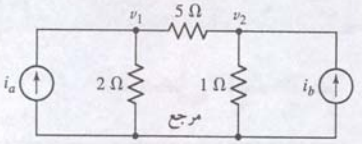


شکل ۱ـ۵ مداری با دو منبع مستقل.

اصل تجمیع

مهم‌ترین اثر خطی‌بودن تجمیع است. بیایید ابتدا با درنظرگرفتن مدار شکل ۱ـ۵ به بررسی اصل تجمیع بپردازیم. این مدار دو منبع مستقل جریان دارد که جریان‌های i_a و i_b را به مدار می‌فرستند. به این دلیل این منابع را اغلب توابع تحریک و ولتاژ در گره‌های آن‌ها را توابع پاسخ می‌گویند. هر دو تابع تحریک و پاسخ ممکن‌است تابعی از زمان باشند. دو معادله گرهی برای این مدار، عبارتنداز:

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \qquad (۱)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \qquad (۲)$$

اکنون اجازه بدهید آزمایش x را انجام دهیم. ابتدا دو تابع تحریک را i_{ax} و i_{bx} می‌نامیم و در این حال دو ولتاژ مجهول نیز متفاوت و برابر v_{1x} و v_{2x} خواهند بود. بنابراین:

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \qquad (۳)$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \qquad (۴)$$

سپس آزمایش y را با تغییر جریان‌های منبع به i_{ay} و i_{by} انجام می‌دهیم و پاسخ‌ها را v_{1y} و v_{2y} می‌خوانیم:

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \qquad (۵)$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \qquad (۶)$$

این سه مجموعه معادله، یک مدار را با سه مجموعه جریان‌های منبع توصیف می‌کنند. اجازه بدهید تا دو معادله آخر را با هم جمع یا به اصطلاح **تجمیع** کنیم. از جمع معادلات (۳) و (۵) داریم:

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \qquad (۷)$$

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \qquad (۱)$$

از جمع معادلات (۴) و (۶) نتیجه می‌شود:

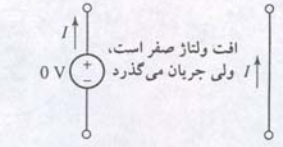
$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \qquad (۸)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \qquad (۲)$$

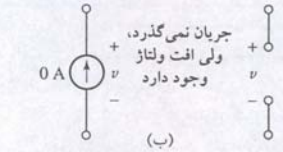
که معادله (۱) بلافاصله زیر معادله (۷) و معادله (۲) زیر معادله (۸) نوشته شده است تا مقایسه شوند.

خطی‌بودن همه این معادلات اجازه می‌دهد تا معادله (۷) را با معادله (۱) و معادله (۸) را با معادله (۲) مقایسه نموده و نتیجه جالبی را به‌دست‌آوریم. اگر جمع i_{ax} و i_{ay} را i_a و جمع i_{bx} و i_{by} را i_b درنظربگیریم، آنگاه از جمع v_{1x} و v_{1y}، مقدار v_1 و v_{2x} و v_{2y} نیز مقدار v_2 حاصل می‌شود. به بیان دیگر، ما می‌توانیم آزمایش x را انجام داده و پاسخ را به‌دست آوریم، سپس آزمایش y را انجام داده و پاسخ آن را ملاحظه کنیم و آنگاه دو مجموعه پاسخ را با هم جمع نماییم. این عمل ما را به مفهوم اساسی در اصل تجمیع رهنمون می‌شود و آن این‌که هر بار به یک منبع مستقل (و پاسخ آن) نگاه کرده و دیگر منابع مستقل را خاموش (یعنی خروجی صفر) درنظرمی‌گیریم.

اگر منبع ولتاژ را به صفر ولت کاهش دهیم، درواقع یک **اتصال کوتاه** را ایجاد کرده‌ایم (شکل ۲ـ۵(الف)). صفرکردن منبع جریان به معنی مدار باز **بودن** (شکل ۲ـ۵(ب)) آن است. بنابراین **قضیه تجمیع** به‌صورت زیر بیان می‌شود:



(الف)



(ب)

شکل ۲ـ۵ (الف) منبع ولتاژ در صفر تنظیم شده تا مثل اتصال کوتاه عمل کند. (ب) منبع جریان در صفر تنظیم شده تا مثل مدار باز عمل نماید.

