max}}{K} = \frac{55 \text{ MPa}}{1.20} = 45.8 \text{ MPa}$$

$$T = \frac{J}{c} \frac{\tau_{\max}}{K} = (168.3 \times 10^7 \text{ mm}^4)(45.8 \text{ MPa}) = 771 \text{ kN.m}$$

$$P_b = 2\pi fT = 2\pi (15 \text{ s}^{-1})(771 \text{ N.m}) = 727 \text{ kW}$$



درصد تغییر قدرت:

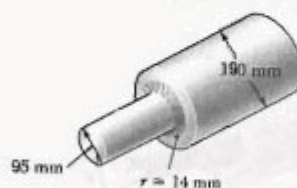
$$\text{درصد تغییر قدرت} = 100 \frac{P_b - P_a}{P_a} = 100 \frac{727 - 656}{656} = +10.82\% \quad \blacktriangleleft$$

۶۴-۳ با استفاده از تنش برشی مجاز 30 MPa ، یک شفت توپر فولادی برای انتقال 9 kW در سرعت‌های زیر طراحی کنید: (الف) 1200 rpm ، (ب) 2400 rpm .

۶۵-۳ با استفاده از تنش برشی مجاز 50 MPa ، یک شفت توپر فولادی برای انتقال 15 kW در فرکانس‌های زیر طراحی کنید: (الف) 3 Hz ، (ب) 6 Hz .

مسئله نمونه ۳-۶

شفت پلمای نشان داده شده با 900 rpm می‌چرخد و قدرت را از توربین به ژنراتور انتقال می‌دهد. فولاد به کار رفته دارای تنش برشی مجاز 55 MPa است. (الف) در طرح اولیه، ماکزیمم قدرتی را که می‌تواند انتقال داد بیابید. (ب) اگر شعاع گرده در طرح نهایی به 24 mm افزایش یابد، درصد تغییر قدرت انتقالی چقدر است؟



حل

الف. طرح اولیه. با استفاده از شکل ۳-۳۲،

$$r = 14 \text{ mm}, d = 95 \text{ mm}, D = 190 \text{ mm}$$

$$\frac{D}{d} = \frac{190 \text{ mm}}{95 \text{ mm}} = 2 \quad \frac{r}{d} = \frac{14 \text{ mm}}{95 \text{ mm}} = 0.15$$

$$K = 1.33, \text{ شکل ۳-۳۲}$$

گشتاور. با توجه به معادله (۳-۲۵)،

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J} \Rightarrow T = \frac{J}{c} \frac{\tau_{\max}}{K} \quad (1)$$

که در آن، J/c برای شفت با قطر کمتر است:

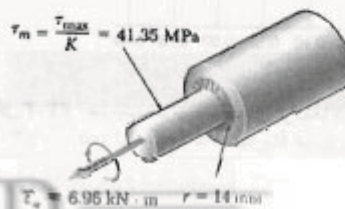
$$J/c = \frac{1}{2} \pi c^3 = \frac{1}{2} \pi (47.5 \text{ mm})^3 = 168.3 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

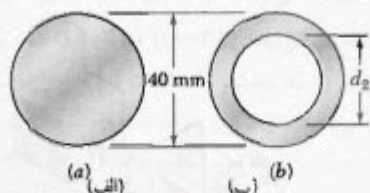
و در آن

$$\frac{\tau_{\max}}{K} = \frac{55 \text{ MPa}}{1.33} = 41.35 \text{ MPa}$$

با جایگذاری در معادله (۱)،

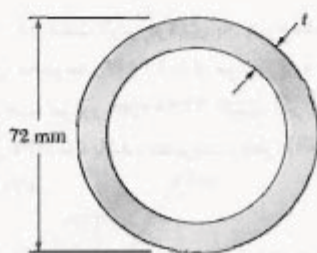
$$T = (168.3 \times 10^7 \text{ mm}^4)(41.35 \text{ MPa}) = 696 \text{ kN.m}$$





شکل م ۷۲-۳

۷۳-۳ از یک لوله فولادی با قطر خارجی ۷۲ mm برای انتقال گشتاور ۲۵۰۰ N.m استفاده می‌شود و تنش برشی نباید از مقدار مجاز ۵۵ MPa بیشتر شود. مجموعه‌ای از لوله‌ها با قطر خارجی ۷۲ mm در دسترس است. اگر ضخامت لوله‌های موجود از ۴ mm تا ۱۰ mm، با نموهای ۲ mm، تغییر کند، سبک‌ترین لوله‌ای را که می‌توان به کار برد بیابید.



شکل م ۷۳-۳

۷۴-۳ شفت توپر فولادی به طول ۲٫۵ m در فرکانس ۲۵ Hz قدرت ۱۰ kW را انتقال می‌دهد. اگر $G = ۷۷٫۲ \text{ GPa}$ و تنش مجاز برشی ۳۰ MPa باشد، قدرت شفت را بیابید. زاویه پیچش نباید از ۴° بیشتر شود.

۷۵-۳ شفت توپر فولادی به طول ۱٫۵ m و به قطر ۲۲ mm قدرت ۱۲ kW را انتقال می‌دهد. اگر $G = ۷۷٫۲ \text{ GPa}$ و تنش مجاز برشی ۳۰ MPa باشد، فرکانس می‌بینیم را بیابید. زاویه پیچش نباید از ۳٫۵° بیشتر شود.

۷۶-۳ دو شفت توپر فولادی به چرخندهایی متصل شده‌اند. این مجموعه، ۱۲ kW را از موتور A به ماشین ابزار D می‌دهد. سرعت موتور ۱۲۶۰ rpm است. اگر قطر هر شفت ۲۵ mm باشد، مطلوبیت ماکزیم تنش برشی: (الف) در شفت AB، (ب) در شفت CD.

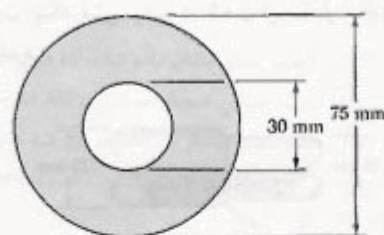
۶۶-۳ مطلوبیت ماکزیم تنش برشی در شفت توپری به قطر ۱۲ mm که ۲٫۵ kW را در فرکانس‌های زیر انتقال می‌دهد: (الف) ۲۵ Hz، (ب) ۵۰ Hz.

۶۷-۳ مطلوبیت ماکزیم تنش برشی در شفت توپری به قطر ۳۸ mm که ۵۵ kW را در سرعت‌های زیر انتقال می‌دهد: (الف) ۷۵۰ rpm، (ب) ۱۵۰۰ rpm.

۶۸-۳ یک شفت محرک فولادی به طول ۱٫۸ m و با قطرهای خارجی و داخلی ۵۶ mm و ۴۲ mm است و ۱۸۰ kW را در ۱۸۰۰ rpm انتقال می‌دهد. مطلوبیت: (الف) ماکزیم تنش برشی، (ب) زاویه پیچش شفت ($G = ۷۷ \text{ GPa}$).

۶۹-۳ یکی از دو شفت توخالی محرک یک کشتی اقیانوس‌پیما به طول ۴۰ m است، و قطرهای خارجی و داخلی آن، به ترتیب، ۴۰۰ mm و ۲۰۰ mm است. شفت از فولاد با مشخصات $G = ۷۷٫۲ \text{ GPa}$ و $\tau_{all} = ۶۰ \text{ MPa}$ ساخته شده است. اگر ماکزیم سرعت دوران شفت ۱۶۰ rpm باشد، مطلوبیت: (الف) ماکزیم قدرتی که می‌توان توسط یک شفت به پروانه انتقال داد، (ب) زاویه متناظر پیچشی شفت.

۷۰-۳ یک شفت فولادی با مقطع عرضی نشان داده شده با ۱۲۰ rpm می‌چرخد، و استروبوسکوپ نشان می‌دهد که زاویه پیچش برای طول ۳٫۶ m برابر با ۲° است. با استفاده از $G = ۷۷ \text{ GPa}$ ، قدرت انتقال یافته را بیابید.

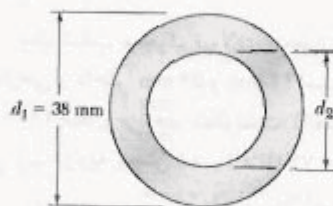


شکل م ۷۰-۳

۷۱-۳ مطلوبیت ضخامت شفت لوله‌ای به ضخامت ۵۰ mm در مثال ۷-۳، در صورتی که بخواهیم در فرکانس ۴۰ Hz قدرت قبل را انتقال دهیم.

۷۲-۳ می‌خواهیم شفتی با قطر خارجی ۴۰ mm طرح کنیم که ۴۵ kW را انتقال دهد. (الف) اگر سرعت دوران ۷۲۰ rpm باشد، ماکزیم تنش برشی را در شفت (a) بیابید. (ب) اگر سرعت دوران ۵۰٪ افزایش و به ۱۰۸۰ rpm برسیم، مطلوبیت بیشترین قطر داخلی شفت (b) به طوری که ماکزیم تنش برشی در دو شفت یکسان باشد.

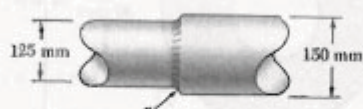
۸۲-۳ یک شفت فولادی به طول ۱٫۶ m و با قطر خارجی $d_1 = 38 \text{ mm}$ از فولاد با $\tau_{all} = 65 \text{ MPa}$ و $G = 77.2 \text{ GPa}$ ساخته شده است. اگر زاویه پیچش هنگام اعمال گشتاور 600 N.m نباید از 4° بیشتر شود، بزرگترین قطر داخلی d_2 را بیاید.



شکل م ۸۲-۳ و م ۸۳-۳

۸۳-۳ یک شفت توخالی فولادی، به طول ۱٫۵ m و با قطر داخلی $d_1 = 30 \text{ mm}$ دارای قطر داخلی d_2 است و 100 kW را بین توربین و ژنراتور انتقال می‌دهد. سرعت دوران شفت را بیاید، در صورتی که $G = 77.2 \text{ GPa}$ و تنش مجاز برشی 60 MPa باشد. زاویه پیچش نباید از 3° بیشتر شود.

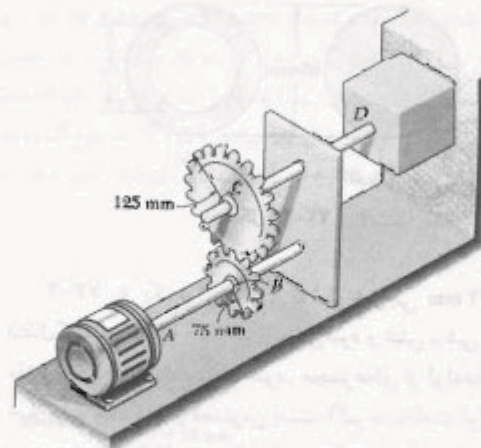
۸۴-۳ شفت پله‌ای نشان داده شده با 450 rpm می‌چرخد. اگر $r = 12 \text{ mm}$ ، مطلوبست ماکزیمم قدرتی که می‌توان انتقال داد بدون اینکه تنش برشی در شفت از مقدار مجاز 45 MPa بیشتر شود.



شکل م ۸۴-۳ و م ۸۵-۳

۸۵-۳ شفت پله‌ای نشان داده شده با 450 rpm می‌چرخد. اگر $r = 5 \text{ mm}$ ، مطلوبست ماکزیمم قدرتی که می‌توان انتقال داد بدون اینکه تنش برشی در شفت از مقدار مجاز 50 MPa بیشتر شود.

۸۶-۳ اگر شفت پله‌ای نشان داده شده 25 kW را در 2100 rpm انتقال دهد، مطلوبست مینیمم شعاع r گردۀ در صورتی که بخواهیم تنش در شفت از مقدار مجاز 50 MPa بیشتر نشود.



شکل م ۷۶-۳ و م ۷۷-۳

۷۷-۳ دو شفت توپر فولادی به چرخ‌دنده‌هایی متصل شده‌اند. این مجموعه، 12 kW را از موتور A به ماشین ابزار D می‌دهد. سرعت موتور 1260 rpm است. اگر ماکزیمم تنش مجاز برشی 55 MPa باشد، مطلوبست قطر: (الف) شفت AB ، (ب) شفت CD .

۷۸-۳ یک شفت فولادی 150 kW را در سرعت 360 rpm انتقال می‌دهد. اگر $G = 77.2 \text{ GPa}$ ، شفت توپری طرح کنید که ماکزیمم تنش در آن از 50 MPa و زاویه پیچش آن در طول 2.5 m از 3° بیشتر نشود.

۷۹-۳ شفت فولادی به طول 2.5 m و به قطر 30 mm با فرکانس 30 Hz می‌چرخد. اگر $G = 77.2 \text{ GPa}$ و تنش مجاز برشی 50 MPa باشد، ماکزیمم قدرتی را که شفت می‌تواند انتقال دهد بیاید. زاویه پیچش نباید از 7.5° بیشتر شود.

۸۰-۳ یک شفت فولادی به قطر 38 mm و به طول 1.2 m برای انتقال 45 kW بین موتور و پمپ به کار رفته است. اگر $G = 77 \text{ GPa}$ ، مطلوبست کمترین سرعت دوران شفت که به ازای آن تنش برشی از 60 MPa و زاویه پیچش از 3° بیشتر نشود.

۸۱-۳ یک شفت توپر فولادی، به طول 1.5 m و به قطر 22 mm ، قدرت 13.5 kW را انتقال می‌دهد. اگر $G = 77 \text{ GPa}$ و تنش مجاز برشی 30 MPa باشد، مینیمم سرعت شفت را بیاید. زاویه پیچش نباید از 3.5° بیشتر شود.

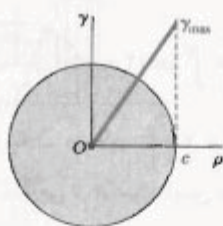
۳-۹ تغییر شکل پلاستیک در شفت‌های دایره‌ای

برای استنتاج فرمول‌های (۳-۱۰) و (۳-۱۶) که، به ترتیب، توزیع تنش و زاویه پیچش یک شفت دایره‌ای را تحت گشتاور T تعریف می‌دهند، از قانون هوک استفاده شد. اگر تنش در قسمتی از شفت از استقامت تسلیم بیشتر شود، با آن قسمت از ماده شکندگی باشد که رابطه تنش-کرنش آن غیرخطی است، فرمول‌های مذکور به کار نمی‌روند. در این قسمت می‌خواهیم روش کلی‌تری را به دست آوریم و با آن توزیع تنش در یک شفت دایره‌ای، و گشتاور مورد نیاز برای ایجاد زاویه پیچش معینی را بیابیم.

در قسمت ۳-۳ هیچ رابطه خاصی را بین تنش-کرنش در نظر نگرفتیم، و ثابت کردیم که کرنش برشی γ برحسب فاصله ρ از محور شفت به طور خطی تغییر می‌کند (شکل ۳-۳۳). با استفاده از این خاصیت، می‌نویسیم:

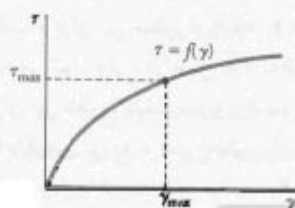
$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (۳-۴)$$

که در آن، c شعاع شفت است.

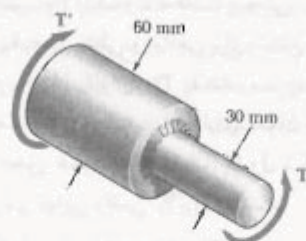


شکل ۳-۳۳

اگر ماکزیمم مقدار تنش برشی معلوم باشد، نمودار τ را برحسب ρ می‌توان رسم کرد. برای این منظور، ابتدا از نمودار تنش-کرنش برشی (شکل ۳-۳۴)، مقدار $\gamma_{\max}$ متناظر با $\tau_{\max}$ را به دست می‌آوریم و این مقدار را در معادله (۳-۴) قرار می‌دهیم.



شکل ۳-۳۴



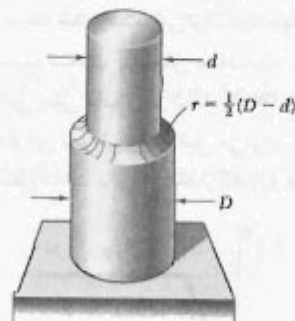
شکل م ۳-۸۶ و م ۳-۸۷

۳-۸۷ شفت پله‌ای نشان داده شده 45 kW را انتقال می‌دهد. اگر تنش برشی مجاز در شفت 40 MPa و شعاع r گرده 6 mm باشد، کمترین سرعت مجاز شفت را بیابید.

۳-۸۸ گشتاور $T = 22 \text{ N.m}$ بر شفت پله‌ای نشان داده شده، که دارای گرده کامل ربع دایره‌ای است، وارد شده است. اگر $D = 25 \text{ mm}$ ، مطلوبیت ماکزیمم تنش برشی در شفت وقتی: (الف) $d = 20 \text{ mm}$ ، (ب) $d = 22 \text{ mm}$.

۳-۸۹ در شفت پله‌ای نشان داده شده، که دارای گرده کامل ربع دایره‌ای است، $D = 30 \text{ mm}$ و $d = 25 \text{ mm}$. اگر سرعت شفت 2400 rpm و تنش مجاز برشی 50 MPa باشد، ماکزیمم قدرتی را که شفت می‌تواند انتقال دهد بیابید.

