

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری سوم

یکشنبه ۲۲ شهریور ۱۳۹۴

وقت: ۴ ساعت و ۴۵ دقیقه

مسئله‌ی یکم. جزیره‌ی مورچه‌های ابوالفضل! ۴۰ امتیاز

یک کلونی با n مورچه و یک ملکه داریم ($n \geq 4$). هر مورچه به غیر از ملکه، سرباز یا کارگر است. به تازگی ویروسی در کلونی افتاده است که مورچه‌های کارگر و سرباز، هم‌شکل شده‌اند. ملکه از این امر به شدت عصبانی است و می‌خواهد بفهمد هر یک از مورچه‌ها سرباز هستند یا کارگر. ملکه می‌داند حداقل دو تا از مورچه‌ها کارگر هستند؛ همچنین می‌داند به ازای هر دو مورچه دقیقن یکی از آن‌ها از دیگری بدش می‌آید. ملکه در مرحله می‌تواند دو مورچه مانند X, Y را انتخاب کند و از هر یک، در مورد سرباز یا کارگر بودن دیگری بپرسد. می‌دانیم هر مورچه مانند A در مورد سرباز یا کارگر بودن مورچه‌ی B به شکل زیر پاسخ می‌دهد:

- اگر A کارگر باشد، پاسخ درست را می‌دهد.
 - اگر A سرباز باشد و از B بدش بیاید، می‌گوید B کارگر است.
 - اگر A سرباز باشد و از B بدش نیاید، می‌گوید B سرباز است.
- ثابت کنید کمینه‌ی تعداد مراحل که ملکه به طور تضمینی بتواند نوع هر مورچه را بفهمد، برابر n است.

مسئله‌ی دوم. خیمه‌ی پارسا روی بچه‌ها! ۴۰ امتیاز

فرض کنید یک جایگشت مانند $\pi = \langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rangle$ از اعداد $1, 2, \dots, n$ داریم و می‌خواهیم این جایگشت را مرتب کنیم. به اعداد $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ اعداد یاسی می‌گوییم. در هر مرحله می‌توان یک زیرجایگشت از اعداد متوالی جایگشت انتخاب کرد؛ طوری که تعداد اعداد این زیرجایگشت، یک عدد یاسی باشد؛ سپس اعداد این زیرجایگشت وارونه می‌شوند. برای مثال جایگشت $1, 6, 5, 2, 3, 4$ را می‌توان در ۳ مرحله به شکل زیر مرتب کرد:

$$1, 6, 5, 2, 3, 4 \rightarrow 1, 5, 6, 2, 3, 4 \rightarrow 1, 5, 4, 3, 2, 6 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

کمینه‌ی تعداد مراحل لازم برای مرتب کردن جایگشت π را $f(\pi)$ می‌گوییم. فرض کنید بیش‌ترین مقدار $f(\pi)$ به ازای تمام جایگشت‌های ممکن از اعداد $1, 2, \dots, n$ برابر $g(n)$ باشد. $\theta(g(n))$ را بیابید.

مسئله‌ی سوم. درخت بی‌آزار! ۵۴ امتیاز

فرض کنید T یک درخت n -رأسی باشد. دو یال را مجاور گوئیم؛ هرگاه در دقیقن یک رأس مشترک باشند. می‌خواهیم روی هر یال از این درخت، یکی از اعداد $1, 0, -1$ را بنویسیم؛ طوری که مجموع اعداد یال‌های مجاور هر یال، مثبت باشد. کمینه‌ی ممکن مجموع اعداد یال‌های درخت را $f(T)$ می‌نامیم. برای مثال اگر T به شکل زیر باشد،



$f(T) = 2$ است. کمینه‌ی ممکن مقدار $f(T)$ در میان تمام درخت‌های n -رأسی را بیابید.