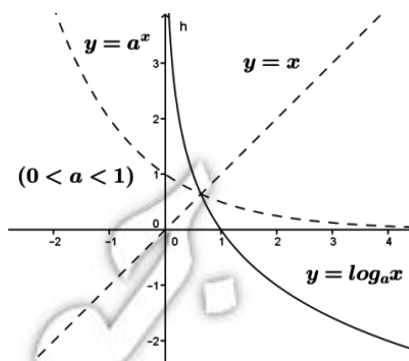
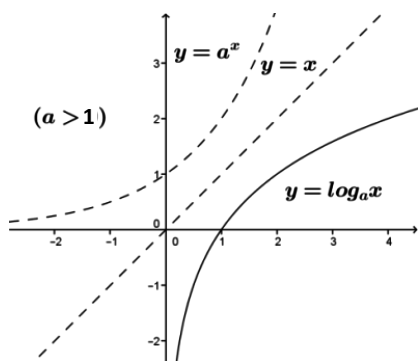




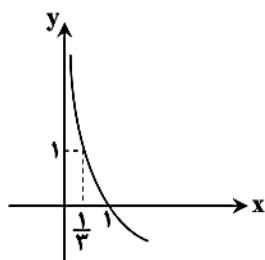
**تابع لگاریتم:** وارون تابع نمایی با ضابطه‌ی  $f(x) = a^x$  را به صورت  $f^{-1}(x) = \log_a x$  نشان می‌دهیم و آنرا لگاریتم  $x$  در پایه‌ی  $a$  می‌نامیم. پس در حالت کلی داریم:



**نکته:** تابع  $f(x) = \log_a x$  در صورتی که  $a > 1$  صعودی و در حالت  $0 < a < 1$  نزولی است.



**تست:** ضابطه‌ی تابع مقابل کدام می‌تواند باشد؟



- (۱)  $y = (\frac{1}{3})^x$
- (۲)  $y = 3^x$
- (۳)  $y = \log_3 x$
- (۴)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

**نکته:** گزینه ۴ صحیح است. چون  $\frac{1}{3} < 1$  پس تابع  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  نزولی است.



**تست:** نمودار توابع  $y = 2^{-x}$  و  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  نسبت به ..... قرینه‌اند.

- (۱) محور طول‌ها
- (۲) محور عرض‌ها
- (۳) نیمساز ربع اول و سوم
- (۴) نیمساز ربع دوم و چهارم

**نکته:** گزینه ۳ صحیح است. داریم:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x, y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

پس دو تابع وارون یکدیگر و قرینه نسبت به نیمساز ناچیه اول و سوم هستند.



تبدیل عبارات نمایی به لگاریتمی و برعکس:

با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توانیم عبارات نمایی و لگاریتمی را به یکدیگر تبدیل کنیم:

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$



مثال: به صورت لگاریتمی و برعکس تبدیل کنید

۱)  $\log_{10} 100 = 2$  , ۲)  $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$  , ۳)  $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

۴)  $7^2 = 49$  , ۵)  $4^{-3} = \frac{1}{64}$  , ۶)  $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

پاسخ: با توجه به تعریف بالا داریم:

۱)  $\log_{10} 100 = 2 \Rightarrow 10^2 = 100$  , ۲)  $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

۳)  $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

۴)  $7^2 = 49 \Rightarrow \log_7 49 = 2$  , ۵)  $4^{-3} = \frac{1}{64} \Rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$

۶)  $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \log_{\frac{1}{25}} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$



مثال: مقدار عددی عبارت‌های  $\log_{10} 1000$  ,  $\log_2 \sqrt{2}$  ,  $\log_{\sqrt{5}} 125$  را بیابید.

$$\log_{10} 1000 = x \Rightarrow 10^x = 1000 \Rightarrow x = 3$$

$$\log_2 \sqrt{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\sqrt{5}} 125 = x \Rightarrow \sqrt{5}^x = 125 \Rightarrow 5^{\frac{1}{2}x} = 5^3 \Rightarrow x = 6$$



**تست:** نمودار تابع  $y = \log_a(x-2)$  از نقطه  $(\frac{17}{4}, -2)$  عبور می‌کند. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳) ۳      (۴)  $\frac{3}{4}$

**نکته:** گزینه ۲ صحیح است. داریم:

$$y = \log_a(x-2) \xrightarrow{\left(\frac{17}{4}, -2\right)} \log_a\left(\frac{17}{4}-2\right) = -2 \Rightarrow a^{-2} = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$



**نکته:** لگاریتم در پایه‌ی عدد ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم و در این حالت پایه را نمی‌نویسیم. یعنی:

$$\log_{10} x = \log x$$

**تذکره:** حاصل عبارت زیر را بیابید.

$\log_2 4 =$

$\log_3 \sqrt{27} =$

$\log 10 =$

$\log_3 1 =$

$\log_3 243 =$

$\log_6 \frac{1}{6} =$

$\log_{\frac{1}{5}} 8 =$

$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} =$

**تذکره:** جواب کامل نامعادله‌ی  $2^x > \log_2 x$  کدام است؟

$x > 2$  (۴)

$x \in \mathbb{R}$  (۳)

$x > -1$  (۲)

$x > 0$  (۱)

**تذکره:** تعداد رادیکال‌ها در معادله‌ی  $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}} = -8$  چقدر است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