۳-۹۰ در شفت پله‌ای نشان داده شده، که دارای گرده کامل ربع دایره‌ای است، تنش مجاز برشی 80 MPa است. اگر $D = 30 \text{ mm}$ ، مطلوبیت بیشترین گشتاوری که می‌توان بر شفت وارد کرد در صورتی که: (الف) $d = 26 \text{ mm}$ ، (ب) $d = 24 \text{ mm}$.



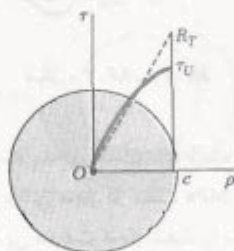
گرده ربع دایره‌ای که به لبه

شفت بزرگتر می‌پیوندد

شکل م ۳-۸۸ و م ۳-۸۹ و م ۳-۹۰



تنش فرضی R_T را مدول شکست پیچشی می‌گویند. چون توزیع‌های فرضی خطی و واقعی برای تنش در شکل ۳۶-۳ باید مقدار یکسان را برای T_U بدهند، مساحت‌هایی را که این توزیع‌ها مشخص می‌کنند باید دارای همان اینرسی یکسان نسبت به محور عمودی باشند. لذا، مدول شکست R_T همواره از تنش برشی نهایی واقعی τ_U بزرگتر است.



شکل ۳۶-۳

گاهی، توزیع تنش و گشتاور T متناظر با زاویه پیچش معین ϕ را می‌خواهیم. برای این منظور، از رابطه (۲-۳) استفاده می‌کنیم:

$$\gamma = \frac{\rho \phi}{L} \quad (2-3)$$

با ϕ و L معلوم، مقدار γ متناظر با هر مقدار معین ρ را می‌یابیم. با استفاده از نمودار تنش-کرنش، مقدار متناظر تنش برشی τ را می‌یابیم و τ را برحسب ρ رسم می‌کنیم. با تعیین توزیع تنش برشی، گشتاور T را به‌طور تحلیلی با عددی می‌توان به‌دست آورد.

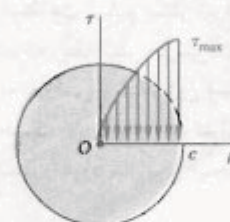
۳-۱۰ شفت‌های دایره‌ای الاستوپلاستیک

با بررسی حالت ایده‌آلی شفت توپر دایره‌ای که از ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است، می‌توان دید بهتری از رفتار پلاستیکی شفت تحت پیچش به‌دست آورد. نمودار تنش-کرنش برشی چنین ماده‌ای در شکل ۳۷-۳ نشان داده شده است. با استفاده از این نمودار، مانند قبل می‌توان توزیع تنش را در عرض یک مقطع شفت برای هر مقدار گشتاور T تعیین کرد.



شکل ۳۷-۳

سپس، برای هر مقدار ρ ، مقدار γ متناظر را از معادله (۳-۴) یا شکل ۳۳-۳ تعیین و تنش برشی τ متناظر با این مقدار γ را از شکل ۳۴-۳ می‌یابیم. با ترسیم τ برحسب ρ ، توزیع تنش به‌دست می‌آید (شکل ۳۵-۳).



شکل ۳۵-۳

حال، می‌گوییم هنگام استنتاج معادله (۱-۳) در قسمت ۲-۳، هیچ رابطه خاصی را بین تنش و کرنش برشی در نظر نگرفتیم. لذا، برای تعیین گشتاور T متناظر با توزیع تنش برشی در شکل ۳۵-۳، از معادله (۱-۳) استفاده می‌کنیم. یک جزء حلقوی به شعاع ρ و به ضخامت $d\rho$ را در نظر می‌گیریم. مساحت این جزء، $dA = 2\pi\rho d\rho$ ، را در معادله ۱-۳ قرار می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$T = \int_0^c \rho \tau (2\pi\rho d\rho)$$

$$T = 2\pi \int_0^c \rho^2 \tau d\rho \quad (26-3)$$

که در آن τ تابعی از ρ است. این تابع در شکل ۳۵-۳ رسم شده است.

اگر τ تابع معلومی از γ باشد، از معادله (۴-۳) برای تعیین تابع τ برحسب ρ می‌توان استفاده کرد، و انتگرال (۲۶-۳) را به‌طور تحلیلی محاسبه کرد. در غیر این صورت، گشتاور T را با انتگرال‌گیری عددی باید محاسبه کرد. گفتنی است که انتگرال (۲۶-۳) همان اینرسی سطح بین منحنی توزیع تنش و محور افقی در شکل ۳۵-۳ نسبت به محور عمودی است.

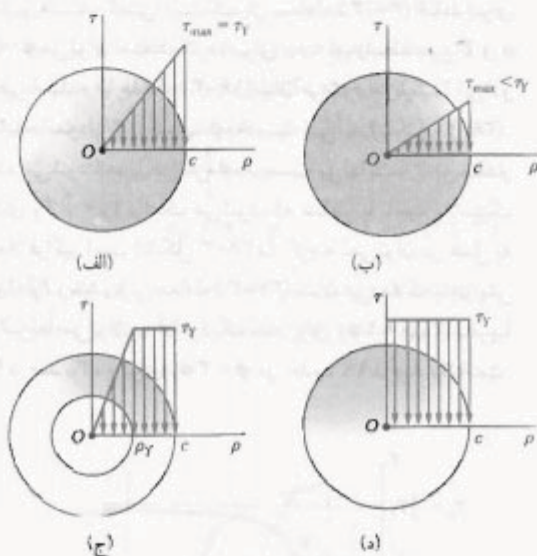
گشتاور نهایی T_U که باعث شکست شفت می‌شود عامل تعیین‌کننده است. این مقدار را از تنش برشی نهایی τ_U ماده می‌توان یافت و برای این منظور از رابطه $\tau_{max} = \tau_U$ و محاسبات بالا استفاده می‌شود. ولی، در عمل T_U به‌طور آزمایشی تعیین می‌شود. برای این منظور، شفت نمونه را تحت پیچش قرار می‌دهند تا بشکند. با فرض توزیع فرضی خطی برای تنش، از معادله (۹-۳) برای تعیین ماکزیمم تنش برشی R_T استفاده می‌شود:

$$R_T = \frac{T_U c}{J} \quad (27-3)$$

که در آن T_Y ماکزیمم گشتاور الاستیک است، باید توجه داشت که وقتی ρ_Y به صفر نزدیک می‌شود، گشتاور به مقدار حدی زیر نزدیک می‌شود:

$$T_p = \frac{4}{3} T_Y \quad (۳۳-۳)$$

این گشتاور را، که متناظر با تغییر شکل کاملاً پلاستیک است (شکل ۳-۳۸ د)، گشتاور پلاستیک شفت می‌گویند. گفتنی است که معادله (۳۳-۳) فقط برای یک شفت توپر دایره‌ای الاستوپلاستیک صحت دارد.



شکل ۳-۳۸

پس از شروع تسلیم، توزیع کرنش در عرض مقطع همچنان خطی است. لذا، معادله (۲-۳) به کار می‌رود و از آن برای تعیین شعاع ρ_Y هسته الاستیک برحسب زاویه پیچش ϕ می‌توان استفاده کرد. اگر ϕ به اندازه کافی بزرگ باشد و باعث تغییر شکل پلاستیک شود، برای تعیین شعاع ρ_Y هسته الاستیک، γ را در معادله (۲-۳) برابر با کرنش تسلیم γ_Y قرار می‌دهیم و مقدار متناظر ρ_Y می‌یابیم:

$$\rho_Y = \frac{L \gamma_Y}{\phi} \quad (۳۴-۳)$$

زاویه پیچش را در شروع تسلیم، یعنی وقتی $\rho_Y = c$ ، با ϕ_Y نشان می‌دهیم. با قرار دادن $\phi = \phi_Y$ و $\rho_Y = c$ در معادله (۳۴-۳)، داریم:

$$c = \frac{L \gamma_Y}{\phi_Y} \quad (۳۵-۳)$$

تا وقتی تنش برشی τ از استقامت تسلیم τ_Y بیشتر نشده است، قانون هوک به کار می‌رود و توزیع تنش در عرض مقطع شفت به صورت خطی است (شکل ۳-۳۸ الف). در این حالت، τ_{max} از معادله (۹-۳) به دست می‌آید:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \quad (۹-۳)$$

با افزایش گشتاور، τ_{max} به مقدار τ_Y می‌رسد (شکل ۳-۳۸ ب). با جایگذاری این مقدار در معادله (۹-۳) و با حل مقدار متناظر T ، مقدار T_Y گشتاور در شروع تسلیم به دست می‌آید:

$$T_Y = \frac{J}{c} \tau_Y \quad (۲۸-۳)$$

این مقدار را ماکزیمم گشتاور الاستیک می‌گویند. برای یک شفت توپر دایره‌ای، $J/c = \frac{1}{4} \pi c^3$ ، در نتیجه،

$$T_Y = \frac{1}{4} \pi c^3 \tau_Y \quad (۲۹-۳)$$

با افزایش بیشتر گشتاور، یک ناحیه پلاستیک به شعاع ρ_Y در پیرامون هسته الاستیک به وجود می‌آید (شکل ۳-۳۸ ج). در این ناحیه پلاستیک، تنش به طور یکنواخت و برابر با τ_Y است؛ در حالی که تنش در هسته الاستیک برحسب ρ به صورت خطی زیر تغییر می‌کند:

$$\tau = \frac{\tau_Y}{\rho_Y} \rho \quad (۳۰-۳)$$

با افزایش T ، ناحیه پلاستیک گسترش می‌یابد و تغییر شکل کاملاً پلاستیک می‌شود (شکل ۳-۳۸ د).

از معادله (۲۶-۳) برای تعیین مقدار گشتاور T متناظر با شعاع ρ_Y هسته الاستیک استفاده می‌شود. چون τ در گستره $0 \leq \rho \leq \rho_Y$ با معادله (۳۰-۳) داده می‌شود و در گستره $\rho_Y \leq \rho \leq c$ برابر با τ_Y است، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^{\rho_Y} \rho^2 \left(\frac{\tau_Y}{\rho_Y} \rho \right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_Y}^c \rho^2 \tau_Y d\rho \\ &= \frac{1}{4} \pi \rho_Y^4 \tau_Y + \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_Y - \frac{2}{3} \pi \rho_Y^3 \tau_Y \\ T &= \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_Y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^4}{c^4} \right) \quad (۳۱-۳) \end{aligned}$$

با توجه به معادله (۲۹-۳)،

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{\rho_Y^4}{4 c^4} \right) \quad (۳۲-۳)$$

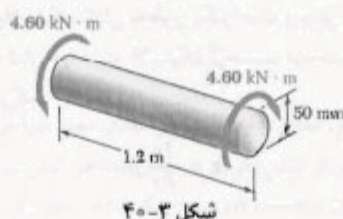
در آن قسمت دارای مقدار ثابت τ است. لذا، معادله (۳-۱) به صورت زیر در می آید:

$$T = \rho A \tau$$

که در آن ρ شعاع متوسط لوله و A مساحت مقطع عرضی آن است. از این رو، تنش برشی با گشتاور متناسب است و τ را می توان از T به سهولت تعیین کرد. از طرف دیگر، کرنش برشی γ را از معادله (۳-۲) و از ϕ و L اندازه گیری شده در قسمت لوله ای نمونه می توان به دست آورد.

مثال ۳-۸

یک شفت توپر دایره ای، به طول 1.2 m و به قطر 50 mm ، در دو انتهای خود تحت گشتاور $4.60\text{ kN}\cdot\text{m}$ قرار دارد (شکل ۳-۴۰). با فرض اینکه شفت از ماده الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم برشی 150 MPa و با مدول صلابت 77 GPa ساخته شده است، مطلوبست (الف) شعاع هسته الاستیک، (ب) زاویه پیچش شفت.



شکل ۳-۴۰

(الف) شعاع هسته الاستیک، ابتدا، گشتاور T_Y را در شروع تسلیم می یابیم. برای $c = 25\text{ mm}$ ،

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{2} \pi (25 \times 10^{-3}\text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

با توجه به $\tau_Y = 150\text{ MPa}$ و از معادله ۳-۲۸،

$$T_Y = \frac{J \tau_Y}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(150 \times 10^6\text{ Pa})}{25 \times 10^{-3}\text{ m}} = 3.68\text{ kN}\cdot\text{m}$$

* معادله (۳-۳۶) را برای هر ماده پیکش بخواری که دارای نقطه تسلیم کاملاً مشخص است می توان به کار برد، زیرا این معادله بدون توجه به شکل نمودار تنش کرنش پس از نقطه تسلیم استنتاج شده است.
** برای به حداقل رساندن امکان شکست ناشی از گمانش، نمونه باید طوری باشد که طول قسمت لوله ای آن بیشتر از قطرش نباشد.

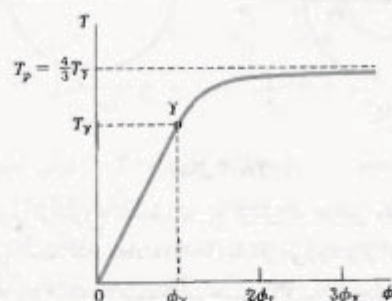
از تقسیم (۳-۳۴) بر (۳-۳۵)، رابطه زیر را می یابیم:

$$\frac{\rho_Y}{c} = \frac{\phi_Y}{\phi} \quad (۳-۳۶)$$

با جایگذاری عبارت ρ_Y/c در معادله (۳-۳۲)، گشتاور T به صورت تابعی از زاویه پیچش ϕ به دست می آید:

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\phi_Y^2}{\phi^2} \right) \quad (۳-۳۷)$$

که در آن T_Y و ϕ_Y ، بدتریب، گشتاور و زاویه پیچش در شروع تسلیم هستند. گفتنی است که از معادله (۳-۳۷) فقط برای $\phi > \phi_Y$ می توان استفاده کرد. برای $\phi < \phi_Y$ ، رابطه بین T و ϕ خطی است و با معادله (۳-۱۶) بیان می شود. با ترکیب این دو معادله، نمودار T برحسب ϕ به دست می آید (شکل ۳-۳۹). دیده می شود که، با افزایش ϕ به سمت بی نهایت، T به مقدار حدی $T_p = \frac{4}{3} T_Y$ نزدیک می شود، که متناظر با ناحیه پلاستیک کاملاً فراگیر است (شکل ۳-۲۸). گرچه نمی توان در عمل به مقدار T_p رسید، ولی معادله (۳-۳۷) نشان می دهد که با افزایش ϕ سریعاً می توان به آن نزدیک شد. برای $\phi = 2\phi_Y$ ، T تقریباً ۹۷ درصد T_p ، و برای $\phi = 3\phi_Y$ در حدود ۹۹ درصد T_p است.



شکل ۳-۳۹

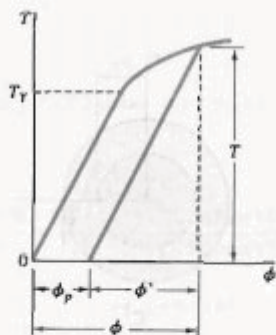
نمودار T برحسب ϕ برای ماده ایده آل الاستوپلاستیک (شکل ۳-۳۹) با نمودار تنش-کرنش برشی آن ماده (شکل ۳-۳۷) خیلی تفاوت دارد. لذا، نمودار تنش-کرنش برشی یک ماده واقعی را نمی توان مستقیماً از آزمایش پیچش یک میله توپر دایره ای که از آن ماده ساخته شده است به دست آورد. ولی اگر نمونه آزمایشی دارای یک قسمت لوله ای نازک دایره ای باشد، از آزمایش پیچش آن می توان یک نمودار نسبتاً دقیق به دست آورد**. در حقیقت، می توان فرض کرد که تنش برشی

در این قسمت خواهید دید که مقدار نهایی تنش معمولاً صفر نیست و تنش‌های باقیمانده مثبت یا منفی در اغلب نقاط وجود دارد. گفتنی است که، هنگام باربرداری، تنش برشی نیز مانند تنش قائم همچنان کاهش می‌یابد و به مقدار برابر با مقدار ماکزیمم در C منهای دو برابر استقامت تسلیم ماده می‌رسد.

مجدداً، ماده ایده‌آل الاستوپلاستیک را که نمودار تنش- کرنش برشی آن در شکل ۳-۳۷ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. تا وقتی تنش بیش از τ_y کاهش نیافته است، رابطه بین τ و γ را در هر نقطه شفت به صورت خطی می‌گیریم و برای تعیین زاویه پیچش شفت، هنگام کاهش گشتاور تا صفر، از معادله (۳-۱۶) استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، باربرداری شفت با یک خط مستقیم در نمودار τ - ϕ نشان داده می‌شود (شکل ۳-۴۲). پس از حذف گشتاور، زاویه پیچش به صفر نمی‌رسد. یعنی، بارگذاری و باربرداری شفت باعث ایجاد یک تغییر شکل دائمی می‌شود که با زاویه زیر مشخص می‌شود:

$$\phi_p = \phi - \phi' \quad (3-38)$$

در رابطه بالا، زوایای ϕ و ϕ' ، به ترتیب، برای فاز بارگذاری و باربرداری است (از معادله ۳-۳۶ و ϕ' از معادله ۳-۱۶ به دست می‌آید).