در هر شبکه مقاومتی خطی، ولتاژ دو سر یا جریان درون هر مقاومت یا منبع با جمع جبری ولتاژها یا جریان‌های حاصل از منابع جدا از هم حاصل می‌گردد. در این حال همه منابع ولتاژ مستقل با اتصال کوتاه و همه منابع جریان مستقل با مدار باز جایگزین می‌شوند.

بنابراین اگر N منبع مستقل وجود داشته باشد، باید N آزمایش انجام داد و هر بار یک منبع مستقل را فعال و بقیه را غیرفعال (خروجی خاموش یا صفر) نمود. توجه کنید که منابع وابسته همواره در هر آزمایش فعالند.

مداری که در بالا به‌عنوان مثال به‌کاربردیم، می‌گوید که باید قضیه قوی‌تری را بیان کرد. اگر بخواهیم می‌توان گروهی از منابع مستقل را به‌طور دلخواه فعال و غیرفعال نمود. مثلاً فرض کنید که سه منبع مستقل وجود داشته باشد. قضیه می‌گوید که می‌توان پاسخ مفروضی را با ملاحظه هر منبع به تنهایی و نتیجه را از جمع آن‌ها به‌دست‌آورد. به همین ترتیب ممکن‌است پاسخ توام جمع منابع اول و دوم را بدون منبع سوم به‌دست‌آوریم. سپس منبع سوم به تنهایی عمل کند و نتیجه به پاسخ دو منبع اول و دوم اضافه شود. این عمل نیز نوعی تجمیع است.

البته لزومی ندارد که برای یک منبع مستقل مقدار اصلی یا صفری را در چند آزمایش فرض کنیم، بلکه فقط کافی است که جمع چند مقدار با مقدار اصلی برابر باشد. با این وجود غیرفعال‌کردن مدار همیشه ساده‌ترین مدار را می‌دهد.

اجازه بدهید کاربرد اصل تجمیع را با بررسی مثالی از یک مدار روشن کنیم که در آن هر دو نوع منبع وجود دارد.

مثال ۱ـ۵

برای مدار شکل ۳ـ۵ (الف) از اصل تجمیع برای نوشتن عبارتی برای جریان i_x استفاده کنید.

ابتدا منبع جریان را صفر می‌کنیم و مدار را دوباره طبق شکل ۳ـ۵(ب) رسم می‌نماییم. بخشی از i_x متعلق به منبع ولتاژ، با i'_x نشان داده شده است تا از هر گونه اشتباه جلوگیری شود و به‌راحتی می‌توان مقدار 0.2A را برای آن یافت.

سپس منبع ولتاژ را در شکل ۳ـ۵(الف) صفر کرده و مطابق شکل ۳ـ۵(ج) آن را دوباره ترسیم می‌کنیم. استفاده از روش تقسیم جریان اجازه می‌دهد تا i'' (بخشی از i_x متعلق به منبع 2A) برابر 0.8A گردد.

اکنون می‌توان جریان کل i_x را از جمع دو مولفه جزئی فوق به‌دست‌آورد:

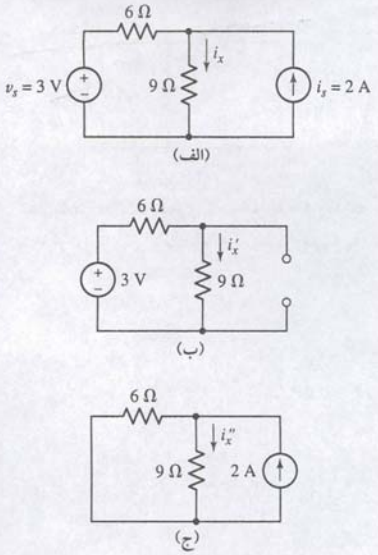
$$i_x = i_x\big|_{3V} + i_x\big|_{2A} = i'_x + i''_x$$

یا

$$i_x = \frac{3}{6+9} + 2\left(\frac{6}{6+9}\right) = 0.2 + 0.8 = 1.0\text{A}$$

نگاهی متفاوت به این مثال این‌است‌که بگوییم منبع 3V و منبع 2A روی مدار کار انجام می‌دهند، تا به این ترتیب جریان i'_x از مقاومت 9Ω عبور کند. با این وجود، نقش منبع 3V روی i_x به نقش منبع 2A روی آن وابسته نیست و بالعکس.