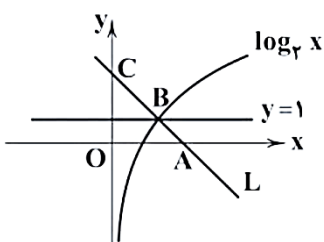
**تذکره:** اگر مثلث رنگی، متساوی‌الساقین باشد، مساحت آن چقدر است؟

۴/۵ (۱)

۳/۵ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)



تست ۴:

تابع با ضابطه  $f(x) = a + \log_7(bx - 4)$  از دو نقطه  $(2, 6)$  و  $(10, 12)$  می‌گذرد.  $a$  کدام است؟

(ریاضی ۹۶)

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



نکته



نکته: واضح است که داریم:

$$f(x) = \log_a u \Rightarrow \begin{cases} u > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

مثال



مثال: دامنه‌ی تابع  $y = \log_8(4 - x^2)$  را بیابید.

$$f(x) = \log_8(4 - x^2) \Rightarrow 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2 \\ \Rightarrow D_f = (-2, 2)$$

تست



تست: دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$  به کدام صورت بازه‌ها است؟

- ۱)  $[-2, 0) \cup (3, 5]$     ۲)  $[-2, 0] \cup (3, 5)$     ۳)  $[-2, 3)$     ۴)  $(0, 5]$

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است. اولاً مقدار  $x$  نمی‌تواند باشد. پس گزینه ۲ و ۳ صحیح نیست. اگر  $x = 1$  داریم:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \sqrt{1 - \log(-2)}$$

که تعریف شده نیست. پس گزینه ۴ نیز نادرست است. لذا گزینه ۱ صحیح است.

شرح ۴:

دامنه‌ی توابع  $h(x) = \sqrt{1 - \log(1 - x)}$ ,  $g(x) = \log_x(1 - x)$ ,  $f(x) = \log \sqrt{x^2 - 3x}$  را بیابید.



((اهام علی(ع): بدترین مردم کسی است که خود را بهتر از دیگران بداند.))

تست: دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(x-2)}$  کدام است؟

(۴)  $[3, 4]$

(۳)  $(3, 4]$

(۲)  $[3, +\infty)$

(۱)  $(3, +\infty)$



تست: برد کدام یک از توابع زیر برابر  $\mathbb{R}$  است؟

(۴)  $k(x) = \sin x$

(۳)  $h(x) = \log_{0.3} x$

(۲)  $g(x) = 2^{-x}$

(۱)  $f(x) = x^2$



قوانین لگاریتم:

۱)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$  ، ۲)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

۳)  $\left( \log_a x^n = n \log_a x \text{ , } \log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x \right) \Rightarrow \log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$



نکته: داریم:

۱)  $\log_a 1 = 0$  ، ۲)  $\log_a a = 1$

نکته: داریم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \Rightarrow \begin{cases} \log 5 = 1 - \log 2 \\ \log 2 = 1 - \log 5 \end{cases}$$



مثال: اگر  $\log 2 = 0/3$  و  $\log 3 = 0/5$  باشد، حاصل را بیابید.

۱)  $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0/3 + 0/5 = 0/8$

۲)  $\log \frac{4}{9} = \log 4 - \log 9 = \log 2^2 - \log 3^2 = 2 \log 2 - 2 \log 3 = -0/4$

۳)  $\log \frac{\sqrt[3]{9}}{5} = \log \sqrt[3]{9} - \log 5 = \frac{2}{3} \log 3 - (1 - \log 2) = \frac{2}{3} (0/5) - (0/7) = \frac{-11}{30}$



ادامه قوانین لگاریتم:

$$\begin{aligned} ۴) \quad a^{\log_a x} &= x & , ۵) \quad \log_b a &= \frac{1}{\log_a b} \\ ۶) \quad \log_y x &= \frac{\log_a x}{\log_a y} & , ۷) \quad \log \frac{1}{x} &= -\log x \end{aligned}$$



مثال: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} ۱) \quad \log_{\sqrt{49}} \frac{1}{7} &= & , ۲) \quad \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{0.25} &= & , ۳) \quad \log_{\sqrt{3}} 81 &= \\ ۴) \quad \log_{\sqrt{5}} 25 &= & , ۵) \quad \log \sqrt{0.001} &= & , ۶) \quad \frac{1}{\log_7 \sqrt[3]{49}} &= \end{aligned}$$

پاسخ: به کمک روابط بالا داریم:

$$\begin{aligned} ۱) \quad \log_{\sqrt{49}} \frac{1}{7} &= \log_{7^2} 7^{-1} = \frac{-1}{2} \log_7 7 = \frac{-1}{2} \\ ۲) \quad \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{0.25} &= \log_{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \\ ۳) \quad \log_{\sqrt{3}} 81 &= \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^4 = \frac{4}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = 8 \\ ۴) \quad \log_{\sqrt{5}} 25 &= \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4 \times 1 = 4 \\ ۵) \quad \log \sqrt{0.001} &= \frac{1}{2} \log 0.001 = \frac{1}{2} \log 10^{-3} = \frac{-3}{2} \log_{10} 10 = \frac{-3}{2} \times 1 = \frac{-3}{2} \\ ۶) \quad \frac{1}{\log_7 \sqrt[3]{49}} &= \log_{\sqrt[3]{49}} 7 = \log_{7^{\frac{2}{3}}} 7^1 = \frac{1}{\frac{2}{3}} \log_7 7 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