شکل ۳-۴۲

با کاربرد اصل ترکیب (قسمت ۲-۲۰)، تنش‌های باقیمانده را در یک ماده الاستوپلاستیک می‌توان به دست آورد. برای این منظور، تنش‌های ناشی از گشتاور T را هنگام بارگذاری، و تنش‌های ناشی از گشتاور مساوی و متضاد با T را هنگام باربرداری شفت در نظر می‌گیریم. تنش‌های گروه اول، رفتار الاستوپلاستیک ماده را ضمن بارگذاری نشان می‌دهند (شکل ۳-۴۳ الف). و گروه دوم رفتار خطی همان ماده را ضمن

با حل $(\rho_Y/c)^2$ از معادله (۳-۳۲) و با جایگذاری مقدار T و T_Y می‌نویسیم:

$$\left(\frac{\rho_Y}{c}\right)^2 = \tau - \frac{\tau T}{T_Y} = \tau - \frac{\tau (4,60 \text{ kN.m})}{2,68 \text{ kN.m}} = 0,250$$

$$\frac{\rho_Y}{c} = 0,630 \Rightarrow \rho_Y = 0,630 (25 \text{ mm}) = 15,8 \text{ mm}$$

(ب) زاویه پیچش: ابتدا، زاویه پیچش ϕ_Y را در شروع تسلیم از معادله (۳-۱۶) می‌یابیم:

$$\phi_Y = \frac{T_Y L}{JG} = \frac{(2,68 \times 10^3 \text{ N.m})(1,2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})} = 93,4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

با حل ϕ از معادله (۳-۳۶) و با جایگذاری مقدار ϕ_Y و ρ_Y/c می‌نویسیم:

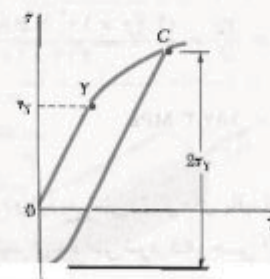
$$\phi = \frac{\phi_Y}{\rho_Y/c} = \frac{93,4 \times 10^{-3} \text{ rad}}{0,630} = 148,3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

یا

$$\phi = (148,3 \times 10^{-3} \text{ rad}) \left(\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}}\right) = 8,50^\circ$$

۳-۱۱ تنش‌های باقیمانده در شفت‌های دایره‌ای

در دو قسمت قبل دیدیم در شفتی که تحت تأثیر گشتاور نسبتاً بزرگی است ناحیه پلاستیک ایجاد می‌شود، و تنش برشی τ در هر نقطه از ناحیه پلاستیک را از نمودار تنش-کرنش برشی شکل ۳-۳۴ می‌توان به دست آورد. با حذف گشتاور، کاهش تنش و کرنش در امتداد یک خط راست روی می‌دهد (شکل ۳-۴۱).



شکل ۳-۴۱

شفط ضمن حذف گشتاور از معادله (۳-۱۶) به دست می آید. با جایگذاری داده های زیر:

$$T = 4,60 \times 10^3 \text{ N.m}$$

$$L = 1,2 \text{ m}$$

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa}$$

و مقدار $J = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ ، که در حل مثال ۳-۸ به دست آمد، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{TL}{JG} = \frac{(4,60 \times 10^3 \text{ N.m})(1,2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})} \\ &= 116,8 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ &= (116,8 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 6,69^\circ \end{aligned}$$

بنابراین، پیچش دائم چنین است:

$$\phi_p = \phi - \phi' = 8,50^\circ - 6,69^\circ = 1,81^\circ$$

(ب) تنش های باقیمانده. از مثال ۳-۸ دیدیم که استقامت تسلیم و شعاع هسته الاستیک متناظر با گشتاور داده شده، به ترتیب، عبارتند از $\tau_y = 150 \text{ MPa}$ و $\rho_y = 15,8 \text{ mm}$. توزیع تنش در شفط بارگذاری شده مانند شکل ۳-۴۴ الف است.

توزیع تنش های ناشی از گشتاور مخالف $4,60 \text{ kN.m}$ ، که برای باربرداری شفط است، به صورت خطی و مانند شکل ۳-۴۴ ب است. تنش ماکزیمم در فاز بار برداری از معادله (۳-۹) به دست می آید:

$$\begin{aligned} \tau'_{\max} &= \frac{Tc}{J} = \frac{(4,60 \times 10^3 \text{ N.m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \\ &= 187,3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

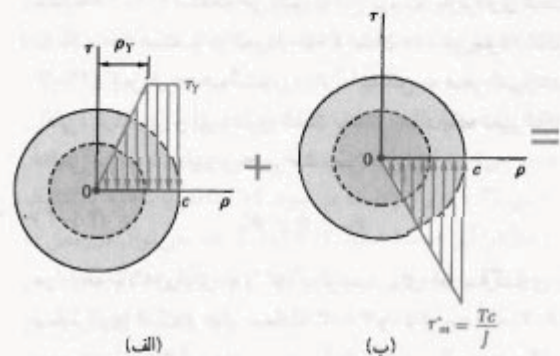
با ترکیب این دو توزیع تنش، تنش های باقیمانده را در شکل ۳-۴۴ ج می یابیم. دیده می شود که، حتی اگر تنش های معکوس از استقامت تسلیم τ_y بیشتر شوند، فرض توزیع خطی این تنش ها صحت دارد زیرا از $2\tau_y$ بیشتر نشده اند.

* تنش در فاز بار برداری - مترجم

باربرداری نشان می دهند (شکل ۳-۴۳ ب). از مجموع این دو گروه تنش، توزیع تنش های باقیمانده در شفط به دست می آید (شکل ۳-۴۴ ج).

از شکل ۳-۴۳ ج دیده می شود که تنش های باقیمانده با تنش های اولیه هم سو هستند، و سایر تنش ها دارای سوی مخالف اند. این موضوع بدیهی است زیرا پس از حذف گشتاور، طبق معادله (۳-۱)، رابطه زیر برقرار است:

$$\int \rho (\tau dA) = 0 \quad (3-39)$$



شکل ۳-۴۳

مثال ۳-۹

برای شفط مثال ۳-۸، مطلوب است: (الف) پیچش دائم، (ب) توزیع تنش های باقیمانده، پس از حذف گشتاور $4,60 \text{ kN.m}$.

(الف) پیچش دائم. از مثال ۳-۸، زاویه پیچش متناظر با گشتاور داده شده برابر است با $8,50^\circ - \phi'$. زاویه ϕ' و پیچش

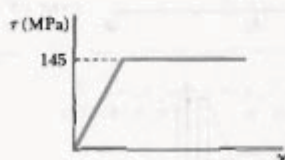
وارد می‌شود و تدریجاً مقدار آن افزایش می‌یابد. مطلوب‌ست مقدار T و زاویه پیچش متناظر: (الف) وقتی تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) وقتی تغییر شکل کاملاً پلاستیک شده است.

حل

خواص هندسی مقطع عرضی عبارتند از:

$$c_1 = \frac{1}{\pi}(38 \text{ mm}) = 19 \text{ mm} \quad c_2 = \frac{1}{\pi}(58 \text{ mm}) = 29 \text{ mm}$$

$$J = \frac{1}{\pi} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{\pi} \pi [(29 \text{ mm})^4 - (19 \text{ mm})^4] \\ = 906,3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$



الف. شروع تسلیم. برای $\tau_{\max} = \tau_Y = 145 \text{ MPa}$

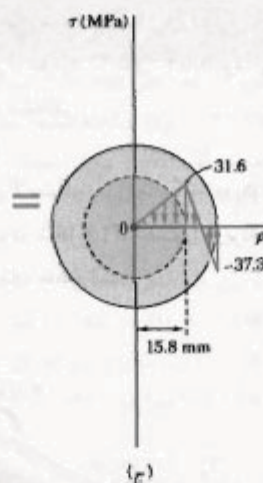
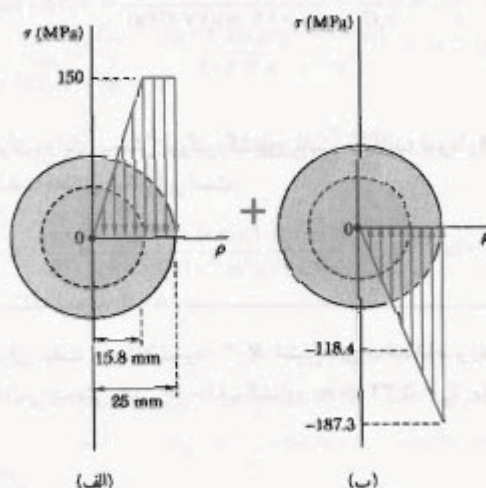
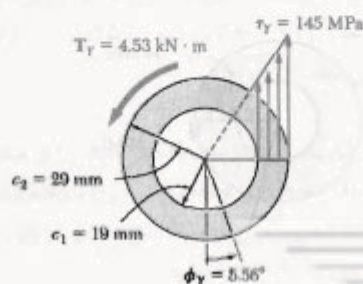
$$T_Y = \frac{\tau_Y J}{c_1} = \frac{(145 \text{ MPa})(906,3 \times 10^3 \text{ mm}^4)}{19 \text{ mm}}$$

$$T_Y = 4,53 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

با قرار دادن $\gamma = \gamma_Y$ و $\rho = c_1$ در معادله (۲-۳) و با حل ϕ ، مقدار ϕ_Y را می‌یابیم:

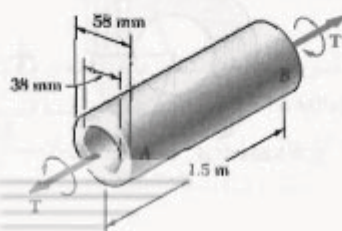
$$\phi_Y = \frac{\gamma_Y L}{c_1} = \frac{\tau_Y L}{c_1 G} = \frac{(145 \text{ MPa})(1500 \text{ mm})}{(19 \text{ mm})(77 \text{ GPa})} \\ = 0,97 \text{ rad}$$

$$\phi_Y = 5,56^\circ \quad \blacktriangleleft$$



شکل ۴۴-۳

مسئله نمونه ۷-۳
شف AB از فولاد متوسط الاستوپلاستیک ($G = 77 \text{ GPa}$) و $\tau_Y = 145 \text{ MPa}$ ساخته شده است. گشتاور T بر شفت



$$\phi_f = \frac{\gamma_y L}{c_1} = \frac{\tau_y L}{c_1 G} = \frac{(145 \text{ MPa})(1.5 \text{ m})}{(0.019 \text{ m})(77 \text{ GPa})} = 0.150 \text{ rad}$$

$$\phi_f = 8.59^\circ \blacktriangleleft$$

برای زوایای پیچش بزرگتر، گشتاور ثابت می ماند؛ نمودار $T-\phi$ شفت مطابق شکل زیر است:

مسئله نمونه ۸-۳

برای شفت مسئله نمونه ۷-۳، تنش های باقیمانده و زاویه دائمی پیچش را پس از حذف گشتاور $T_p = 5.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$ بیابید.

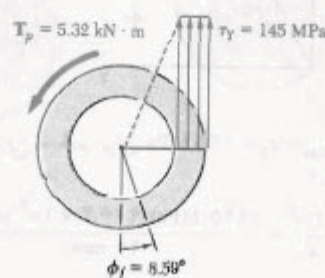
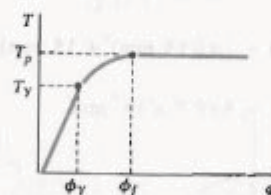
حل

در مسئله نمونه ۷-۳ دیدیم که وقتی منطقه پلاستیک ابتدا به سطح داخلی می رسد، گشتاور وارده T_p و زاویه پیچش ϕ_f به ترتیب، برابر با $5.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$ و 8.59° بود. این مقادیر در شکل (۱) نشان داده شده اند.

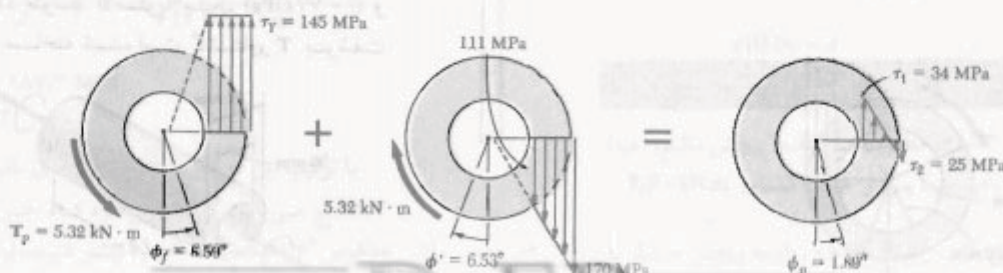
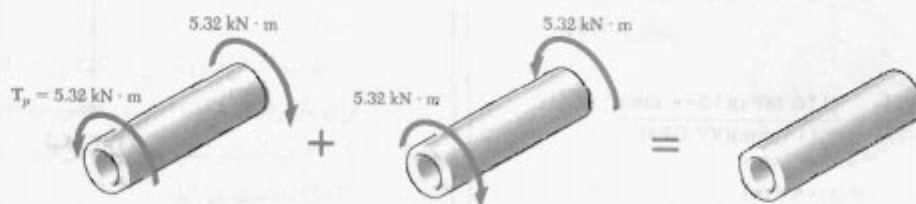
با برداری الاستیک. با اعمال گشتاور $5.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$ در سوی نشان داده شده در شکل (۲)، شفت را بازگردانی می کنیم. در این حالت، رفتار ماده خطی است.

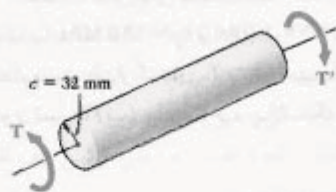
ب. تغییر شکل کاملاً پلاستیک. وقتی منطقه پلاستیک به سطح داخلی می رسد، تنش ها دارای توزیع یکنواخت اند. با استفاده از معادله (۲-۳)،

$$\begin{aligned} T_p &= 2\pi\tau_y \int_{c_1}^{c_2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi\tau_y (c_2^3 - c_1^3) \\ &= \frac{2}{3}\pi (145 \text{ MPa})[(0.029 \text{ m})^3 - (0.019 \text{ m})^3] \\ T_p &= 5.32 \text{ kN}\cdot\text{m} \blacktriangleleft \end{aligned}$$



وقتی تسلیم ابتدا در سطح داخلی روی می دهد، تغییر شکل کاملاً پلاستیک است؛ از معادله (۲-۳)،

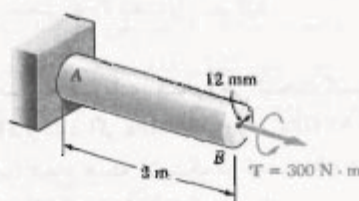




شکل ۹۵-۳

۹۶-۳ برای شفت و یارگذاری مسئله ۹۵-۳، زاویه پیچش را در طول ۱٫۵ m شفت بیابید.

۹۷-۳ شفت AB از ماده الاستوپلاستیک با $\tau_y = 90 \text{ MPa}$ و $G = 30 \text{ GPa}$ ساخته شده است. مطلوبست: (الف) شعاع هسته الاستیک شفت، (ب) زاویه پیچش در سر B.



شکل ۹۷-۳

۹۸-۳ یک شفت توپری دایره‌ای به قطر ۱۸ mm از ماده الاستوپلاستیک ($G = 77 \text{ GPa}$ و $\tau_y = 145 \text{ MPa}$) ساخته شده است. برای طول ۱٫۲ m، ماکزیم تنش برشی و زاویه پیچش ناشی از گشتاور ۲۰۰ N·m را بیابید.

۹۹-۳ یک میله توپری دایره‌ای از ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است. اگر گشتاور و زاویه پیچش را در آغاز تسلیم با τ_y و ϕ_y نشان دهیم، مطلوبست زاویه پیچش در صورتی که گشتاور نا: (الف) $T = 1.1 T_y$ ، (ب) $T = 1.25 T_y$ ، (ج) $T = 1.3 T_y$ افزایش یابد.

۱۰۰-۳ یک شفت توپری دایره‌ای به قطر ۳۰ mm از ماده الاستوپلاستیک ($G = 77 \text{ GPa}$ و $\tau_y = 125 \text{ MPa}$) ساخته شده است. برای طول ۵ ft شفت، ماکزیم تنش برشی و زاویه پیچش ناشی از گشتاور ۸۵۰ N·m را بیابید.

با توجه به مقدار c_1 ، c_2 و J از مسئله نمونه ۷-۳، داریم:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc_2}{J} = \frac{(5.32 \text{ kN}\cdot\text{m})(0.029 \text{ m})}{90.63 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 170 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = \tau_{\max} \frac{c_1}{c_2} = (170 \text{ MPa}) \frac{19 \text{ mm}}{29 \text{ mm}} = 111 \text{ MPa}$$

$$\phi = \frac{TL}{JG} = \frac{(5320 \text{ N}\cdot\text{m})(1.5 \text{ m})}{(90.63 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \text{ GPa})} = 0.114 \text{ rad} = 6.53^\circ$$

تنش‌های باقیمانده و پیچش دائمی. نتایج یارگذاری (شکل ۱) و باربرداری (شکل ۲) را با هم ترکیب می‌کنیم (شکل ۳)، و تنش‌های باقیمانده و زاویه پیچش دائمی ϕ_p را می‌یابیم.

