فهرست

فصل 3: موتورهای القایی دو فازنامتعادل با تغذیه نامتقارن

3-1- مقدمه
3-2 - موتورالقایی دو فاز متعادل متقارن
3-3 - موتور القایی متعادل نامتقارن
3-3-1- مولفه های مستقیم و معکوس یک شبکه دو فاز
3-4- موتور های دو فاز نا متعادل
3-4-1- محاسبات مربوط به استخراج مدار معادل
3-4-2- بررسی حالات خاص
3-4-2-1-موتوردوفازمتعادل باتغذیه دو فاز متقارن
3-4-2-2-موتوردوفازمتعادل با تغذیه نامتقارن
3-4-2-3-موتورتکفاز
3-4-2-4-موتورتک فاز باخازن دایم
3-5-تعیین گشتاور راه اندای
3-6-ماکزیمم کردن گشتاور راه اندازی در صورتی که $Z_c = a^2 Z_m$ باشد
3-7-نحوه کار ماشین های سه فاز با ولتاژ تك فاز (اتصالات اشتاین متز Steinmetz)
3-7-1-آرایش ستاره اي اشتاین متز

مرجع

ماشین های الکتریکی مخصوص,دکتر جعفر سلطانی

فصل ۳
موتورهای القایی دو فاز نامتعادل با تغذیه نامتقارن

۳-۱- مقدمه:

امروزه موتورهای القایی درصد قابل توجهی از نیروی محرکه مکانیکی صنایع را تامین میکنند.
مزایای موتور های القایی در مقایسه با موتور های DCیا سنکرون:

1. پایین بودن قیمت
2. روان و بی سرو صدا کار کردن
3. عمر طولانی
4. نیاز کم انها به سرویس و نگهداری

با توجه به سهولت تولید میدان گردان توسط یک شبکه سه فاز موتورهای القایی ترجیحا به صورت سه فاز ساخته میشوند.
علاوه بر انواع سه فاز و تک فاز موتور های القایی به صورت دو فاز نیز ساخته می شوند. کاربرد عمده ی موتورهای دو فاز به صورت سروموتور در سیستم های کنترل است.
یک موتور القایی دو فاز متعادل به موتوری با دو سیم پیچ توزیع شده مشابه اطلاق میگردد که زاویه مکانی محور های مغناطیسی این دو سیم پیچ ۹۰ درجه الکتریکی باشد. در ادامه رفتار چنین موتورهایی در دو حالت زیر برسی خواهد شد:

1. موتور از یک شبکه دو فاز متقارن تغذیه شود.
1. موتور از یک شبکه دو فاز نامتقارن تغذیه شود.

۳-۲- موتور القایی دو فاز متعادل متقارن:

در یک چنین موتوری دو سیم پیچ کاملا مشابه اند و باهم ۹۰درجه الکتریکی اختلاف فاز مکانی دارند.
به علاوه دو سیم پیچ با ولتاژ سینوسی با دامنه های یکسان و اختلاف فاز۹۰درجه زمانی تغذیه می شوند. همان گونه که قبلا اشاره شد در این حالت یک میدان گردان با دامنه ثابت در فاصله هوایی به وجود می اید.

۳-۳-موتور القایی دو فاز متعادل نا متقارن:

یک موتوردو فاز متعادل وقتی به صورت نامتقارن کار میکند که:

1. شبکه دو فاز تغذیه نامتقارن باشد.
2. امپدانس سیم پیچی روتور از دید فازهای مختلف استاتور یکسان نباشد

نمونه ای از عملکرد نامتقارن ماشین ⟵ موتور قفس سنجابی با تعداد شیار ناکافی و فاصله هوایی غیر یکنواخت.

موتور القایی دو فاز متعادل نا متقارن

هرگاه شبکه تغذیه متقارن باشد:
۱-دامنه تمام مؤلفه ها یکسان است.
۲-یک گروه از مؤلفه هامستقیم یا معکوس همدیگر را خنثی می کنند و
تنها یک مؤلفه میدان گردان در فاصله هوایی باقی می ماند.
هرگاه شبکه تغذیه نامتقارن باشد:
۱-یک میدان منتجه با سرعت $\omega+$و همزمان با ان یک میدان دیگر با سرعت $\omega-$در فاصله هوایی وجود خواهد داشت.
۲-مولفه مستقیم منتجه برایند کلیه مؤلفه های مستقیم مؤلفه های معکوس منتجه برایند کلیه مؤلفه های معکوس موجود در فاصله هوایی است که توسط فازهای مختلف ایجاد شده است.
لازم به یادآوری است که در حالت کلی دامنه های دو میدان منتجه نا مساوی اند و در نتیجه موتور در جهت گردش مؤلفه بزرگتر میچرخد که این مولفه را بدون توجه به انکه در جهت $\omega+$است یا $\omega-$مولفه مستقیم یا راستگرد و مولفه با دامنه کوچکتر را که در خلاف جهت حرکت موتور است مولفه معکوس یا چپ گرد می نامیم.

مؤلفه های مستقیم ومعکوس یک شبکه دو فاز

فرض کنید یک شبکه دو فاز با ولتاژ های $\overline{vm}$و $\overline{va}$به دو سیم پیچ یک موتور دو فاز متعادل اعمال شود.
برای بدست اوردن ولتاژهای این شبکه ها داریم:

$$\overline{V_m} = \overline{V_{mf}} + \overline{V_{mb}}$$
$$\overline{V_a} = \overline{V_{af}} + \overline{V_{ab}}$$

که دران هر یک از ولتاژ های $\overline{vm}$و $\overline{va}$به دو مولفه fو bتجزیه شده اند.
تجزیه را با اعمال شرایط زیر انجام میدهیم:

$$\overline{V}_{af} = j\overline{V}_{mf}$$
$$\overline{V}_{ab} = -j\overline{V}_{mb}$$

در صورت تحقق این شرایط ولتاژهای اعمالی به دو سیم پیچ موتور به دو زوج ولتاژ تجزیه شده اند که هر زوج یک شبکه ولتاژ دو فاز متقارن را تشکیل میدهد
از ترکیب روابط بالا مقادیر مولفه های fو bولتاژ $\overline{vm}$ به صورت زیر محاسبه میشود:

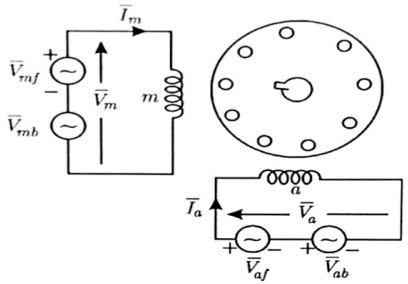
مؤلفه های مستقیم ومعکوس یک شبکه دو فاز

مولفه های fوb ولتاژ $\overline{v}_a$ نیز با جاگزاری در روابط بالا به دست می اید.
برای استفاده از مزایای ساده سازی مولفه های مستقیم و معکوس در تحلیل موتور لازم است علاوه بر ولتاژ مولفه های متناظر جریان نیز محاسبه شوند.

$$\overline{v}_{mb} = \frac{1}{2}(\overline{v}_m + j\overline{v}_a)$$
$$\overline{v}_{mf} = \frac{1}{2}(\overline{v}_m - j\overline{v}_a)$$

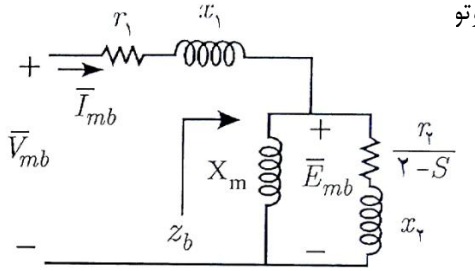
طبق اصل جمع اثار جریان های $\overline{I}_m$ و $\overline{I}_a$نیز از مجموع جریان های حاصل از اعمال مولفه های fوb برسیم پیچ های موتور حاصل میشود و در نتیجه :

$$\overline{I}_m = \overline{I}_{mf} + \overline{I}_{mb}$$
$$\overline{I}_a = \overline{I}_{mf} + \overline{I}_{ab}$$

