به نام حضرت دوست

فروردین ماه ۱۳۹۶

پاسخنامه آزمون جامع (سری اول)

11 th IOAA Team
I.R. IRAN

اعضای تیم به ترتیب حروف الفبا :

سینا بلوکی

امیرحسین ستوده فر

عماد صالحی

پریماه صفریان

شایان عزیزی

امیراحسان علیزاده

عباس فروزان نژاد

زهرا فرهمند

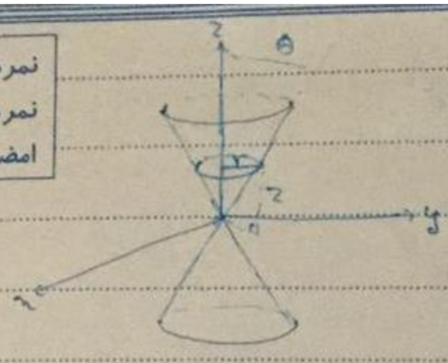
علیرضا ملکی

محمد علی نادمی

- پاسخنامه سوال یک :

نمره با عدد :
نمره با حروف :
امضاء :

الف)



$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = r \,\text{Cot}\,\theta$

$\longrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}\,\text{Cot}\,\theta$

ب)

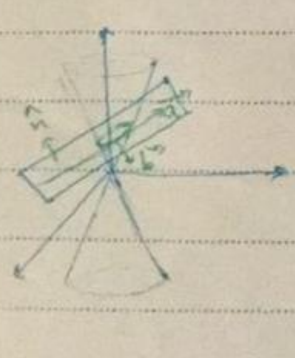
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \cos i\, y' - \sin i\, z' \\ z = \sin i\, y' + \cos i\, z' \end{cases}$$

$$z^2 = \text{Cot}^2\theta\,(x^2+y^2) \longrightarrow \sin^2 i\, y'^2 + \cos^2 i\, z'^2 + 2\sin i \cos i\, y' z' = (x'^2 + \cos^2 i\, y'^2 + \sin^2 i\, z'^2 - 2\sin i \cos i\, y' z')\,\text{Cot}^2\theta$$

نیازی به ساده کردن نیست

$$\longrightarrow y'^2\left(1 - \frac{\cos^2 i}{\sin^2\theta}\right) + z'^2\left(1 - \frac{\sin^2 i}{\sin^2\theta}\right) + 2\sin i \cos i\, y' z' \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} - \text{Cot}^2\theta\, x'^2 = 0 = f(x,y,z)$$

ج) بردار مماس به بیضی بر مخروط نیز مماس است پس به بردار عمود بر سطح مخروط عمود است
از طرفی دیگر در صفحه‌ی قطع داده شده قرار دارد پس به بردار نرمال صفحه نیز عمود است



$\vec{a} = \hat{n} \times \vec{b}$

$\vec{b} = \nabla(f(x,y,z)) = Ax\,\hat{i} + (By+Cz)\,\hat{j} + (Dz+Cy)\,\hat{k}$

$\hat{n} = \alpha\,\hat{i} + \beta\,\hat{j} + \gamma\,\hat{k}$

$$\longrightarrow \vec{a} = \{\beta(Dz+Cy) - \gamma(By+Cz)\}\hat{i} + \{A\gamma - \alpha(Dz+Cy)\}\hat{j} + \{\alpha(By+Cz) - A\beta\}\hat{k}$$

د) شیب خط عاک :: $m = \dfrac{\alpha(By+Cz)-A\beta}{y(C\beta-\gamma B)-z(D\beta-\gamma C)}$

ه) $y = \dfrac{\delta - \alpha x - \gamma z}{\beta}$

$$\longrightarrow m = \frac{\alpha\delta - \alpha^2 x + (C\alpha - \gamma\alpha)z - AB}{\frac{\delta-\alpha x-\gamma z}{\beta}(C\beta-\gamma B) - z(D\beta-\gamma C)}$$

