مسأله زیر را به روش سیمپلکس حل نمایید.

$$\text{MAX } Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \rightarrow Z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \qquad 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \qquad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

کلیه متغیرها

متغیر اساسی	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	اعداد سمت راست
Z	-4	-3	-6	0	0	0
s_1	3	1	3	1	0	30
s_2	2	2	3	0	1	40

متغیر خروجی

متغیر ورودی

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
Z	2	-1	0	2	0	60
x_3	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
s_2	-1	1	0	-1	1	10

متغیر خروجی

متغیر ورودی

(سطر لولای جدید × ضریب ستون لولا) - سطر قدیم = سطر جدید

$$\text{سطر } Z \text{ جدید} = \left[-4\ -3\ -6\ 0\ 0\ 0\right] - (-6)\left[1\ \tfrac{1}{3}\ 1\ \tfrac{1}{3}\ 0\ 10\right]$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
Z	1	0	0	1	1	70
x_3	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$
x_2	-1	1	0	-1	1	10

$$\begin{cases} Z = 70 \quad x_3 = \frac{20}{3} \quad x_2 = 10 \quad x_1 = 0 \\ s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \end{cases}$$

سیمپلکس تجدید نظر شده

یکی از روش‌هایی که از آن به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی روش سیمپلکس تجدید نظر شده است. این روش با استفاده از کلیه اصول و گام‌های سیمپلکس و بدون انجام عملیات اضافی و ذخیره‌سازی اطلاعات غیر مفید نه فقط آن‌ها مستلزم تکرارهایی حافظه زیاد کامپیوتر است حل مسئله را به انجام می‌رساند و استفاده از مفاهیم ماتریسی ضرورتی اجتناب ناپذیر در روش سیمپلکس تجدید نظر شده می‌باشد.

ماتریس آرایه‌ای است از اعداد و حروف که به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{\underset{\text{سطر}}{m} \times \underset{\text{ستون}}{n}}$$

ماتریس نمونه A دارای m سطر و n ستون است و آن را یک ماتریس از درجه $m\times n$ می‌نامند و بطور خلاصه بصورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ می‌نویسند که در آن i شماره سطر و j شماره ستون است.

جمع و تفریق ماتریسها

اگر $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ دو ماتریس با درجه $m\times n$ باشد در این صورت مجموع یا تفاضل آنها قابل تعریف است و حاصل یک ماتریس $m\times n$ است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \qquad A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

ضرب یک عدد در ماتریس

اگر یک عدد در یک ماتریس ضرب شود آن عدد در تمامی عناصر آن ماتریس ضرب می‌شود یعنی

$$K\cdot A=k[a_{ij}]=[ka_{ij}]$$

ضرب ماتریسها

مهم سوال امتحان

برای آنکه ماتریسهای A و B را بتوان در هم ضرب کرد باید تعداد ستونهای ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد یعنی $n=p$

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$B=[b_{ij}]_{p\times q}$$

در این صورت حاصلضرب دو ماتریس، ماتریسی از درجه $m\times q$ می‌باشد.

اگر ماتریس A و B بصورت زیر باشند، مطلوبست الف) A+B ب) A-B ج) ۳A د) A.B

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

الف/ $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$

۳/

ب/ $A-B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

ج/ $۳A=۳\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$

د/ $A\cdot B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ۳ & ٤ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳+۲ & ٤+۰ \\ ۰+۳ & ۰+۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ٤ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$

معکوس ماتریس

محمد

اگر ماتریس B به صورت $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد معکوس آن را با B^{-1} نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم

$$B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس زمانی محاسبه نماید.

$B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1}=\frac{۱}{۳\times۱-۰\times۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

نکته: معکوس ماتریس واحد همیشه خود ماتریس است.

مراحل روش سیمپلکس تجدید نظر شده

مرحله اول تعیین متغیر ورودی

در این مرحله ضرایب متغیرهای غیراساسی در تابع هدف (سطر هدف) را با استفاده از رابطهٔ $C_B B^{-1}N-C_N$ پیدا می‌کنیم. اگر این مقادیر همگی غیرمنفی باشند به جواب بهینه رسیده‌ایم در اینصورت جواب بهینه را با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌کنیم

$Z=C_B B^{-1}b \qquad x_B=B^{-1}b$

در غیر اینصورت متغیری را که دارای منفی‌ترین مقدار است انتخاب می‌کنیم. این متغیر، متغیر ورودی است

$B \longrightarrow$ Basic به معنای اساسی متغیرهای اساسی $[S_1 \quad S_2]$

s.a.m

N → NON BASIC متغیرهای غیراساسی $[x_1 \quad x_2 \quad x_3]$

C تابع هدف

C_B ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی در تابع هدف

C_N ماتریس ضرایب متغیرهای غیراساسی در تابع هدف

B ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی در محدودیتها

N ماتریس ضرایب متغیرهای غیراساسی در محدودیتها

b اعداد سمت راست

$\bar{a}_j$ ضرایب متغیر ورودی در محدودیتها

x_B متغیرهای اساسی

مرحله دوم تعیین متغیر خروجی

انتخاب متغیر خروجی مستلزم در دست داشتن ضرایب متغیر ورودی در محدودیتها (ستون لولا) و اعداد سمت راست است. در صورتیکه متغیر x_j ورودی باشد a_j ضریب آن را نشان داده و بوسیله رابطه زیر محاسبه می‌گردد

$a_j = B^{-1} \bar{a}_j$ ستون لولا

$x_B = B^{-1} b$ اعداد سمت راست

سپس آنکه کمترین مقدار حاصل از تقسیم اعداد سمت راست بر اعداد ستون لولا متغیر خروجی را نشان می‌دهد.

$$\text{Min} = \left\{ \frac{x_B}{a_j} \right\}$$ متغیر خروجی

مرحله سوم تعیین متغیر اساسی و غیر اساسی جدید

در این مرحله متغیرهای اساسی و غیر اساسی جدید را تعیین و به گام اول باز گردید

مسأله برنامه ریزی خطی زیر را به روش سیمپلکس تجدید نظر شده حل نمایید و جواب بهینه را بیابید مهم سوال پایان ترم‌ها

$$MAX\ Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \longrightarrow Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \longrightarrow 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \longrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \longrightarrow x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

۱/ $C_B B^{-1} N - C_N$ ← منفی ترین ضریب متغیرهای اساسی در سطر هدف ← متغیر ورودی

۲/ $a_j = B^{-1} \bar{a}_j$

۳/ $X_B = B^{-1} b$

$$\frac{\overset{③}{\text{اعداد سمت راست}}}{\underset{②}{\text{ضریب ستون لولا}}} = \text{کمترین مقدار} \leftarrow \text{متغیر خروجی}$$

متغیرهای غیر اساسی	متغیرهای اساسی
متغیرهای غیر اساسی $X_N = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$	متغیرهای اساسی $X_B = [s_1 \quad s_2]$
ضرایب متغیرهای غیر اساسی در تابع هدف $C_N = [4 \quad 3 \quad 6]$	ضرایب متغیرهای اساسی در تابع هدف $C_B = [0 \quad 0]$
ضرایب متغیرهای غیر اساسی در محدودیتها $N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	ضرایب متغیرهای اساسی در محدودیتها $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	اعداد سمت راست $b = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

۱/ $C_B B^{-1} N - C_N = [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} - [4 \quad 3 \quad 6] = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ -4 & -3 & -6 \end{array}\right]$ متغیر ورودی x_3

۲/ $a_j = B^{-1} \bar{a}_j = a_{x_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

۳/ $X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\40\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}30\\40\end{bmatrix}$ $\quad Min = \frac{X_B}{a_j} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{30}{3} = 10 \checkmark Min \\ S_2 = \frac{40}{3} = 13.3 \end{cases}$ متغیر خروجی

مرحله دوم

متغیرهای اساسی | متغیرهای غیراساسی

$X_B = \begin{bmatrix}x_3 & S_2\end{bmatrix}$ $\qquad X_N = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & S_1\end{bmatrix}$ $\qquad$ ۱/ $C_B B^{-1} N - C_N$

$C_B = \begin{bmatrix}9 & 0\end{bmatrix}$ $\qquad C_N = \begin{bmatrix}4 & 3 & 0\end{bmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ $\qquad N = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

۱/ $\begin{bmatrix}9 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 2 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & S_1\end{array}\\ \begin{bmatrix}2 & \boxed{-1} & 2\end{bmatrix}\end{array}$ متغیر ورودی

۲/ $a_j = B^{-1}\bar{a}_j = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{array}{cc}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix} & \begin{array}{c}x_3\\ S_2\end{array}\end{array}$ ← ستون لولا

۳/ $X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\ 40\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 10\end{bmatrix}$ $\qquad x_3 = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30$ $\qquad S_2 = \frac{10}{1} = 10$ $\quad Min$ S_2 متغیر خروجی

مرحله سوم

متغیر اساسی | متغیر غیراساسی

$X_B = \begin{bmatrix}x_3 & x_2\end{bmatrix}$ $\qquad X_N = \begin{bmatrix}x_1 & S_2 & S_1\end{bmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \frac{1}{3\times2-1\times3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

$C_B = \begin{bmatrix}9 & 3\end{bmatrix}$ $\qquad C_N = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ $\qquad N = \begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

۱/ $\begin{bmatrix}9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

در این مرحله چون تمامی مقادیر سطر هدف غیر منفی شده‌اند بنابراین متغیر ورودی نداریم و به جواب بهینه رسیده‌ایم در نتیجه لازم است مقادیر

متغیرهای اساسی را محاسبه می‌کنیم.