مثال: اگر  $\log 2 = 0.3$  و  $\log 3 = 0.5$  باشد، حاصل را بیابید.

$$\log_5 \sqrt{18} = \frac{\log \sqrt{18}}{\log 5} = \frac{\log 3\sqrt{2}}{\log 5} = \frac{\log 3 + \log \sqrt{2}}{1 - \log 2} = \frac{0.5 + \frac{1}{2} \log 2}{1 - 0.3} = \frac{0.75}{0.7} = \frac{75}{70} = \frac{15}{14}$$





تست: اگر  $\left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} = (4/5)^{2x-1}$  باشد،  $\log_8(9x+1)$  کدام است؟

- تجربی ۹۸
- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

نکته: گزینه ۲ صحیح است. داریم:

$$\begin{cases} (4/5)^{2x-1} = \left(\frac{4}{10}\right)^{2x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} \\ \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2x^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2x^2 = 2x - 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \quad \times \\ x = \frac{-c}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{ok} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_8(9x+1) = \log_8\left(9\left(\frac{1}{2}\right)+1\right) = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$



تست: اگر  $3^{x^2-2} = 81^x$  باشد،  $\log_9(x-2)$  کدام است؟

- خارج ۹۸
- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

نکته: گزینه ۳ صحیح است. داریم:

$$3^{x^2-2} = 81^x = 3^{4x} \Rightarrow x^2 - 2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{6} \quad \text{ok} \\ x = 2 - \sqrt{6} \quad \times \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=2+\sqrt{6}} \log_9(x-2) = \log_9(2+\sqrt{6}-2) = \log_9 \sqrt{6} = \frac{1}{2}$$

تست ۷

اگر  $\log 5 = 3k$ ، آنگاه  $\log \sqrt[3]{1/6}$  کدام است؟

- (خارج تجربی ۹۰) (۱)  $1-4k$  (۲)  $2-5k$  (۳)  $1-2k$  (۴)  $1-k$





**تست:** - اگر  $a, b$  و  $m$  اعدادی مثبت و مخالف یک باشند، ساده‌شده عبارت  $A = \frac{\log_a m \times \log_b m}{\log_a m + \log_b m}$  کدام است؟

- (۱)  $\log_{ab} m$       (۲)  $\log_m ab$       (۳)  $\log_{(a+b)} m$       (۴)  $\log_m(a+b)$

**نکته:** گزینه ۱ صحیح است. داریم:

$$A = \frac{\log_a m \times \log_b m}{\log_a m + \log_b m} = \frac{1}{\frac{\log_a m + \log_b m}{\log_a m \times \log_b m}} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a m} + \frac{1}{\log_b m}}$$

$$= \frac{1}{\log_m a + \log_m b} = \frac{1}{\log_m ab} = \log_{ab} m$$



**تست:** اگر  $f(x) = a - 2 \log_4 \left( \frac{x}{2} - 5 \right)$  و  $f^{-1}(-1) = 42$  باشد،  $f(10 + 2\sqrt{2})$  چقدر است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$       (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳)  $\frac{7}{2}$       (۴)  $\frac{9}{2}$

**نکته:** گزینه ۱ صحیح است. داریم:

$$f(x) = a - 2 \log_4 \left( \frac{x}{2} - 5 \right)$$

$$\frac{f^{-1}(-1) = 42 \Rightarrow f(42) = -1}{\rightarrow a - 2 \log_4 (21 - 5) = -1 \Rightarrow a = -1 + 2 \log_4 16}$$

$$\Rightarrow a = -1 + 2 \log_4 4^2 = -1 + 4 \log_4 4 = -1 + 4 = 3$$

$$\frac{f(x) = 3 - 2 \log_4 \left( \frac{x}{2} - 5 \right)}{\rightarrow f(10 + 2\sqrt{2}) = 3 - 2 \log_4 (5 + \sqrt{2} - 5)}$$

$$= 3 - 2 \log_4 \sqrt{2} = 3 - 2 \log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2}} = 3 - 2 \left( \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} 2 \right) = 3 - \frac{1}{2} = 2 \frac{1}{2}$$

**تست:**

- اگر  $\log 2 = k$  باشد، حاصل  $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})$  کدام است؟

- (۱)  $2k$       (۲)  $4k$       (۳)  $1+k$       (۴)  $2+4k$

(تجربین ۹۰)







تست: - اگر  $\log_{\sqrt{2}} 6 = a$ ، حاصل  $\log_{\sqrt{2}} 4$  بر حسب  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1-2a}{3}$  (۲)  $\frac{2a+1}{3}$  (۳)  $\frac{2(1-a)}{3}$  (۴)  $\frac{2(1+a)}{3}$

نکته: گزینه ۳ صحیح است. داریم:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}} 6 = a &\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} \frac{4 \cdot 8}{8} = a \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 4 - \log_{\sqrt{2}} 8 = a \\ \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 2^3 = 1 - a &\Rightarrow 3 \log_{\sqrt{2}} 2 = 1 - a \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{1-a}{3} \\ \log_{\sqrt{2}} 4 = \log_{\sqrt{2}} 2^2 = 2 \log_{\sqrt{2}} 2 &= 2 \left( \frac{1-a}{3} \right) = \frac{2-2a}{3} \end{aligned}$$