و) (ضرایب A, B, ... ، لزوماً با مشتق‌های قبل برابر نیست)

$$m = \frac{dz}{dx} = \frac{Ax+Bz+C}{Dx+Ez+F}$$

$$\Rightarrow \int (Dx+Ez+F)\,dz = \int (Ax+Bz+C)\,dx$$

$$\rightarrow Dxz + Ez^2 + Fz = Ax^2 + Bxz + Cx + C'$$

$\rightarrow ax^2 + bz^2 + Cxz + d = 0 \longrightarrow$ تصویر بیضی نیز بیضی است

• پاسخنامه سوال دو :

الف)

$$\Delta m = 4\pi r^2 \Delta r \rho = 4\pi r'^2 \Delta r' \rho' \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^2 \Delta r}{r'^2 \Delta r'}$$

$$\left.\begin{aligned} r' &= r + v(r)\,\delta t = r + v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\delta t \\ r'+\Delta r' &= r + v(r+\Delta r)\,\delta t + \Delta r = r + \Delta r + \left(v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right) + \frac{v_0\pi}{2}\frac{1}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\Delta r\right)\delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta r' = \Delta r + \frac{v_0\pi}{2}\frac{1}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\Delta r\,\delta t$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^2 \Delta r}{r^2\left(1+\frac{2v_0\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\delta t}{r}\right)\Delta r\left(1+\frac{v_0\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)}{R}\delta t\right)} = \left(1-\frac{2v_0}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\delta t\right)\left(1-\frac{v_0\pi}{2R}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\delta t\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho'}{\rho} = 1 - v_0\delta t\left(\frac{2}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right) + \frac{\pi}{2R}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\right) = \frac{\rho-\Delta\rho}{\rho}$$

$$\Rightarrow \Delta\rho = v_0\delta t\left(\frac{2}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right) + \frac{\pi}{2R}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\right)\rho$$

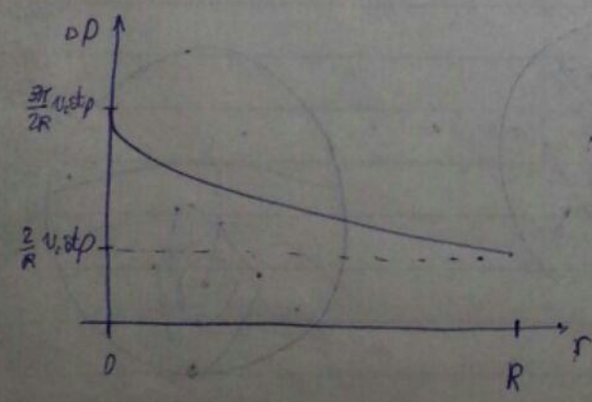
ب)

$$r=0 \longrightarrow \lim_{r\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)}{r} = \frac{\pi}{2R} \Rightarrow \Delta\rho(r=0) = \frac{\pi}{R}+\frac{\pi}{2R} = \frac{3\pi}{2R}v_0\delta t\rho$$

$$\longrightarrow \frac{d\Delta\rho}{dr}(r=0) = v_0\delta t\rho\left(\frac{\pi}{R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)}{r} - \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)}{r^2} - \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)\right) = -\infty$$

$$r=R \longrightarrow \Delta\rho(r=R) = v_0\delta t\rho\left(\frac{2}{R}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{d(\Delta\rho)}{dr}(r=R) = -v_0\delta t\rho\left(\frac{2}{R^2}+\frac{\pi^2}{4R^2}\right) = -\frac{v_0\delta t\rho}{R^2}\left(2+\frac{\pi^2}{4}\right)$$



- پاسخنامه سوال سه :

آ)

$$L = \frac{(\frac{4\pi}{3}R^3)(aT^4)}{\delta t}$$

$\delta t = N\frac{l}{c}$ $\qquad R = l\sqrt{N}$

$l\ \alpha\ \ T^{3.5}/\rho$

$$=> \qquad L\ \alpha\ \ R\,T^{7.5}/\rho$$

ب)