$Z = C_{B} B^{-1} b \Rightarrow Z = \begin{bmatrix} ۶ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳۰ \\ ٤۰ \end{bmatrix} = ۷۰$

$x_{B} = B^{-1} b \Rightarrow x_{B} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳۰ \\ ٤۰ \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \frac{۲۰}{۳} \\ ۱۰ \end{bmatrix} & \begin{matrix} x_{۳} \\ x_{۲} \end{matrix} \end{array}$

$\begin{cases} Z = ۷۰ \quad x_{۲} = ۱۰ \\ x_{۳} = \frac{۲۰}{۳} \quad x_{۱} = ۰ \quad S_{۱} = b \quad S_{۲} = ۰ \end{cases}$

سیمپلکس تجدید نظر شده برای مدل‌های غیر استاندارد برنامه‌ریزی خطی

مسأله برنامه‌ریزی خطی غیر استاندارد زیر را به روش سیمپلکس تجدید نظر شده حل نمایید

$MAX\ Z = ۳x_{۱} + ۲x_{۲}$ $\qquad Z = ۳x_{۱} + ۲x_{۲} - MR$

متغیرهای اساسی $\qquad$ متغیرهای غیر اساسی

$۲x_{۱} + x_{۲} \leq ۴ \longrightarrow ۲x_{۱} + x_{۲} + S_{۱} = ۴$ $\qquad X_{B} = \begin{bmatrix} S_{۱} & R \end{bmatrix}$ $\qquad X_{N} = \begin{bmatrix} x_{۱} & x_{۲} & S_{۲} \end{bmatrix}$

$x_{۱} + ۲x_{۲} \geq ۶ \longrightarrow x_{۱} + ۲x_{۲} - S_{۲} + R = ۶$ $\qquad C_{B} = \begin{bmatrix} ۰ & -M \end{bmatrix}$ $\qquad C_{N} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

$x_{۱}, x_{۲} \geq ۰$ $\qquad x_{۱}, x_{۲}, S_{۱}, S_{۲}, R \geq ۰$

$b = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $\qquad N = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$

۱/ $C_{B} B^{-1} N - C_{N} = \begin{bmatrix} ۰ & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} x_{۱} & x_{۲} & S_{۲} \\ -M-۳ & \underbrace{-۲M-۲}_{\to x_{۲}} & M \end{array}$

متغیر ورودی $x_{۲}$

۲/ $a_j = B^{-1} \bar{a}_j = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{۱} \\ x_{۲} \end{matrix}$

۳/ $X_{B} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} \begin{matrix} S_{۱} \\ R \end{matrix}$ $\qquad S_{۱} = \frac{۴}{۱} = ۴ \quad R = \frac{۶}{۲} = ۳ \rightarrow R$ متغیر خروجی

متغیر اساسی $\qquad$ متغیر غیر اساسی

$X_{B} = \begin{bmatrix} S_{۱} & x_{۲} \end{bmatrix}$ $\qquad X_{N} = \begin{bmatrix} x_{۱} & R & S_{۲} \end{bmatrix}$

$C_{B} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ $\qquad C_{N} = \begin{bmatrix} ۳ & -M & ۰ \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ $\qquad N = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۱/ $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & -M & ۰ \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} x_{۱} & R & S_{۲} \\ -۲ & M+۱ & -۱ \end{array}$

متغیر ورودی

۲/ $\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_{۱} \\ x_{۲} \end{matrix}$ $\qquad x_{۲} = ۶$

۳/ $\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $\qquad S_{۱} = \frac{۲}{۳} = Min \rightarrow$ متغیر خروجی

متغیر اساسی　　　متغیر غیر اساسی

$X_B = \begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ \end{bmatrix}$　　$X_N = \begin{bmatrix} S_۱ & R_۲ & S_۲ \end{bmatrix}$

$C_B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \end{bmatrix}$　　$C_N = \begin{bmatrix} ۰ & -M & ۰ \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$　　$N = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

$$۱/ \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & -M & ۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{ccc} \Big[\frac{۴}{۳} & \frac{۱}{۳}+M & -\frac{۱}{۳}\Big] \\ S_۱ & R_۲ & S_۲ \end{array}$$

متغیر ورودی $S_۲$

$$۲/ \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ -\frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to x_۱ \\ \to x_۲ \end{array} \qquad x_۲ = \frac{\frac{۸}{۳}}{-\frac{۲}{۳}} = -۴$$

$$۳/ \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} \\ \frac{۸}{۳} \end{bmatrix} \qquad x_۱ = \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}} = ۲ \rightarrow$$

متغیر خروجی

متغیر اساسی　　　متغیر غیر اساسی

$X_B = \begin{bmatrix} S_۲ & x_۲ \end{bmatrix}$　　$X_N = \begin{bmatrix} S_۱ & R & x_۱ \end{bmatrix}$

$C_B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \end{bmatrix}$　　$C_N = \begin{bmatrix} ۰ & -M & ۳ \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$　　$N = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

$$۱/ \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & -M & ۳ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{ccc} \Big[۲ & M & ۱\Big] \\ S_۱ & R & x_۱ \end{array}$$

$$Z = C_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = ۸ \qquad Z = ۸ \quad S_۲ = ۲ \quad x_۲ = ۴$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to S_۲ \\ \to x_۲ \end{array} \qquad R = ۰ \quad S_۱ = ۰ \quad x_۱ = ۰$$

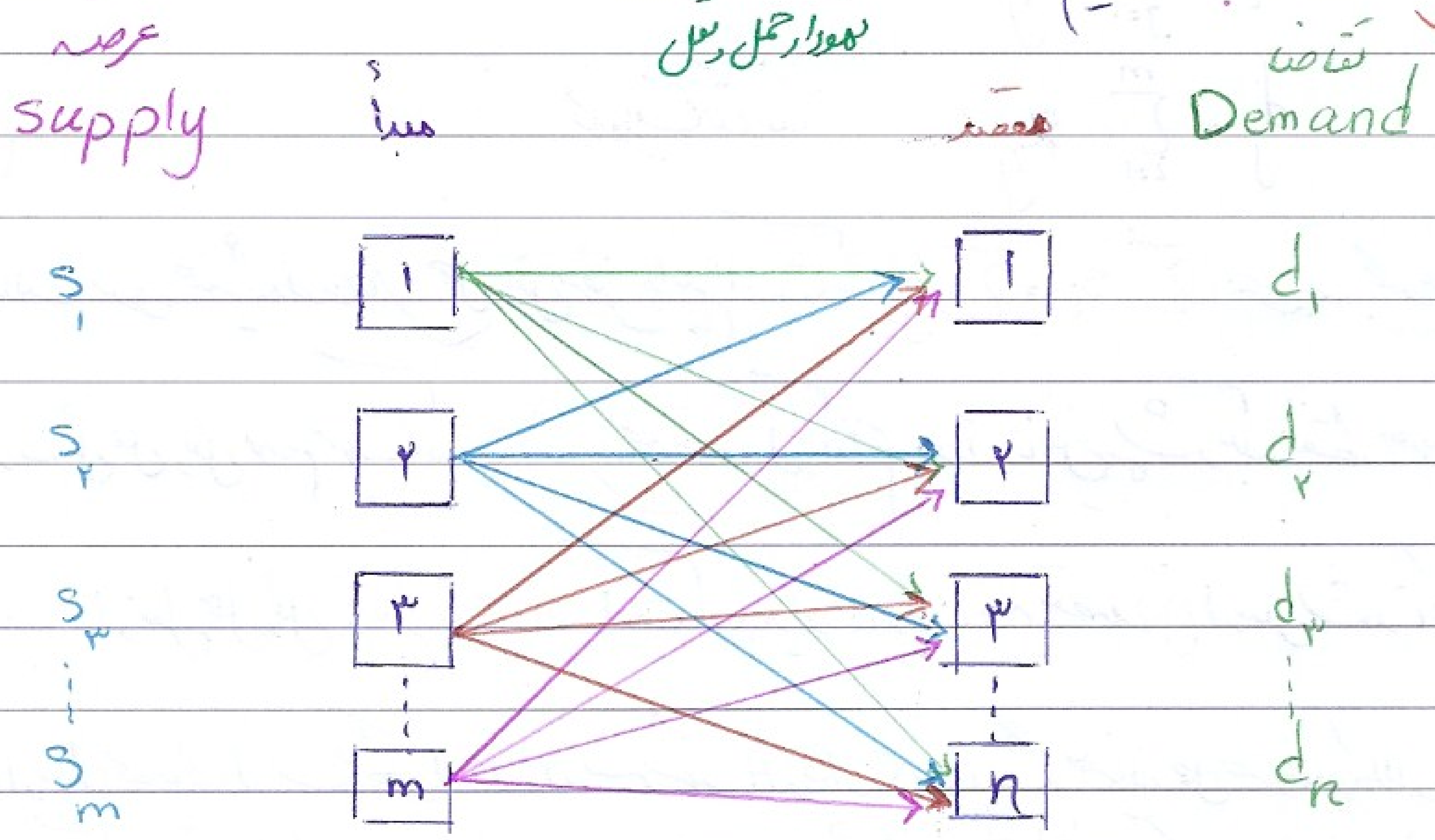
حمل و نقل

در این قسمت به نوع خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی اشاره خواهد شد که می‌توان آنها را به روش سیمپلکس حل نمود. این نوع مسائل را مسائل حمل و نقل می‌نامند. بخاطر ساختار ویژه این نوع مسائل می‌توان آنها را توسط روشهایی حل نمود که محاسبات آن به مراتب کمتر از روش سیمپلکس است. با اینکه مدلهای حمل و نقل را می‌توان در بسیاری از مسائل بکار برد اما کاربرد دیرینه حمل و نقل محصولات باعث شده که نام اینگونه مدلها متناسب با کاربردشان باشد در قلمرو پژوهش عملیاتی حمل و نقل: مقدار معینی از یک محصول از m نقطه به عنوان مبدأ برای عرضه به n نقطه به عنوان مقصد جهت تأمین تقاضای مقصدها

بصورت یک مدل حمل ونقل و با توجه به موارد زیر تعریف می شود :

۱, هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ به مقصد معین باشد

۲, تمامی تقاضای مقصدها توسط مبداها تأمین شود



مقصد j / مبدأ i	1	2	3	عرضه
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	S_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	S_2
3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	S_3
تقاضا	d_1	d_2	d_3	

جدول حمل ونقل

x_{ij} مقدار کالای حمل شده از مبدأ i به مقصد j

c_{ij} هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j

x_{12} مقدار کالای حمل شده از مبدأ ۱ به مقصد ۲

x_{23} مقدار کالای حمل شده از مبدأ ۲ به مقصد ۳

c_{12} هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ ۱ به مقصد ۲

c_{23} هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ ۲ به مقصد ۳

هدف کمترین هزینه حمل ونقل ممکن

نحوه‌ی مدل سازی مسائل حمل و نقل به صورت زیر می باشد:

$$Min\ Z = \sum c_{ij} \cdot x_{ij}$$ تابع هدف

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$ محدودیت عرضه — سطر m

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$ محدودیت تقاضا — ستون n

علاوه بر مطالب فوق همیشه در مدلهای حمل و نقل فرض بر این است که $\sum s_i = \sum d_j$ ⟵ مجموع تقاضا = مجموع عرضه

نکته: در مسائل حمل و نقل مهم نیست که تقاضای هر مقصد از کدام مبدأ تأمین می‌شود بلکه فقط هزینه حمل و نقل کالا مد نظر است. هدف از مدل حمل و نقل تعیین مقدار کالایی است که باید از مبدأ (i) به مقصد (j) ارسال شود تا کل هزینه حمل و نقل حداقل گردد.

هدف ما ارسال محصولی از سه شهر ۱، ۲ و ۳ به سه شهر A و B و C می باشد هزینه حمل هر واحد کالا و میزان عرضه و تقاضا در جدول زیر به نمایش در آمده است می خواهیم با حداقل هزینه، تقاضای شهرهای فوق را تأمین کنیم. این مسئله را به صورت مدل حمل و نقل فرموله نمایید.