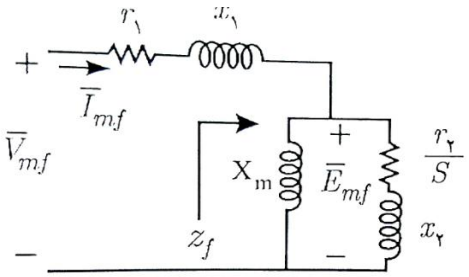


در این روابط $\overline{I}_{af}$ $\overline{I}_{mf}$ به ترتیب جریان های گزرنده از فاز هایaوm هستند که در اثر اعمال ولتاژ دو فاز متعادل $\overline{v}_{af}$ $\overline{v}_{mf}$ بر روی امپدانس موتور در مقابل مولفه f(یعنی)z_fبه دست امده اند. مدار معادل تکفاز موتور القایی دو فاز متعادل در مقابل میدان های مستقیم و معکوس در شکل با صرف نظر کردن از تلف هسته نشان داده شده است.

با معلوم بودن مقادیر ولتاژها و امپدانس های موتور مولفه های $\overline{I}_{mf}$و$\overline{I}_{mb}$واز انجا $\overline{I}_{af}$و$\overline{I}_{ab}$ محاسبه و جریان های کل $\overline{I}_m$و$\overline{I}_a$ با استفاده از جمع اثار بدست می ایند.علاوه برجریان فاز ها مقادیر گشتاور توان و هر متغییر دیگر موتو



(الف) مدار معادل در مقابل مؤلفهٔ معکوس

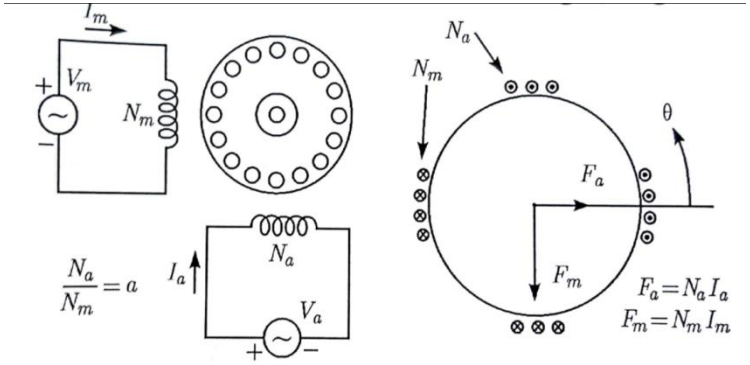


(ب) مدار معادل در مقابل مؤلفهٔ مستقیم

۳-۴- مو تورهای دو فاز نامتعادل:

چنانچه سیم پیچی فاز های یک موتور مشابه نباشند موتور دو فاز نامتعادل نامیده می شود.
عدم تعادل فازها ممکن است ناشی از اختلاف در تعداد دور سیم پیچی انها یا سطح مقطع سیم های به کار رفته ویا حتی در اثر سری کردن عناصر خارجی مانند خازن با یکی از سیم پیچ های موتور دو فاز باشد.
چنانچه آنالیز یک موتور دو فاز باسیم پیچ های نامتعادل یا حتی یک موتور تک فاز بدون خارج کردن سیم پیچ کمکی مد نظر باشد می توان از مدار های معادل برای موتورهای دو فاز در حالت کلی و تنها با فرض انکه دو سیم پیچی موتور باهم ۹۰ درجه الکتریکی اختلاف فاز مکانی دارند استفاده کرد.

نمونه ای از یک موتوردو فاز نامتعادل:



در بدست اوردن مدار معادل موتور متعادل با تغذیه نامتقارن ونیز مدار معادل موتور تک فاز تئوری میدان های گردان به کار گرفته شد.
برای پیدا کردن مدار معادل دو فاز نامتعادل نیز از همین تئوری استفاده خواهد شد ولی به علتعدم تعادل فازها در چنین موتوری بر خلاف موتور دو فاز متعادل حتی اعمال ولتاژ های متقارن نیز به ظهور میدان نامتقارن با مولفه هایf و b منجر می گردد.

برای داشتن یک میدان گردان با دامنه ثابت در یک موتور نامتعادل لازم است امپر دورهای حاصل از سیم پیچی ها به مؤلفه های متقارن تجزیه شوند یعنی:

$$\overline{f}_{af} = \mathrm{j}\overline{f}_{mf}$$
$$\overline{f}_{ab} = -\mathrm{j}\overline{f}_{mb}$$

مو تورهای دو فاز نامتعادل

در رابطه فوق مقادیر fها آمپر دور های موثر ناشی از مؤلفه های متناظر جریان در سیم پیچ های اصلی و کمکی است.میتوان به صورت زیر بسط داد:

$$N_a\bar{I}_{af} = jN_m\bar{I}_{mf}$$
$$N_a\bar{I}_{ab} = -jN_m\bar{I}_{mb}$$

که در ان N_mو N_a به ترتیب تعداد دورهای موثر سیم پیچهای اصلی و کمکی هستند.اگر $\frac{N_a}{N_m} = a$ فرض گردد داریم:

$$\bar{I}_{af} = \frac{j}{a}.\bar{I}_{mf}$$
$$\bar{I}_{ab} = \frac{j}{a}.\bar{I}_{mb}$$

در رابطه بالا (را bوfجریان های فازها هستند که علرغم عدم تعادل در تعداد دور سیم پیچ ها قادرند میدان های متعادل bوfبه ترتیب مولفه های (($\bar{I}_{af}$,$\bar{I}_{mf}$) ($\bar{I}_{ab}$,$\bar{I}_{mb}$) در فاصله هوایی برقرار کنند. مقادیر $\bar{I}_m$و $\bar{I}_a$ بر حسب مولفه هایشان به صورت کلی زیر است:

$$\bar{I}_m = \bar{I}_{mf} + \bar{I}_{mb}$$
$$\bar{I}_a = \bar{I}_{af} + \bar{I}_{ab}$$

با جایگذاری مقادیر مؤلفه های جریان از رابطه فوق در معادلات فوق می توان نوشت:

$$\bar{I}_{mf} = \frac{1}{2}(\bar{I}_m - ja\bar{I}_a)$$
$$\bar{I}_{mb} = \frac{1}{2}(\bar{I}_m + ja\bar{I}_a)$$

۳-۴-۱- محاسبات مربوط به استخراج مدار معادل:

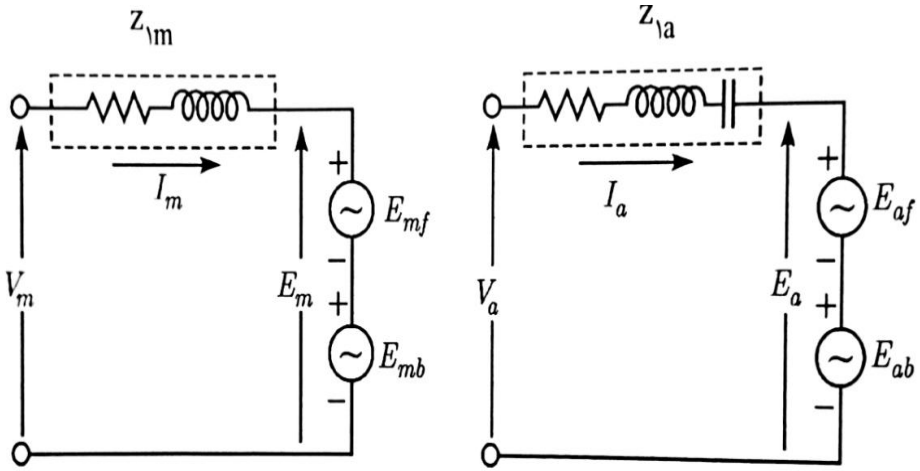
برای استخراج مدار معادل لازم است روابط ولتاژهای اعمال شده به هر یک از سیم پیچ های mوa را که در حالت کلی به صورت زیر است در نظر گرفته شود:

$$\overline{V}_m = Z_{1m}\overline{I}_m + \overline{E}_m$$
$$\overline{V}_a = Z_{1a}\overline{I}_a + \overline{E}_a$$