مسائل

۹۱-۳ شفت توپری به قطر ۵۰ mm از فولاد متوسط الاستوپلاستیک ($\tau_y = 120 \text{ MPa}$) ساخته شده است. ماکزیم تنش برشی و شعاع هسته الاستیک را بر اثر اعمال گشتاورهای زیر بیابید: (الف) ۳ kN·m، (ب) ۴ kN·m.

۹۲-۳ شفت توپری به قطر ۳۸ mm از فولاد متوسط الاستوپلاستیک ($\tau_y = 145 \text{ MPa}$) ساخته شده است. ماکزیم تنش برشی و شعاع هسته الاستیک را بر اثر اعمال گشتاورهای زیر بیابید: (الف) ۱٫۲ kN·m، (ب) ۱٫۸ kN·m.

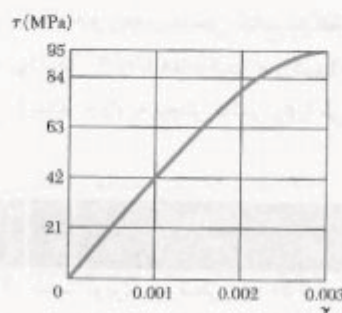
۹۳-۳ گیره کاغذی فولادی با استقامتی را می‌توان با اعمال گشتاور ۶۰ N·m چندین بار پیچاند. اگر قطر سیم گیره کاغذی ۰٫۹ mm باشد، مقدار تقریبی تنش تسلیم فولاد را بیابید.

۹۴-۳ میله توپری به قطر ۳۰ mm از ماده الاستوپلاستیک ($\tau_y = 35 \text{ MPa}$) ساخته شده است. اگر هسته الاستیک میله به قطر ۲۵ mm باشد، مقدار گشتاور وارد بر میله را بیابید.

۹۵-۳ شفت توپری دایره‌ای نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک ($\tau_y = 145 \text{ MPa}$) ساخته شده است. مطلوبست مقدار T گشتاور وارده وقتی منطقه پلاستیک: (الف) به عمق ۱۶ mm است، (ب) به عمق ۲۴ mm است.

۱۰۵-۳ با در نظر گرفتن شفت به طور جزئی پلاستیک در شکل ۳-۳۸، معادله (۳-۳۲) را با توجه به این موضوع استنتاج کنید که انتگرال (۳-۲۶) میان دوم سطح زیر منحنی $\tau-\rho$ را نسبت به محور τ نشان می‌دهد.

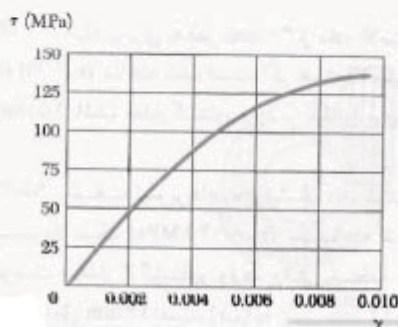
۱۰۶-۳ میله برنجی توپری به قطر ۳۰ mm تحت گشتاوری قرار دارد که در آن تنش برشی ماکزیمم ۹۵ MPa ایجاد می‌کند. با استفاده از نمودار $\tau-\gamma$ نشان داده شده مطلوبیست: (الف) مقدار گشتاور، (ب) زاویه پیچش در طول ۰/۶ m از میله.



شکل م ۱۰۶-۳ و م ۱۰۷-۳

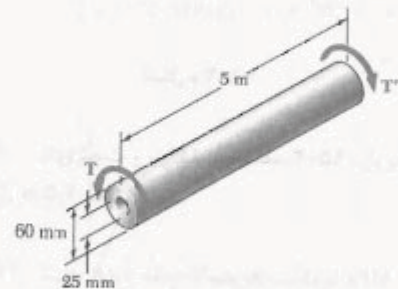
۱۰۷-۳ میله برنجی توپری به قطر ۲۰ mm و به طول ۰/۷۵ mm تحت زاویه ۱۰° می‌پیچد. با استفاده از نمودار $\tau-\gamma$ نشان داده شده، مطلوبیست: (الف) مقدار گشتاور وارد بر میله، (ب) ماکزیمم تنش برشی در میله.

۱۰۸-۳ میله آلومینیومی توپری به قطر ۴۰ mm تحت گشتاوری قرار دارد که در آن کرنش برشی ماکزیمم ۰/۰۰۸ را ایجاد می‌کند. با استفاده از نمودار $\tau-\gamma$ نشان داده شده، مطلوبیست: (الف) مقدار گشتاور وارده، (ب) زاویه پیچش در طول ۷۵۰ mm از میله.



شکل م ۱۰۸-۳

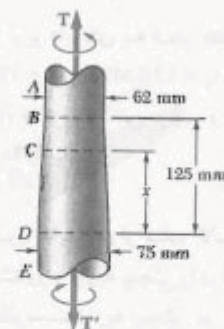
۱۰۱-۳ شفت توخالی نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک با $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ و $G = 77.2 \text{ GPa}$ ساخته شده است. مطلوبیست مقدار گشتاور T و زاویه پیچش متناظر: (الف) در شروع تسلیم، (ب) وقتی ناحیه پلاستیک به عمق ۱۰ mm است.



شکل م ۱۰۱-۳

۱۰۲-۳ در مسئله ۱۰۱-۳، مطلوبیست: (الف) زاویه پیچش که به ازای آن شفت کاملاً پلاستیک می‌شود، (ب) مقدار گشتاور متناظر. منحنی $T-\phi$ شفت را رسم کنید.

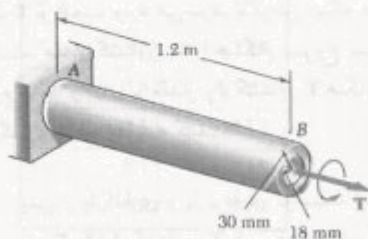
۱۰۳-۳ میله فولادی مخروطی تحت گشتاور $T = 8500 \text{ N.m}$ قرار دارد. اگر $G = 77 \text{ GPa}$ و $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ ، مطلوبیست: (الف) شعاع هسته الاستیک در قسمت AB شفت، (ب) طول قسمت CD که کاملاً الاستیک می‌ماند.



شکل م ۱۰۳-۳

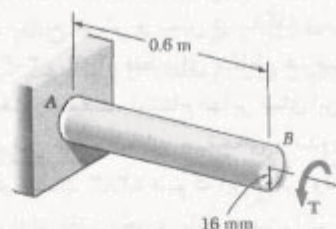
۱۰۴-۳ در مسئله ۱۰۳-۳ اگر گشتاورها آهسته افزایش یابند، مطلوبیست: (الف) مقدار ماکزیمم گشتاور T که می‌توان بر شفت وارد کرد، (ب) طول قسمت CD که کاملاً الاستیک می‌ماند.

۱۱۳-۳ شفت توخالی AB از فولاد الاستوپلاستیک ($G = 77 \text{ GPa}$ و $\tau_y = 145 \text{ MPa}$) ساخته شده است. گشتاور T به طور آهسته افزایش می‌یابد تا اینکه منطقه پلاستیک ابتدا به سطح داخلی می‌رسد؛ سپس، گشتاور حذف می‌شود. مطلوبست: (الف) ماکزیم تنش برشی باقیمانده، (ب) زاویه پیچش دائمی شفت.



شکل م ۱۱۳-۳

۱۱۴-۳ شفت توپر نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک ($G = 77.2 \text{ GPa}$ و $\tau_y = 145 \text{ MPa}$) ساخته شده است. گشتاور T افزایش می‌یابد تا اینکه شفت 6° می‌چرخد؛ سپس، گشتاور حذف می‌شود. مطلوبست: (الف) مقدار و مکان ماکزیم تنش برشی باقیمانده، (ب) زاویه پیچش دائمی شفت.



شکل م ۱۱۴-۳

۱۱۵-۳ در مسئله ۱۱۰-۳، زاویه پیچش دائمی شفت را بیابید.

۱۱۶-۳ گشتاور T بر میله توپری از جنس ماده الاستوپلاستیک وارد می‌شود تا میله به‌طور کامل پلاستیک



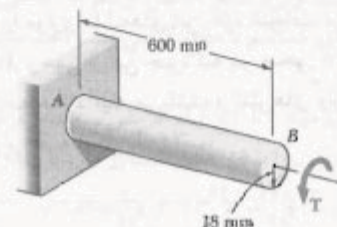
شکل م ۱۱۶-۳

۱۰۹-۳ منحنی شکل م ۱۰۸-۳ را با رابطه تقریبی زیر می‌توان بیان کرد:

$$\tau = 27.8 \times 10^6 \gamma - 1.739 \times 10^{12} \gamma^2$$

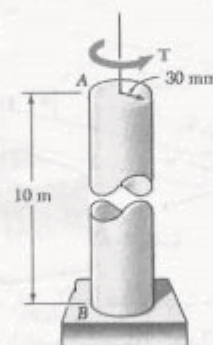
با استفاده از این رابطه و معادله‌های (۲-۳) و (۲۶-۳)، مسئله ۱۰۸-۳ را حل کنید.

۱۱۰-۳ شفت توپر دایره‌ای AB از فولاد الاستوپلاستیک ($G = 77.2 \text{ GPa}$ و $\tau_y = 145 \text{ MPa}$) ساخته شده است. گشتاور T افزایش می‌یابد تا اینکه شعاع هسته الاستیک به 6 mm می‌رسد. ماکزیم تنش برشی باقیمانده را در شفت پس از حذف گشتاور T بیابید.



شکل م ۱۱۰-۳

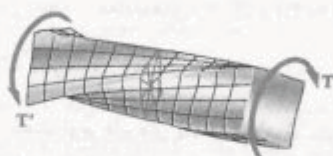
۱۱۱-۳ مته دایره‌ای توپر AB از فولاد الاستوپلاستیک ($G = 77 \text{ GPa}$ و $\tau_y = 160 \text{ MPa}$) ساخته شده است. اگر گشتاور $T = 8475 \text{ N.m}$ بر میله وارد و سپس حذف شود، ماکزیم تنش برشی باقیمانده را در میله بیابید.



شکل م ۱۱۱-۳

۱۱۲-۳ در مسئله ۱۱۱-۳، زاویه پیچش دائمی میله را بیابید.

فاصله از محور میله به صورت خطی تغییر می‌کند و در گوشه‌های مقطع عرضی به بیشترین مقدار می‌رسد. در اینجا خواهیم دید که تنش برشی در این نقاط صفر است.



شکل ۳-۴۵

جزء مکعبی کوچکی را در گوشه مقطع عرضی میله چهارگوشی که تحت پیچش است در نظر گرفته و محورهای مختصات را موازی با لبه‌های این جزء انتخاب می‌کنیم (شکل ۳-۴۶الف). وجهی از این جزء که بر محور z عمود است قسمتی از سطح آزاد میله می‌باشد، و تنش‌های وارد بر آن صفر هستند. با توجه به شکل ۳-۴۶ب،

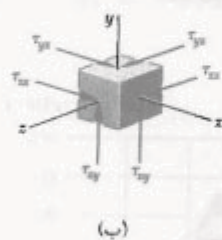
$$\tau_{yx} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (۳-۴۵)$$

به همین دلیل، تمام تنش‌های وارد بر وجهی از جزء که بر محور z عمود است نیز صفر است:

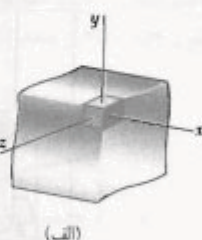
$$\tau_{zx} = 0 \quad \tau_{zy} = 0 \quad (۳-۴۱)$$

از معادله اول (۳-۴۵) و معادله دوم (۳-۴۱) نتیجه می‌شود:

$$\tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad (۳-۴۲)$$



(ب)



(الف)

شکل ۳-۴۶

لذا، هر دو مؤلفه تنش برشی وارد بر وجهی از جزء که بر محور میله عمود است صفر می‌باشند. در نتیجه، هیچ تنش برشی در گوشه‌های مقطع عرضی میله وجود ندارد.

می‌شود؛ سپس، گشتاور حذف می‌شود. (الف) نشان دهید که توزیع تنش‌های باقیمانده به صورت نشان داده شده است. (ب) مقدار گشتاور ناشی از تنش‌های وارد بر قسمتی از میله را که داخل دایره‌ای به شعاع c_0 قرار دارد بیابید.

۳-۱۱۷ پس از باربرداری و بارگذاری توصیف شده برای شفت توخالی مسئله ۳-۱۱۳، گشتاور T_1 با سوی مخالف گشتاور اولیه T بر شفت وارد می‌شود. با فرض اینکه مقدار T_2 مانند قبل است، مقدار گشتاور T_1 را هنگام شروع تسلیم در بارگذاری دوم بیابید و آن را با مقدار T_2 گشتاور T هنگام شروع تسلیم در بارگذاری اولیه مقایسه کنید.

۳-۱۱۸ پس از بارگذاری و باربرداری توصیف شده برای شفت توپر مسئله ۳-۱۱۴، گشتاور T_1 با سوی مخالف گشتاور اولیه T بر شفت وارد می‌شود. با فرض اینکه مقدار ϕ_2 مانند قبل است، مقدار پیچش ϕ_1 مورد نیاز را برای شروع تسلیم در بارگذاری دوم بیابید و آن را با مقدار ϕ_2 که باعث تسلیم شفت در بارگذاری اولیه شد مقایسه کنید.

۳-۱۲ پیچش عضوهای غیردایره‌ای

فرمول‌های توزیع کرنش و تنش در بارگذاری پیچشی در قسمت‌های ۳-۳ و ۳-۴، فقط برای مقاطع عرضی دایره‌ای به کار می‌روند. در حقیقت، استنتاج آنها بر مبنای این فرض بود که مقطع عرضی عضو به طور صفحه‌ای و بدون اعوجاج می‌ماند، و در قسمت ۳-۳ دیدیم که این فرض وقتی صحت دارد که عضو دارای تقارن محوری باشد (یعنی، اگر عضو را از وضعیت ثابتی نگاه کنیم و آن را تحت یک زاویه اختیاری حول محورش بچرخانیم، ظاهر آن تغییر نکند).

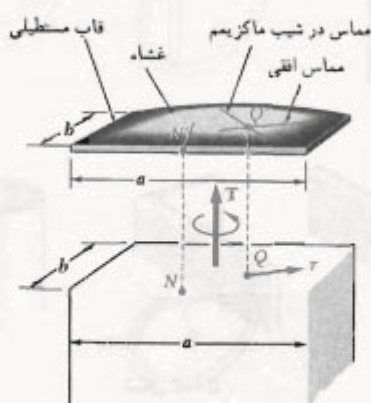
ولی، یک میله با مقطع عرضی چهارگوش فقط وقتی ظاهر خود را حفظ می‌کند که به اندازه 90° یا 180° بچرخد. با استفاده از روش قسمت ۳-۳، می‌توان نشان داد که قطرهای مقطع عرضی میله چهارگوش و خطوط واصل نقاط میانی اضلاع آن مقطع به طور مستقیم می‌مانند (شکل ۳-۴۵). البته، به علت عدم تقارن محوری میله، هر خط دیگری که در مقطع عرضی آن رسم شود هنگام پیچش میله تغییر شکل می‌دهد، و خود مقطع عرضی به طرف خارج صفحه اولیه‌اش می‌پیچد.

در نتیجه، از معادله‌های (۳-۴) و (۳-۶) نمی‌توان برای عضوهای غیردایره‌ای استفاده کرد. مثلاً، نمی‌توان فرض کرد تنش برشی در مقطع عرضی یک میله چهارگوش بر حسب

جدول ۳-۱ ضرایب میله‌های مستطیلی

a/b	c_1	c_2
۱٫۰	۰٫۲۰۸	۰٫۱۴۰۶
۱٫۲	۰٫۲۱۹	۰٫۱۶۶۱
۱٫۵	۰٫۲۳۱	۰٫۱۹۵۸
۲٫۰	۰٫۲۴۶	۰٫۲۲۹
۲٫۵	۰٫۲۵۸	۰٫۲۴۹
۳٫۰	۰٫۲۶۷	۰٫۲۶۳
۴٫۰	۰٫۲۸۲	۰٫۲۸۱
۵٫۰	۰٫۲۹۱	۰٫۲۹۱
۱۰٫۰	۰٫۳۱۲	۰٫۳۱۲
∞	۰٫۳۳۳	۰٫۳۳۳

توزیع تنش برشی در یک عضو غیردایره‌ای را با استفاده از تشابه غشا می‌توان به سهولت تجسم داد. غشای همگن الاستیکی که به قاب ثابتی متصل است و یک طرف آن تحت فشار یکنواخت قرار دارد مشابه میله تحت پیچش است؛ یعنی، برای تعیین تغییر شکل غشا از همان معادله دیفرانسیلی استفاده می‌شود که برای تعیین تنش‌های برشی در میله به کار رفت^{**}. اگر Q یک نقطه از مقطع عرضی میله و Q' نقطه متناظر از غشا باشد (شکل ۳-۴۹)، تنش برشی τ در Q با مماس افقی بر غشا در نقطه Q' هم‌جهت است، و مقدار آن با ماکزیمم شیب غشا در



شکل ۳-۴۹

با پیچاندن مدل الاستیکی یک میله چهارگوش، مشاهده می‌شود که تغییر شکل یا تنش در لبه‌های میله به وجود نمی‌آید. در حالی که خط مرکزی هر یک از وجوه میله دارای ماکزیمم تغییر شکل است و تحت ماکزیمم تنش قرار می‌گیرد (شکل ۳-۴۷).