عرضه	C	B	A	مقصد / مبدأ
۴۰۰	۲۴	۱۲	۱۵	۱
۳۰۰	۱۵	۸	۷	۲
۱۰۰	۲۱	۱۸	۲۷	۳
۸۰۰	۱۴۰	۳۰۰	۳۶۰	تقاضا

جدول هزینه‌ها

عرضه (S)	C	B	A	مقصد / مبدأ
۴۰۰	$\boxed{24}$ x_{1C}	$\boxed{12}$ x_{1B}	$\boxed{15}$ x_{1A}	۱
۳۰۰	$\boxed{15}$ x_{2C}	$\boxed{8}$ x_{2B}	$\boxed{7}$ x_{2A}	۲
۱۰۰	$\boxed{21}$ x_{3C}	$\boxed{18}$ x_{3B}	$\boxed{27}$ x_{3A}	۳
۸۰۰	۱۴۰	۳۰۰	۳۶۰	تقاضا (dj)

جدول مدل حمل و نقل

$$Min Z = 15x_{1A} + 12x_{1B} + 24x_{1C} + 7x_{2A} + 8x_{2B} + 15x_{2C} + 27x_{3A} + 18x_{3B} + 21x_{3C}$$

محدودیتهای عرضه کنندگان
$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 400 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} = 300 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 100 \end{cases}$$

محدودیتهای تقاضا کنندگان
$$\begin{cases} x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 360 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3C} = 300 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 140 \end{cases}$$

ساختار مدل حمل و نقل

این ساختار دارای مشخصات زیر است:

۱/ ضرایب تمامی متغیرهای تصمیم در محدودیتها برابر با یک ۱ است

۲/ هر یک از متغیرهای تصمیم در محدودیتها فقط دو بار ظاهر می‌شوند یکبار در محدودیتهای عرضه و یکبار در محدودیتهای تقاضا

۳/ مجموع عرضه با مجموع تقاضا برابر است (اگر این شرط برقرار نشد مدل حمل و نقل قابل حل نیست)

مشخصات فوق امکان حل مسائل حمل و نقل را فراهم می‌سازد

مراحل لازم برای حل مسائل حمل و نقل

۱/ مطمئن شوید مقدار عرضه کل با تقاضای کل برابر است اگر اینگونه نبود مسئله را به روشی که گفته خواهد شد اصلاح کنید

۲/ یک جواب اساسی موجه ابتدایی بدست آورید

۳/ تمامی متغیرهای غیراساسی را بدین منظور که کدامیک می‌تواند موجب بهبود تابع هدف شود ارزیابی کنید (تعیین متغیر ورودی) اگر متغیری برای بهبود تابع هدف پیدا نشد جواب بهینه است در غیر اینصورت متغیری که بهترین اثر در بهبود تابع هدف را دارا است انتخاب کنید و به مرحله چهار بروید.

۴/ یکی از متغیرهای اساسی فعلی را با حفظ شرط غیرمنفی بودن متغیرها برای خروج انتخاب کنید

۵/ جواب اساسی موجه جدید را بدست آورید و به گام سوم بروید.

روشهای بدست آوردن جواب اساسی موجه ابتدایی   مهم سوال امتحان

روشهای متعددی برای بدست آوردن جواب موجه ابتدایی وجود دارد. مهمترین این روشها به شرح زیر می باشد:

۱/ روش گوشه شمال غربی   ۲/ روش کمترین هزینه

۳/ روش تخمین وُجل Vagel   ۴/ روش حداقل سطر

مراحل روش گوشه شمال غربی

۱/ به خانه واقع در گوشه چپ بالای جدول حمل ونقل حداکثر مقدار ممکن را اختصاص دهید (این مقدار نباید از میزان عرضه وتقاضای سطر وستون مربوط تجاوز کند به عبارت دیگر باید به محدودیتهای عرضه وتقاضا توجه شود)

۲/ در صورت امکان تخصیص به خانه مجاور قبلی بیشترین مقدار ممکن را اختصاص دهید.

۳/ مرحله دو را آنقدر تکرار کنید تا عرضه وتقاضای تمامی سطرها وستونها برآورده شود

نکته:

الف) متغیرهای اساسی: خانه های پر یا دارای مقدار جدول حمل ونقل

ب) متغیرهای غیر اساسی: خانه های خالی جدول حمل ونقل

m: تعداد سطر
n تعداد ستون

ج) متغیرهای اساسی یا خانه های پر جدول حمل ونقل همیشه باید برابر $m+n-1$ باشد (در تمامی مدلهای حمل ونقل صادق می باشد)

با استفاده از روش گوشه شمال غربی یک جواب موجه ابتدایی برای مدل حمل ونقل زیر بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۱۵	۱۲	۲۴	۴۰۰
۲	۷	۸	۱۵	۳۰۰
۳	۲۷	۱۸	۲۱	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۱۵ ۳۶۰ ①	۱۲ ۴۰ ②	۲۴	۴۰۰
۲	۷	۱۸ ۲۶۰ ③	۱۵ ۴۰ ④	۳۰۰
۳	۲۷	۱۸	۲۱ ۱۰۰ ⑤	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

$Z = (۳۶۰ \times ۱۵) + (۴۰ \times ۱۲) + (۲۶۰ \times ۸) + (۴۰ \times ۱۵) + (۱۰۰ \times ۲۱)$

$Z = ۱۰۶۶۰$

مراحل روش کمترین هزینه

۱/ بیشترین عدد را به خانه ای اختصاص دهید که کمترین هزینه را داشته باشد سپس مقادیر عرضه و تقاضای مربوط به سطرها و ستونها برآورده شود

	A	B	C	عرضه
۱	۱۵ ۶۰ ③	۱۲ ۳۰۰ ②	۲۴ ۴۰ ⑤	۴۰۰
۲	۷ ۳۰۰ ①	۱۸ —	۱۵ —	۳۰۰
۳	۲۷ —	۱۸ —	۲۱ ۱۰۰ ④	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

$Z = (۶۰ \times ۱۵) + (۳۰۰ \times ۱۲) + (۴۰ \times ۲۴) + (۳۰۰ \times ۷) + (۱۰۰ \times ۲۱) =$

$Z = ۹۶۶۰$

مراحل روش تخمین وگل

۱/ جریمه هر سطر و ستون را بدست آورید. برای محاسبه جریمه که در هر سطر یا ستون اختلاف بین دو کمترین هزینه در هر ستون یا سطر را محاسبه نمایید.

۲/ سطر یا ستونی را انتخاب نمایید که بیشترین جریمه را داشته باشد

۳/ بیشترین عدد را به خانه‌ای در جدول حمل و نقل اختصاص دهید که سطر یا ستون مربوط به آن خانه بیشترین جریمه را داشته باشد ضمناً در سطر یا ستون مربوط دارای کمترین هزینه حمل و نقل باشد

۴/ مراحل ۱ و ۲ و ۳ را آنقدر تکرار کنید تا عرضه و تقاضای مربوط به تمامی سطرها و ستونها برآورده شود

با استفاده از روش تخمین وگل یک جواب موجه ابتدایی برای مدل حمل و نقل زیر بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

حذف ۲/   حذف ۳/   حذف ۱/

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه				
۱	۱۵ ۶۰ ②	۱۲ ۳۰۰ ③	۲۴ ۴۰ ④	۴۰۰	۱۵-۱۲ ۳	۳	۱۲	۲۴
۲	۷ ۳۰۰ ①	۸	۱۵	۳۰۰	۸-۷ ۱			
۳	۲۷	۱۸	۲۱ ⑤ ۱۰۰	۱۰۰	۲۱-۱۸ ۳	۳	۳	۲۱
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰					
	۱۵-۷ ۸	۱۲-۸ ۴	۲۱-۱۵ ۶					
۲۷-۱۵	۱۲	۱۸-۱۲=۶	۲۴-۲۱=۳					
		۶	۳					
			۳					

Z = (۶۰ ×۱۵) + (۳۰۰ ×۱۲) + (۴۰ ×۲۴) + (۳۰۰ ×۷) + (۱۰۰ ×۲۱)

Z = ۹۶۶۰

مراحل روش حداقل سطر

۱/ خانه‌ای که دارای کمترین هزینه در سطر اول است را پیدا کنید و حداکثر مقدار ممکن را به این خانه اختصاص دهید

۲/ اگر مقدار عرضه تقاضا برای یک سطر یا ستون صفر گردید آن سطر یا ستون را از عملیات بعدی در نظر نگیرید

۳/ مراحل ۱ و ۲ را به ترتیب برای دومین سطر تا آخرین سطر انجام دهید. در صورتی که تمامی مقادیر عرضه و تقاضا صفر گردیده باشد

عملیات خاتمه یافته در غیر اینصورت عملیات را از سطر اول تکرار نمایید

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۱۵ ۶۰ ④	۱۲ ۳۰۰ ①	۲۴ ⑤ ۴۰	۴۰۰
۲	۷ ۳۰۰ ②	۸ —	۱۵ —	۳۰۰
۳	۲۷ —	۱۸ —	۲۱ ۱۰۰ ③	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	

Z = (۶۰ ×۱۵) + (۳۰۰×۱۲) + (۴۰×۲۴) + (۳۰۰×۷) + (۱۰۰×۲۱) = ۹۶۶۰

هدف ارسال محصولی از سه شهر ۱ و ۲ و ۳ به سه شهر A و B و C می‌باشد. هزینه حمل هر واحد کالا و میزان عرضه و تقاضا در جدول زیر به نمایش در آمده است. با استفاده از روشهای گوشه شمال غربی، کمترین هزینه، تخمین وگل و حداقل سطر یک جواب موجه ابتدایی برای مدل بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۹ ۱۵۰ ①	۸ —	۱۰ —	۱۵۰
۲	۷ ۵۰ ②	۱۱ ۱۰۰ ③	۱۱ ۲۵ ④	۱۷۵
۳	۴ —	۱۵ —	۱۲ ۲۷۵ ⑤	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	

روش گوشه شمال غربی

Z = (۱۵۰×۹) + (۵۰×۷) + (۱۰۰×۱۱) + (۲۵ ×۱۱) + (۲۷۵×۱۲) = ۵۹۲۵

۱۵/

روش تخمین وگل

عرضه	C	B	حذف ۳ ↓ A	مقصد مبدأ
۱۵۰	۱۰ ۱۵۰ ⑤	۸ —	۶ —	۱
۱۷۵	۱۱ —	۱۱ —	۷ ۱۷۵ ①	حذف ۱ → ۲
۲۷۵	۱۲ ۱۵۰ ④	۵ ۱۰۰ ②	۴ ۲۵ ③	۳
	۳۰۰	۱۰۰	۲۰۰	تقاضا

حذف ۲ ↓ B

۳ ۲ ۴ ۴

۴ ———

۱ ۱ ۸ ۱۲

۲ ۳ ۱

۲ ۳ ۲

۲ | ۲

| ۲

Z = (۱۵۰×۱۰) + (۱۷۵×۷) + (۲۵×۴) + (۱۰۰×۵) + (۱۵۰×۱۲)

Z = ۵۱۲۵

عرضه	C	B	A	مقاصد مبادی
۱۵۰	۱۰ ۱۲۵ ④	۸ ۲۵ ③	۶ —	۱
۱۷۵	۱۱ ۱۷۵ ⑤	۱۱ —	۷ —	۲
۲۷۵	۱۲ —	۵ ۷۵ ②	۴ ۲۰۰ ①	۳
	۳۰۰	۱۰۰	۲۰۰	تقاضا