در معادلات فوق Z_{1m}و Z_{1a} امپدانس های سری سیم پیچ های اصلی و کمکی (هر یک شامل مقاوت اهمی و راکتانس نشستی استاتور.) هستند همچنین$\overline{E}_m$و $\overline{E}_a$ به ترتیب نیروهای ضد محرکه که در اثر مولفه های bوf میدان مغناطیسی تولید می شوند و از معادلات زیر تبعیت می کنند:

$$\overline{E}_m = \overline{E}_{mf} + \overline{E}_{mb}$$
$$\overline{E}_a = \overline{E}_{af} + \overline{E}_{ab}$$

این شکل مدار معادل اولیه هر یک از سیم پیچ ها و چگونگی تشکیل معادلات فوق دا نشان میدهد.



هر دو مولفه $\overline{E}_{mf}$و $\overline{E}_{af}$ توسط میدان گردان مستقیم فاصله هوایی بوجود امده است.با توجه به فاصله مکانی ۹۰ درجه الکتریکی بین دو سیم پیچی این دو نیروی محرکه به همان اندازه با هم اختلاف فاز خواهند داشت.همچنین با توجه به ان که تعداد دور سیم پیچی کمکی aبرابر خواهد بود. در نتیجه چنانچه وضعیت سیم پیچی اصلی است دامنه نیرو محرکه القا شده در سیم پیچ اصلی a برابر خواهد بود.

محاسبات مربوط به استخراج مدار معادل

در نتیجه چنانچه وضعیت سیم پیچ ها و جهت چرخش مطابق شکل بالا فرض شود می توان نوشت:

$$\overline{E}_{af} = \mathrm{ja}\overline{E}_{mf}$$

و به طریق مشابه برای مولفه های b(معکوس) نیروی ضد محرکه ها دارای رابطه زیر هستند:

$$\overline{E}_{ab} = -\mathrm{ja}\overline{E}_{mb}$$

اگر امپدانس های f و b ارجاع یافته به طرف فاز m به ترتیب با Z_f و Z_b نشان داده شوند داریم:

$$\overline{E}_{mf} = Z_f\overline{I}_{mf}$$
$$\overline{E}_{mb} = Z_b\overline{I}_{mb}$$

باتوجه به این که تعداد دور سیم پیچ کمکی a برابر تعداد دور سیم پیچ اصلی است انتقال امپدانس های فوق به طرف سیم پیچ کمکی با ضریب a^2 انجام میگیرد و می توان گفت:

$$\overline{E}_{af} = (a^2\overline{Z}_f)\overline{I}_{af}$$
$$\overline{E}_{ab} = (a^2\overline{Z}_b)\overline{I}_{ab}$$

و با جاگذاری مقادیر $\overline{I}_{af}$ و $\overline{I}_{ab}$ از معادلات بالا نتیجه می شود:

$$\overline{E}_{af} = jaZ_f\overline{I}_{mf}$$
$$\overline{E}_{ab} = -jaZ_b\overline{I}_{mb}$$

با توجه به معادلات بالا ولتاژ دو سر هر یک از سیم پیچهای a و m به صورت زیر حاصل می شود:

$$\overline{V}_m = Z_{1m}\overline{I}_m + Z_f\overline{I}_{mf} + Z_b\overline{I}_{mb}$$
$$\overline{V}_a = Z_{1a}\overline{I}_a + \mathrm{ja}Z_f\overline{I}_{mf} - \mathrm{ja}Z_b\overline{I}_{mb}$$

با جاگذاری $\overline{I}_m$ و $\overline{I}_{ab}$ از روابط بالا و ساده کردن انها معادلات فوق به صورت زیر در می ایند:

$$\overline{V}_m = (Z_{1m} + Z_f)\overline{I}_{mf} + (Z_{1m} + Z_b)\overline{I}_{mb}$$
$$\overline{V}_a = j\left(\frac{Z_{1a}}{a} + aZ_f\right)\overline{I}_{mf} - \mathrm{j}\left(\frac{Z_{1a}}{a} + aZ_b\right)\overline{I}_{mb}$$

محاسبات مربوط به استخراج مدار معادل

چگونگی تجزیه b وf به مولفه های ۱و۲ و نیز شرایط محدود کننده ان ها به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{matrix}\bar{V}_m = \bar{V}_{m1} + \bar{V}_{m2} \\ \bar{V}_a = \bar{V}_{a1} + \bar{V}_{a2}\end{matrix} \ni \begin{cases} \bar{V}_{m1} = -\mathrm{j}\dfrac{\bar{V}_{a1}}{a} \\ \bar{V}_{m2} = \mathrm{j}\dfrac{\bar{V}_{a2}}{a} \end{cases} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \begin{cases} \bar{V}_{m1} = \dfrac{1}{2}\left[\bar{V}_m - j\dfrac{\bar{V}_a}{a}\right] \\ \bar{V}_{m2} = \dfrac{1}{2}\left[\bar{V}_m + j\dfrac{\bar{V}_a}{a}\right] \end{cases}$$

توجه شود که جریان های $\bar{I}_{ab}$, $\bar{I}_{af}$, $\bar{I}_{mb}$, $\bar{I}_{mf}$ همچنان مولفه های fو b جریان های فاز ها هستند. لذا برای بدست اوردن مقادیر $\bar{V}_{m2}$ و $\bar{V}_{m1}$ بر حسب مولفه های جریان $\bar{I}_{mf}$ باید مقادیر $\bar{V}_a$و $\bar{V}_m$ در روابط بالا قرار داده شود.

$$\bar{V}_{m1} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{Z_{1a}}{a^2} + Z_{1m}\right) + Z_f\right]\bar{I}_{mf} - \frac{1}{2}\left(\frac{Z_{1a}}{a^2} - Z_{1m}\right)\bar{I}_{mb}$$

$$\bar{V}_{m2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{Z_{1a}}{a^2} - Z_{1m}\right)\bar{I}_{mf} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{Z_{1a}}{a^2} + Z_{1m}\right) + Z_b\right]\bar{I}_{mb}$$

$$Z_0 \triangleq \frac{1}{2}\left(\frac{Z_{1a}}{a^2} + Z_{1m}\right)$$

$$Z_d \triangleq \frac{1}{2}\left(\frac{Z_{1a}}{a^2} - Z_m\right)$$

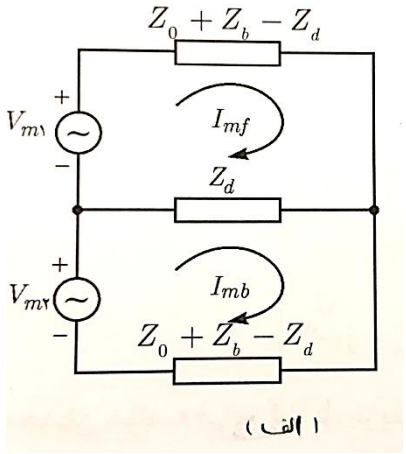
$$\bar{V}_{m1} = (Z_0 + Z_f)\bar{I}_{mf} - Z_d\bar{I}_{mb}$$

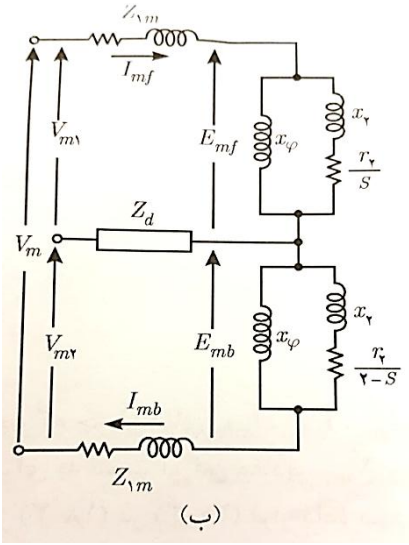
$$\bar{V}_{m2} = -Z_d\bar{I}_{mf} + (Z_0 + Z_b)\bar{I}_{mb}$$

روابط اخیر مدار معادلی را بصورت شکل زیر پیشنهاد میکند. با تفکیک امپدانس ها در حلقه های مدار (الف) و نیز قرار دادن مقادیر $(Z_0 - Z_d)$ مدار معادل بصورت شکل (ب)

در می آید. توجه به تعریف امپدانس Z_d نشان میدهد که این امپدانس معادل نصف تفاضل امپدانس های Z_{1a} و Z_{1m} پس از ارجاع Z_{1a} به طرف سیم پیچ اصلی است.