شکل ۳-۴۷

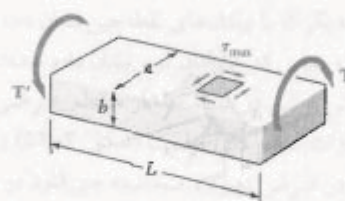
تعیین تنش در عضوهای غیردایره‌ای تحت پیچش فراتر از این متن است. ولی، نتایج حاصل از نظریه ریاضی الاستیسته برای میله‌های مستقیم با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی را در اینجا می‌آوریم.*

اگر طول میله را با L و ضلع عرضی تر مقطع عرضی را با a و ضلع باریک‌تر آن را با b و مقدار گشتاور وارد بر میله را با T نشان دهیم (شکل ۳-۴۸)، ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط مرکزی وجه عرضی تر میله روی می‌دهد و برابر است با:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 ab^2} \quad (3-43)$$

زاویه پیچش را نیز به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\phi = \frac{TL}{c_1 ab^3 G} \quad (3-44)$$



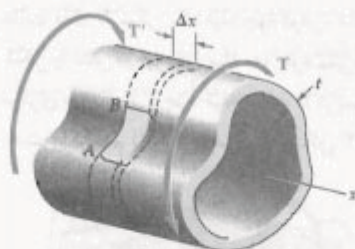
شکل ۳-۴۸

ضرایب c_1 و c_2 فقط به نسبت a/b بستگی دارند و در جدول ۳-۱ آورده شده‌اند. گفتنی است که معادله‌های (۳-۴۳) و (۳-۴۴) فقط در ناحیه الاستیک صحت دارند. از جدول ۳-۱ دیده می‌شود که برای $a/b \geq 5$ ، ضرایب c_1 و c_2 با هم برابرند. می‌توان نشان داد که برای این مقادیر a/b :

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{3} (1 - 0.630 \frac{b}{a}) \quad (a/b \geq 5) \quad (3-45)$$

* See S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of elasticity*, 3d., McGraw-Hill, New York, 1969, sec. 109.

** به قسمت ۷.۱۰ مراجعه شود.



شکل ۵۱-۳

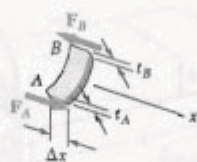
یک استوانه توخالی با مقطع غیردایره‌ای را که تحت بازگذاری پیچشی است در نظر بگیرید (شکل ۵۱-۳).^{***} گرچه ضخامت t دیواره ممکن است در مقطع عرضی تغییر کند، ولی از این ضخامت می‌توان در مقایسه با سایر ابعاد عضو صرف‌نظر کرد. حال، قسمت جداری AB از عضو را که با دو صفحه عرضی به فاصله Δx از یکدیگر و دو صفحه طولی عمود بر دیواره محدود شده است جدا می‌کنیم. چون قسمت AB در تعادل است، مجموع نیروهای وارد بر آن در جهت طولی x صفر است (شکل ۵۲-۳). تنها نیروهای موجود عبارتند از نیروهای برشی F_A و F_B که بر دو انتهای قسمت AB وارد می‌شود. بنابراین،

$$\sum F_x = 0 : \quad F_A - F_B = 0 \quad (۴۶-۳)$$

حال، می‌نویسیم:

$$F_A = \tau_A (t_A \Delta x)$$

که در آن، τ_A تنش برشی طولی وارد بر وجه کوچک در انتهای A و $t_A \Delta x$ مساحت آن وجه است.



شکل ۵۲-۳

* این شبیهی است که در جهت عمود بر مماس افقی در Q' اندازه‌گیری می‌شود.

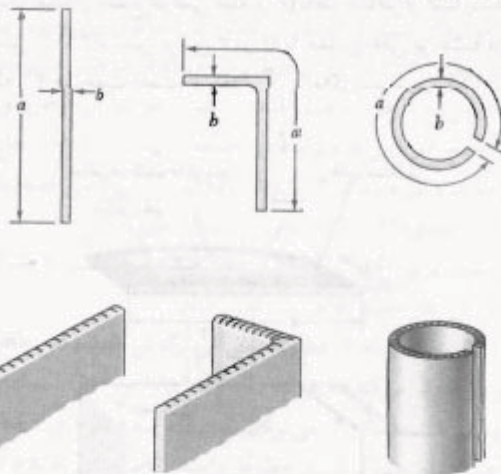
** می‌توان نشان داد که زاویه پیچش را از معادله (۴۴-۳) با $c_1 = 0.333$ می‌توان به‌دست آورد.

*** دیواره این عضو باید شامل یک جفره تنها باشد و نباید دارای یک شکاف باز باشد. به عبارت دیگر، این عضو از نظر توپولوژیکی باید معادل یک شفت دایره‌ای توخالی باشد.

Q' متناسب است.^{*} به‌علاوه، گشتاور وارده با حجم بین غشا و صفحه قاب ثابت متناسب است. در غشای شکل ۴۹-۳، که به یک قاب مستطیلی متصل است، بیشترین شیب در نقطه میانی وجه بزرگتر قاب (نقطه N') روی می‌دهد. لذا، ماکزیمم تنش برشی در میله با مقطع عرضی مستطیلی در نقطه میانی وجه بزرگتر آن مقطع (نقطه N) به‌وجود می‌آید.

از تشابه غشا برای تجسم تنش‌های برشی در میله‌های مستقیم با مقطع عرضی یکنواخت غیردایره‌ای می‌توان استفاده کرد.

مثلاً، عضوهای جدار نازکی را که مقاطع عرضی آنها در شکل ۵۰-۳ نشان داده شده است در نظر بگیرید. این عضوها تحت گشتاور یکسان قرار دارند. با استفاده از تشابه غشا، که به تجسم تنش‌های برشی کمک می‌کند، دیده می‌شود که چون گشتاور یکسان بر هر عضو وارد می‌شود، حجم یکسانی در زیر هر غشا وجود دارد و ماکزیمم شیب در هر دو حالت تقریباً یکسان است. لذا، برای یک عضو جدار نازک با ضخامت یکنواخت و با شکل دلخواه، ماکزیمم تنش برشی مانند ماکزیمم تنش برشی در یک میله مستطیلی است که a/b بسیار بزرگی دارد و آن را از معادله (۴۳-۳) با $c_1 = 0.333$ می‌توان به‌دست آورد.^{**}



شکل ۵۰-۳

* ۱۳-۳ شفت‌های توخالی جدار نازک

در قسمت قبل دیدیم که برای تعیین تنش در عضوهای غیردایره‌ای معمولاً باید از روش‌های پیشرفته ریاضی استفاده کرد. ولی در شفت‌های توخالی جدار نازک، با یک محاسبه ساده می‌توان توزیع تنش را با تقریب خوب تعیین کرد.

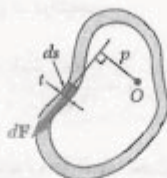
در اینجا، به تشابه بین توزیع تنش برشی τ در مقطع عرضی یک شفت توخالی جدار نازک و توزیع سرعت آبی که در کانال بسته‌ای با عمق واحد و عرض متغیر جریان دارد اشاره می‌کنیم. گرچه سرعت v به علت تغییر عرض کانال از نقطه‌ای تا نقطه دیگر تغییر می‌کند، ولی کمیت $q = v\tau$ (آهنگ جریان) در سرتاسر کانال ثابت است، همانطور که $\pi\tau$ در معادله (۳-۴۸) ثابت است. با توجه به این تشابه، کمیت $q = \pi\tau$ را جریان برشی در دیواره شفت توخالی می‌گویند.

حال، رابطه بین گشتاور T وارد بر یک عضو توخالی و جریان برشی q در دیواره آن را تعیین می‌کنیم. جزء کوچکی از مقطع دیواره، به طول ds را در نظر می‌گیریم (شکل ۳-۵۵). مساحت این جزء عبارت است از $dA = t ds$ و مقدار نیروی برشی dF وارد بر این آن چنین است:

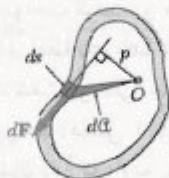
$$dF = \tau dA = \tau(t ds) = (\tau t) ds = q ds \quad (۳-۴۹)$$

گشتاور این نیرو نسبت به نقطه اختیاری O ، که در حفره عضو قرار دارد، چنین است:

$$dM_O = p dF = p(q ds) = q(p ds) \quad (۳-۵۰)$$



شکل ۳-۵۵



شکل ۳-۵۶

که در آن، p فاصله عمودی نقطه O تا خط اثر نیروی dF است. اما کمیت $p ds$ با دو برابر مساحت مثلث سایه خورده در شکل ۳-۵۶ برابر است. لذا،

$$dM_O = q(2 d\Omega) \quad (۳-۵۱)$$

گفتی است که گرچه تنش برشی از مختصه x نقطه تحت بررسی مستقل است، ولی در عرض دیواره تغییر می‌کند؛ لذا، τ_A مقدار متوسط تنش محاسبه شده در عرض دیواره را نشان می‌دهد. F_B را نیز به طور مشابه بیان می‌کنیم. با جایگذاری F_A و F_B در (۳-۴۶)،

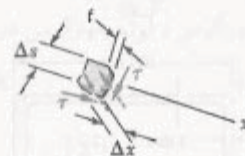
$$\tau_A(t_A \Delta x) - \tau_B(t_B \Delta x) = 0$$

یا

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B \quad (۳-۴۷)$$

چون A و B به طور اختیاری انتخاب شده‌اند، طبق معادله (۳-۴۷)، کمیت $\pi\tau$ در سرتاسر عضو ثابت است. اگر این حاصلضرب را با q نشان دهیم، داریم

$$q = \pi\tau = \text{ثابت} \quad (۳-۴۸)$$



شکل ۳-۵۳

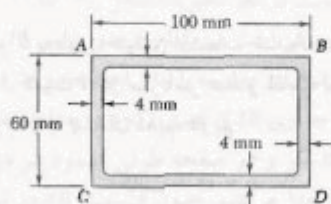
حال، جزء کوچکی از قسمت جدار AB را جدا می‌کنیم (شکل ۳-۵۳). چون وجوه بالایی و پایینی این جزء قسمتی از سطح آزاد عضو توخالی‌اند، تنش وارد بر این وجوه صفر است. با توجه به رابطه‌های (۱-۲۱) و (۱-۲۲)، مؤلفه‌های تنش وارده بر وجوه دیگر که با پیکان‌های نقطه‌چین نشان داده شده‌اند نیز صفرند، و دو تنشی که با پیکان توپر نشان داده شده‌اند با هم برابرند. لذا، تنش برشی در هر نقطه از مقطع عرضی عضو توخالی به موازات سطح دیواره است (شکل ۳-۵۴) و مقدار متوسط آن که در عرض دیواره محاسبه می‌شود در معادله (۳-۴۸) صدق می‌کند.



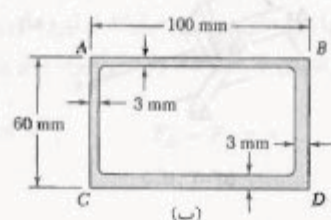
شکل ۳-۵۴

مثال ۳-۱۰

لوله آلومینیومی با مقطع عرضی مستطیلی $60 \times 100 \text{ mm}$ با روش اکستروژن ساخته شده است. مطلوبست تنش برشی در هر یک از چهار دیواره قسمتی از این لوله تحت گشتاور 2.7 kN.m ، با فرض اینکه: (الف) ضخامت یکنواخت دیواره 4 mm است (شکل ۳-۵۸ الف)، (ب) بر اثر نقص ساخت، ضخامت دیواره‌های AB و AC برابر با 3 mm و ضخامت دیواره‌های BD و CD برابر با 5 mm است (شکل ۳-۵۸ ب).



(الف)



(ب)

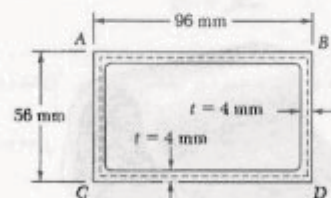
شکل ۳-۵۸

(الف) لوله با ضخامت یکنواخت. مساحت محصور شده توسط خط مرکزی (شکل ۳-۵۹) چنین است:

$$A = (96 \text{ mm})(56 \text{ mm}) = 5376 \text{ mm}^2$$

چون ضخامت هر چهار دیواره 4 mm است، تنش برشی در هر دیواره از معادله (۳-۵۳) چنین است:

$$\tau = \frac{T}{2tA} = \frac{2700 \text{ N.m}}{2(0.004 \text{ m})(5376 \times 10^{-6} \text{ m}^2)} = 62.8 \text{ MPa}$$



شکل ۳-۵۹

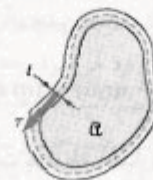
انتگرال عضو سمت چپ معادله (۳-۵۱) پیرامون مقطع جدار برابر است با مجموع لنگر نیروهای برشی جزئی وارد بر مقطع جدار، و این مجموع نیز با گشتاور T وارد بر عضو توخالی برابر است. در نتیجه،

$$T = \oint dM_o = \oint q(2dA)$$

جریان برشی q یک ثابت است، و می‌نویسیم:

$$T = 2qA \quad (3-52)$$

که در آن A مساحتی است که توسط خط مرکزی مقطع عرضی دیواره محدود شده است (شکل ۳-۵۷).



شکل ۳-۵۷

با جایگذاری q از (۳-۴۸) در (۳-۵۲) و با حل τ از معادله حاصل، می‌توان تنش برشی τ در هر نقطه از دیواره را برحسب گشتاور T به دست آورد. در نتیجه،

$$\tau = \frac{T}{2tA} \quad (3-53)$$

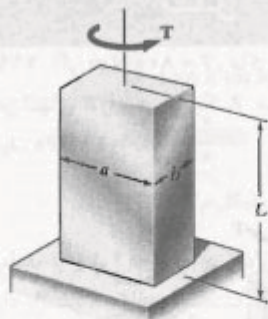
که در آن t ضخامت دیواره در نقطه تحت بررسی و A مساحتی است که توسط خط مرکزی محدود شده است. باید توجه داشت که مقدار متوسط تنش برشی در عرض دیواره است. ولی، توزیع تنش در عرض دیواره را برای تغییرشکل‌های الاستیک می‌توان یکنواخت گرفت، و معادله (۳-۵۳) مقدار واقعی تنش برشی را در نقطه داده شده دیواره می‌دهد.

زاویه پیچش یک شفت توخالی جدار نازک را با استفاده از روش انرژی می‌توان یافت (فصل ۱۱). با فرض تغییرشکل الاستیک، می‌توان نشان داد* که زاویه پیچش یک شفت جدار نازک به طول L و با مدول صلابت G چنین است:

$$\phi = \frac{TL}{2AG} \oint \frac{ds}{t} \quad (3-54)$$

که در آن، انتگرال در امتداد خط مرکزی مقطع جدار محاسبه می‌شود.

* به مسئله ۸۳-۱۱ نگاه کنید.



۲- میله با مقطع عرضی مستطیلی. در این حالت،

$$a = 0.064 \text{ m} \quad b = 0.025 \text{ m} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2.56$$

با درون‌یابی در جدول ۳-۱، $c_1 = 0.259$. در نتیجه،

$$\tau_{\max} = \frac{T_r}{c_1 a b^2} \Rightarrow 40 \text{ MPa} = \frac{T_r}{0.259 (0.064 \text{ m})(0.025 \text{ m})^2}$$

$$\Rightarrow T_r = 414 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$

۳- لوله چهارگوش. برای لوله با ضخامت t ، تنش برشی با معادله (۳-۵۳) بیان می‌شود:

$$\tau = \frac{T}{\gamma t a}$$

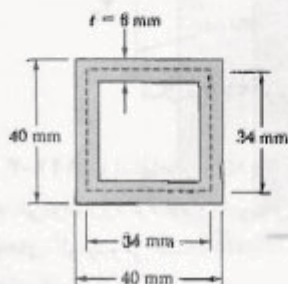
که در آن a مساحتی است که توسط خط مرکزی مقطع عرضی محدود شده است:

$$a = (0.034 \text{ m})(0.034 \text{ m}) = 1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

گشتاور مجاز را می‌یابیم: $t = 0.006 \text{ m}$ و $\tau = \tau_{\text{all}} = 40 \text{ MPa}$

$$\tau = \frac{T}{\gamma t a} \Rightarrow 40 \text{ MPa} = \frac{T_r}{\gamma (0.006 \text{ m})(1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}$$

$$\Rightarrow T_r = 555 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$



(ب) لوله با ضخامت متغیر. مساحت a محصور شده توسط خط مرکزی مانند قسمت (الف) است، و با جایگذاری $t = 3 \text{ mm}$ و $t = 5 \text{ mm}$ در معادله (۳-۵۳)، داریم:

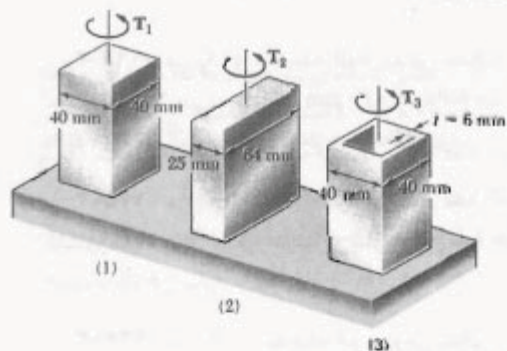
$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{2700 \text{ N.m}}{\gamma (0.003 \text{ m})(0.2376 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 83.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{2700 \text{ N.m}}{\gamma (0.005 \text{ m})(0.2376 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 50.2 \text{ MPa}$$

توجه کنید که تنش در دیواره فقط به ضخامت آن بستگی دارد.