مثلاً اگر خروجی منبع 2A را به 4A یعنی دو برابر افزایش دهیم، جریان i_x که از مقاومت 9Ω می‌گذرد نیز دو برابر شده و 1.6A خواهد شد. با این وجود نقش منبع 3V همان 0.2A بوده و جریان جدید 1.8A = 1.6 + 0.2 می‌شود.



(الف)

(ب)

(ج)

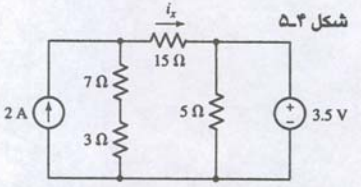
شکل ۳ـ۵ (الف) مدار نمونه‌ای با دو منبع که جریان شاخه i_x در آن موردنظر است. (ب) همان مدار با قطع منبع. (ج) مدار اصلی با منبع ولتاژ اتصال کوتاه‌شده.

تمرین

۵ـ۱ برای مدار شکل ۵.۴، از تجمیع برای محاسبه جریان i_x استفاده نمایید.

جواب: 660mA

شکل ۵ـ۴



همان‌طور که خواهیم دید، تجمیع، بار کاری ما را حین بررسی یک مدار چندان کاهش نمی‌دهد، زیرا منجر به تحلیل چند مدار جدید برای تهیه پاسخ مطلوب می‌گردد. با این وجود در شناخت نقش اجزای مختلف در یک مدار پیچیده‌تر بسیار مفید می‌باشد.

مثال ۲ـ۵

با مراجعه به مدار شکل ۵ـ۵ (الف)، حداکثر جریان مثبتی را معین کنید که قبل از عبور جریان هر مقاومت از حد مجاز و گرم‌شدن آن، می‌تواند وجود داشته باشد.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

هر مقاومت دارای 250mW توان می‌باشد. اگر مدار اجازه دهد که این مقدار فراتر برود (با عبور جریان بالایی از آن) گرمای زایدالوصفی که احتمالاً منجر به حادثه شود تولید می‌گردد. منبع 6V نمی‌تواند تغییر یابد، بنابراین به دنبال معادله‌ای برحسب I_x و جریان حداکثر از هر مقاومت خواهیم گشت.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

بر اساس توان مجاز 250mW، حداکثر جریان قابل تحمل در مقاومت 100Ω برابر است با:

$$i_{max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}} = \sqrt{\frac{0.250}{100}} = 50\text{mA}$$

و به‌طور مشابه جریان در مقاومت 64Ω باید کمتر از 62.5mA باشد.

- **ارائه طرح.**

تحلیل گره یا تک‌حلقه می‌تواند برای حل این مسئله به‌کاررود، ولی روش تجمیع ممکن‌است کمی مشکل‌ساز باشد، زیرا ما به اثر منبع جریان علاقمندیم.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

با استفاده از اصل تجمیع، مدار را چون شکل ۵.۵(ب) ترسیم می‌کنیم و درمی‌یابیم که منبع 6V به میزان

$$i'_{100\Omega} = \frac{6}{100 + 64} = 36.59\text{mA}$$

در جریان مقاومت 100Ω نقش دارد و چون با مقاومت 64Ω سری است $i_{64\Omega} = 36.59\text{mA}$ خواهد بود. بنابراین، اگر منبع 6V به تنهایی عمل کند مشکل گرمایی برای هیچ مقاومتی به‌وجود نمی‌آورد. با ملاحظه تقسیم‌کننده جریان در شکل ۵.۵(ج) می‌بینیم که $i''_{64\Omega}$ به $i'_{64\Omega} = 36.59$ اضافه می‌شود، ولی $i''_{100\Omega}$ در جهت خلاف $i'_{100\Omega}$ است. بنابراین با اطمینان کافی جریان درون مقاومت 64Ω برابر است با 25.91mA = 36.59 - 62.5 و جریان درون مقاومت 100Ω تا 86.59mA = (-36.59) - 50 خواهد بود.