به عنوان مثال اگر با سری کردن یک خازن با یکی از سیم پیچ های یک موتور دو فاز متعادل از آن بصورت یک موتور تک فاز با خازن دائمی استفاده شود Z_d معادل نصف امپدانس خازن سری میگردد. یادآوری میشود که پس از سری شدن خازن موتور به یک موتور دو فاز نا متعادل تبدیل میگردد.





۳-۴-۲-برسی حالات خاص

با توجه به کلی بودن مدار بدست آمده میتوان انتظار داشت که در صورت وجود هر حالت خاص مدار معادل به شکل های ساده تری که در قسمت های که در قسمت های قبل به انها اشاره شد تبدیل گردد. از جمله این شرایط عبارتند از :

الف-موتور دو فاز متعادل با تغذیه ی متقارن

ب-موتور دو فاز متعادل با تغذیه ی نا متقارن

ج-موتور تکفاز خازن دائم (اعم از یک خازنی یا دو خازنی)

۳-۴-۲-۱-موتور دو فاز متعادل با تغذیه ی دو فاز متقارن

$a = 1\ ,\ Z_{1m} = Z_{1a} \longrightarrow Z_d = 0 \longrightarrow$ قسمت های f و b مستقل از هم میگردند $\longrightarrow$ مدار ساده تر

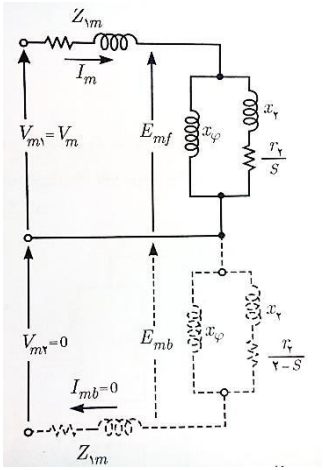
اگر تغذیه موتور متعادل باشد تنها یکی از مؤلفه های (f یا b) در مدار ظاهر می شود و مدار معادل موتور بصورت مدار معادل تنها یک فاز از یک موتور چند فازه متعادل خلاصه میگردد. پس در این حالت :

$a = 1\ ,\ Z_{1m} = Z_{1a} \longrightarrow Z_d = 0$

$|\bar{V}_a| = |\overline{V_m}| = V\ \ ;\ \ \overline{I_m} = \bar{I}_a \triangleq I$

$\bar{V}_{mb} = 0\ ;\ \bar{I}_{mb} = 0$

در این صورت مدار شکل ب بصورت شکل زیر در می‌آید که همان مدار معادل تکفاز موتور دو فاز متعادل می‌باشد .

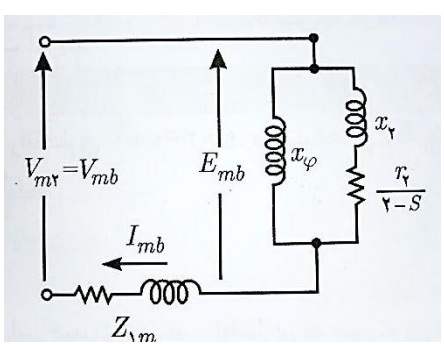


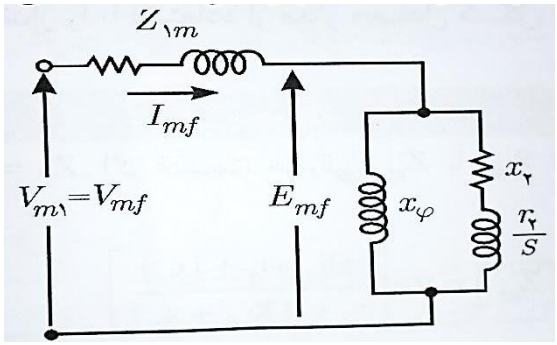
۳-۴-۲-۲-موتور دو فاز متعادل با تغذیه‌ی نا متقارن

اگرسیم پیچی های دو فاز متعادل باشند روابط زیر برقرار است :

$$a = 1 \quad , \quad Z_{1m} = Z_{1a} = Z_s \longrightarrow Z_d = 0$$

به علت صفر بودن Z_d دو مدار مربوط به مسیر جریان های $\bar{I}_{mb}$ و $\bar{I}_{mf}$ مستقل از یکدیگر است و در نتیجه مدار شکل زیر برای این حالت صادق خواهد بود .

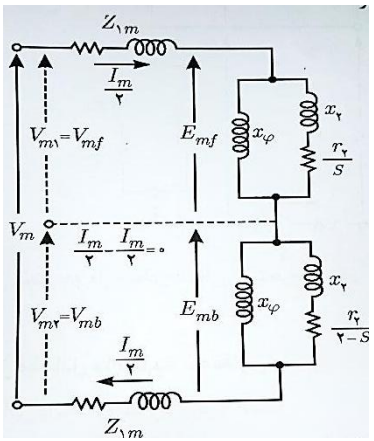




۳-۴-۲-۳-موتور تکفاز

اگر موتور به صورت تکفاز کار کند در اینصورت Z_{1a} بینهایت و در نتیجه مقدار Z_d نیز بی نهایت شده و با یک «مدار باز» جایگزین میگردد.
در این حالت $\bar{I}_a$ نیز به علت بی نهایت بودن Z_{1a} صفر است و مؤلفه های جریان و مدار معادل موتور بصورت زیر درمی آید :

$$\bar{I}_{mf} = \frac{1}{2}(\bar{I}_m - 0) = \frac{1}{2}\bar{I}_m$$
$$\bar{I}_{mb} = \frac{1}{2}(\bar{I}_m + 0) = \frac{1}{2}\bar{I}_m$$



مثال :گشتاور راه اندازی موتور القایی تکفاز با سیم پیچ راه انداز را با استفاده از مدار معادل شکل ب بدست اورید.