مسئله نمونه ۳-۹

با استفاده از $\tau_{\text{all}} = 40 \text{ MPa}$ ، ماکزیمم گشتاوری را که می‌توان بر هر یک از میله‌ها و لوله برنجی نشان داده شده وارد کرد بیابید. توجه کنید که دو میله توپر دارای مساحت مقطع عرضی یکسان، و میله چهارگوش و لوله چهارگوش دارای ابعاد خارجی یکسان هستند.



حل

۱- میله با مقطع عرضی چهارگوش. برای میله توپر با مقطع عرضی مستطیلی، ماکزیمم تنش برشی با معادله (۳-۴۳) داده می‌شود:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 a b^2}$$

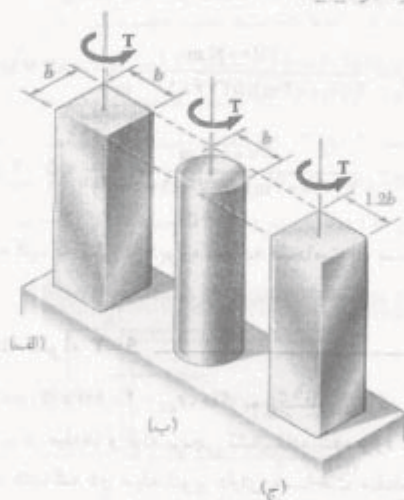
$$a = b = 0.040 \text{ m} \Rightarrow \frac{a}{b} = 1.00$$

از جدول ۳-۱، برای $c_1 = 0.208$ ، $\tau_{\text{all}} = 40 \text{ MPa}$

$$\tau_{\max} = \frac{T_r}{c_1 a b^2} \Rightarrow 40 \text{ MPa} = \frac{T_r}{0.208 (0.040 \text{ m})^2}$$

$$\Rightarrow T_r = 532 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$

۱۲۳-۳ هر یک از سه میله فولادی نشان داده شده تحت گشتاور $T = 275 \text{ N.m}$ قرار دارد. اگر تنش مجاز برشی 50 MPa باشد، اندازه b را بیابید.



شکل م ۱۲۳-۳، ۱۲۴-۳، ۱۲۵-۳ و ۱۲۶-۳

۱۲۴-۳ هر یک از سه میله آلومینیومی نشان داده شده تحت زاویه 2° می پیچد. اگر $b = 30 \text{ mm}$ ، $\tau_{\text{all}} = 50 \text{ MPa}$ و $G = 27 \text{ GPa}$ ، کمترین طول مجاز هر میله را بیابید.

۱۲۵-۳ هر یک از سه میله فولادی نشان داده شده تحت گشتاور $T = 550 \text{ N.m}$ قرار دارد. اگر تنش برشی مجاز 55 MPa باشد، اندازه b را بیابید.

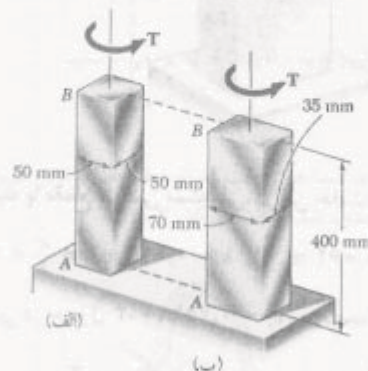
۱۲۶-۳ هر یک از سه میله آلومینیومی نشان داده شده تحت زاویه 1.25° می پیچد. اگر $b = 38 \text{ mm}$ ، $\tau_{\text{all}} = 50 \text{ MPa}$ و $G = 27 \text{ GPa}$ ، کمترین طول مجاز هر میله را بیابید.

۱۲۷-۳ شفت‌های A و B از ماده یکسان ساخته شده‌اند و دارای طول یکسان و مقطع عرضی یکسان هستند، اما A دارای مقطع عرضی دایره‌ای و B دارای مقطع عرضی چهارگوش است. مطلوبیت نسبت ماکزیمم گشتاورهای T_A و T_B که می‌توان با اطمینان بر A و B وارد کرد.

۱۲۸-۳ شفت‌های A و B از ماده یکسان ساخته شده‌اند و دارای طول یکسان و مقطع عرضی یکسان هستند، اما A دارای مقطع عرضی دایره‌ای و B دارای مقطع عرضی چهارگوش است. نسبت ماکزیمم زوایای پیچش ϕ_A و ϕ_B را برای شفت‌های A و B بیابید.

مسائل

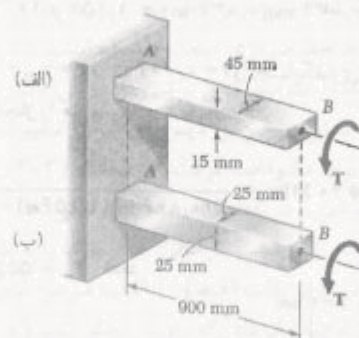
۱۱۹-۳ اگر $T = 800 \text{ N.m}$ ، ماکزیمم تنش برشی و زاویه پیچش در انتهای B را برای هر یک از میله‌های برنج زرد با نورد سرد بیابید. $G = 39 \text{ GPa}$.



شکل م ۱۱۹-۳ و ۱۲۰-۳

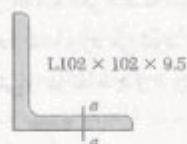
۱۲۰-۳ با استفاده از $\tau_{\text{all}} = 50 \text{ MPa}$ ماکزیمم گشتاور T را که می‌توان وارد کرد و زاویه پیچش متناظر در انتهای B را برای هر یک از میله‌های برنج زرد با نورد سرد بیابید. $G = 39 \text{ GPa}$.

۱۲۱-۳ اگر مقدار گشتاور T برابر با 200 N.m باشد، ماکزیمم تنش برشی و زاویه پیچش را در انتهای B برای هر یک از میله‌های آلومینیومی نشان داده شده بیابید. $G = 27 \text{ GPa}$ استفاده کنید.



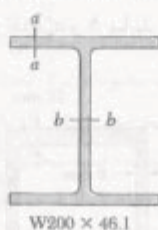
شکل م ۱۲۱-۳ و ۱۲۲-۳

۱۲۲-۳ با استفاده از $\tau_{\text{all}} = 70 \text{ MPa}$ ماکزیمم گشتاور T را که می‌توان وارد کرد و زاویه پیچش متناظر را برای هر یک از میله‌های آلومینیومی نشان داده شده بیابید. $G = 27 \text{ GPa}$ استفاده کنید.



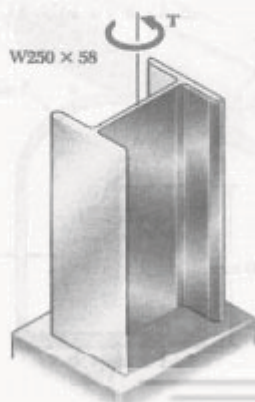
شکل م ۳-۱۳۱

۳-۱۳۲ عضو فولادی به طول ۲٫۴ m و با مقطع عرضی $W 200 \times 46.1$ تحت گشتاور 560 N.m قرار دارد. اگر $G = 77 \text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط $a-a$ ، (ب) ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط $b-b$ ، (ج) زاویه پیچش. (راهنمایی: جان و بال‌ها را به‌طور جداگانه در نظر بگیرید و رابطه‌ای بین گشتاورهای وارد بر جان و بال را بیابید. برای این منظور، زوایای پیچش را مساوی هم قرار دهید).

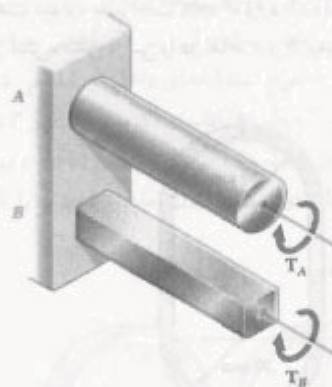


شکل م ۳-۱۳۲

۳-۱۳۳ عضو فولادی به طول ۳ m دارای مقطع عرضی $W 250 \times 58$ است. اگر $G = 77.2 \text{ GPa}$ و تنش برشی مجاز 35 MPa باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاور T که می‌توان وارد کرد، (ب) زاویه پیچش متناظر. برای ابعاد مقطع عرضی به پیوست ج مراجعه کنید. تمرکز تنش را در نظر بگیرید (به راهنمایی مسئله ۳-۱۳۲ نگاه کنید).



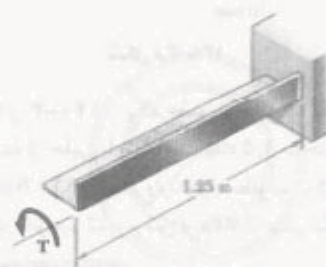
شکل م ۳-۱۳۳



شکل م ۳-۱۲۷ و م ۳-۱۲۸

۳-۱۲۹ مطلوبست ماکزیمم مقطع عرضی مجاز شفت فولادی به طول ۴ m در صورتی که بخواهیم وقتی شفت یک دوران کامل انجام می‌دهد، ماکزیمم تنش برشی در آن 120 MPa بیشتر نشود. $G = 77.2 \text{ GPa}$.

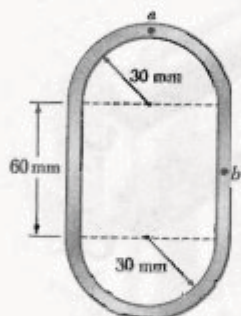
۳-۱۳۰ نبشی فولادی به طول ۱٫۲۵ m دارای مقطع عرضی $L 127 \times 76 \times 6.4$ است. از پیوست ج، ضخامت این مقطع 6.4 mm و مساحت آن 1252 mm^2 است. اگر $G = 77.2 \text{ GPa}$ و $\tau_{\text{all}} = 60 \text{ MPa}$ ، با صرف‌نظر از تمرکز تنش، مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاور T که می‌توان وارد کرد، (ب) زاویه پیچش متناظر.



شکل م ۳-۱۳۰

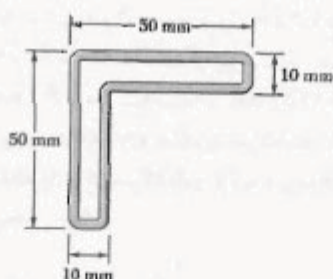
۳-۱۳۱ گشتاور 320 N.m بر نبشی فولادی به طول ۱٫۸ m با مقطع عرضی $L 102 \times 102 \times 9.5$ وارد شده است. از پیوست ج، ضخامت این مقطع 9.5 mm و مساحت آن 1850 mm^2 است. اگر $G = 77 \text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط $a-a$ ، (ب) زاویه پیچش.

۳-۱۳۷ گشتاور $T = 750 \text{ N.m}$ بر شفت توخالی، با ضخامت دیواره یکتوانخت 6 mm وارد شده است. با صرفنظر از تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط a و b بیابید.



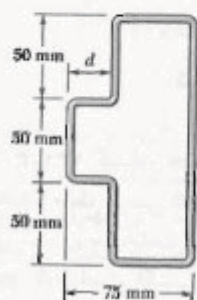
شکل م-۱۳۷

۳-۱۳۸ یک عضو توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده از حلیی با ضخامت 2 mm ساخته شده است. اگر تنش برشی نباید از 3 MPa بیشتر شود، ماکزیمم گشتاوری را که می توان بر عضو وارد کرد بیابید.

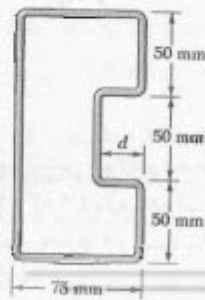


شکل م-۱۳۸

۳-۱۳۹ و ۳-۱۴۰ یک عضو توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده از حلیی با ضخامت $1/5 \text{ mm}$ ساخته شده است. اگر گشتاور 140 N.m بر عضو وارد شود، مطلوبست کمترین اندازه d در صورتی که بخواهیم تنش برشی از 5 MPa بیشتر نشود.

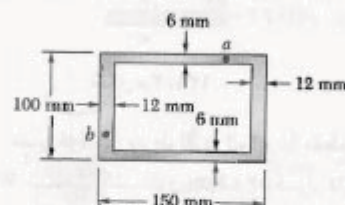


شکل م-۱۴۰



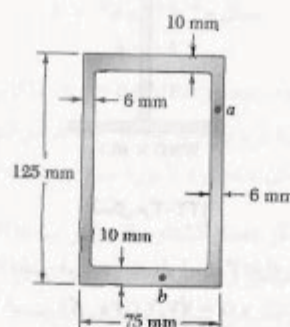
شکل م-۱۳۹

۳-۱۳۴ گشتاور 7 kN.m بر شفت آلومینیومی توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده وارد می شود. با صرفنظر از تأثیر تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط a و b بیابید.



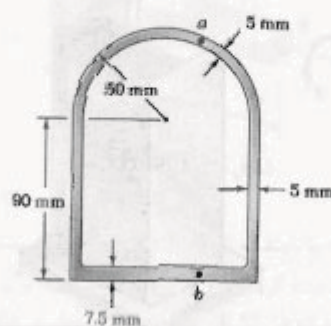
شکل م-۱۳۴

۳-۱۳۵ گشتاور 50 kN.m بر شفت توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده وارد شده است. با صرفنظر از تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط a و b بیابید.



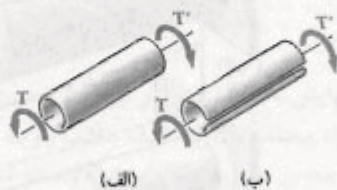
شکل م-۱۳۵

۳-۱۳۶ گشتاور 5600 N.m بر شفت توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده وارد شده است. با صرفنظر از تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط a و b بیابید.



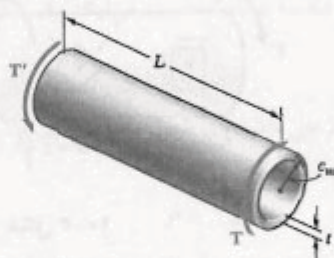
شکل م-۱۳۶

۱۴۴-۳ گشتاورهای مساوی بر لوله‌های جدار نازک با طول یکسان L ، ضخامت یکسان t ، و شعاع یکسان c وارد شده‌اند. یکی از لوله‌ها، مطابق شکل، در جهت طولی شکاف برداشته است. مطلوبست: (الف) نسبت ماکزیمم تنش‌های برشی در لوله‌ها (τ_B/τ_A) ، (ب) نسبت زوایای پیچش شفت‌ها (ϕ_B/ϕ_A) .



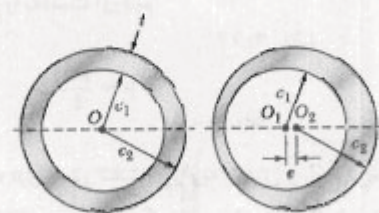
شکل م ۱۴۴-۳

۱۴۵-۳ شفت استوانه‌ای توخالی به طول L ، شعاع متوسط c_m ، و ضخامت یکنواخت t تحت گشتاورهای T قرار دارد. مقدار تنش برشی متوسط τ_{ave} و زاویه پیچش ϕ را یکبار با فرمول‌های پیچش الاستیک (قسمت‌های ۳-۴ و ۵-۳) و بار دیگر با استفاده از مقادیر حاصل از فرمول‌های شفت‌های جدار نازک توخالی (قسمت ۳-۱۳) در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که خطای نسبی ناشی از کاربرد فرمول‌های شفت (به جای استفاده از فرمول‌های پیچش الاستیک) برای τ_{ave} و ϕ یکسان است و مقدار آن مثبت و متناسب با نسبت t/c_m است. (ب) درصد خطای متناظر با مقادیر نسبت t/c_m برابر با ۰٫۱، ۰٫۲ و ۰٫۴ را با هم مقایسه کنید.



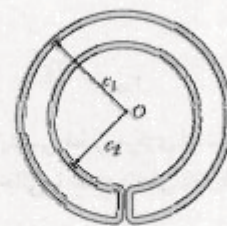
شکل م ۱۴۵-۳

۱۴۶-۳ شفت استوانه‌ای توخالی یا مقطع عرضی نشان داده شده در شکل ۱ برای مقاومت در برابر گشتاور ماکزیمم T_0 طراحی شده است. ولی، بر اثر نقص ساخت، خروج از مرکز e بین سطوح استوانه‌های داخلی و خارجی شفت وجود دارد (قسمت ۲ شکل). (الف) ماکزیمم گشتاور T را که می‌توان با اطمینان بر شفت وارد کرد بر حسب T_0 ، e و t بیابید. (ب) درصد کاهش گشتاور مجاز را برای مقادیر e/t برابر با ۰٫۱، ۰٫۲، ۰٫۳، ۰٫۴، ۰٫۵، ۰٫۶، ۰٫۷، ۰٫۸، ۰٫۹، ۱٫۰ بیابید.