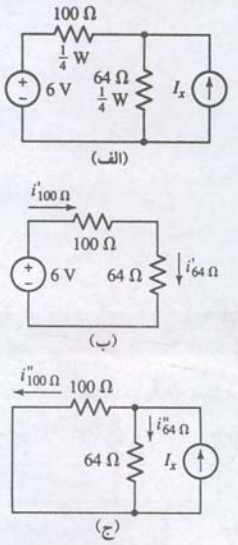
مقاومت 100Ω محدودیت زیر را بر I_x تحمیل می‌نماید:

$$I_x < (86.59 \times 10^{-3})\left(\frac{100 + 64}{64}\right)$$

برای مقاومت 64Ω داریم:

$$I_x < (25.91 \times 10^{-3})\left(\frac{100 + 64}{64}\right)$$

شکل ۵ـ۵ (الف) مداری با دو مقاومت هر کدام با $\frac{1}{4}$W. (ب) مدار با منبع 6V. (ج) مدار با منبع I_x فعال.



- **اقدام به حل.**

ابتدا مقاومت 100Ω را ملاحظه نماییم، می‌بینیم که I_x به مقدار $I_x < 221.9\text{mA}$ محدود شده است. مقاومت 64Ω محدودیت $I_x < 42.49\text{mA}$ را تحمیل می‌نماید.

- **صحت حل را تحقیق نمایید. آیا جواب منطقی است؟**

برای برآورده‌کردن هر دو محدودیت، I_x باید کوچک‌تر از 42.49mA باشد. اگر مقدار آن افزایش یابد، مقاومت 64Ω قبل از گرم‌شدن مقاومت 100Ω، گرم می‌شود. روشی مفید برای ارزیابی حل، اجرای تحلیل dc sweep در PSpice است که بعد از مثال بعد تشریح شده است. در هر صورت سوال جالبی که مطرح می‌باشد این‌است‌که آیا انتظار داشتیم مقاومت 64Ω ابتدا گرم شود.

در آغاز می‌بینیم که مقاومت 100Ω جریان کمتری دارد بنابراین منطقی است تصور کنیم که I_x را محدود کند. با این وجود چون I_x با جریان ارسالی از منبع 6V از طریق مقاومت 100Ω مخالفت می‌کند ولی به جریان منبع 6V از مقاومت 64Ω اضافه می‌شود، بنابراین عمل عکس صورت خواهد گرفت یعنی مقاومت 64Ω جریان I_x را محدود می‌نماید.

مثال ۳ـ۵

در مدار شکل ۵ـ۶ (الف) با استفاده از اصل ترکیب مقدار i_x را مشخص نمایید.

ابتدا منبع 3A را باز می‌کنیم (شکل ۵ـ۶(ب)). معادله تک‌حلقه برابر است با:

$$-10 + 2i'_x + 1i'_x + 2i'_x = 0$$

به نحوی که

$$i'_x = 2\text{A}$$

سپس منبع 10V را اتصال کوتاه می‌کنیم (شکل ۵ـ۶(ج)) و معادله تک‌گره را می‌نویسیم.