حل : در راه اندازی $s=1$ - $s=2$ در نتیجه $Z_f = Z_b \triangleq Z_{st}$ اگر قسمت حقیقی Z_{st} با R_{st} نشان داده شود داریم:

$$R_{st} = Re[Z_{st}] = Re\left[\frac{jX_m(r_2+jx_2)}{r_2+j(X_m+x_2)}\right]$$

$$T_{st} = \frac{2}{\omega_s}\left(I^2{}_{mf}R_f - I^2{}_{mb}R_b\right) = \frac{2R_{st}}{\omega_s}\left(I^2{}_{mf} - I^2{}_{mb}\right)$$

$$I^2{}_{mf} - I^2{}_{mb} = aI_mI_a\sin\alpha$$

$$T_{st} = \frac{2aI_mI_aR_{st}}{\omega_s}\sin\alpha$$

۳-۴-۲-۴-موتور تک فاز با خازن دائم

در این حالت خاص که هر دو سیم پیچ اصلی و کمکی بطور موازی توسط ولتاژ $\bar{V}$ تغذیه می شوند داریم :

$$\overline{V_m} = \bar{V}_a = \bar{V} \begin{cases} \overline{V_{m1}} = \frac{1}{2}\left[\overline{V_m} - j\left(\frac{\overline{V_a}}{a}\right)\right] = \frac{\bar{V}}{2}\left(1-\frac{j}{a}\right) \\ \overline{V_{m2}} = \frac{1}{2}\left[\overline{V_m} + j\left(\frac{\overline{V_a}}{a}\right)\right] = \frac{\bar{V}}{2}\left(1+\frac{j}{a}\right) \end{cases}$$

$$Z_{1m} = r_{1m} + jx_{1m}$$

$$Z_{1a} = Z_a + Z_c = r_{1a} + jx_{1a} - jx_c$$

$$\bar{I}_{mf} = \frac{\bar{V}_{mf}(Z_{1m}+Z_b+Z_d) + \bar{V}_{mb}Z_d}{(Z_{1m}+Z_f+Z_d)(Z_{1m}+Z_b+Z_d) - Z^2{}_d}$$

$$\bar{I}_{mb} = \frac{\bar{V}_{mb}(Z_{1m}+Z_f+Z_d) + \bar{V}_{mf}Z_d}{(Z_{1m}+Z_f+Z_d)(Z_{1m}+Z_b+Z_d) - Z^2{}_d}$$

$$\bar{I}_m = \bar{I}_{mf} + \bar{I}_{mb}$$
$$\bar{I}_a = j\frac{\bar{I}_{mf}}{a} - j\frac{\bar{I}_{mb}}{a}$$
$$I = \bar{I}_m + \bar{I}_a = |I| \angle\theta$$
$$P_{in} = VI\cos\theta$$
$$T = \frac{2}{\omega_s}\left(I^2{}_{mf}R_f - I^2{}_{mb}R_b\right) \text{ N.m}$$
$$P = 2(1-s)\left(I^2{}_{mf}R_f - I^2{}_{mb}R_b\right) \text{ W}$$
$$P_{out} = P - P_{rot}\ ; \eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \times 100$$

مثال: یک موتور القایی تکفاز با خازن راه انداز، $\frac{۱}{۴}$ اسب بخار ، چهار قطبی دارای مشخصات زیر است.گشتاور راه اندازی را تعیین نمائید.
به علاوه، جریان راه اندازی و ضریب توان را بدست آورید(ولتاژ تغذیه ۱۱۵ ولت می‌باشد.)
حل: چون در لحظه راه اندازی $s = 1$ - $s = 2$ ،بنابر این:

$$Z_{st} = Z_f = Z_d = ۳.۲۸ + j۲.۶۹\ \Omega$$
$$Z_{1a} = (۱۲ + j۶.۵) - j۲۰ = ۱۲ - j۱۳.۵\ \Omega$$
$$Z_d = \frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{۲۳ - j۱۳.۵}{۱.۶^{۲}}\right) - (۱.۹ + j۲.۶)\right] = ۱.۳۹ + j۳.۹۴\Omega$$
$$\bar{V}_{mf} = \frac{۱۱۵}{۲}\left(۱ - \frac{j}{۱.۶}\right) = ۶۷.۸۱\angle - ۳۲° \quad ; \quad \bar{V}_{mb} = \frac{۱۱۵}{۲}\left(۱ + \frac{j}{۱.۶}\right) = ۶۷.۸۱\angle + ۳۲°\ V$$
$$\bar{I}_{mf} = ۱۱.۷۷\angle - ۵۴.۹۳° \quad ; \quad \bar{I}_{mb} = ۴.۳۷\angle - ۱۹.۷°$$
$$T_{st} = \frac{۲}{۶۰\pi}(۳.۲۸)\left(۱۱.۷۷^{۲} - ۴.۳۷^{۲}\right) = ۴.۱۵ \quad N.m$$
$$\bar{I}_m = \bar{I}_{mf} + \bar{I}_{mb} = ۱۵.۵۵\angle - ۴۵.۶۱°\ A \quad ; \quad \bar{I}_a = j\frac{\bar{I}_{mf}}{۱.۶} - j\frac{\bar{I}_{mb}}{۱.۶} = ۵.۳۷\angle ۱۸°\ A$$
$$\bar{I} = \bar{I}_m + \bar{I}_a = ۱۸.۵۶\angle - ۳۰.۶°\ A$$

۳-۵-تعیین گشتاور راه اندازی

در لحظه راه اندازی $R_f = R_b = R_k$ است.

$$T_e = \frac{P}{\omega_s}\left(P_{gf} - P_{gb}\right)$$

$$\begin{cases} P_{gf} = 2R_f \bar{I}_{mf} \\ P_{gb} = 2R_f \bar{I}_{mb} \end{cases} \longrightarrow \quad T_{st} = \frac{2P}{\omega_s} R_K \left(\bar{I}_{mf} - \bar{I}_{mb}\right)\Big|_{s\,=\,1}$$

$$\bar{Z}_m = R_m + jX_m$$

$$X_a = X_{1a} - X_c$$

$$\bar{Z}_a = R_a + jX_a$$

$$\begin{cases} \bar{I}_m = \dfrac{\bar{V}_s}{\bar{Z}_m} = \bar{I}_{mf} + \bar{I}_{mb} \\ \bar{I}_a = \dfrac{\bar{V}_s}{\bar{Z}_a} = \dfrac{j}{a}\bar{I}_{mf} - \dfrac{j}{a}\bar{I}_{mb} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{I}_{mf} = \dfrac{\bar{V}_s}{2}\left[\dfrac{1}{\bar{Z}_m} - \dfrac{ja}{\bar{Z}_a}\right] = \left[\dfrac{\bar{Z}_a - ja\bar{Z}_m}{\bar{Z}_m\bar{Z}_a}\right]\dfrac{\bar{V}_s}{2} \\ \bar{I}_{mb} = \dfrac{\bar{V}_s}{2}\left[\dfrac{1}{\bar{Z}_m} + \dfrac{ja}{\bar{Z}_a}\right] = \left[\dfrac{\bar{Z}_a + ja\bar{Z}_m}{\bar{Z}_m\bar{Z}_a}\right]\dfrac{\bar{V}_s}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\bar{I}_{mf}| = \left[\dfrac{|\bar{Z}_a - ja\bar{Z}_m|}{|\bar{Z}_m\bar{Z}_a|}\right]\left|\dfrac{\bar{V}_s}{2}\right| = \left[\dfrac{\bar{Z}_a - ja\bar{Z}_m}{Z_m\bar{Z}_a}\right]\dfrac{V_s}{2} \\ |\bar{I}_{mb}| = \left[\dfrac{|\bar{Z}_a + ja\bar{Z}_m|}{|\bar{Z}_m\bar{Z}_a|}\right]\left|\dfrac{\bar{V}_s}{2}\right| = \left[\dfrac{\bar{Z}_a + ja\bar{Z}_m}{Z_m\bar{Z}_a}\right]\dfrac{V_s}{2} \end{cases}$$

تعیین گشتاور راه اندازی

$$T_{st} = \left(\frac{PR_K}{2\omega_s}\right)\left(\frac{V^2{}_s}{Z^2{}_m Z^2{}_a}\right)[|\bar{Z}_a - ja\bar{Z}_m|^2] - [|\bar{Z}_a + ja\bar{Z}_m|^2]$$

$$\Downarrow$$

$$(I_m I_a)\left(\frac{1}{Z_m Z_a}\right)$$

$$T_{st} = \frac{PR_K I_m I_a}{2\omega_s}\left[\frac{|(R_a + jX_a - jaR_m + aX_m)|^2 - |(R_a + jX_a - jaR_m - aX_m)|^2}{Z_m Z_a}\right]$$