ستاره در تعادل است پس تعادل هیدروستاتیک داریم:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)$$

$$P\ \alpha\ M\ \rho\ R^{-1}$$

ستاره کم جرم است و فشار گاز غالب

$$P\ \alpha\frac{\rho T}{\bar{m}}$$

$$=> \qquad T\ \alpha\ \ M\ \bar{m}/R$$

$$L\ \alpha\ m^{7.5}M^{6.5}R^{-3.5}\ \alpha\ m^4M^3T^{3.5}$$

پ)

$\rho = m\,n$ $\qquad X = m_p n_H/\rho$ $\qquad Y = 4\,m_p\,n_{He}/\rho$ $\qquad n = 2n_H + 3n_{He}$

$$m = \frac{4m_p}{5X+3}$$

ت)

$T_{C,sun}\ = 1.5\times10^7K$

$X_{sun} = 0.75$

$Y_{star} = 1$ و $X_{star} = 0$

با مقایسه ی ستاره با خورشید و تبدیل تناسب به تساوی داریم:

$L = 2450\ \ L_{sun}$ و $R = 0.17\ R_{sun}$

ث)

$L = 4\pi R^2\sigma T^4$ $\qquad => T = 98s000\ K$

- پاسخنامه سوال چهار :

با مشتق گیری از معادله اول فریدمان و جایگذاری مشتق دوم فاکتور مقیاس از معادله شتاب، به معادله حالت می رسیم؛ می دانیم مقدار ω برای سه مولفه ی موجود در عالم، تابش، ماده و انرژی تاریک، به ترتیب $1/3$ ، 0 و -1 است.

یعنی چگالی شان به ترتیب با توان های -4 ، -3 و 0 از فاکتور مقیاس متناسب است.

پس هر چه به گذشته، فاکتور مقیاس های کوچک تر می رویم تابش بیشتر می شود و ماده (کمتر از تابش) در همین حال انرژی تاریک ثابت می ماند. پس از یک a ای به قبل درعالم چگالی تابش غالب است.

معادله اول فریدمان:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{r.0}\, a^{-4}$$

$$a\, da = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{r.0}}\; dt$$

با انتگرال گیری از معادله ی فوق داریم:

$$t = \left(\frac{3a^4}{8\pi G\, \rho_{r.0}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$\rho_r = \rho_{r.0}/a^4 = \frac{a_B T^4}{c^2 a^4}$$

$$t = \left(\frac{3c^2}{8\pi G a_B T^4}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 230\ s\ \left(\frac{10^9 K}{T}\right)^2$$

- پاسخنامه سوال پنج :

الف) برای حل این بخش باید دقت کنید که هواپیما روی دایره عظیمه و کشتی با استفاده از نقشه مرکاتور روی خم $loxodrome$حرکت می‌کند. نکته‌ای که این بخش از سوال قصد دارد شما به آن برسید این است که بین دو نقطه روی سطح یک کره این دو مسیر ممکن است اصلا تقاطعی نداشته باشند. (بسته به مختصات دو نقطه مبدا و مقصد) با توجه به صورت سوال دریکی از این مسیرها، این‌دو خم هیچ‌گاه تداخل ندارند. در واقع مسیری را می‌خواهیم که مسیر حرکت دزدان‌دریایی هیچ‌گاه با مسیر حرکت ماموران ایالتی(هواپیما!) تداخل نداشته باشد. پس برای روشن شدن این مسئله باید مسیر دایره‌عظیمه برای نقطه مبدا و دو نقطه A و B (هرکدام به عنوان مقصد) را روی نقشه مرکاتور رسم کرد. (**با استفاده از روش نقطه گذاری**)

$$y = C\ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right)$$
$$x = C\,l$$

که مقدار C ضریب مقیاس نقشه مرکاتور است. (چون نقشه مرکاتور است، این ضریب مقیاس برای راستای x و y لزوما یکسان باشد)

$$\frac{16.6}{2} = C\ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{82^\circ}{2}\right)\right) \Rightarrow C = 3.1\,\frac{1}{cm}$$

معادله دایره عظیمه بین دو نقطه (با استفاده از فرمول چهارجزئی) :

$$\tan(\phi) = \tan(i)\sin(l-l_0)$$

با قراردادن نقطه مبدا O و A در معادله بالا، i و l_0 را بدست می‌آوریم:

برای دایره‌عظیمه گذرنده از OA :

$$l_{0A} = 88.52^\circ W$$
$$i_{0A} = 71.76^\circ$$

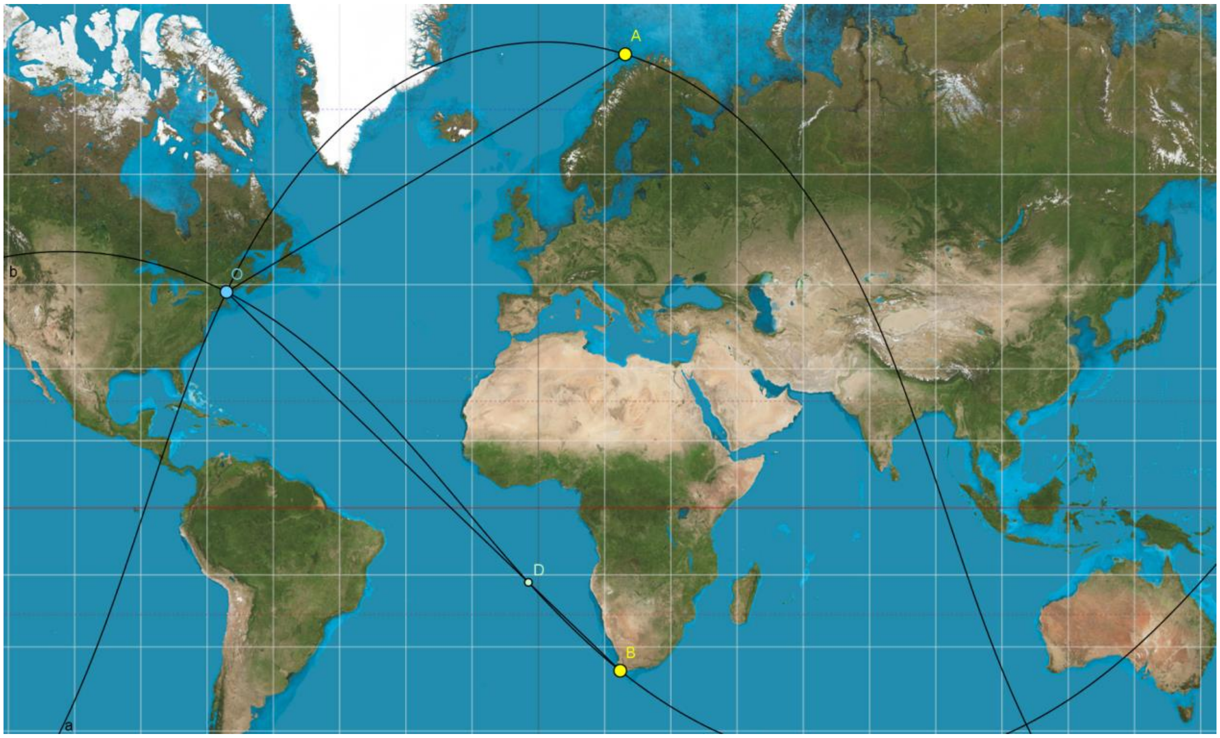
برای دایره‌عظیمه گذرنده از OB :

$$l_{0B} = 16.64^\circ W$$
$$i_{0B} = -49.87^\circ$$

همچنین برای اینکه بتوان نقطه‌گذاری را سریع‌تر انجام داد می‌توان از رابطه‌ای معادل رابطه بالا استفاده کرد، که این رابطه نیز به سادگی اثبات می‌شود : $\sinh\left(\frac{y}{c}\right) = \tan(i)\sin(l-l_0)$

با استفاده از این رابطه میایم بین مثلا دو نقطه O و A که می‌خواهیم دایره‌عظیمه بینشان را در نقشه مرکاتور داده شده رسم کنیم تا به ازای l های مختلف بین l_{0A} و l_O مقادیر مختلف y را بدست می‌آوریم و درپاسخنامه می‌نویسیم. برای رسم دایره‌عظیمه OA حداقل ۱۰ یا ۱۱ تا نقطه کافیست(به فاصله ۵ درجه ۵ درجه). همچنین برای رسم دایره‌عظیمه OB نیز تقریبا ۱۵ تا ۲۰ تا نقطه کفایت می‌کند

.با رسم این دوایرعظیمه در نقشه داده شده، مانند شکل زیر، مشخص می‌شود که دایره‌عظیمه گذرنده از OA مسیر $loxodrome$ بین O و A را قطع نمی‌کند.