شکل م ۱۴۶-۳

۱۴۷-۳ یک لوله خنک‌کن دارای مقطع عرضی نشان داده شده است و از ورق فولادی زنگ نزن به ضخامت ۳ mm ساخته شده است. شعاع‌های c_1 و c_2 تا خط مرکزی مقطع اندازه‌گیری شده‌اند و، به ترتیب، برابر با ۱۵۰ mm و ۱۰۰ mm هستند. اگر گشتاور $T = 3 \text{ kN.m}$ بر لوله وارد شود، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در لوله، (ب) مقدار گشتاور وارد بر پوسته خارجی دایره‌ای از اندازه دهانه کوچک محل اتصال پوسته‌های خارجی و داخلی صرف‌نظر کنید.



شکل م ۱۴۷-۳ و م ۱۴۸-۳

۱۴۸-۳ یک لوله خنک‌کن دارای مقطع عرضی نشان داده شده است و از ورق فولادی زنگ‌نزن با ضخامت t ساخته شده است. شعاع‌های c_1 و c_2 تا خط مرکزی مقطع اندازه‌گیری شده‌اند. اگر گشتاور T بر لوله وارد شود، ماکزیمم تنش برشی در لوله را بر حسب T ، c_1 ، c_2 و t بیابید.

مرور و خلاصه فصل ۳

در این فصل، شفتهایی را که تحت گشتاورهای پیچشی قرار دارند تحلیل و طراحی کردیم. به جز دو قسمت آخر، صرفاً شفتهای دایره‌ای بررسی شدند. در قسمت ۲-۳، گفتیم که توزیع تنش در مقطع عرضی یک شفت دایره‌ای از نوع نامعین استاتیکی است و برای تعیین آن باید تغییر شکل شفت بررسی شود [قسمت ۳-۳]. با اثبات این موضوع که در یک شفت دایره‌ای تحت پیچش تمام مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای ویی اعوجاج می‌مانند، برای جزء کوچکی که جواب آن به موازات محور شفت و عمود بر آن هستند عبارت زیر را به دست آوردیم:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad (2-3)$$

که در آن، γ کرنش برشی در فاصله ρ از محور شفت، ϕ زاویه پیچش و L طول شفت است (شکل ۳-۱۴). معادله (۲-۳) نشان می‌دهد که کرنش برشی در یک شفت دایره‌ای بر حسب فاصله از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند. در نتیجه، کرنش در سطح شفت، یعنی در $\rho = c$ دارای مقدار ماکزیمم است:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (3-3 \text{ و } 4-3)$$

با در نظر گرفتن تنش برشی در یک شفت دایره‌ای در ناحیه الاستیک [قسمت ۴-۳] و با توجه به قانون هوک برای تنش و کرنش برشی، $\tau = G\gamma$ ، رابطه زیر را به دست آوردیم:

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \quad (6-3)$$

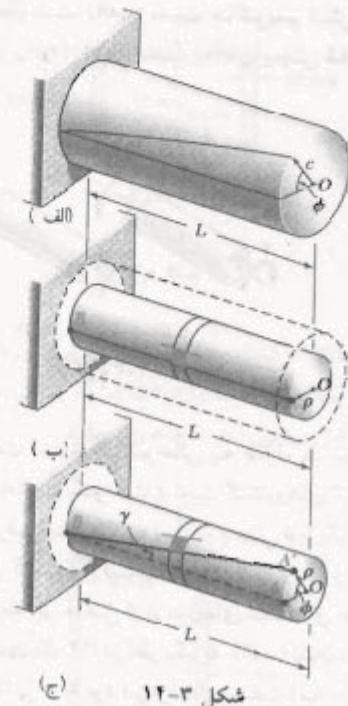
رابطه بالا نشان می‌دهد که در ناحیه الاستیک، تنش برشی τ در یک شفت دایره‌ای نیز بر حسب فاصله از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند. مجموع لنگر نیروهای وارد بر قسمت‌های مختلف شفت را مساوی مقدار گشتاور وارد بر شفت قرار دادیم و فرمول‌های پیچش الاستیک را به دست آوردیم:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \tau = \frac{T\rho}{J} \quad (10-3, 9-3)$$

که در آن، c شعاع مقطع عرضی و J ممان اینرسی قطبی مرکزی است. می‌دانیم که برای یک شفت توپر $J = \frac{1}{2}\pi c^4$ و برای شفت توخالی با شعاع داخلی c_i و شعاع خارجی c_o ، $J = \frac{1}{2}\pi (c_o^4 - c_i^4)$.

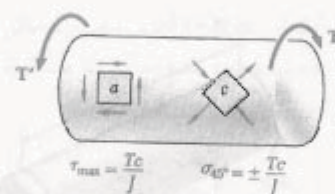
توجه کنید در حالی که جزء a در شکل ۲۰-۳ در برش خلاص است، جزء c در همان شکل تحت تنش‌های قائم با مقدار یکسان Tc/J قرار دارد، که دو تا از آنها کششی و دو تای دیگر فشاری هستند. به همین دلیل، یک ماده چکش‌خوار در آزمایش پیچش، که معمولاً تحت برش گسیخته می‌شود، در امتداد یک صفحه عمود بر محور نمونه می‌شکند، در حالی که مواد ترد (شکننده)، که در کشش ضعیف‌تر از برش هستند، در امتداد خطوطی که با آن محور زاویه 45° دارند می‌شکنند.

تغییر شکل شفتهای دایره‌ای



شکل ۳-۱۴ (ج)

تنش برشی در ناحیه الاستیک



شکل ۳-۲۰

در قسمت ۳-۵ دیدیم که در ناحیه الاستیک، زاویه پیچش یک شفت دایره‌ای با گشتاور وارد بر آن متناسب است (شکل ۳-۲۲). با ϕ برحسب رادیان،

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (۳-۱۶)$$

که در آن،

L = طول شفت

J = ممان اینرسی قطبی مقطع عرضی

G = مدول صلابت ماده

اگر شفت در نقاطی غیر از دو انتهایش تحت گشتاور قرار گیرد یا از قسمت‌های مختلف با مقاطع عرضی متفاوت و از مواد مختلف ساخته شده باشد، زاویه پیچش شفت به صورت مجموع جبری زوایای پیچش اجزای آن بیان می‌شود [مسئله نمونه ۳-۳]:

$$\phi = \sum \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad (۳-۱۷)$$

در شکل ۳-۲۶ ب دیده می‌شود وقتی هر دو انتهای شفت BE می‌چرخند، زاویه پیچش شفت برابر است با تفاضل زوایای چرخش ϕ_B و ϕ_E دو انتهای شفت. همچنین، توجه کنید وقتی دو شفت AD و BE توسط چرخ‌دنده‌های A و B به هم متصل شده‌اند، گشتاورهای وارده از چرخ‌دنده A بر شفت AD و از چرخ‌دنده B بر شفت BE ، به ترتیب، با شعاع‌های r_A و r_B این دو چرخ‌دنده به‌طور مستقیم متناسب‌اند زیرا نیروهای وارده از دنده‌های چرخ‌دنده در C مساوی و متضادند. از طرف دیگر، زوایای چرخش ϕ_B و ϕ_A دو چرخ‌دنده با r_B و r_A به‌طور معکوس متناسب‌اند زیرا قوس‌های CC' و CC' که دنده چرخ‌دنده‌ها طی می‌کنند با هم برابرند [مثال ۳-۴ و مسئله نمونه ۳-۴].

اگر واکنش در تکیه‌گاه‌های یک شفت یا گشتاورهای داخلی را نتوان صرفاً با استفاده از استاتیک تعیین کرد، شفت را نامعین استاتیکی می‌گویند [قسمت ۳-۶]. در این حالت، معادله‌های تعادل را که از نمودارهای آزاد به‌دست می‌آیند باید با رابطه‌هایی که شامل تغییر شکل شفت هستند و از هندسه مسئله به‌دست می‌آیند ترکیب کرد [مثال ۳-۵ و مسئله نمونه ۳-۵].

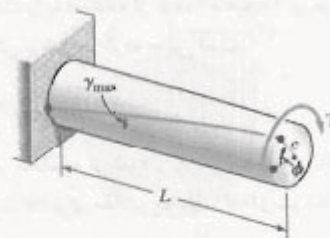
در قسمت ۳-۷، درباره طراحی شفت‌های انتقال بحث کردیم. ابتدا، قدرت P را که توسط شفت منتقل می‌شود بیان کردیم:

$$P = 2\pi fT \quad (۳-۲۰)$$

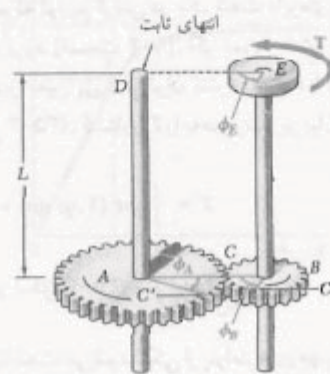
که در آن، T گشتاور وارد بر هر انتهای شفت و f فرکانس دوران شفت است. واحد فرکانس عبارت است از دوران بر ثانیه (s^{-1}) یا هرتز (Hz). در واحدهای SI، T برحسب نیوتن-متر (N.m) و P برحسب وات (W) است.

برای طراحی شفتی که قدرت معین P را در فرکانس f انتقال می‌دهد، ابتدا باید T را از معادله (۳-۲۰) حل کرد. با قرار دادن این مقدار و ماکزیمم مقدار مجاز τ شفت در فرمول (۳-۹)، مقدار پارامتر d را تعیین و لزوماً آن قطر شفت را محاسبه می‌کنیم [مثال‌های ۳-۶ و ۳-۷].

زاویه پیچش



شکل ۳-۲۲



شکل ۳-۲۶ ب

شفت‌های نامعین استاتیکی

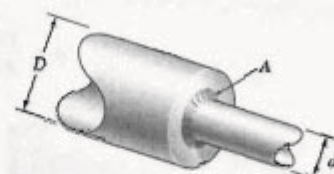
شفت‌های انتقال

تمرکز تنش

در قسمت ۳-۸، تمرکز تنش را در شفت‌های دایره‌ای بررسی کردیم. دیدیم که تمرکز تنش حاصل از یک تغییر ناگهانی در قطر شفت را با استفاده از گرده (ماهپیچه) می‌توان کاهش داد (شکل ۳-۳۱). ماکزیمم مقدار تنش برشی در گرده چنین است

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J} \quad (۳-۲۵)$$

که در آن، تنش Tc/J برای شفت با قطر کوچکتر محاسبه می‌شود و K ضریب تمرکز تنش است. در شکل ۳-۳۲، مقدار K برحسب نسبت r/d برای مقادیر مختلف D/d رسم شدند (r شعاع گرده است).



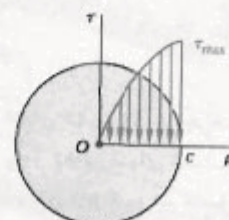
شکل ۳-۳۱

تغییر شکل پلاستیک

در قسمت‌های ۳-۹ تا ۳-۱۱، درباره تغییر شکل پلاستیک و تنش‌های باقیمانده در شفت‌های دایره‌ای بحث شد. ابتدا، گفتیم که توزیع کرنش در یک شفت دایره‌ای همواره خطی است حتی اگر قانون هوک به کار نرود [قسمت ۳-۹]. اگر نمودار تنش-کرنش برشی ماده‌ای معلوم باشد، برای هر مقدار معین $\tau_{\max}$ می‌توان تنش برشی τ را برحسب فاصله ρ از محور شفت رسم کرد (شکل ۳-۳۵). گشتاور T را به صورت زیر بیان کردیم:

$$T = \int_0^c \rho \tau (\pi \rho d\rho) = \pi \int_0^c \rho^2 \tau d\rho \quad (۳-۲۶)$$

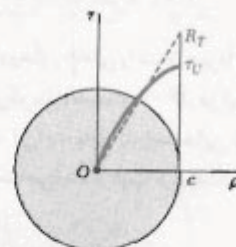
که در آن، τ تابعی از ρ است. این تابع در شکل ۳-۲۵ رسم شده است.



شکل ۳-۲۵

مدول شکست

گشتاور نهایی T_U ، که باعث شکست شفت می‌شود، یکی از پارامترهای مهم است و آن را با آزمایش یا با محاسبه می‌توان تعیین کرد. برای این منظور، $\tau_{\max}$ را مساوی تنش برشی نهایی τ_U ماده قرار می‌دهیم. از T_U ، و با فرض توزیع خطی تنش (شکل ۳-۳۶)، تنش خیالی $R_T = T_U c/J$ را تعیین کردیم. تنش R_T را مدول شکست پیچشی شفت می‌گویند.



شکل ۳-۳۶

در قسمت ۳-۱۰ گفتیم که برای شفت توپر دایره‌ای الاستوپلاستیکی، تا وقتی $\tau_{\max}$ از استقامت تسلیم τ_Y شفت بیشتر نشده است، توزیع تنش در تمام مقاطع شفت به صورت خطی است (شکل ۳-۳۸ الف). گشتاور T_Y متناظر با $\tau_{\max} = \tau_Y$ (شکل ۳-۳۸ ب) ماکزیمم گشتاور الاستیک است. برای یک شفت توپر دایره‌ای به شعاع c ،

$$T_Y = \frac{1}{4} \pi c^3 \tau_Y \quad (۳-۲۹)$$

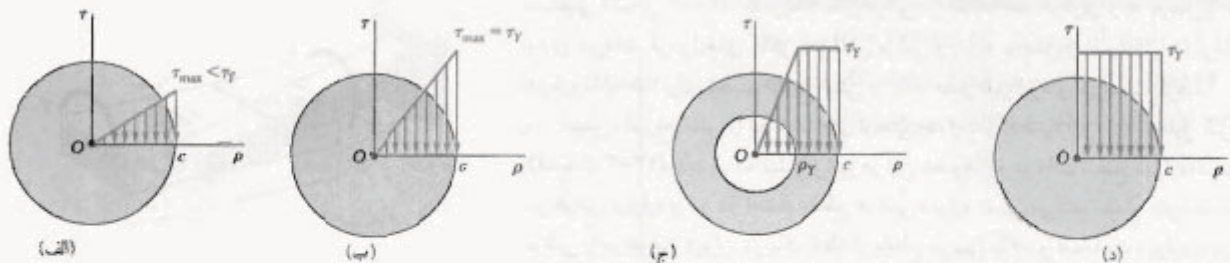
با افزایش گشتاور، در پیرامون هسته الاستیک به شعاع ρ_Y یک ناحیه پلاستیک گسترش می‌یابد. گشتاور T متناظر با مقدار داده شده ρ_Y چنین است:

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^3}{c^3} \right) \quad (۳-۳۰)$$

وقتی ρ_Y به صفر نزدیک می‌شود، گشتاور T به مقدار حدی T_P ، به نام گشتاور پلاستیک شفت میل می‌کند:

$$T_P = \frac{4}{3} T_Y \quad (۳-۳۱)$$

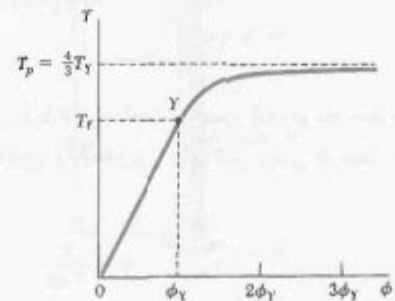
شفت توپر الاستوپلاستیکی



شکل ۳۸-۳

با ترسیم گشتاور T بر حسب زاویه پیچش ϕ برای شفت توپر دایره‌ای (شکل ۳۹-۳)، پاره خط مستقیم OY را، که با معادله (۳۶-۳) تعریف می‌شود، به دست می‌آید؛ به دنبال این خط، یک منحنی و سپس خط مستقیم $T = T_p$ می‌آید؛ معادله قسمت منحنی چنین است:

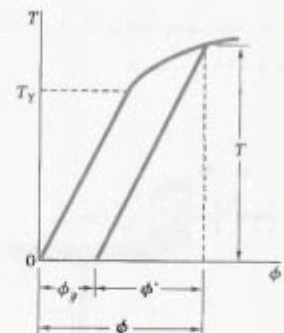
$$T = \frac{\pi}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4} \phi_Y^2 \right) \quad (37-3)$$



شکل ۳۹-۳

بارگذاری یک شفت دایره‌ای پس از شروع تسلیم و باربرداری آن (قسمت ۳-۱۱) باعث ایجاد تغییر شکل دائمی می‌شود. این تغییر شکل از رابطه $\phi_p = \phi - \phi'$ ، به دست می‌آید، که در آن ϕ متناظر با حالت بارگذاری است که در پاراگراف قبل توصیف شد و ϕ' متناظر با حالت باربرداری است که با یک خط مستقیم در شکل ۴۲-۳ نشان داده می‌شود. همچنین، تنش‌های باقیمانده در شفت به وجود می‌آید. از مجموع تنش‌های ماکزیمم در حالت بارگذاری و تنش‌های معکوس متناظر در حالت باربرداری، تنش‌های باقیمانده به دست می‌آیند (مثال ۳-۹).