روش کمترین هزینه

Z = (۲۵×۸) + (۱۲۵×۱۰) + (۱۷۵×۱۱) + (۲۰۰×۴)
+ (۷۵×۵) = ۴۵۵۰

عرضه	C	B	A	
۱۵۰	۱۰ —	۸ —	۶ ۱۵۰ ①	۱
۱۷۵	۱۱ ۱۲۵ ④	۱۱ —	۷ ۵۰ ②	۲
۲۷۵	۱۲ ۱۷۵ ⑤	۵ ۱۰۰ ③	۱۴ —	۳
	۳۰۰	۱۰۰	۲۰۰	تقاضا

روش حداقل سطر

Z = (۱۵۰×۶) + (۵۰×۷) + (۱۲۵×۱۱) + (۱۰۰×۵) + (۱۷۵×۱۲)

Z = ۵۲۲۵

جدول نامتوازن حمل و نقل

ناترازی عرضه و تقاضا در جدول حمل و نقل

حالت اول: بیشتر بودن کل عرضه از کل تقاضا در جدول حمل و نقل

اگر مقدار کل عرضه از مقدار کل تقاضا بیشتر باشد باید ستونی تحت عنوان «ستون مجازی» در جدول حمل و نقل ایجاد کرده، مقدار هزینه‌های مربوط به ستون مجازی صفر می‌باشد و متغیرهای مربوط به ستون مجازی را متغیرهای مجازی می‌نامند. مقادیر تخصیص یافته به متغیرهای مجازی هیچگونه مفهومی دارد و به معنی عرضه مازادی است که قابل حمل به مقصدها نمی‌باشد

و هزینه حمل و نقل مربوط به متغیرهای مجازی باید صفر باشد زیرا کالای حمل نشده هزینه ای نخواهد داشت

تابلوی حمل و نقل نامتوازن زیر را در نظر بگیرید و ضمن متعادل کردن آن جواب موجه اولیه را با روش گوشه شمال غربی تعیین نمایید.

مقصد / مبدأ	A	B	C	D مجازی	عرضه
۱	۶ ۱۰۰ ①	۸ ۲۰ ②	۱۰ —	۰ —	۱۲۰
۲	۷ —	۱۱ ۳۰ ③	۱۱ ۱۵۰ ④	۰ —	۱۸۰
۳	۴ —	۵ —	۱۲ —	۰ ۱۰۰ ⑤	۱۰۰
تقاضا	۱۰۰	۵۰	۱۵۰	۱۰۰	۴۰۰ / ۴۰۰

۳۰۰ = تقاضا

۴۰۰ = عرضه ⟹ ۱۰۰ = تقاضای D

سطر m = ۳

ستون n = ۴ ⟹ m+n−1 = ۶ خانه‌های دارای عدد

$Z = (۱۰۰×۶)+(۲۰×۸)+(۳۰×۱۱)+(۱۵۰×۱۱) = ۲۷۴۰$

در این مسأله یک متغیر اساسی با مقدار صفر در تابلوی حمل و نقل وجود دارد و این به خاطر آن است که بطور همزمان تخصیص مربوط به سطر دوم و ستون C تکمیل شده است. در این حالت زمانی که تخصیص مربوط به یک سطر و یک ستون به طور همزمان تکمیل شده اند می‌بایست به منظور رعایت تعداد متغیرهای اساسی در جدول حمل و نقل (شرط m+n-1) یک متغیر اساسی با مقدار صفر تعریف نمود. در صورتی که جدول حمل و نقل دارای متغیر اساسی صفر باشد گفته می‌شود که مدل حمل و نقل دارای حالت خاص تباهیدگی یا تبهگنی است.

حالت دوم بیشتر بودن کل تقاضا از کل عرضه در جدول حمل و نقل

اگر مقدار کل تقاضا از مقدار کل عرضه بیشتر باشد به منظور متوازن کردن جدول حمل و نقل می‌بایست یک سطر عرضه مجازی با مقدار عرضه‌ای معادل اختلاف تقاضای کل نسبت به عرضه کل به جدول حمل و نقل اضافه کرد. این سطر را سطر مجازی گویند. هزینه حمل تمامی متغیرهای آن برابر صفر است.

جدول حمل و نقل نامتوازن زیر را در نظر بگیرید و پس از متوازن کردن آن جواب موجه ابتدایی آن را با استفاده از روش کمترین هزینه محاسبه نمایید.

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۱۴ —	۱۸ —	۲۵ ۵۰ ⑥	۵۰
۲	۱۸ —	۱۰ —	۱۵ ۱۲۰ ⑤	۱۲۰
۳	۶ ۵۰ ②	۷ ۱۲۰ ③	۱۰ ۱۰ ④	۱۸۰
۴ سطر مجازی	۰ ۵۰ ①	۰ —	۰ —	۵۰
تقاضا	۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	۴۰۰ / ۴۰۰

۴۰۰ = کل تقاضا

۳۵۰ = کل عرضه

۵۰

$Z = (۵۰×۲۵) + (۱۲۰×۱۵) + (۵۰×۶) + (۱۲۰×۷) + (۱۰×۱۰) + (۵۰×۰) = ۴۲۹۰$

نکته مهم: در روش کمترین هزینه باید هزینه صفر ابتدا گذاشته شود. همچنین در جدول نامتوازن‌ها در این روش باید هر سه هزینه صفر به طور همزمان که حل شود از بین آنها کمترین آنها را انتخاب می‌کنیم.

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	— $\boxed{10}$	— $\boxed{15}$	۵۰ ⑥ $\boxed{25}$	۵۰
۲	— $\boxed{18}$	— $\boxed{10}$	۱۲۰ ⑤ $\boxed{15}$	۱۲۰
۳	۱۰۰ ② $\boxed{6}$	۷۰ ③ $\boxed{7}$	۱۰ ④ $\boxed{10}$	۱۸۰
۴	— $\boxed{0}$	۵۰ ① $\boxed{0}$	— $\boxed{0}$	۵۰
تقاضا	۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	۴۰۰ / ۴۰۰

$$Z = \overset{1250}{(50\times25)} + \overset{1800}{(120\times15)} + \overset{600}{(100\times6)} + \overset{490}{(70\times7)} + \overset{100}{(10\times10)} = 4240$$

	A	B	C	عرضه
۱	— $\boxed{10}$	— $\boxed{15}$	۵۰ ⑥ $\boxed{25}$	۵۰
۲	— $\boxed{8}$	۴۰ ④ $\boxed{10}$	۸۰ ⑤ $\boxed{15}$	۱۲۰
۳	۱۰۰ ② $\boxed{6}$	۸۰ ③ $\boxed{7}$	— $\boxed{10}$	۱۸۰
۴	— $\boxed{0}$	— $\boxed{0}$	۵۰ ① $\boxed{0}$	۵۰
تقاضا	۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	

$$Z = \overset{1250}{(50\times25)} + \overset{400}{(40\times10)} + \overset{1200}{(80\times15)} + \overset{600}{(100\times6)} + \overset{560}{(80\times7)} = 4010$$

فنون یافتن جواب بهینه در مدل حمل و نقل (سؤال امتحان)

۱/ روش سنگ پله

پس از یافتن جواب موجه اولیه بوسیله روشهای جداگانه ذکر شده در قسمت قبل قدم بعدی حل مدل حمل و نقل برای یافتن جواب بهینه می‌باشد یعنی جوابی که هزینه حل را حداقل کند. یکی از روشهای متداول برای حل مدل جهت دستیابی به بهینگی و یافتن جواب بهینه روش سنگ پله است. هدف از بکارگیری روش سنگ پله بررسی میزان تأثیر اختصاص کالا به هر یک از خانه‌های خالی جدول اولیه مدل حمل و نقل می‌باشد به عبارت دیگر هدف این است که تأثیر حمل کالا از هر یک از مسیرهایی که بر اساس جواب موجه اولیه بلا استفاده هستند بررسی شود. بدین معنی که آیا تخصیص کالا از مسیرهای معین به مسیرهای بلا استفاده موجب کاهش هزینه حمل و نقل خواهد شد یا خیر؟ در صورتی که مسیری پیدا شود که تخصیص کالا به آن مسیر منجر به کاهش هزینه حل شود می‌بایست حداکثر مقدار ممکن را به آن مسیر اختصاص داد.

مراحل روش سنگ پله

۱/ برای تمامی خانه‌های خالی جدول حمل و نقل مسیر سنگ پله‌ای به شرح زیر رسم نمایید:

الف) مسیر سنگ پله همواره از یک خانه خالی به عنوان مبدأ آغاز می‌شود و از یک مسیر بسته و منحصر به فرد از خانه‌هایی که خالی یا دارای عدد هستند عبور می‌کند و در نهایت به همان خانه خالی مبدأ به عنوان مقصد ختم می‌شود.

ب) در اینجا که مسیر سنگ پله می‌توان از خانه‌های خالی یا پر عبور کند ولی محل چرخش مسیر حتماً باید یک خانه پر باشد

ج) پس از هر حرکت افقی باید یک حرکت عمودی و پس از هر حرکت عمودی باید یک حرکت افقی صورت پذیرد

۲/ مقدار تغییر در هزینه کل حمل و نقل را به ازای تخصیص یک واحد کالا به خانه‌های خالی با استفاده از مسیر سنگ پله محاسبه نمایید.

۳/ در صورتیکه مقادیر بدست آمده از مسیر سنگ پله برای خانه‌های خالی جدول مثبت یا صفر شد حل مسأله به اتمام رسیده و یک جواب بهینه حاصل شده است. در غیر اینصورت خانه‌ای که دارای منفی‌ترین مقدار است را به عنوان مسیر جدید حمل و نقل در نظر می‌گیریم.

۴/ مسیر سنگ پله یا مسیر جدید حمل و نقل خانه جدید را در نظر بگیرید و با توجه به خانه‌هایی که دارای علامت (-1) هستند و در رأس مسیر سنگ پله قرار دارد مقدار تخصیص به خانه جدید را تعیین نمایید. حداکثر مقدار ممکن قابل تخصیص به خانه جدید از قاعده کوچکترین مقدار مربوط به خانه‌های با علامت (-1) در مسیر سنگ پله بدست می‌آید.