تست: - اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$ ، حاصل  $\log \frac{\sqrt{75}}{72}$  بر حسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

- (۱)  $1-2b-\frac{2a}{3}$  (۲)  $1-4b-\frac{3a}{2}$  (۳)  $1-2b-\frac{2a}{3}$  (۴)  $1-4a-\frac{2b}{2}$

تست: - اگر  $x = \sqrt{85}$  باشد، مقدار  $A = \left[ \log_{\sqrt{2}} x \right]$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست: - اگر  $(x-1)^{\sqrt{2}} = 2$  باشد، حاصل  $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x-1}$  کدام است؟ ( $x > 1$ )

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{12}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

تست: - اگر  $\log 20 = a$  و  $\log 30 = b$ ، مقدار  $\log 15$  بر حسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

- (۱)  $2a-b+2$  (۲)  $a+b+1$  (۳)  $2a-b-1$  (۴)  $b-a+1$

((اشاره علی(ع): صبر، کلید رسیدن است و کامیابی سرانجام کسی است که شکیبایی می‌ورزد.))

تست ۱۳: حاصل عبارت  $\sqrt{2^3 + \log_2 6}$  کدام است؟

- ۱)  $2\sqrt{3}$       ۲)  $3\sqrt{3}$       ۳) ۶      ۴)  $4\sqrt{3}$

تست ۱۴: اگر  $\log_2^2 = a$  باشد، آن‌گاه حاصل  $\log_3^4$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{a}{2-a}$       ۲)  $\frac{a}{1-a}$       ۳)  $\frac{1-a}{2-a}$       ۴)  $\frac{2-a}{1-a}$

تست ۱۵: اگر ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 5x - 2 = 0$  برابر  $1 + \log_p A$  و  $2 + \log_p B$  باشد، آن‌گاه مجموع ریشه‌های معادله‌ی

$x^2 - (\log_{\sqrt{p}}(AB + 12))x = 1$  کدام است؟

- ۱) ۵      ۲) ۸      ۳) ۶      ۴) -۸

تست ۱۶: اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $3^{2x} - 13 \times 3^x + 36 = 0$  برابر  $\log_p A$  باشد، مقدار A کدام است؟

- ۱) ۹      ۲) ۲      ۳) ۳۲      ۴) ۳۶

تست ۱۷: حاصل عبارت  $A = 4 + \log_2 \sqrt[3]{16} + \log_{\sqrt{8}} 4\sqrt{2}$  کدام است؟

- ۱) ۶      ۲) ۸      ۳) ۷      ۴) ۴

تست ۱۸: اگر  $\log_2 = a$  و  $\log_3 = b$ ، حاصل  $\log_{27} \sqrt{40}$  بر حسب a و b کدام است؟

- ۱)  $\frac{a+1}{6b}$       ۲)  $\frac{a+1}{3b}$       ۳)  $\frac{2a+1}{6b}$       ۴)  $\frac{2a+1}{3b}$

تست ۱۹: تابع با ضابطه  $f(x) = a + \log_2(3x + b)$  از دو نقطه  $(5, 11)$  و  $(21, 15)$  می‌گذرد،  $a$  کدام است؟

- ۱ (۱) ریاضی خارج ۹۶  
۲ (۲)  
۳ (۳)  
۴ (۴)



تست ۲۰: نمودار تابع  $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$ ، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیه‌ی چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است.  $b$  کدام است؟

- ۱ (۱) ریاضی خارج ۹۴  
 $\frac{3}{2}$   
۲ (۲)  
 $\frac{5}{2}$  (۳)  
۳ (۴)



نکته: داریم:

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$\Rightarrow \log_{a_2} a_1 \times \log_{a_3} a_2 \times \log_{a_4} a_3 \times \dots \times \log_{a_{n-1}} a_{n-2} \times \log_{a_n} a_{n-1} = \log_{a_n} a_1$$



تست ۲۱: مقدار عددی  $A = (3^{\log_5 7})^{\log_3 5}$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۷  
۲ (۲) ۱۵  
۳ (۳) ۲۱  
۴ (۴) ۳۵



تست: گزینه ۱ صحیح است. داریم:

$$A = (3^{\log_5 7})^{\log_3 5} = 3^{\log_5 7 \times \log_3 5} = 3^{\log_3 7} = 7$$

تست ۲۲: اگر  $A = \log_{\frac{4}{5}} + \log_{\frac{5}{6}} + \log_{\frac{6}{7}} + \dots + \log_{\frac{399}{400}}$  و  $B = (\log_{15} 16)(\log_{14} 15) \dots (\log_2 3)$ ، حاصل  $\frac{A}{B}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $-\frac{1}{2}$   
۲ (۲)  $-1$   
۳ (۳)  $-\frac{1}{4}$   
۴ (۴)  $-\frac{1}{8}$





نکته: در حالت کلی داریم:

$$1) \quad x < y \xrightarrow{0 < a < 1} \log_a x > \log_a y$$

$$2) \quad x < y \xrightarrow{a > 1} \log_a x < \log_a y$$



مثال: در حالت کلی داریم:

$$1) \quad \xrightarrow{5 < 7} \log_7 5 < \log_7 7, \quad 2) \quad \xrightarrow{5 < 7} \log_{\frac{1}{4}} 5 > \log_{\frac{1}{4}} 7$$

$$3) \quad \xrightarrow{\frac{1}{3} < \frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}, \quad 4) \quad \xrightarrow{\frac{1}{3} < \frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{1}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{1}} \frac{1}{2}$$