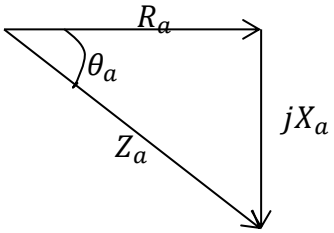
$$T_{st} = \frac{PR_K I_m I_a}{2\omega_s Z_m Z_a}[(R_a + aX_m)^2 + (X_a - aR_m)^2 - (R_a - aX_m)^2 - (X_a + aR_m)^2]$$

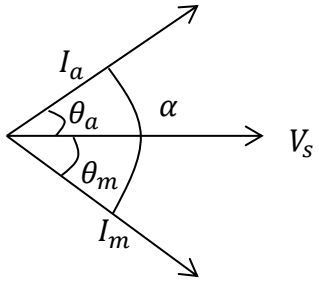
$$T_{st} = \frac{PR_K 2aI_m I_a}{\omega_s}\left[\frac{R_a X_m - X_a R_m}{Z_m Z_a}\right]$$

θ_a منفی است در نتیجه: $Z_a = R_a - jX_a$

$$T_{st} = \frac{PR_K 2aI_m I_a}{\omega_s}[\sin\theta_m \cos\theta_a - \sin\theta_a \cos\theta_m]$$

$$\alpha = \theta_m + \theta_a$$





$$T_{st} = \frac{PR_K 2aI_m I_a}{\omega_s}.\sin\alpha \longrightarrow \qquad T_{st} = K\, I_m I_a \sin\alpha$$

مثال:

و a را طوری بیابید تا یک موتور القایی تک فاز خازنی در راه اندازی ، میدان معکوس نداشته باشد.

حل.

می دانیم که:

$$\begin{cases} \bar{I}_m = I_{mf} + \bar{I}_{mb} \\ \bar{I}_a = \frac{j}{a}\bar{I}_{mf} - \frac{j}{a}\bar{I}_{mb} \end{cases} \xrightarrow{\bar{I}_{mb}=0} \begin{cases} \bar{I}_m = \bar{I}_{mf} \\ \bar{I}_a = \frac{j}{a}\bar{I}_{mf} = \frac{j}{a}\bar{I}_m \end{cases} \qquad (*)$$

با توجه به رابطه (۳-۴۵) و شکل (۳-۹-ب) داریم:

$$\begin{matrix} \bar{I}_m = \dfrac{\bar{V}}{Z_m} \\ \bar{I}_a = \dfrac{\bar{V}}{\tilde{Z}_a} \end{matrix} \xrightarrow{(*)} \frac{\bar{V}}{\tilde{Z}_a} = \frac{j}{a}.\frac{\bar{V}}{Z_m}; \tilde{Z}_a = Z_a + Z_c = R_a - j(x_c - x_a) = R_a - j\tilde{X}_a$$

$$\Rightarrow \frac{V}{R_a - j\tilde{X}_a} = \frac{j}{a}\frac{V}{(R_m + jX_m)} \Rightarrow \frac{R_a + j\tilde{X}_a}{\tilde{Z}_a^2} = \frac{j(R_m - jX_m)}{aZ_m^2}$$

از متحد قرار دادن قسمت های حقیقی و موهومی داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{R_a}{\tilde{Z}_a^2} = \dfrac{X_m}{aZ_m^2} \quad (1) \\ \dfrac{\tilde{X}_a}{\tilde{Z}_a^2} = \dfrac{R_m}{aZ_m^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{برهم داریم}]{\text{از تقسیم دو رابطه}} \frac{R_a}{\tilde{X}_a} = \frac{X_m}{R_m} \Rightarrow \tilde{X}_a = \frac{R_a R_m}{X_m}$$

$$x_c = x_a + \frac{R_a R_m}{X_m}$$

همچنین نسبت دور به صورت زیر تعیین می شود:

$$(1) \Rightarrow a = \frac{\tilde{Z}_a^2 X_m}{R_a Z_m^2} = \frac{\left(R_a^2 + \left(\frac{R_a R_m}{X_m}\right)^2\right)X_m}{R_a Z_m^2}$$

لذا با نصب خازن راه انداز و اعمال نسبت دور موثر a فوق الذکر می توان میدان معکوس را در راه اندازی حذف نمود.

مثال :

با اضافه کردن یک خازن در مسیر یکی از فازهای یک موتور دو فاز متعادل و موازی کردن دو فاز ، یک موتور تک فاز با خازن دائم می سازیم. امپدانس خازن موردنیاز را چنان بیابید تا موتور در سرعت خاصی به صورت متعادل کار کند.

حل:

کار متعادل موتور هنگامی نتیجه می شود که مولفه معکوس میدان حذف شود ، یعنی هنگامی که باشد. معادله (۳-۳۰) نشان می دهد که این امر وقتی مقدور است که داشته باشیم:

$$\bar{V}_{m۲}(Z_{۱m}+Z_f+Z_b)+\bar{V}_{m۱}Z_d=۰$$

در آن صورت:

$$Z_d=\frac{-\bar{V}_{m۲}(Z_{۱m}+Z_f)}{\bar{V}_{m۱}+\bar{V}_{m۲}}$$

اما در این حالت $\bar{V}_{m۱}+\bar{V}_{m۲}=\bar{V}_m=\bar{V}$ است که در آن $\bar{V}$ ولتاژ تغذیه اعمالی به هر دو سیم پیچ می باشد.

$$\bar{V}_{m۲}=\frac{\bar{V}}{۲}(۱+j/a)$$

$$Z_d=-\frac{\bar{V}}{۲}(۱+j/a)\left(\frac{Z_{۱m}+Z_f}{\bar{V}}\right)$$

$$Z_d=-\frac{۱}{۲}(۱+j/a)(Z_{۱m}+Z_f)$$

$$Z_d=\frac{۱}{۲}\left(\frac{Z_{۱a}}{a^۲}-Z_{۱m}\right)$$

$$\Rightarrow Z_{۱a}=a^۲(۲Z_d+Z_{۱m})=r_c-jx_c+r_{۱a}+jx_{۱a}$$

$$r_c-jx_c=Z_{۱a}-(r_{۱a}+jx_{۱a})$$

۳-۶-ماکزیمم کردن گشتاور راه اندازی در صورتی که $Z_c = a^2 Z_m$ باشد:

فرض کنید سیم بندی فاز a یک موتور دو فاز متعادل را عوض کنیم به طوری که حجم مس آن عوض نشود. بدین ترتیب یک موتور دو فاز نامتعادل ایجاد می شود که رابطه زیر در آن برقرار است (چرا؟):

$$T_{st} \propto I_a \sin\alpha$$

چون:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_s}{\bar{Z}_a + \bar{Z}_c} = \frac{\bar{V}_s}{\bar{Z}_a} \qquad \bar{Z}_a = \bar{Z}_a + \bar{Z}_c = a^2 \bar{Z}_m + \bar{Z}_c$$

نتیجه می شود:

$$\rightarrow \bar{Z}_a = a^2 Z_m \cos(\theta_m) + j a^2 Z_m \sin(\theta_m) + Z_c \cos(\theta_c) + j Z_c \sin(\theta_k)$$

$$\rightarrow \sin\alpha = \sin(\theta_m - \theta_a) = \sin(\theta_m)\cos(\theta_a) - \cos(\theta_m)\sin(\theta_a)$$

$$I_a \sin\alpha = V_s \left[\frac{\sin\theta_m [a^2 Z_m \cos\theta_m + Z_c \sin\theta_c] - \cos(\theta_m)[a^2 Z_m \sin\theta_m + Z_c \sin\theta_c]}{(a^2 Z_m \cos\theta_m + Z_c \cos\theta_c)^2 + (a^2 Z_m \sin\theta_m + Z_c \sin\theta_c)^2} \right]$$

$$\rightarrow I_a \sin\alpha = \frac{V_s Z_c (\theta_m - \theta_c)}{a^4 Z_m^2 + Z_c^2 + 2a^2 Z_m Z_c \cos(\theta_m - \theta_c)}$$

$$\rightarrow I_a \sin\alpha = \frac{V_s Z_c \sin\gamma}{a^4 Z_m^2 + Z_c^2 + 2a^2 Z_m Z_c \cos\gamma}$$