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'' - 2i''_x}{1} = 3$$

که کمیت منبع وابسته را به "v مربوط می‌سازد:

$$v'' = 2(-i''_x)$$

و یا

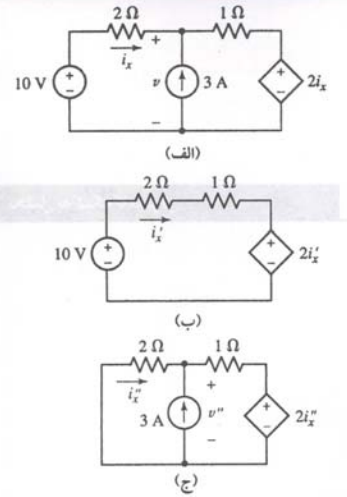
$$i''_x = -0.6\text{A}$$

و بنابراین

$$i_x = i'_x + i''_x = 2 + (-0.6) = 1.4\text{A}$$

توجه کنید که در ترسیم هر مدار فرعی همیشه باید نمادها را کمی تغییر داد تا مشخص شود که با متغیرهای اصلی کار نمی‌کنیم. در نتیجه از ظهور هر خطای احتمالی جلوگیری خواهد شد.

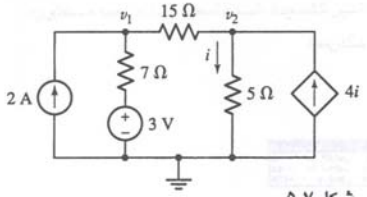
شکل ۵ـ۶ (الف) مدار نمونه‌ای با دو منبع مستقل و یک منبع وابسته که در آن جریان i_x مطلوبست. (ب) مدار با منبع 3A قطع‌شده. (ج) مدار اصلی با اتصال کوتاه منبع 10V.



تمرین

۵ـ۲ در شکل ۵.۷ از تجمیع برای به‌دست‌آوردن ولتاژ دو سر هر منبع جریان استفاده نمایید.

جواب: $v_1|_{2A} = 9.180\text{V}$، $v_2|_{2A} = -1.148\text{V}$، $v_1|_{3V} = 1.967\text{V}$، $v_2|_{3V} = -0.246\text{V}$، $v_1 = 11.147\text{V}$ و $v_2 = -1.394\text{V}$.



شکل ۵ـ۷

خلاصه‌ای از رویه تجمیع مبنا

۱. **یکی از منابع مستقل را انتخاب نمایید. همه منابع مستقل دیگر را صفر کنید.** این بدان معنی است که منابع ولتاژ اتصال کوتاه و منابع جریان با یک مدار باز می‌گردند. منابع وابسته را رها کنید.

۲. **ولتاژها و جریان‌ها را با علائم مناسب نام‌گذاری کنید** (مثل $\tilde{i}_2$، v'). دقت کنید که متغیرهای کنترل‌کننده منابع وابسته هم به خاطر پرهیز از اشتباه نام‌گذاری شود.

۳. **مدار ساده‌شده را تحلیل کنید تا جریان‌ها یا ولتاژهای موردنظر به دست آید.**

۴. **مراحل ۱ تا ۳ را تکرار کنید تا هر منبع مستقل مورد بررسی قرار گیرد.**

۵. **جریان‌ها و ولتاژهای جزیی که از تحلیل‌های جدا از هم به دست آمده را با هم جمع کنید.** به دقت توجه کنید تا علامت ولتاژها و جهت جریان‌ها به هنگام جمع، لحاظ شوند.

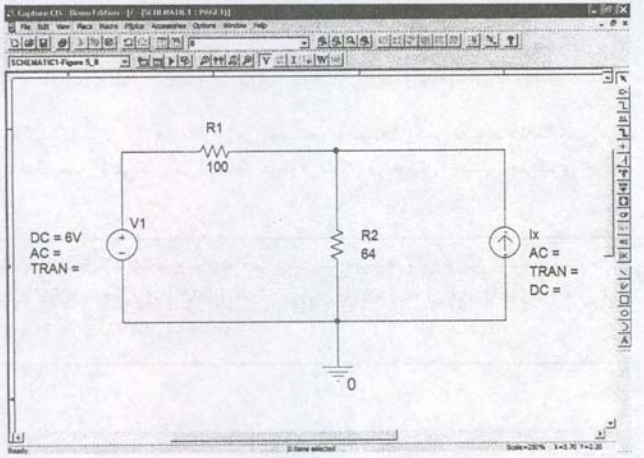
۶. **کمیت‌های توان را جمع نکنید.** اگر کمیت‌های توان مورد توجه است آن را فقط پس از جمع ولتاژها و جریان‌های جزیی به دست آورید.