۵/ با تعیین متغیر خروجی یا خانه‌ای که مقدار آن باید برابر صفر گردد عملیات انتقال ارکان ترسیم جدول جدید حمل و نقل انجام دهید. برای اینکار متغیرهای اساسی خارج از مسیر سنگ پله را عیناً بنویسید و در مسیر سنگ پله به متغیر اساسی جدید حداکثر مقدار ممکن را تخصیص دهید. (کوچکترین مقدار مربوط به خانه‌های با علامت (-1)) و این مقدار را از متغیر اساسی دارای

علامت (-) مسیر بسته کم کرده و به خانه‌های با علامت (+) اضافه نمایید تا اینکه مقدار تخصیص متغیر خروجی صفر شود

۶) مراحل ۱ تا ۵ را آنقدر تکرار کنید تا کلیه مقادیر بدست آمده از مسیر بسته برای خانه‌های خالی غیر منفی شود

مثال حمل و نقل زیر با جواب موجه اولیه در نظر گرفته شده با استفاده از روش مسیر بسته جواب بهینه مسئله را بیابید

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	+۱ ۹	-۱ ۸ ۲۵	۱۰ ۱۲۵	۱۵۰
۲	۷	۱۱	۱۱ ۱۷۵	۱۷۵
۳	۱۴ ۲۰۰ -۱	۵ ۷۵ +۱	۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

۱) 1A: 1A → 1B → 3B → 3A

1A: ۹ - ۸ + ۵ - ۴ = -۱ ✓

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱		+۱ ۸	+۱ ۱۰	
۲	+۱ ۷		-۱ ۱۱	
۳	۱۴ -۱	۵ +۱		
تقاضا				

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱		-۱ ۸	+۱ ۱۰	
۲		+۱ ۱۱	-۱ ۱۱	
۳				
تقاضا				

2A: 2A → 3A → 3B → 1B → 1C → 2C

2B: 2B → 2C → 1C → 1B

2A = ۷ - ۴ + ۵ - ۸ + ۱۰ - ۱۱ = -۱ ✓

2B = ۱۱ - ۱۱ + ۱۰ - ۸ = +۲

	A	B	C	عرضه
۱		+۱ ۸	-۱ ۱۰	
۲				
۳		۵ -۱	+۱ ۱۲	
تقاضا				

3C: 3C → 3B → 1B → 1C

3C = ۱۲ - ۵ + ۸ - ۱۰ = +۵

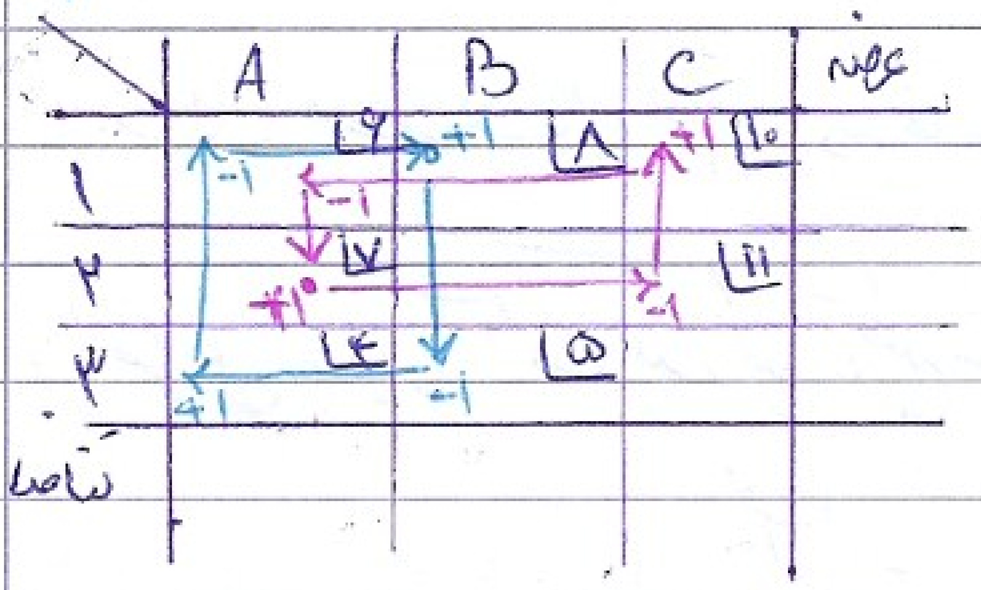
از بین خانه‌هایی که دارای تغییر هزینه به میزان (-۱) هستند کمترین مقدار را به

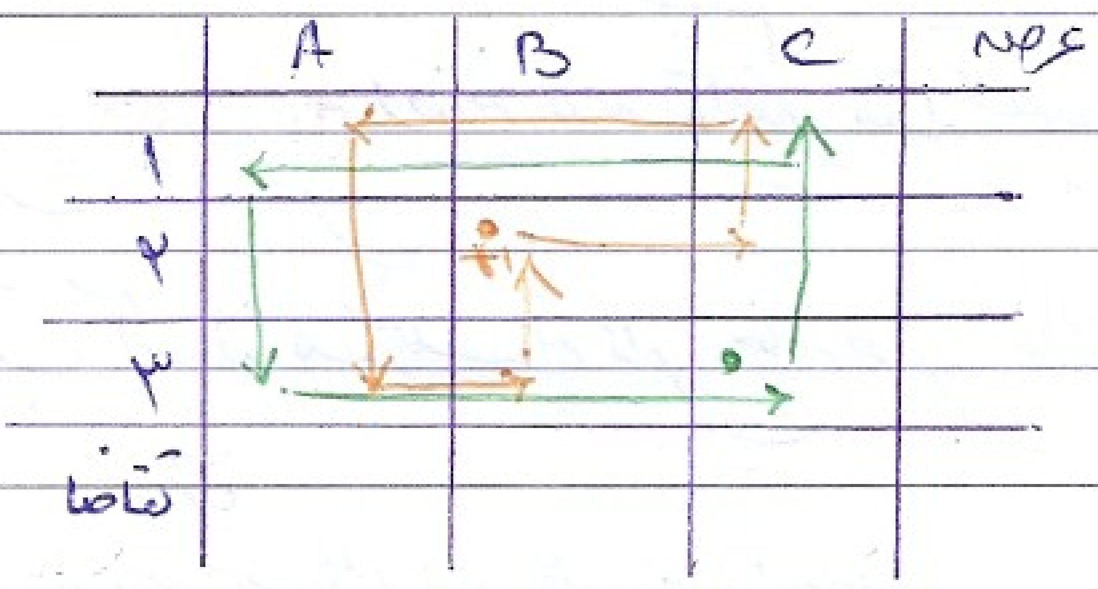
خانه (+۱) اضافه و از خانه (-۱) کسر می‌کنیم

	A	B	C	عرضه
۱	۰ ۲۵ +۱	۲۵ ۰ -۱		
۲				
۳	۲۰۰ -۱ ۱۷۵	۷۵ +۱ ۱۰۰		
تقاضا				

1A:

۲۰/





تست کاره

۱B: ۱B → ۳B → ۳A → ۱A

۱B: ۸ − ۵ + ۴ − ۹ = +۱

۲B: ۲B → ۲C → ۱C → ۱A → ۳A → ۲B

۲B: ۱۱ − ۱۱ + ۱۰ − ۹ + ۴ − ۵ = +۳

۲A: ۲A → ۲C → ۱C → ۱A

۲A: ۷ − ۱۱ + ۱۰ − ۹ = ۰

۳C: ۳C → ۱C → ۱A → ۳A

۳C: ۱۲ − ۱۰ + ۹ − ۴ = ۴

I = (۲۵×۶) + (۱۲۵×۱۰) + (۱۷۵×۱۱) + (۱۷۵×۴) + (۱۰۰×۵) = ۴۵۲۵

	A	B	C	عرضه
۱	۲۵ ۹	— ۸	۱۲۵ ۱۰	۱۵۰
۲	۷	۱۱	۱۷۵ ۱۱	۱۷۵
۳	۱۷۵ ۴	۱۰۰ ۵	۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

روش توزیع اصلاح شده

این روش شکل اصلاح شده روش سنگ پله است. در این روش تغییرات هزینه مربوط به خانه‌های خالی جدول حمل و نقل بصورت مجزا و بطور ریاضی تعیین می‌شود. بدون آنکه مسیرهای مربوط به آنها رسم شود

مراحل روش توزیع اصلاح شده

۱/ با استفاده از یکی از روشهای یافتن جواب موجه اولیه یک جواب اولیه برای مدل حمل و نقل بیابید

۲/ برای خانه‌های پر جدول حمل و نقل (متغیرهای اساسی) مقادیر u_i و v_j را با استفاده از رابطه $u_i + v_j = c_{ij}$ بیابید

۳/ برای خانه‌های خالی جدول حمل و نقل (متغیرهای غیراساسی) مقدار تغییر در هزینه را از K_{ij} و با استفاده از رابطه $K_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ بیابید

۴/ به خانه‌ی خالی جدول حمل و نقل که منفی‌ترین مقدار K_{ij} را دارد حداکثر مقدار ممکن را اختصاص دهید. سپس بر اساس روش سنگ پله تخصیص بقیه خانه‌ها را انجام دهید.

۵/ مراحل ۲ تا ۴ را آنقدر تکرار کنید تا تمام مقادیر K_{ij} صفر یا مثبت شود

جواب اولیه مدل حمل و نقل با استفاده از روش کمترین هزینه می‌باشد و در مدل زیر به نمایش درآمده است. جواب بهینه این مدل را با استفاده از روش توزیع اصلاح شده بیابید

ستون	$V_A=۷$	$V_B=۸$	$V_C=۱۰$	
مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
سطر $U_1=0$ ۱	۶	۸ ۲۵	۱۰ ۱۲۵	۱۵۰
$U_2=1$ ۲	۷	۱۱	۱۱ ۱۷۵	۱۷۵
$U_3=-۳$ ۳	۴ ۲۰۰	۵ ۷۵	۱۲	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

c ← cost هزینه

$U_i + V_j = C_{ij}$ خانه‌های پر

$K_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ خانه‌های خالی

۱/ خانه‌های پر

1B: $U_1 + V_B = ۸ \xrightarrow[\text{فرض}]{U_1=0} 0 + V_B = ۸ \quad V_B = ۸$

1C: $U_1 + V_C = ۱۰ \longrightarrow 0 + V_C = ۱۰ \quad V_C = ۱۰$

2C: $U_2 + V_C = ۱۱ \longrightarrow U_2 + ۱۰ = ۱۱ \quad U_2 = ۱$

3A: $U_3 + V_A = ۴ \longrightarrow -۳ + V_A = ۴ \quad V_A = ۷$

3B: $U_3 + V_B = ۵ \longrightarrow U_3 + ۸ = ۵ \quad U_3 = -۳$

۲/ خانه‌های خالی

1A: $K_{1A} = ۶ - 0 - ۷ = -۱$

2A: $K_{2A} = ۷ - ۱ - ۷ = -۱$

2B: $K_{2B} = ۱۱ - ۱ - ۸ = ۲$

3C: $K_{3C} = ۱۲ - (-۳) - ۱۰ = ۵$

از این مرحله مثل مثال صفحه عمل می‌کنیم

مقصد / مبدأ	$V_A=۹$ A	$V_B=۷$ B	$V_C=۱۰$ C	عرضه
$u_1=0$ ۱	$\boxed{۹}$ ۲۵ +۱	$\boxed{۸}$ ۰ ۲۵ -۱	$\boxed{۱۰}$ ۱۲۵	۱۵۰
$u_2=۱$ ۲	$\boxed{۷}$	$\boxed{۱۱}$	$\boxed{۱۱}$ ۱۷۵	۱۷۵
$u_3=-۲$ ۳	۱۷۵ $\boxed{۴}$ ۲۰۰ -۱	۱۰۰ $\boxed{۵}$ +۱ ۷۵	$\boxed{۱۲}$	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