از رابطه $I_a \sin\alpha$ نسبت به Z_c مشتق می گیریم تا مقدار Z_c را بدست آوریم:

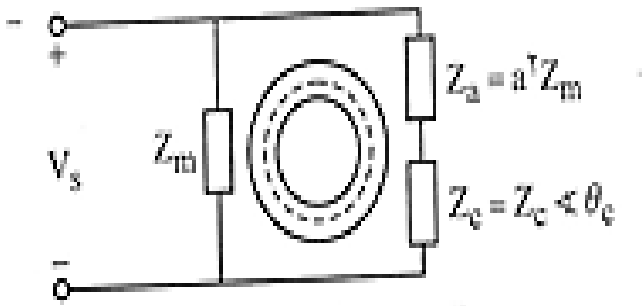
$$\frac{\partial(I_a \sin\alpha)}{\partial Z_c} = 0$$

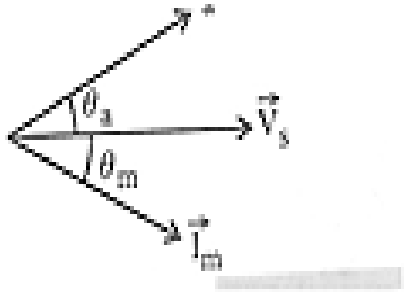
$$\rightarrow V_s \sin\gamma[a^4 Z_m^2 + Z_c^2 + 2a^2 Z_m Z_c \cos\gamma] - V_s Z_c \sin\gamma[2Z_c + 2a^2 Z_m \cos\gamma] = 0$$

$$\rightarrow a^4 Z_m^2 + Z_c^2 + 2a^2 Z_m Z_c \cos\gamma - 2Z_c^2 - 2a^2 Z_m Z_c \cos\gamma = 0$$

$$\rightarrow a^4 Z_m^2 - Z_c^2 + 0 = 0$$

$$\rightarrow Z_c^2 = a^2 Z_m$$





شکل (3-11): ماکزیمم کردن گشتاور راه اندازی در صورتی که $Z_c = a^2 Z_m$

مثال:

یک موتور القایی تک فاز ۴ قطبی ۱۲۰ ولتی و ۶۰ هرتز مفروض است و خازن دائما در مدار سیم پیچ کمکی قرار دارد. در این موتور داریم:

$$X_{1m} = 2; r_{1m} = 1/5; r_2' = 1/5$$
$$x_{1a} = 2; r_{1a} = 2/5; x_2' = 2$$
; $X_m = 48$; $a = \frac{N_a}{N_m} = 1$; f 0 3=ɑ م

الف) مدار معادل موتور را تحت لغزش ۵ درصد رسم کنید.

ب) تحت ولتاژ اسمی ، گشتاور و جریان راه انداز را حساب کنید.

ج) اگر موازی با خازن دائم فوق یک خازن برای مرحله راه اندازی قرار دهیم مقدار آن را برای گشتاور راه انداز ماکزیمم به ازاء جریان راه اندازی حساب کنید.

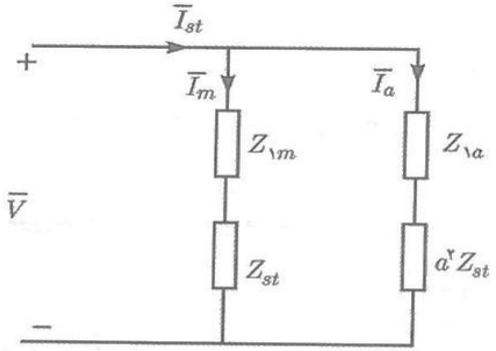
د) در فرض (ج) گشتاور راه انداز ماکزیمم به ازاء جریان راه اندازی را به دست آورید.

حل:

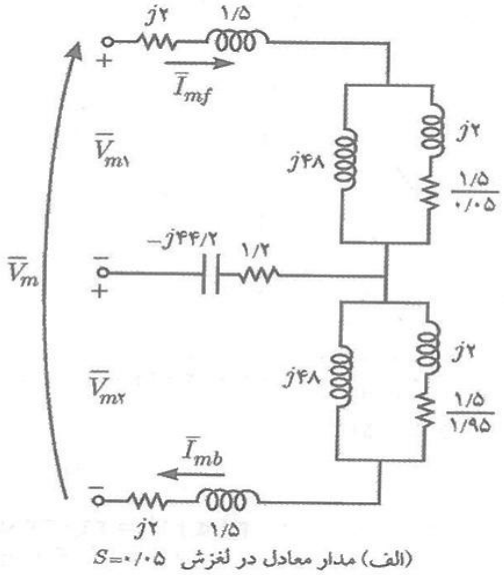
الف) مدار معادل فاز m براساس شکل (3-5-ب) در شکل (12-3) داده شده است و داریم:

$$X_c = \frac{۱}{\omega c} = \frac{۱}{۲\pi fc} = \frac{۱۰^۶}{۲\pi \times ۶۰ \times ۳۰} = ۸۸/۴\Omega$$

$$Z_d = \frac{۱}{۲}\left(\frac{Z_{۱a}}{a^۲} - Z_{۱m}\right) = \frac{۱}{۲}(۲/۵ + j(۲ - ۸۸/۴) - ۱/۵ - ۲j) = \frac{۱}{۲} - j۴۴/۲\Omega$$



(ب) مدار معادل در $S=۱$



(الف) مدار معادل در لغزش $S=۰/۰۵$

شکل (12-33) : مربوط به مثال 7 الف) مدار معادل در لغزش $s=۰/۰۵$ ب)مدار معادل در $s=۱$

ب) در لغزش $s=1$ داریم:

$$Z_f = Z_b = Z_{st} = j4811(1/5 + j2) = 2/4 \angle 54/85^\circ$$
$$\Rightarrow Z = 1/38 + j1/96 \overset{\Delta}{=} R_{st} + jX_{st}$$

$$Z_m = Z_{1m} + Z_{st} = 1/5 + j2 + 1/38 + j1/96 = 2/88 + j3/96$$

$$\bar{I}_m = \frac{\bar{V}}{Z_m} = \frac{120\angle 0}{2/88 + j3/96} = 24/5 \angle -54^\circ$$

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}}{Z_{1a} + a^2 Z_{st}} = \frac{120\angle 0}{2/5 + j2 - j88/4 + 1/38 + j1/96} = 1/42 \angle 87/4^\circ A$$

بنابراین جریان راه اندازی به قرار زیر است:

$$\bar{I}_{st} = \bar{I}_m + \bar{I}_a = 23/4 \angle -51/82^\circ$$

گشتاور راه انداز به شرح زیر است:

$$T_{st} = \frac{2aI_m I_a R_{st}}{\omega_s}.\sin\alpha = \frac{2(1)(24/5)(1/42)(1/38)}{1800 \times 2\pi/60}\sin(87/4 + 54)$$
$$\Rightarrow T_{st} = 0/318 N.m$$

ج) جهت محاسبه کل خازن مورد نیاز (در راه اندازی) می توان گفت:

$$Z_m = Z_{1m} + Z_{st} = 2/88 + j3/96 = 4/9 \angle 54^\circ \Omega$$

امپدانس ورودی سیم پیچی کمکی در راه اندازی بدون درنظر گرفتن خازن ها

$$Z_a = R_a + jX_a =$$
$$= Z_{1a} + a^2 Z_{st} = 2/5 + j2 + 1/38 + j196 = 3/88 + j3/96$$