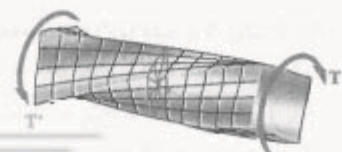
تغییر شکل دائمی، تنش‌های باقیمانده



شکل ۴۲-۳

در دو قسمت آخر فصل درباره پیچش عضوهای غیردایره‌ای بحث کردیم. ابتدا گفتیم که استنتاج فرمول‌های توزیع کرنش و تنش در شفت‌های دایره‌ای بر این مبنا انجام شد که، به علت تقارن محوری این اعضا، مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند. چون این خاصیت برای عضوهای غیردایره‌ای، مانند میله چهارگوش شکل ۴۵-۳ صحت ندارد، فرمول‌های قبل را نمی‌توان در تحلیل این اعضا به کار برد (قسمت ۳-۱۲).

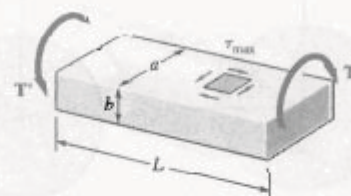
پیچش عضوهای غیردایره‌ای



شکل ۴۵-۳



میلۀ با مقطع عرضی مستطیلی



شکل ۴۸-۳

در قسمت ۳-۱۲ نشان دادیم که در میلۀهای مستقیم با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی (شکل ۳-۴۸)، ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط مرکزی وجه عریض‌تر میلۀ روی می‌دهد. فرمول‌های ماکزیمم تنش برشی و زاویه پیچش را بدون اثبات نوشتیم. دیواره تشابه غشا برای تجسم توزیع تنش در یک عضو غیردایره‌ای نیز بحث کردیم. سپس، توزیع تنش را در شفت‌های توخالی جدار نازک غیردایره‌ای، تحلیل کردیم (قسمت ۳-۱۳). دیدیم که تنش برشی در این اعضا به موازات سطح دیواره است، و در عرض دیواره و نیز در امتداد مقطع عرضی دیواره تغییر می‌کند. مقدار متوسط تنش برشی را در عرض دیواره در یک نقطه از مقطع عرضی با τ ، و ضخامت دیواره را در آن نقطه با t نشان دادیم (شکل ۳-۵۷). دیدیم که کمیت τt ، که آن را جریان برش می‌گویند، در امتداد مقطع عرضی ثابت است.

گشتاور وارد بر شفت توخالی را با T و مساحت محصور شده توسط خط مرکزی مقطع عرضی دیواره را با A نشان دادیم، و رابطه زیر را برای تنش برشی متوسط τ در یک نقطه از مقطع عرضی نوشتیم:

$$\tau = \frac{T}{A t} \quad (۳-۵۳)$$

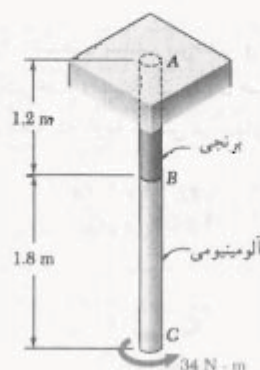
شفت‌های توخالی جدار نازک



شکل ۵۷-۳

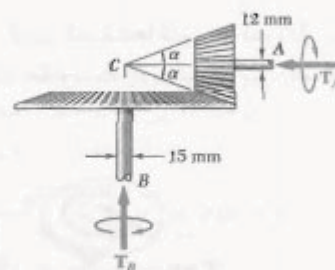
مسائل تکمیلی

۱۴۶-۳ میلۀ آلومینیومی BC ($G = 27 \text{ GPa}$) به میلۀ برنجی AB ($G = 39 \text{ GPa}$) به هم متصل شده‌اند. اگر قطر هر میلۀ 12 mm باشد، مطلوبست زاویه پیچش: (الف) در B ، (ب) در C .



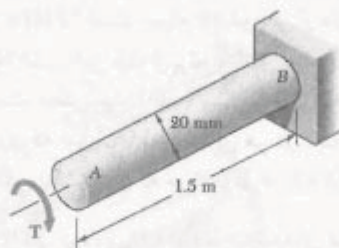
شکل م ۱۴۶-۳

۱۴۷-۳ در سیستم چرخ‌دنده مخروطی نشان داده شده، اگر تنش مجاز برشی آلومینیوم 55 MPa و $\alpha = 18.43^\circ$ شفت‌ها و کل سیستم در تعادل باشند، ماکزیمم گشتاور T_A را که می‌توان در A وارد کرد بیابید.



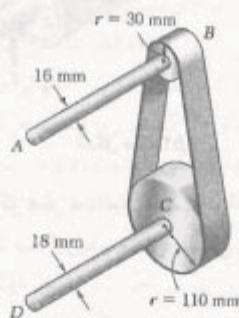
شکل م ۱۴۷-۳

۱۴۸-۳ گشتاور T بر میلۀ فولادی AB به قطر 20 mm وارد شده است. اگر $G = 77.4 \text{ GPa}$ و $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ ، مطلوبست: (الف) گشتاور T وقتی زاویه پیچش در A برابر 25° است. (ب) قطر متناظر هسته الاستیک شفت.



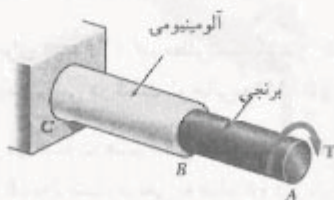
شکل م ۱۴۸-۳

۱۴۹-۳ مجموعه نشان داده شده 2 kW را از نقطه A به نقطه D انتقال می‌دهد. (الف) با استفاده از تنش برشی مجاز 66 MPa ، سرعت شفت AB را بیابید. (ب) قسمت الف را با این فرض حل کنید که قطر شفت‌های AB و CD ، به ترتیب، 18 mm و 15 mm باشد.



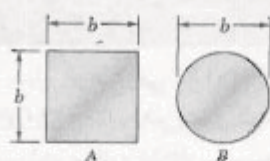
شکل م ۱۴۹-۳

۱۵۰-۳ تنش مجاز در میلۀ برنجی AB برابر 50 MPa و در میلۀ آلومینیومی BC برابر با 25 MPa است. اگر گشتاور $T = 125 \text{ N·m}$ در A وارد شود، مطلوبست قطر: (الف) میلۀ AB ، (ب) میلۀ BC .



شکل م ۱۵۰-۳ و م ۱۵۱-۳

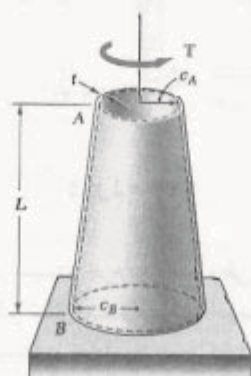
PNUEB



شکل م ۱۵۵-۳

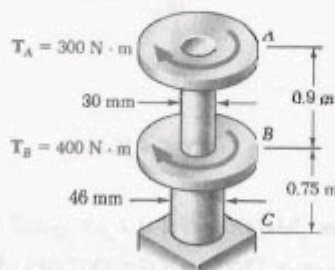
۱۵۶-۳ شفت بلند، توخالی و مخروطی AB دارای ضخامت یکنواخت t است. اگر مدول صلابت را با G نشان دهیم، نشان دهید که زاویه پیچش در انتهای A چنین است

$$\phi_A = \frac{TL}{\pi G t} \frac{c_A + c_B}{c_A^2 c_B^2}$$



شکل م ۱۵۶-۳

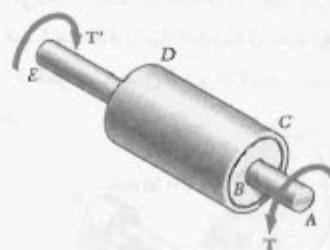
۱۵۷-۳ اگر شفت‌ها توپر و فولادی باشند و $G = 77.2 \text{ GPa}$ ، مطلوبست زاویه پیچش بین: (الف) A و B ، (ب) A و C .



شکل م ۱۵۷-۳

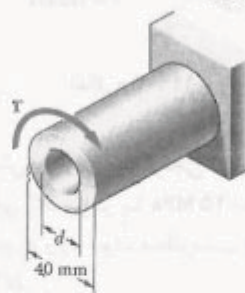
۱۵۱-۳ میله توپر BC به قطر 30 mm و از آلومینیوم با تنش برشی مجاز 25 MPa است. میله AB توخالی و دارای قطر خارجی 25 mm است؛ این میله از برنج با تنش برشی 50 MPa ساخته شده است. مطلوبست: (الف) بیشترین قطر داخلی برای میله AB به طوری که ضریب اطمینان برای هر دو میله یکسان باشد، (ب) بیشترین گشتاوری که می‌توان در A وارد کرد.

۱۵۲-۳ ژاکت فولادی CD توسط فلانج‌های صلب به شفت AE به قطر 40 mm متصل شده است (فلانج‌ها به ژاکت و میله جوش شده‌اند). قطر خارجی ژاکت 80 mm و ضخامت دیواره آن 4 mm است. با اعمال گشتاور 500 N·m ، ماکزیمم تنش برشی را در ژاکت بیابید.



شکل م ۱۵۲-۳

۱۵۳-۳ اگر قطر داخلی شفت توخالی نشان داده شده 22 mm باشد، ماکزیمم تنش برشی حاصل از گشتاور $T = 1000 \text{ N·m}$ را بیابید.



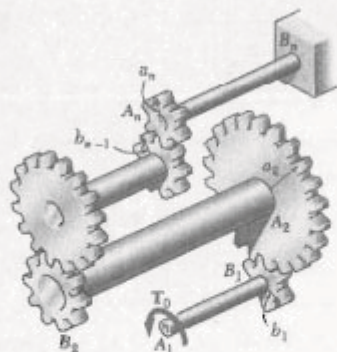
شکل م ۱۵۳-۳ و م ۱۵۴-۳

۱۵۴-۳ برای $d = 30 \text{ mm}$ ، مطلوبست گشتاور T به طوری که تنش ماکزیمم برشی در شفت توخالی 50 MPa باشد.

۱۵۵-۳ دو شفت هم‌جنس هستند. مقطع عرضی شفت‌های A و B ، به ترتیب، مربعی به ضلع b و دایره‌ای به قطر b است. اگر شفت‌ها تحت گشتاور یکسان قرار گیرند، نسبت ϕ_A/ϕ_B را برای ایجاد ماکزیمم تنش برشی در شفت‌ها بیابید.

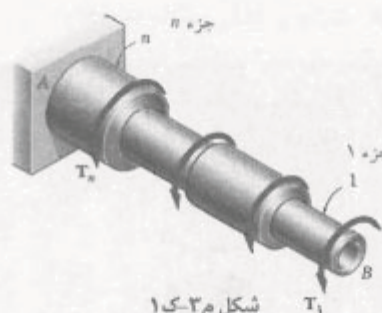
مسائل کامپیوتری

مسائل زیر برای حل با کامپیوتر طراحی شده‌اند.



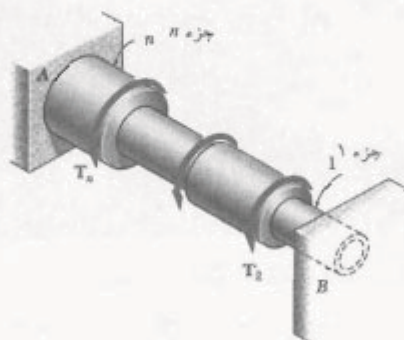
شکل م ۳-۲

۳-۳ شفت AB از n جزء همگن استوانه‌ای، که می‌توانند توپر یا توخالی باشند، تشکیل شده است. هر دو انتهای آن ثابت‌اند، و تحت بارگذاری نشان داده شده قرار دارد. طول جزء i با L_i ، قطر خارجی آن با OD_i ، قطر داخلی آن با ID_i ، مدول صلابت آن با G_i و گشتاور وارد بر انتهای راست آن را با T_i نشان می‌دهیم. مقدار T_i گشتاور را مثبت می‌گیریم هرگاه T_i از انتهای B به‌طور پادساعتگرد دیده شود و در غیر این صورت منفی می‌گیریم. (توجه کنید که اگر جزء توپر باشد، $ID_i = 0$). (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با آن ماکزیمم تنش برشی در هر جزء، زاویه پیچش هر جزء، و زاویه پیچش تمام شفت را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه مسائل ۳-۳۶، ۳-۳۷، و ۳-۱۵۷ را حل کنید.

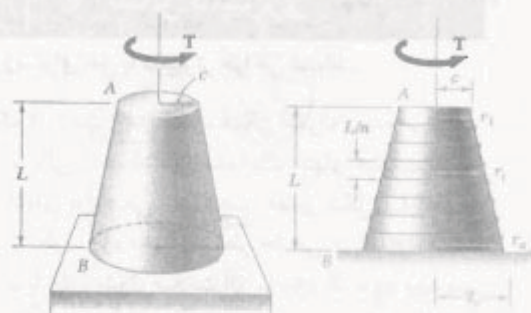


شکل م ۳-۱

۳-۲ مجموعه نشان داده شده از n شفت استوانه‌ای، که می‌توانند توپر یا توخالی باشند، تشکیل شده است. این شفت‌ها توسط چرخ‌دنده‌هایی به هم متصل شده‌اند و مجموعه توسط بست‌هایی (که نشان داده نشده‌اند) نگه داشته شده است. انتهای A_1 شفت اول آزاد است و تحت گشتاور T_0 قرار دارد، و انتهای B_n شفت آخر ثابت است. طول شفت $A_i B_i$ با L_i ، قطر خارجی آن با OD_i ، قطر داخلی آن با ID_i و مدول صلابت آن را با G_i نشان می‌دهیم (توجه کنید که برای جزء توپر $ID_i = 0$). شعاع چرخ‌دنده A_i با a_i و شعاع چرخ‌دنده B_i را با b_i نشان می‌دهیم. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن ماکزیمم تنش برشی در هر شفت، زاویه پیچش هر شفت و زاویه چرخش انتهای A_i را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۳-۴۲، ۳-۴۳، و ۳-۴۴ را حل کنید.



شکل م ۳-۲



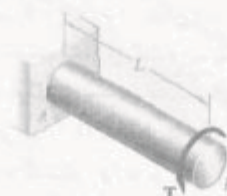
شکل م ۳-۵۵

۳-۵۶ گشتاور T مطابق شکل بر شفت بلند، توخالی و مخروطی AB ، که دارای ضخامت یکنواخت t است، وارد شده است. عبارت دقیق زاویه پیچش شفت را از عبارت داده شده در مسئله ۳-۱۵۶ می‌توان به دست آورد. این شفت را با n حلقه استوانه‌ای با طول مساوی و با شعاع $r_i = (n+1 - \frac{i}{n})(cn)$ ($n = 1, 2, \dots$) جایگزین کنید و عبارت تقریبی زاویه پیچش را بیابید. با استفاده از مقادیر انتخابی برای T, L, G, c و t ، درصد خطای این عبارت تقریبی را در موارد زیر بیابید: (الف) $n = 4$ ، (ب) $n = 8$ ، (ج) $n = 20$ ، (د) $n = 100$.



شکل م ۳-۵۶

۳-۵۷ شفت همگن و توپر استوانه‌ای AB دارای طول L ، قطر d ، مدول صلابت G و استقامت تسلیم s_y است. این شفت تحت گشتاور T قرار دارد. مقدار این گشتاور به تدریج از صفر افزایش می‌یابد تا اینکه زاویه پیچش شفت به مقدار ماکزیمم ϕ_m می‌رسد و سپس مجدداً تا صفر کاهش می‌یابد. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن، برای هر مقدار ϕ_m که در بازه‌های مساوی قرار دارید و از 0° تا 3° برابر زاویه پیچش در شروع تسلیم هسته، کمیت‌های زیر را بیابید: مقدار ماکزیمم T_m گشتاور، شعاع هسته الاستیک، ماکزیمم تنش برشی، پیچش دائمی و تنش برشی باقیمانده در سطح شفت و در فصل مشترک بین هسته الاستیک و ناحیه پلاستیک. (ب) با استفاده از این برنامه، پاسخ‌های تقریبی را برای مسائل ۳-۱۱۱ و ۳-۱۱۲ و ۳-۱۱۴ بیابید.



شکل م ۳-۵۷

۳-۵۸ عبارت دقیق زاویه پیچش شفت توپر مخروطی AB هنگامی که تحت گشتاور T قرار می‌گیرد، در مسئله ۳-۹۱ داده شده است. شفت مخروطی را با n شفت استوانه‌ای با طول مساوی و با شعاع $r_i = (n+1 - \frac{i}{n})(cn)$ جایگزین کنید و عبارت تقریبی زاویه پیچش را بیابید ($n = 1, 2, \dots$). با استفاده از مقادیر انتخابی برای T, L, G, c و t ، درصد خطای این عبارت تقریبی را در موارد زیر بیابید: (الف) $n = 4$ ، (ب) $n = 8$ ، (ج) $n = 20$ ، (د) $n = 100$.