تست: عدد  $\log_{\frac{1}{5}} 1/5$  در کدام بازه قرار دارد؟

- (۴)  $(-2, -1)$       (۳)  $(-1, 0)$       (۲)  $(1, 2)$       (۱)  $(0, 1)$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. داریم:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{2}} 1/5 < \log_{\frac{1}{2}} 2 &\Rightarrow \log_{2^{-1}} 2^2 < \log_{\frac{1}{5}} 1/5 < \log_{2^{-1}} 2^1 \\ \Rightarrow \frac{2}{-1} \log_2 2 < \log_{\frac{1}{5}} 1/5 < \frac{1}{-1} \log_2 2 &\Rightarrow -2 < \log_{\frac{1}{5}} 1/5 < -1 \end{aligned}$$



تست: حاصل  $[\log_{\frac{1}{5}} 60]$  چقدر است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

- (۴) ۵      (۳) -۵      (۲) -۶      (۱) ۶

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. داریم:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} 24 < \log_{\frac{1}{2}} 60 < \log_{\frac{1}{2}} 32 &\Rightarrow \log_{2^{-1}} 2^6 < \log_{\frac{1}{5}} 60 < \log_{2^{-1}} 2^5 \\ \Rightarrow \frac{6}{-1} \log_2 2 < \log_{\frac{1}{5}} 60 < \frac{5}{-1} \log_2 2 &\Rightarrow -6 < \log_{\frac{1}{5}} 60 < -5 \\ \Rightarrow [\log_{\frac{1}{5}} 60] = -6 \end{aligned}$$

تست ۲۲: کدام یک از نامساوی‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

$$-1 < \log_{\frac{1}{2}} 2 < 0 \quad (2)$$

$$2 < \log_2 7 < 3 \quad (1)$$

$$-3 < \log_{5/2} 2 < -2 \quad (4)$$

$$2 < \log_{\sqrt{2}} 2/5 < 3 \quad (3)$$

معادلات لگاریتمی:

چون تابع لگاریتم یک تابع یک به یک است، پس داریم:  $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$



مثال: معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

- ۱)  $\log_3 243 = 2x + 1$  ، ۲)  $\log(2x) - \log(x - 3) = 1$   
 ۳)  $\log(x - 1) + \log(x + 1) = \log 8$  ، ۴)  $\log_2(x + 1) + \log_2(x + 4) = 2$

پاسخ:

$$1) \log_3 243 = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \log_3 3^5 = 2x + 1 \Rightarrow 5 \log_3 3 = 2x + 1 \Rightarrow 5 = 2x + 1 \Rightarrow x = 2$$

$$2) \log(2x) - \log(x - 3) = 1$$

$$\Rightarrow \log \frac{2x}{x-3} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{x-3} = 10^1 \Rightarrow 2x = 10x - 30 \Rightarrow x = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

$$3) \log(x - 1) + \log(x + 1) = \log 8$$

$$\Rightarrow \log(x - 1)(x + 1) = \log 8 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ok} \\ x = -3 \text{ x} \end{cases}$$

$$4) \log_2(x + 1) + \log_2(x + 4) = 2$$

$$\Rightarrow \log_2(x + 1)(x + 4) = 2 \Rightarrow \log_2(x^2 + 5x + 4) = 2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ok} \\ x = -5 \text{ x} \end{cases}$$





**تست:** از معادله لگاریتمی  $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$  مقدار لگاریتم  $\sqrt[3]{x+1}$  در پایه ۴، کدام است؟

- خارج ۹۵  
 (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴) ۱

**پاسخ:** گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{aligned} \log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) &= \log(2x - 5) \\ \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\right) &= \log(2x - 5) \Rightarrow \log\left(\frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3}\right) = \log(2x - 5) \\ \Rightarrow \log(x + 2) &= \log(2x - 5) \Rightarrow x + 2 = 2x - 5 \Rightarrow x = 7 \\ \log_4 \sqrt[3]{x+1} &= \log_4 \sqrt[3]{7+1} = \log_4 \sqrt[3]{8} = \log_{4^{\frac{1}{3}}} 2 = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



**تست:** اگر  $\log_3(2x) - \log_3(x - 3) = 1$ ، آنگاه حاصل  $\sqrt{5}^{\log_5 x} - \log_9 \sqrt[3]{x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{25}{3}$       (۲)  $\frac{8}{3}$       (۳)  $\frac{5}{3}$       (۴)  $\frac{26}{3}$

**پاسخ:** گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{aligned} \log_3(2x) - \log_3(x - 3) = 1 &\Rightarrow \log_3 \frac{2x}{x - 3} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{x - 3} = 3 \\ \Rightarrow 2x - 9 &= 2x \Rightarrow x = 9 \\ \sqrt{5}^{\log_5 x} - \log_9 \sqrt[3]{x} &= 5^{\frac{1}{2} \log_5 x} - \frac{1}{3} \log_9 x \stackrel{x=9}{=} 5^{\frac{1}{2} \log_5 9} - \frac{1}{3} \log_9 9 = \sqrt{9} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



**تست:** حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $(\log x)^2 + \log x^2 = 7$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۱۰      (۳) ۰/۱      (۴) ۰/۰/۱

**پاسخ:** گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{aligned} (\log x)^2 + \log x^2 = 7 &\Rightarrow (\log x)^2 + 2 \log x - 7 = 0 \xrightarrow{X = \log x} X^2 + 2X - 7 = 0 \\ \Rightarrow X = \log x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 28}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{2} &\Rightarrow \begin{cases} \log x = -1 + 2\sqrt{2} \\ \log x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10^{-1 + 2\sqrt{2}} \\ x_2 = 10^{-1 - 2\sqrt{2}} \end{cases} \\ \Rightarrow x = x_1 x_2 = 10^{-2} = 0/0/1 \end{aligned}$$

((اشاره علی(ع): هر کس به خدا توکل کند، دشواری‌ها برای او آسان می‌شود و اسباب برایش فراهم می‌گردد.))