برای امپدانس خازن داریم:

$$X_c = ۳/۹۶ - \left[\frac{۳/۹۶\times ۳/۸۸ - ۴/۹\sqrt{(۳/۸۸+۲/۸۸)۳/۸۸}}{۲/۸۸}\right] \Rightarrow X_c = ۷/۳۴\Omega$$

$$\Rightarrow C = \frac{۱}{\omega X_c} = \frac{۱۰^{۶}}{۳۷۷\times ۷/۳۴}\mu f = ۳۶۱/۵\mu f$$

خازن راه انداز باید با خازن دائم موجود موازی گردد پس:

$$C_s = ۳۶۱/۵ - ۳۰ = ۳۳۱/۵\mu f$$

د) گیریم خازن معادل با سیم پیچ کمکی سری باشد پس در شرایط راه اندازی داریم:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}}{Z_a - jX_{total}} = \frac{۱۲۰<۰}{۳/۸۸ + j۳/۹۶ - j۷/۳۴} = ۲۳/۳۳ < ۴۱^\circ$$

$$\bar{I}_m = ۲۴/۵ < ۵۴^\circ$$

جریان راه اندازی به قرار زیر است:

$$\bar{I}_{st} = ۲۴/۵ < -۵۴^\circ + ۲۳/۳۲ < ۴۱^\circ = ۳۲/۳۳ < -۸^\circ$$

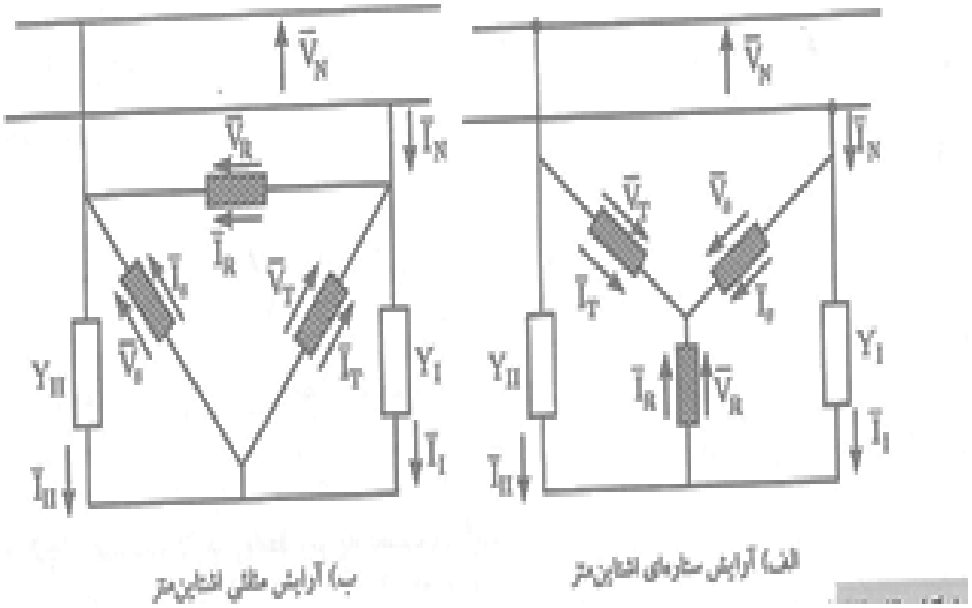
$$T_{st} = \frac{۲(۲۴/۵)(۳۲/۳۳)(۱/۳۸)}{۱۸۰۰\times ۲\pi/۶۰}\sin(۴۱+۵۴) = ۸/۳۵N.m$$

گشتاور راه اندازی ماکزیمم به ازاء جریان راه اندازی عبارت است از:

$$\frac{۸/۳۵}{۳۲/۳۳} = ۰/۲۸۵N.m/A$$

۳-۷-نحوه کار ماشین های سه فاز با ولتاژ تک فاز (اتصالات اشتاین متز Steinmetz)

گاها لازم می شود که ماشین سه فازی با ولتاژ تک فاز تغذیه گردد. در این صورت می توان از اتصالاتی موسوم به اتصالات اشتاین متز استفاده نمود. برای این منظور بسته به نوع ارایش سیم پیچ های موتور سه فاز مطابق شکل (۳-۱۳) امپدانس هایی اضافه می گردد.



شکل (۳-۱۳): اتصالات کامل اشتاین متز

در ادامه خواهیم دید که می توان ادمتیانس های و را طوری تعیین نمود که موتور سه فاز در نقطه کار موردنظر به صورت متعادل کار کند. لذا به واسطه تغذیه نامتقارن موتور سه فاز ، سعی می گردد به کمک مولفه های متقارن شرایط لازم برای عملکرد متعادل فراهم گردد.

۳-۷-۱-آرایش ستاره ای اشتاین متز

در حالت کلی ، با توجه به تئوری مولفه های متقارن می توان ولتاژهای فازها را که مطابق شکل (۳-۱۳-الف) نامگذاری شده اند تجزیه نمود:

$$\begin{cases} \bar{V}_{.} = \frac{1}{3}(\bar{V}_R + \bar{V}_s + \bar{V}_T) \\ \bar{V}_f = \frac{1}{3}\bar{V}_R + a\bar{V}_s + a^2\bar{V}_T \\ \bar{V}_b = \frac{1}{3}(\bar{V}_R + a^2\bar{V}_s + a\bar{V}_T) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \bar{V}_R = \bar{V}_{.} + \bar{V}_f + \bar{V}_b \\ \bar{V}_s = \bar{V}_{.} + a^2\bar{V}_f + a\bar{V}_b \\ \bar{V}_T = \bar{V}_{.} + a\bar{V}_f + a^2\bar{V}_b \end{cases}$$

که در آن:

$$a = 1\angle 120^\circ;\ a^2 = 1\angle 240^\circ$$

در آرایش ستاره سه سیمه (فاقد سیم نول) ، سیستم صفر جریان وجود ندارد لذا سیستم صفر ولتاژ را کنار می گذاریم:

$$\begin{cases} \bar{V}_R = \bar{V}_f + \bar{V}_b \\ \bar{V}_s = a^2\bar{V}_f + a\bar{V}_b \\ \bar{V}_T = a\bar{V}_f + a^2\bar{V}_b \end{cases}$$

با به کارگیری قوانین کیرشوف در مدار شکل داریم:

$$\begin{cases} \bar{V}_N = \bar{V}_s - \bar{V}_T \quad (1) \\ \dfrac{\bar{I}_I}{Y_I} = \bar{V}_s - \bar{V}_R \quad (2) \\ \dfrac{\bar{I}_{II}}{Y_{II}} = \bar{V}_T - \bar{V}_R \quad (3) \\ \bar{I}_I + \bar{I}_{II} = \bar{I}_R \xrightarrow{(3),(2)} Y_I(\bar{V}_s - \bar{V}_R) + Y_{II}(\bar{V}_T - \bar{V}_R) = \bar{V}_R \quad (4) \end{cases}$$

برای جریان ها هم نظیر همین روابط را می نویسیم. مثلا:

$$\bar{I}_R = \bar{V}_f\bar{Y}_f - \bar{V}_bY_b \quad (5)$$

بعد از انجام عملیات لازم ، روابط زیر به دست می آیند.

$$\bar{V}_f = j\frac{\bar{V}_N}{\sqrt{3}}\frac{Y_b + Y_I(1-a) + Y_{II}(1-a^2)}{Y_f + Y_b + 3Y_I + 3Y_{II}}$$

$$\bar{V}_b = j\frac{\bar{V}_N}{\sqrt{3}}\frac{Y_f + Y_I(1-a^2) + Y_{II}(1-a^2)}{Y_f + Y_b + 3Y_I + 3Y_{II}}$$

باشد. در این صورت خواهیم داشت: $\bar{V}_b = 0$ شرط اینکه ماشین متعادل کار کند این است که

$$Y_f + T_I(1-a^2) + Y_{II}(1-a) = 0$$