۳/ خانه‌های پر برای جدول جدید

1A: $u_1 + v_A = ۹ \xrightarrow{\text{حال } u_1=0} v_A = ۹$

1C: $u_1 + v_C = ۱۰ \rightarrow v_C = ۱۰$

2C: $u_2 + v_C = ۱۱ \rightarrow u_2 = ۱$

3A: $u_3 + v_A = ۴ \rightarrow u_3 = -۲$

3B: $u_3 + v_B = ۵ \rightarrow v_B = ۷$

۴/ خانه‌های خالی جدول جدید

1B: $۸ - ۰ - ۷ = ۱ = K_{1B}$

2A: $۷ - ۱ - ۹ = ۰ = K_{2A}$

2B: $۱۱ - ۱ - ۷ = ۳ = K_{2B}$

3C: $۱۲ - (-۲) - ۱۰ = ۴ = K_{3C}$

جواب همه خانه‌های خالی حتماً باید مثبت باشد اگر منفی داشت پیش جلو برو

جواب بهینه داریم

$Z = (۲۵×۹) + (۱۲۵×۱۰) + (۱۷۵×۱۱) + (۱۷۵×۴) + (۱۰۰×۵) = ۴۵۲۵$

جواب بهینه چندگانه در مدل حمل و نقل

اگر لااقل یکی از خانه‌های خالی در جدول حمل و نقل صفر باشد $(K_{ij} = 0)$ مسئله دارای جواب بهینه چندگانه است

به عبارت دیگر در مدل‌های حمل و نقل هرگاه در جدول نهایی که باید متغیر غیر اساسی دارای مشخصه صفر باشد مسئله دارای جواب بهینه چندگانه است

$K_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j = 0$

	A	B	C	عرضه
۱	$\boxed{۵}$ ۸۰	$\boxed{۷}$ ۷۰	$\boxed{۴}$ ۱۰۰	۲۵۰
۲	$\boxed{۲}$	$\boxed{۳}$ ۱۰۰	$\boxed{۸}$	۱۰۰
۳	۷۰ $\boxed{۲}$	$\boxed{۴}$	$\boxed{۹}$	۷۰
تقاضا	۱۵۰	۱۷۰	۱۰۰	

با انجام محاسبات مربوطه تحقیق کنید که مدل نهایی جدول حمل و نقل زیر دارای جواب بهینه چندگانه است یا خیر.

خانه‌های پر $u_i + v_j = c_{ij}$ ۱A: $u_1 + v_A = ۵ \xrightarrow{u_1=۰} v_A = ۵$ $u_1 = ۰$ $u_2 = -۴$ $u_3 = -۳$

$v_A = ۵$ $v_B = ۷$ $v_C = ۴$

خانه‌های خالی $K_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ۲A = ۲ − $u_2 - v_A$ = ۱ = $K_{۲A}$ ۲C = ۸ − $u_2 - v_C$ = ۸ = $K_{۲C}$

۳B = ۴ − $u_3 - v_B$ = ۰ = $K_{۳B}$ جدول دارای جواب بهینه چندگانه است چون یکی از K_{ij} ها برابر صفر شد

۳C = ۹ − (−۳) − ۴ = ۸ = $K_{۳C}$

جدول حمل و نقل زیر با جواب موجه اولیه داده شده را در نظر بگیرید جواب بهینه جدول را با کمک روشهای سنگ پله و توزیع اصلاح شده بیابید.

سنگ پله

	A	B	C	عرضه
۱	$\boxed{۵}$ ۱۱۰	$\boxed{۱۰}$ ۰	$\boxed{۱۰}$ ۰	۱۱۰
۲	$\boxed{۲۰}$	$\boxed{۳۰}$ ۸۰	$\boxed{۲۰}$ ۸۰	۱۶۰
۳	$\boxed{۱۰}$ ۳۰	$\boxed{۲۰}$ ۱۲۰	$\boxed{۳۰}$ ۰	۱۵۰
تقاضا	۱۴۰	۲۰۰	۸۰	

۱B: ۱B → ۳B → ۳A → ۱A

۱B = ۱۰ − ۲۰ + ۱۰ − ۵ = −۵ ✓

۲A: ۲A → ۳A → ۳B → ۲B

۲A = ۲۰ − ۱۰ + ۲۰ − ۳۰ = ۰

۱C: ۱C → ۱A → ۳A → ۳B → ۲B → ۲C

۱C = ۱۰ − ۵ + ۱۰ − ۲۰ + ۳۰ − ۲۰ = ۵

۳C: ۳C → ۳B → ۲B → ۲C

۳C = ۳۰ − ۲۰ + ۳۰ − ۲۰ = ۲۰

تست کار:

	A	B	C	عرضه
۱	$\boxed{۵}$ −۱ ۱۱۰ ۰	$\boxed{۱۰}$ +۱ ۱۱۰	$\boxed{۱۰}$	۱۱۰
۲	$\boxed{۲۰}$	$\boxed{۳۰}$ ۸۰	$\boxed{۲۰}$ ۸۰	۱۶۰
۳	$\boxed{۱۰}$ +۱۳۰ ۱۴۰	$\boxed{۲۰}$ −۱ ۱۲۰ ۱۰	$\boxed{۳۰}$	۱۵۰
تقاضا	۱۴۰	۲۰۰	۸۰	

۱A: ۱A → ۳A → ۳B → ۱B

۱A = ۵ − ۱۰ + ۲۰ − − ۱۰ = ۲۵

۲A: ۲A → ۲B → ۳B → ۳A

۲A = ۲۰ − − ۳۰ + ۲۰ − − ۱۰ = ۰

۱C: ۱C → ۱B → ۲B → ۲C

۱C = ۱۰ − ۱۰ + ۳۰ − − ۲۰ = ۱۰

۳C: ۳C → ۳B → ۲B → ۲C

۳C = ۳۰ − − ۲۰ + ۳۰ − ۲۰ = ۲۰

MinZ = (۱۱۰ × ۱۰) + (۸۰ × ۳۰) + (۸۰ × ۲۰) + (۱۴۰ × ۱۰) + (۱۰ × ۲۰) = ۹۷۰۰

روش توزیع اصلاح شده

	A $v_A=۵$	B $v_B=۱۵$	C $v_C=۵$	عرضه
$u_1=۰$ ۱	$\boxed{۵}$ ۱۱۰	$\boxed{۱۰}$	$\boxed{۱۰}$	۱۱۰
$u_2=۱۵$ ۲	$\boxed{۲۰}$	$\boxed{۳۰}$ ۸۰	$\boxed{۲۰}$ ۸۰	۱۶۰
$u_3=۵$ ۳	$\boxed{۱۰}$ ۳۰	$\boxed{۲۰}$ ۱۲۰	$\boxed{۳۰}$	۱۵۰
تقاضا	۱۴۰	۲۰۰	۸۰	

خانه‌های پر $c_{ij} = u_i + v_j$

۱A: $u_1 + v_A = ۵ \xrightarrow{u_1=۰} v_A = ۵$

۲B: $u_2 + v_B = ۳۰ \rightarrow u_2 = ۱۵$

۲C: $u_2 + v_C = ۲۰ \rightarrow v_C = ۵$

۳B: $u_3 + v_B = ۲۰ \rightarrow v_B = ۱۵$

۳A: $u_3 + v_A = ۱۰ \rightarrow u_3 = ۵$

۲۴/

عرضه	C	B	A	
۱۱۰	۱۰	۱۰ ۰+۱ ۱۱۰	۵ −۱	۱
۱۶۰	۲۰ ۸۰	۳۰ ۸۰	۲۰	۲
۱۵۰	۳۰	۲۰ −۱ ۱۰	۱۰ ۱۴۰+۱	۳
	۸۰	۲۰۰	۱۴۰	تقاضا

خانه‌های خالی $K_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$

$۱B: ۱۰ - u_۱ - v_B \longrightarrow ۱۰ - ۰ - ۱۵ = -۵$ ✓

$۱C: ۱۰ - u_۱ - v_C \longrightarrow ۱۰ - ۰ - ۵ = ۵$

$۲A: ۲۰ - u_۲ - v_A \longrightarrow ۲۰ - ۱۵ - ۵ = ۰$

$۳C: ۳۰ - u_۳ - v_C \longrightarrow ۳۰ - ۵ - ۵ = ۲۰$

$$\text{Min}Z = (۱۱۰ \times ۱۰) + (۸۰ \times ۳۰) + (۸۰ \times ۲۰) + (۱۴۰ \times ۱۰) + (۱۰ \times ۲۰) = ۹۷۰۰$$

تخصیص (واگذاری)

مدل حمل و نقلی که همواره مقدار عرضه و تقاضای آن برابر یک واحد باشد به مدل تخصیص معروف است. مدل تخصیص دارای کاربردهای زیادی است از جمله تخصیص n فرد به n شغل یا n اپراتور به n دستگاه و ...

کلیه مسائل تخصیص دارای ویژگیهای زیر هستند:

۱/ موضوعات مورد تخصیص در مدل تخصیص مانند کارکنان، شغلها، پروژه‌ها و ... محدود هستند.

۲/ تخصیص‌ها حالت یک به یک دارند به عنوان مثال هر شغل فقط به یک فرد باید تخصیص یابد و یک فرد نمی‌تواند بیش از یک شغل داشته باشد

۳/ هدف از مدل تخصیص یافتن مناسب‌ترین تخصیص ممکن است. به طوری که در آن هزینه کل حداقل و سود کل حداکثر گردد.

روشهای حل مدل تخصیص

۱/ روش شمارش کامل

۲/ روش مجارستانی

۱/ روش شمارش کامل

فرض کنید در مسئله تخصیص n فرد داریم که می‌خواهیم به n شغل گمارده شوند در چنین مسئله‌ای طبیعی است که با !n جواب مختلف مواجه هستیم به عبارت دیگر n شغل را می‌توان با !n حالت به n فرد واگذار کرد. یکی از روشهای یافتن جواب بهینه

این است که همه جوابها را پیدا کرد و آنها را با یکدیگر از نظر هزینه کل مقایسه نمائید. به این روش، روش شمارش کامل گفته می‌شود

هر گروه سازمانی می‌خواهد به گونه‌ای کارکنان موجود را در ۳ شغل بکار بگیرد که هزینه استخدام آنها حداقل شود. تعداد کل متقاضیان موجود در سازمان ۳ نفر می‌باشد که می‌بایست به هر کدام یک شغل تخصیص یابد. جدول زیر هزینه بکارگیری هر فرد در هر یک از مشاغل را نشان می‌دهد. با استفاده از روش شمارش کامل، مناسب‌ترین تخصیص ممکن را انجام دهید.