توجه کنید که گام ۱ ممکن‌است به چند طریق تغییر یابد. ابتدا منابع مستقل می‌تواند به صورت گروه‌ها برخلاف تک‌تک در نظر گرفته شود، به شرطی که تحلیل ساده‌تر شود، البته شرط دیگر این‌است‌که در هر مدار جزیی بیش از یک منبع نباشد. دوم به‌طور تکنیکی لزومی ندارد تا منابع در صفر تنظیم شوند، هر چند این تقریباً بهترین است. مثلاً یک منبع 3 V ممکن‌است در دو مدار جزیی به صورت 1.5 V ظاهر شود زیرا 3V = 1.5 + 1.5 و یا 3 V = 3 + 0است. چون به نظر نمی‌رسد تحلیل ما به این ترتیب ساده شود، توجه کمی به این‌گونه تمرین می‌شود.

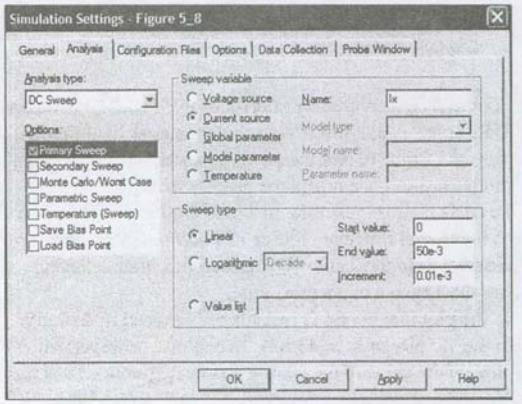
تحلیل به کمک کامپیوتر

گرچه PSpice در تحقیق صحت تحلیل یک مدار بسیار مفید است، ولی می‌تواند در تعیین نقش هر منبع در پاسخ نیز به ما یاری دهد. به این علت از dc parameter sweep (جاروب پارامتر dc) استفاده می‌کنیم.

در مدار مثال ۵.۲ خواسته شده بود تا حداکثر جریان مثبت از مقاومت، بدون تجاوز از حد مجاز را مشخص کنیم. مدار در شکل ۵.۸ به کمک ابزار رسم شماتیک Orcad CIS کشیده شده است. توجه کنید که برای منبع جریان مقدار معین نکرده‌ایم.



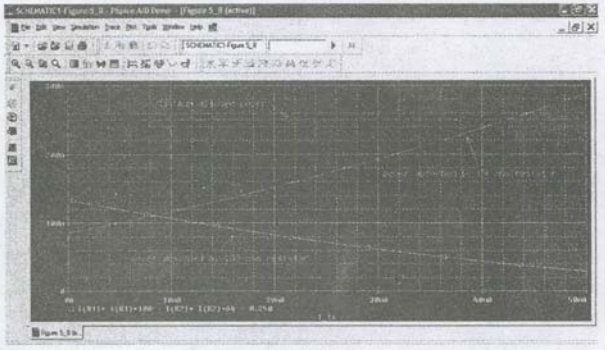
شکل ۵.۸ مدار مثال ۵.۲



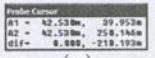
شکل ۵.۹ جعبه محاوره dc sweep، با I_x به‌عنوان متغیر.

پس از ورود و ذخیره شماتیک، باید پارامترهای جاروب dc را مشخص کنیم. این انتخاب اجازه می‌دهد تا گستره‌ای از مقادیر را برای یک ولتاژ یا جریان و نه یک مقدار خاص، تعیین نماییم (در این حالت منبع جریان I_x). تحت منوی Analysis، ما setup را اختیار می‌کنیم و سپس روی انتخاب DC sweep کلیک می‌نماییم. در این هنگام یک جعبه محاوره (dialog box) مانند شکل ۵.۹ باز می‌گردد. ابتدا "sweep variable type" را به‌عنوان current source مشخص کرده و در جعبه Name، I_x را تایپ می‌نماییم. زیر sweep type چندین گزینه دیده می‌شود: Linear، Logarithmic و Value list. گزینه آخر به ما اجازه می‌دهد تا هر مقداری را به I_x نسبت دهیم. برای ترسیم یک نمودار صاف، ما جاروب خطی (Linear) را اختیار می‌نماییم و به مقدار شروع (Start Value) مقدار صفر و به مقدار نهایی (End value) 50mA می‌دهیم که در آن نمو (increment) نیز 0.1mA است.