سؤال ۲۳: از معادله لگاریتمی  $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$  مقدار لگاریتم  $(2x - 1)$  در پایه ۸، کدام است؟

- (تجربی ۹۵) (۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$



سؤال ۲۴: از رابطه  $\log(x + 2) + \log(2x - 1) = \log(4x + 1)$  مقدار لگاریتم  $(2x + 5)$  در پایه ۴، کدام است؟

- (ریاضی ۹۷) (۱)  $0,5$  (۲)  $0,75$  (۳)  $1,25$  (۴)  $1,5$



سؤال ۲۵: از دو معادله دو مجهولی  $2^x - y \times 4^{x+y} = 1$  و  $\log y = 2 \log 3 + \log x$  مقدار  $y$  کدام است؟

- (تجربی ۹۶) (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



سؤال ۲۶: از دو معادله‌ی  $\log(y + 2) = 1$  و  $\log(y - x) + \log(4x + y) = 2$  مقدار  $x$  کدام است؟

- (خارج ۸۷) (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



سؤال ۲۷: از تساوی  $\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۴، کدام است؟

- (خارج تجربی ۹۳) (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲



سؤال ۲۸: از تساوی  $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۲، کدام است؟

- (تجربی ۹۳) (۱) -۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲



تست ۲۹: - مجموع ریشه‌های معادله  $\log_3 81 = \log_x 2 + 3 \log_2 x$  کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)



تست ۳۰: - مجموع ریشه‌های معادله  $(4^x - 5^{\log_5 3})(4^x - 3^{\log_3 5}) = 0$  کدام است؟

$\log_2 3\sqrt{2}$  (۴)

$\log_2 5\sqrt{2}$  (۳)

$\log_2 5\sqrt{3}$  (۲)

$\log_2 10$  (۱)



تست ۳۱: - نمودار توابع  $f(x) = \log_2(x+1)$  و  $g(x) = x-1$  در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۴ صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



تست ۳۲: - ریشه معادله  $\log_{2/5} \log_{5/2}(2-x) = -1$  کدام است؟

۱/۹۸ (۴)

۱/۹۶ (۳)

۱/۹۴ (۲)

۱/۹۲ (۱)



تست ۳۳: اگر  $\log_3(x+1) + \log_3 x = 2$  باشد، حاصل  $\log_{(x^2+x-7)}(x^2+x+7)$  چقدر است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)







**نکته (رسم توابع لگاریتمی):**

برای رسم تابع لگاریتمی  $f(x) = \log_a x$  از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

$x$	$\frac{1}{a}$	1	$a$
$f(x) = \log_a x$	-1	0	1

**نکته:** برای رسم توابع لگاریتمی با ضابطه‌ی  $f(x) = c + \log_a(x - b)$  ابتدا تابع  $f(x) = \log_a x$  را رسم کرده و سپس نمودار تابع را به اندازه‌ی  $b$  واحد به سمت چپ یا راست و به اندازه‌ی  $c$  واحد به سمت بالا یا پایین (موافق علامت  $b$  و  $c$ ) منتقل می‌کنیم.

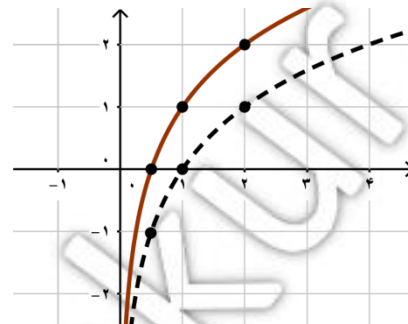


**مثال:** توابع  $y = 1 - \log_2 \frac{1}{x}$  و  $y = -1 + \log_3(x - 2)$  را رسم کنید.

**پاسخ:**

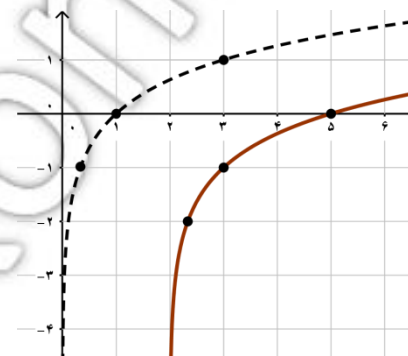
$$y = 1 - \log_2 \frac{1}{x} = 1 - \log_2 x^{-1} = 1 + \log_2 x$$