عرضه	G_3	G_2	G_1	شغل / فرد
۱	۲۶	۱۰	۱۵	P_1
۱	۲۸	۱۱	۱۲	P_2
۱	۲۲	۱۴	۱۳	P_3
	۱	۱	۲	تقاضا

$n! \rightsquigarrow ۳! = ۳\times۲\times۱ = ۶$ حالات تخصیص

فرد ۱ → شغل ۱ G_1

فرد ۲ → شغل ۲ G_2

فرد ۳ → شغل ۳ G_3

سطر m

ستون n

هزینه	ترکیب	حالات
۱۵ + ۱۱ + ۲۲ = ۴۸	P_1G_1 و P_2G_2 و P_3G_3	۱
۱۵ + ۲۸ + ۱۴ = ۵۷	P_1G_1 و P_2G_3 و P_3G_2	۲
۱۰ + ۱۲ + ۲۲ = ۴۴	P_1G_2 و P_2G_1 و P_3G_3	✓ ۳
۱۰ + ۲۸ + ۱۳ = ۵۱	P_1G_2 و P_2G_3 و P_3G_1	۴
۲۶ + ۱۱ + ۱۳ = ۵۰	P_1G_3 و P_2G_2 و P_3G_1	۵
۲۶ + ۱۲ + ۱۴ = ۵۲	P_1G_3 و P_2G_1 و P_3G_2	۶

هزینه ۳ استخدام

مناسب‌ترین حالت تخصیص شغل به فرد ✓ چون هزینه کمتری در سازمان دارد.

۲/ روش مجارستانی

این روش، روشی کارآمد در حل مسائل تخصیص است و بر این قاعده استوار است که اگر مقدار ثابتی از همه عناصر در هر سطر و ستون ماتریس تخصیص کم کنیم و یا اضافه کنیم هزینه کل به همان اندازه تغییر می‌کند ولی در تعیین جواب بهینه تخصیص هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود.

مراحل روش تخصیص مجارستانی

۱/ تشکیل ماتریس هزینه فرصت

الف) کوچکترین عدد هر سطر (حتی صفر) را از تمام اعداد آن سطر کم کنید و ماتریس جدید را بنویسید.

ب) کوچکترین عدد هر ستون (حتی صفر) را از تمام اعداد آن ستون کم کنید و ماتریس جدید را بنویسید

۲/ آزمون بهینگی

برای انجام آزمون بهینگی لازم است صفرهای ایجاد شده در ماتریس هزینه فرصت را با استفاده از حداقل خطوط افقی و عمودی بپوشانید. این خطوط را خطوط پوشش می‌نامند که فقط می‌توانند به صورت افقی و عمودی باشند. چنانچه حداقل خطوط پوشش با بُعد ماتریس یعنی n برابر شد مسئله حل شده است و می‌توان جواب بهینه را به صورت زیر استخراج کرد. صفری را که در هر سطر وجود دارد انتخاب کنید و آن را به عنوان یک تخصیص سطر به ستون مربوطه در نظر بگیرید. سپس سطر و ستون تخصیص داده شده را از ماتریس هزینه فرصت حذف کنید و این عمل را در مورد سایر سطرها انجام دهید. اما چنانچه حداقل خطوط پوشش کمتر از بُعد ماتریس هزینه باشد جواب بهینه هنوز حاصل نشده است و باید ماتریس هزینه فرصت را بهبود داد.

۳/ بهبود ماتریس هزینه فرصت

در این مرحله باید کوچکترین عنصر ماتریس هزینه فرصت که توسط هیچ یک از خطوط پوشش، پوشیده نشده است را انتخاب کنید و این عدد را از کلیه اعداد بدون پوشش کم کرده و به اعداد محل تقاطع خطوط پوشش اضافه کنید. سایر اعداد بدون تغییر باقی می‌مانند. در نهایت به مرحله دوم باز گردید.

مدیر یک سازمان می‌خواهد ۳ گونه از کارکنان خود را در سه شغل بکار برد که هزینه استخدام آنها حداقل گردد. جدول زیر هزینه بکارگیری هر فرد در هر شغل را نشان می‌دهد. با کمک روش تخصیص مجارستانی بهترین تخصیص ممکن را انجام دهید.

شغل / فرد	G۱	G۲	G۳
P۱	۱۵	۱۰	۲۹
P۲	۱۲	۱۱	۲۸
P۳	۱۳	۱۴	۲۲

۱/ تعیین کمترین هزینه در هر سطر

①

	G_1	G_2	G_3
P_1	$\overset{۵}{(۱۵-۱۰)}$	۰	۱۶
P_2	۱	۰	۱۷
P_3	۰	۱	۹

۲/ کمترین هزینه هر سطر را از اعداد سطر کسر می‌نماییم

۳/ کمترین عدد هر ستون را انتخاب می‌نماییم

②

	G_1	G_2	G_3
P_1	۵	۰	۷
P_2	۱	۰	۸
P_3	۰	۱	۰

کمترین عدد هر ستون را از اعداد ستون کسر می‌نماییم از مرحله ①

۴/ حداقل خطوط پوشش $L = ۲$ $\neq$

۵/ تعداد ستون‌ها $n = ۳$

⇓

تعداد ستون‌ها

حداقل خطوط پوشش: کمترین خطوطی که می‌تواند صفرهای جدول را پوشش دهد.

۶/ اگر تعداد ستون‌ها (n) با حداقل خطوط پوشش (ها) برابر شد ⟸ جواب بهینه داریم

۷/ ۳ دسته اعداد داریم [۱/ اعدادی که خط نخورده‌اند ۲/ اعدادی که محل تقاطع‌اند ۳/ اعدادی که فقط یک خط از آنها عبور کرده]

از بین اعدادی که خط نخورده‌اند کمترین عدد را پیدا کرده از اعداد خط نخورده زیر کسر نموده و به عدد محل تقاطع اضافه می‌نماییم

③

	G_1	G_2	G_3
P_1	$\overset{۴}{(۵-۱)}$	۰	۶
P_2	۰	۰	۷
P_3	۰	۲	۰

$L = ۳$

$n = ۳$ ⟹ جواب و ماتریس بهینه

حاصل شده است

در اینجا اگر به جدول ماتریس بهینه حاصل نشده بود

باز هم عمل ۷ را تکرار می‌کنیم.

④

	G_1	G_2	G_3
P_1	۴	۰	۶
P_2	۰	۰	۷
P_3	۰	۲	۰

۸/ در هر سطر کمترین هزینه را انتخاب می‌کنیم ⟹

⑤

فرد	شغل	هزینه
P_1	G_2	۱۰
P_2	G_1	۱۲
P_3	G_3	۲۲
	هزینه کل	۴۴

۹/ مقدار هزینه را از جدول اولیه داده شده می‌نویسیم

فدراسیون فوتبال در یک کشور خاص باید ۴ بازی فوتبال را برگزار نماید. فدراسیون در نظر دارد ۴ تیم را برای برگزاری ۴ بازی به گونه‌ای انتخاب نماید که کل فاصله مسافت تیم‌ها حداقل شود. فاصله هر تیم از محل برگزاری بازی‌ها در جدول زیر نمایش داده شده است. با کمک روش تخصیص می‌توانید بهترین تخصیص مطلوب را انجام دهید.

تیم \ محل برگزاری	تهران	سمنان	دامغان	گنج
A	۲۱۰	۹۰	۱۸۰	۱۶۰
B	۱۰۰	۷۰	۱۳۰	۲۰۰
C	۱۷۵	۱۰۵	۱۴۰	۱۷۰
D	۸۰	۹۵	۱۰۵	۱۲۰

	ت	س	د	گ
A	۱۲۰	۰	۹۰	۷۰
B	۳۰	۰	۶۰	۱۳۰
C	۷۰	۰	۳۵	۶۵
D	۱۵	۰	۴۰	۵۵

	ت	س	د	گ
A	۱۰۵	۰	۵۵	۱۵
B	۱۵	۰	۲۵	۷۵
C	۵۵	۰	۰	۱۰
D	۰	۰	۵	۰

$n = ۴ \neq L = ۳$

	ت	س	د	ک
A	۱۵	۰	۴۰	۰
B	۰	۰	۱۰	۹۰
C	۵۵	۱۵	۰	۱۰
D	۰	۱۵	۵	۰

تعداد $n=۴$ = خطوط $L=۴$

ماتریس بهینه حاصل شده است

فاصله	محل	تیم
۹۰	سمنان	A
۱۰۰	تهران	B
۱۴۰	دامغان	C
۱۲۰	کرج	D
۴۵۰		

فاصله حل

از سؤال قبل تخصیص

مجارستانی داریم

عدم توازن در مسائل تخصیص

مسئله‌های متداولی از مسائل تخصیص وجود دارد که در آن تعداد سطرها و ستونها با یکدیگر برابر نیستند.

از آنجا که در روش مجارستانی فرض بر تعادل سطرها و ستونهاست بنابراین بایستی قبل از اجرای روش، توازن مسئله تخصیص به عمل آید. برای ایجاد توازن در تابلوی تخصیص اگر تعداد سطرهای تابلوی تخصیص کمتر از تعداد ستونهای آن باشد به تعداد تفاوت سطرها و ستونها سطر مجازی با هزینه صفر به تابلو تخصیص اضافه کنید و اگر تعداد ستونهای تابلوی تخصیص کمتر از تعداد سطرهای آن باشد به تعداد لازم ستون مجازی با هزینه صفر به تابلوی تخصیص اضافه کنید.

مثال: شرکت اتوبوسرانی می‌خواهد ۳ راننده را به ۴ ماشین تخصیص دهد بطوری که کل هزینه استخدام رانندگان حداقل گردد. جدول زیر بیانگر هزینه تخصیص هر راننده به هر ماشین است. با استفاده از روش تخصیص مجارستانی جواب بهینه را بیابید.

راننده \ ماشین	۱	۲	۳	۴
A	۶	۷	۵	۹
B	۸	۵	۶	۷
C	۱۰	۸	۶	۶
D سطر مجازی	۰	۰	۰	۰

	۱	۲	۳	۴
A	۱	۲	۰	۴
B	۳	۰	۱	۲
C	۴	۲	۰	۰
D	۰	۰	۰	۰

خطوط $L=۴$

تعداد $n=۴$

جواب بهینه

هزینه	ماشین	راننده
۵	۳	A
۵	۲	B
۶	۴	C
۰	۱	D
۱۶		

هزینه حل

جواب بهینه چندگانه در مسائل تخصیص

همانند هر مسئله برنامه‌ریزی خطی، حمل و نقل، مسائل تخصیص هم ممکن است دارای جواب بهینه چندگانه باشد. چنین مدلی را مسائل تخصیص با جواب بهینه چندگانه می‌نامند و در آن حداقل هزینه براساس بیش از یک استراتژی تخصیص حاصل می‌شود.

تابلوی تخصیص زیر را که بیانگر تخصیص هر مدیر به هر سازمان است را در نظر بگیرید و جواب بهینه مدل را با استفاده از روش تخصیص مجارستانی بیابید.