ب) با توجه به صورت سوال این بخش، فرض می‌کنیم دزدان‌دریایی از مسیر OB می‌روند. اگر کشتی و هواپیما هرکدام با یک سرعت دلخواهی حرکت کنند، ممکن است همزمان در نقطه برخورد مسیرها(نقطهD) به‌هم نرسند. به این خاطر در این بخش می‌خواهیم سرعت هواپیما را طوری تنظیم کنیم که همزمان با کشتی به نقطه D برسد. با استفاده از نقشه و نقطه‌گذاری که انجام دادیم، مختصات نقطه D برابر است با :

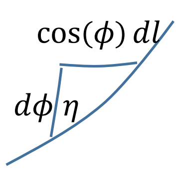
$$l_D = 1.8°W \approx 2°W$$

$$\phi_D = 16.3°S \approx 16°S$$

باید ببنیم چه مدت زمانی طول می‌کشد تا کشتی از نقطه O به نقطهD برسد، سپس برای یافتن سرعت هواپیما طول خم OA روی دایره‌عظیمه را تقسیم بر این مدت زمان کنیم. برای یافتن مدت زمانی که کشتی از O به A می‌رود:

$$ds = R\sqrt{d\phi^2 + \cos(\phi)^2\, dl^2}$$

از طرفی می‌دانیم روی سطح کره داریم :



$$\tan(\eta) = \frac{\cos(\phi)\, dl}{d\phi}$$

$$S_{OD} = \int ds = \int R\sqrt{d\phi^2 + \cos(\phi)^2\, dl^2} = \int R\, d\phi\, \sqrt{1 + \tan(\eta)^2} = \int R \sec\eta\, d\phi$$
$$= R \sec\eta\, (\phi_O - \phi_D)$$

برای پیدا کردن η می‌توانیم از روی نقشه با نقاله عدد را بدست آوریم همچنین می‌شود برای اینکه دقت بیشتری داشته باشیم با استفاده از دو معادله دو مجهول :

$$y = \cot\eta\ \ (x - x_0)$$

$$C \ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right) = \cot\eta\ \ C\ (l - l_0)$$

که چون دو نقطه O و D باید در معادله فوق صدق کنند:

$$\ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_O}{2}\right)\right) = \cot(\eta)\, (l_O - l_0)$$

$$\ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_D}{2}\right)\right) = \cot(\eta)\, (l_D - l_0)$$

بنابراین :

$$\frac{\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_O}{2}))}{\ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_D}{2}\right)\right)} = \frac{l_o - l_0}{l_D - l_0}$$

با حل این معادله مقدار $l_0 = -19.59°$ بدست می‌آید.

با قرار دادن مقدار l_0 در رابطه مقدار $\eta = -43.86°$ حاصل می‌شود.

بنابراین مقدار $S_{OD} = 9633\ km$ و با استفاده از کسینوس‌ها و یافتن فاصله‌زاویه‌ای بین نقاط O و D، فاصله بین این نقاط برابر است با 9623 km .

مدت زمانی که طول می‌کشد تا کشتی از O به D برسد : ساعت $t = \frac{S_{OD}}{v} = 259.60$

بنابراین سرعت هواپیما باید برابر : $\frac{9623}{t} = 37.07\ km/h$ باشد.

نکته ای که وجود دارد این است که اعداد هرچه دقیق تر در این سوال محاسبه شوند بهتر است، چون با اعداد داده شده یک مقدار کوچکی خطا می‌تواند جواب نهایی را به کلی تغییر دهد! (البته برای جواب نهایی یک بازه‌ی خطایی وجود دارد که بسته به راه حل شما برایتان در نظر گرفته می‌شود.)

موفق باشید ...