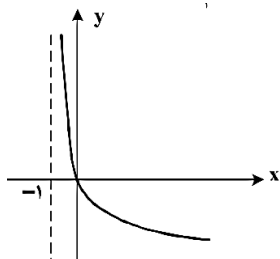
$x$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x) = \log_2 x$	-1	0	1



$$y = -1 + \log_3(x - 2)$$

$x$	$\frac{1}{3}$	1	3
$f(x) = \log_3 x$	-1	0	1



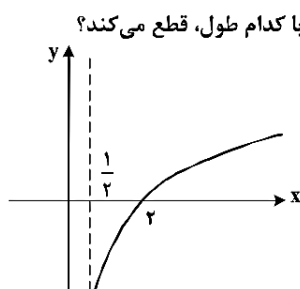


**تست:** شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = \log_p U(x)$  است.  $U(x)$  کدام است؟

- تجربی ۹۸
- (۱)  $x + 1$
  - (۲)  $(x + 1)^{-1}$
  - (۳)  $x - 1$
  - (۴)  $1 - x$

**پاسخ:** گزینه ۲ صحیح است. نمودار داده شده مربوط به تابع زیر است:

$$y = \log_{\frac{1}{p}}(x+1) = \log_{p^{-1}}(x+1) = \log_p(x+1)^{-1}$$



**تست:** شکل زیر، نمودار تابع  $y = -1 + \log_b(2x + a)$  است. این منحنی خط  $y = 1$  را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- خارج ۹۸
- (۱) ۴
  - (۲) ۵
  - (۳) ۶
  - (۴) ۷

**پاسخ:** گزینه ۲ صحیح است. چون نمودار لگاریتمی داده شده  $\frac{1}{2}$  واحد به سمت راست منتقل شده است. پس داریم:

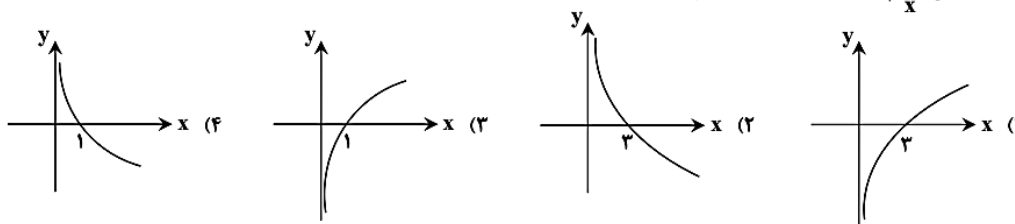
$$2\left(\frac{1}{2}\right) + a = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -1 + \log_b(2x - 1)$$

از طرفی تابع از نقطه  $(2, 0)$  عبور می‌کند. پس:

$$\frac{(2, 0)}{y = -1 + \log_b(2x - 1)} \rightarrow -1 + \log_b(3) = 0 \Rightarrow \log_b 3 = 1 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow y = -1 + \log_3(2x - 1)$$

حال محل تقاطع تابع با خط  $y = 1$  را به دست می‌آوریم:

$$-1 + \log_3(2x - 1) = 1 \Rightarrow \log_3(2x - 1) = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 9 \Rightarrow x = 5$$



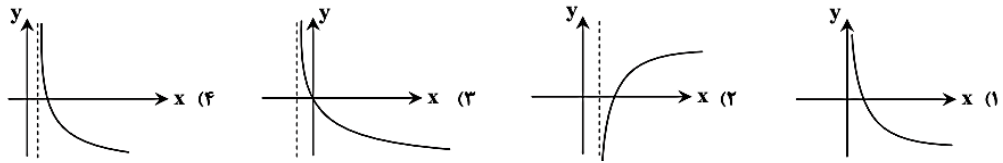
**تست:** نمودار تابع  $f(x) = 1 - \log_3 \frac{9}{x}$  به کدام صورت است؟

**پاسخ:** گزینه ۱ صحیح است. کافی است معادله داده شده را ساده کنیم.

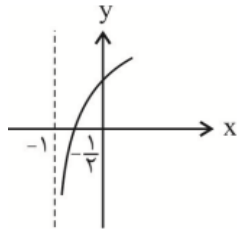
$$f(x) = 1 - \log_3 \frac{9}{x} = 1 - (\log_3 9 - \log_3 x) = 1 - (2 - \log_3 x) = -1 + \log_3 x$$

(( (امام علی(ع): آن‌که در گناهان، بسیار اندیشه کند، (این کار) او را به گناه می‌کشاند. ))))

سؤال ۳۴: نمودار تابع  $f(x) = -\log_7(x-1)$  به کدام شکل است؟



سؤال ۳۵: نمودار تابع  $f(x) = a + \log_7(x+b)$  به صورت زیر است.  $a+b$  کدام است؟