مدیر \ سازمان	A	B	C	D
۱	۲۱۰	۹۰	۱۸۰	۱۶۰
۲	۱۰۰	۷۰	۱۳۰	۲۰۰
۳	۱۷۵	۱۰۵	۱۴۰	۱۷۰
۴	۸۰	۶۵	۱۰۵	۱۲۰

	A	B	C	D
۱	۱۲۰	۰	۹۰	۷۰
۲	۳۰	۰	۶۰	۱۳۰
۳	۷۰	۰	۳۵	۶۵
۴	۱۵	۰	۴۰	۵۵

	A	B	C	D
۱	۱۰۵	۰	۵۵	۱۵
۲	۱۵	۰	۲۵	۷۵
۳	۵۵	۰	۰	۱۰
۴	۰	۰	۵	۰

n = ۴ ≠ L = ۳

	A	B	C	D
۱	۹۰	۰	۴۰	۰
۲	۰	۰	۱۰	۶۰
۳	۵۵	۱۵	۰	۱۰
۴	۰	۱۵	۵	۰

مدیر	سازمان	هزینه
۱	B	۹۰
۲	A	۱۰۰
۳	C	۱۴۰
۴	D	۱۲۰
		۴۵۰

جواب بهینه ۲

مدیر	سازمان	هزینه
۱	D	۱۴۰
۲	B	۷۰
۳	C	۱۴۰
۴	A	۸۰
		۴۵۰

جواب بهینه ۱

این مسئله دارای ۲ استراتژی تخصیص برای دستیابی به حداقل هزینه می‌باشد. بنابراین مدل تخصیص در این مسئله دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد.

برنامه‌ریزی عدد صحیح

انواع مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح

۱) مدل عدد صحیح محض

مدلی است که در آن تمامی متغیرهای تصمیم‌گیری عدد صحیح هستند یا غیر اعشاری (۱،۲،۳،...)

در طرح توسعه یک کارخانه تصمیم گرفته شده است تا برای خرید ماشین‌های جدید سرمایه‌گذاری شود. پیش‌بینی می‌شود که خرید هر ماشین تراش و هر ماشین پرس سود روزانه را به ترتیب ۱۵۰ و ۱۰۰ ریال افزایش دهد. چون خرید ماشین‌ها محدود است و دارای ۲ محدودیت بودجه و فضای کف است لذا نمی‌توان آن‌ها را به هر تعداد خرید. بودجه خرید ماشین‌ها ۴۰۱ ریال و حداکثر فضایی که برای نصب ماشین‌های ذکر شده وجود دارد ۱۲ متر مکعب است. قیمت خرید ماشین‌ها و فضای مورد نیاز آن‌ها در جدول زیر داده شده است. این کارخانه چه تعداد از هر ماشین بخرد تا به حداکثر سود دست یابد.

مسئله را به فرم برنامه‌ریزی عدد صحیح مدل‌سازی نمایید.

۳/

ماشین	فضای مورد نیاز	قیمت هر
x_1 پرس	۱۵	۸۰۰۰
x_2 تراش	۳۰	۴۰۰۰

$$MAX\ Z = 100x_1 + 150x_2$$

$$15x_1 + 30x_2 \le 200$$

$$8000x_1 + 4000x_2 \le 40$$

x_1 و $x_2 \ge 0$ و عدد صحیح

یعنی تعداد باید رند باشد یعنی ۳ تا دستگاه یا ۲ دستگاه، نمی‌توانیم ۲٫۵ دستگاه بخریم

۲) مدل ۰ یا ۱

در مدل‌های صفر یا یک تمام متغیرهای تصمیم‌گیری عدد صفر یا یک خواهند بود

شورای یک شهر باید در خصوص ساخت امکانات تفریحی شهر تصمیم‌گیری نماید. برای این منظور ۴ مکان تفریحی در نظر گرفته شده است. (یک استخر شنا، یک زمین تنیس، یک ورزشگاه و یک سالن ژیمناستیک) شورای شهر با توجه به محدودیت بودجه و زمین‌های موجود در نظر دارد امکاناتی را ایجاد نماید که تعداد بیشتری از آنها استفاده کنند. تعداد افرادی که از این امکانات استفاده خواهند کرد همراه با هزینه و مقدار زمین مورد نیاز آنها در جدول زیر نشان داده شده است. بودجه‌ی شهر برای ایجاد این امکانات ۱۲۰,— ریال بوده و ۱۲ هکتار زمین دارد. همچنین زمین مورد استفاده برای ایجاد استخر شنا و زمین تنیس در یک منطقه از شهر قرار دارد لذا فقط یکی از آن می‌تواند احداث شود. شورای شهر در نظر دارد که از این امکانات را ایجاد کند تا افراد بیشتری از این امکانات استفاده کنند. مسئله را به روش برنامه‌ریزی عدد صحیح فرموله کنید.

$$MAX\ Z = 300x_1 + 90x_2 + 400x_3 + 150x_4$$

مکان تفریحی	تعداد افرادی که هر روز از این امکانات استفاده خواهند کرد	هزینه بر حسب ریال	زمین بر حسب هکتار
استخر شنا	۳۰۰	۳۵,—	۴
زمین تنیس	۹۰	۱۰,—	۲
ورزشگاه	۴۰۰	۲۵,—	۷
سالن ژیمناستیک	۱۵۰	۹۰,—	۳

$$35{,}000x_1 + 10{,}000x_2 + 25{,}000x_3 + 90{,}000x_4 \le 120{,}000$$

$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 \le 12$$

محدودیت‌های عدم احداث

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_2 = 0 & x_2 = 1 \\ x_1 = 0 & x_2 = 0 \end{array}\right\} \leftarrow x_1 + x_2 \le 1$$

که هر سه حالت را در بر می‌گیرد

حالت محال $x_1 = 1 \quad x_2 = 1$

x_1 و x_2 و x_3 و $x_4 = 0$ یا 1

۳/ مدل عدد صحیح مختلط

در مدل عدد صحیح مختلط برخی از متغیرها عدد صحیح بوده و محدودیت‌های مربوط به این متغیرها باید عدد صحیح باشند

شخصی ۳۵۰۱ـــ ریال پول دارد و می‌تواند آن را از راه خرید اوراق قرضه، خرید زمین و خرید سهام سرمایه‌گذاری کند. این شخص می‌خواهد پولش را به گونه‌ای سرمایه‌گذاری کند که طی یک سال بیشترین سود را به دست آورد. قیمت خرید هر واحد اوراق قرضه ۵۰۱ـــ ریال است و سود حاصل از خرید هر واحد اوراق قرضه در یک سال ۹ـــ ریال است. قیمت خرید هر قطعه زمین ۱۲ـــ ریال و سود حاصل از آن در یک سال ۱۵۰۰ ریال است. قیمت خرید هر سهام ۸ـــ ریال و سود حاصل از آن در یک سال ۱۰۰۰ ریال است. تعداد اوراق قرضه موجود، قطعات زمین موجود و تعداد سهام موجود به ترتیب ۴، ۱۵ و ۲۰ است. به شکل زیر برنامه‌ریزی عدد صحیح مدل‌سازی نمایید.

پس $x_۱$ = اوراق قرضه و $x_۲$ = زمین و $x_۳$ = سهام

$$MAXZ = ۹ـــ x_۱ + ۱۵۰۰ x_۲ + ۱ـــ x_۳$$

$$۵۰۱ـــ x_۱ + ۱۲۰ـــ x_۲ + ۸ـــ x_۳ \leq ۲۵۰$$

اوراق قرضه و سهام حتماً باید عدد صحیح باشند، مثلاً ـــ ۲ و نیم سهام

$x_۱ \leq ۴$ $\quad x_۲ \leq ۱۵$ $\quad x_۳ \leq ۲۰$ محدودیت‌های تعدادی

$x_۱ , x_۳ \geq ۰$ و عدد صحیح محض

$x_۲ \geq ۰$

می‌توان خرید نمی‌توان ـــ ۲ و نصفی سهام خرید ولی زمین می‌تواند ۲/۵ قطعه باشد.

بخش تحقیق و توسعه سازمانی در صدد بررسی ۷ موقعیت سرمایه‌گذاری برای پروژه‌ها باشد. کل بودجه موجود سازمان برای سرمایه‌گذاری ۶۲۰ ریال است. برآوردهای بخش توسعه و تحقیق نشان می‌دهد که با توجه به شرایط اقتصادی حداکثر می‌توان در ۴ پروژه سرمایه‌گذاری کرد. نیروی انسانی موجود برای اجرای پروژه‌ها مجموعاً ۱۵ نفر می‌باشد. با توجه به اطلاعات جدول زیر مسئله را به گونه‌ای فرموله نمایید که حداکثر ارزش فعلی خالص ناشی از سرمایه‌گذاری حاصل گردد.

پروژه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
سرمایه مورد نیاز (ریال)	۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	۹۰	۲۰۰	۱۵۰	۲۲۰
نیروی انسانی مورد نیاز	۸	۳	۱	۴	۶	۳	۵
ارزش فعلی خالص (NPV)	۳۰۰	۲۵۰	۳۰۰	۱۵۰	۳۲۰	۲۵۰	۲۹۰

$$MAXZ = ۲۰۰x_۱ + ۲۵۰x_۲ + ۳۰۰x_۳ + ۱۵۰x_۴ + ۳۲۰x_۵ + ۲۵۰x_۶ + ۲۹۰x_۷$$

محدودیت نیروی انسانی $۸x_۱ + ۳x_۲ + ۱x_۳ + ۴x_۴ + ۶x_۵ + ۳x_۶ + ۵x_۷ \leq ۱۵$

مهم

محدودیت سرمایه‌های مورد نیاز $۱۰۰x_۱ + ۱۲۰x_۲ + ۱۸۰x_۳ + ۹۰x_۴ + ۲۰۰x_۵ + ۱۵۰x_۶ + ۲۲۰x_۷$

اگر در پروژه j ام سرمایه‌گذاری شود $x_j = ۱$ $\quad x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ + x_۷ \leq ۴$

اگر در پروژه j ام سرمایه‌گذاری نشود $x_j = ۰$ $\quad x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴ , x_۵ , x_۶ , x_۷ = ۰$ یا ۱

ب) فرض کنید که پروژه‌های ۱ و ۴ یا هر دو همزمان اجرا شوند و یا هیچکدام اجرا نشوند. محدودیت مربوطه را به مدل اضافه نمائید.

اگر فرض $x_۱$ یا $x_۴$ شود ⇐ $x_۱+x_۴ \leq ۱$

$$\left.\begin{array}{l} x_۱=۰ \Rightarrow x_۴=۰ \\ x_۱=۱ \Rightarrow x_۴=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow x_۱=x_۴ \Rightarrow x_۱-x_۴=۰$$

کوهنوردی می‌تواند کوله‌پشتی همراه‌اش که دارای ظرفیت ۱۱ kg می‌باشد از ۴ نوع جنس پر کند. وزن هر یک از اجناس و مطلوبیت حاصل از حمل هر جنس به شرح زیر می‌باشد. مسئله را به گونه‌ای فرموله کنید که مطلوبیت کل ناشی از حمل اجناس توسط کوهنورد حداکثر گردد.

جنس	A	B	C	D
وزن kg	۲	۴	۵	۳
مطلوبیت	۱۸	۲۵	۳۰	۲۰

$$\text{MAX} = ۱۸x_A + ۲۵x_B + ۳۰x_C + ۲۰x_D$$

محدودیت وزن $۲x_A + ۴x_B + ۵x_C + ۳x_D \leq ۱۱$

$x_A, x_B, x_C, x_D = ۰$ یا ۱ و یا $x_j \geq ۰$

اگر از بین ۴ جنس می‌گفت حداکثر ۳ جنس باشد ⇐ $x_A+x_B+x_C+x_D \leq ۳$