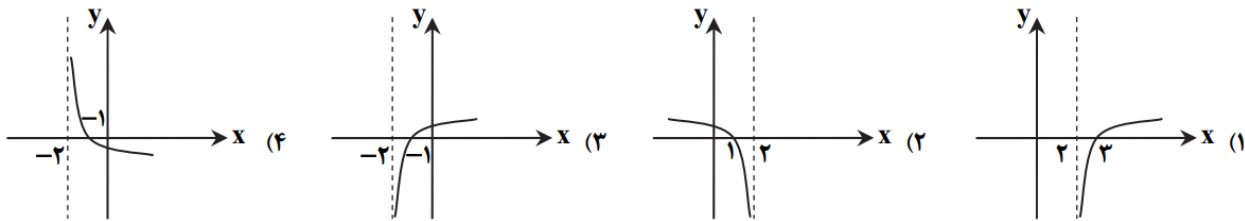


(۱) ۲ (۲) ۳

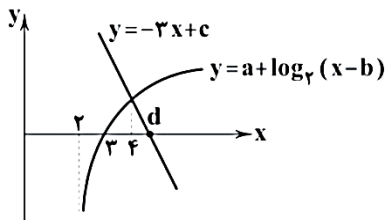
(۳) ۱/۲ (۴) ۳/۲



سؤال ۳۶: نمودار تابع  $y = -\log_3(x+2)$  کدام است؟



سؤال ۳۷: با توجه به شکل زیر، مقدار  $d$  چقدر است؟



(۱) ۱۴/۳

(۲) ۱۲/۳

(۳) ۱۵/۳

(۴) ۱۶/۳



سؤال ۳۸: تابع  $f(x) = \log_3(ax+b)$  فقط برای مقادیر  $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$  با معنی است. اگر  $f(4) = 2$  باشد، آن‌گاه  $f(-\frac{4}{9})$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۱/۲

(۳) -۱

(۴) -۲

(ریاضی ۹۵)





کاربرد از توابع لگاریتمی:

برای محاسبه قدرت یک زمین لرزه بر حسب ریشتر از رابطه‌ی  $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{11/8}}$  استفاده می‌کنیم که در آن  $E$  نشان دهنده‌ی میزان انرژی حاصل از زمین لرزه بر حسب واطد ارگ است.

نکته: داریم:

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{11/8}} \Rightarrow \frac{3}{2} M = \log \frac{E}{10^{11/8}} \Rightarrow \frac{3}{2} M = \log E - \log 10^{11/8}$$

$$\Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5 M$$



تست: - اگر بزرگی زلزله‌ای برابر  $M$  در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده‌ی آن برابر  $E$  در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5 M$  به دست می‌آید. اگر یک زلزله ۸ ریشتری رخ دهد، مقدار انرژی آزاد شده در آن چند ارگ است؟

- (۱)  $10^{22/8}$  (۲)  $10^{24/8}$  (۳)  $10^{25/8}$  (۴)  $10^{22/8}$

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است.

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \xrightarrow{M=8} \log E = 11/8 + 12 = 23/8$$

$$\Rightarrow E = 10^{23/8}$$



تست: انرژی آزاد شده (به واحد Erg) از زلزله‌ای به بزرگی  $M$  ریشتر از رابطه  $\log E = 12 + 1/5 M$  به دست می‌آید. اگر انرژی آزاد شده  $10^{24} \times 10^{18}$  Erg باشد، بزرگی این زلزله چند ریشتر بوده است؟ ( $\log 2 = 0/3$ )

- (۱)  $5/6$  (۲)  $5$  (۳)  $6/6$  (۴)  $6$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} \log E = 12 + 1/5 M \Rightarrow \frac{3}{2} M = \log E - 12 \Rightarrow M = \frac{2}{3} (\log E - 12) \\ E = 10^{24} \times 10^{18} = 2^{10} \times 10^{18} \Rightarrow \log E = 10 \log 2 + 18 \log 10 = 10 \times 0/3 + 18 = 21 \\ \Rightarrow M = \frac{2}{3} (21 - 12) = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \end{cases}$$

مثال ۲: اگر قدرت یک زلزله ۶ ریشتر باشد، میزان انرژی آزاد شده از آن را بیابید.



سوال ۴: انرژی آزاد شده توسط یک زلزله ۷ ریشتری، چند برابر یک زلزله ۵ ریشتری است.



سوال ۵: انرژی آزاد شده توسط یک زلزله ۸ ریشتری ۱۰ برابر پس لرزه آن بوده است. قدرت پس لرزه را بیابید.



سوال ۳۹: اختلاف شدت دو زلزله در مقیاس ریشتر برابر ۱/۴ است. انرژی زلزله قوی‌تر چند برابر دیگری است؟  $(\log E = 11/8 + 1/5M, \log 5 = 0/7)$

۶۲۵ (۴)

۱۲۵ (۳)

۲۵ (۲)

۵ (۱)



سوال ۴۰: یک زلزله ۵ ریشتری،  $10^k$  یرگ انرژی آزاد می‌کند.  $k$  چقدر است؟

۲۰/۳ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹/۷ (۲)

۱۹/۳ (۱)



سوال ۴۱: نوعی باکتری به صورت نمایی تکثیر می‌شود. این باکتری در مدت نیم‌ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اگر این باکتری با تعداد ۲۰۰ عدد شروع به تکثیر کند، پس از چند ساعت تعداد باکتری‌ها به ۱۲۰۰ عدد می‌رسد؟



$\frac{1}{2}(1 + \log_2 3)$  (۴)

$2(1 + \log_2 3)$  (۳)

$\frac{1}{2}(1 + \log_2 2)$  (۲)

$2(1 + \log_2 2)$  (۱)

سوال ۴۲: اگر بزرگی زلزله‌ای برابر  $M$  در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله ( $E$ ) در واحد ارگ از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5M$  به دست می‌آید. در منطقه‌ای دو زلزله می‌آید. انرژی آزادشده در زلزله دوم، ۱۰ برابر انرژی آزادشده در زلزله اول است. بزرگی زلزله دوم چند ریشتر بیشتر از بزرگی زلزله اول است؟



۱/۵ (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

$\frac{1}{3}$  (۲)

۱ (۱)