پس از انجام شبیه‌سازی بسته خروجی گرافیکی Probe به‌طور خودکار اجرا خواهد شد. پس از ظهور دریچه، محور افقی (متعلق به متغیر I_x) نمایش داده می‌شود، ولی محور عمودی باید انتخاب گردد. با انتخاب Add trace، از منوی Trace، روی I(R1) کلیک می‌کنیم، سپس یک علامت ستاره در جعبه Trace expression تایپ، روی I(R1) یک بار دیگر کلیک، یک ستاره دیگر وارد و بالاخره 100 را وارد می‌کنیم. این کار از probe می‌خواهد تا توان جذب‌شده به‌وسیله مقاومت 100Ω را رسم کند. به‌طریقی مشابه، فرآیند را تکرار می‌کنیم تا توان جذب‌شده به‌وسیله مقاومت 64Ω به‌دست آید و درنتیجه نموداری شبیه به شکل ۵.۱۰ (الف) به‌دست آید.



(الف)



(ب)

شکل ۵.۱۰ (الف) خروجی probe با برچسب‌هایی برای شناسایی توان جذب‌شده به وسیله هر یک از مقاومت‌ها. خط افقی 250mA نیز کشیده شده است. (ب) جعبه محاوره مکان‌نما.

خط مرجع افقی در 250mW نیز با تایپ 0.250 در جعبه Trace expression، پس از انتخاب Add trace از منوی Trace، اضافه شده است.

می‌بینیم که نمودار مربوط به مقاومت 64Ω در نزدیکی I = 43mA از 250mW تجاوز می‌کند. با این وجود، تازمانی‌که جریان منبع I_x بین 0 تا 50mA باشد، مقاومت 100Ω هرگز 250mW تلف نمی‌کند و در واقع با افزایش جریان منبع توان جذب‌شده در آن کاهش می‌یابد. اگر مایل به کسب جواب دقیق‌تری باشیم فقط کافی است ابزار مکان‌نما را به کار ببریم. شکل ۵ـ۱۰(ب) نتیجه جابه‌جایی هر دو مکان‌نما به 42.53mA را نشان می‌دهد. درست در این میزان مقاومت 64Ω کمی از سطح توان مجازش گذشته است. دقت بهتری را با کاهش مقدار نمو در de sweep می‌توان به‌دست آورد. این تکنیک در تحلیل مدارهای الکترونیک بسیار موثر است. در این مدارها ممکن‌است بخواهیم مقدار ولتاژ ورودی به یک مقدار تقویت‌کننده پیچیده را تعیین کنیم تا ولتاژ خروجی صفر به‌دست‌آید. البته باید متذکر شد که چند نوع دیگر پارامتر از جمله dc voltage sweep وجود دارند که می‌توان آن‌ها را اجرا کرد. امکان تغییر حرارت فقط هنگامی مفید است که با مدل قطعات وابسته به پارامتر حرارت مانند دیود و ترانزیستور سروکار داشته باشیم.

متأسفانه زمان صرفه‌جویی‌شده در اصل تجمیع، اگر وجود داشته باشد بسیار کم است، و علاوه بر آن باید حداقل دو منبع وجود داشته باشند: یکی منبع مستقل و بقیه منابع وابسته.

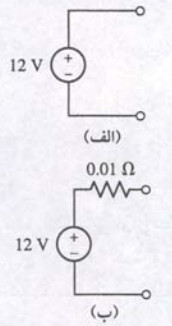
همواره باید **محدودیت‌های روش تجمیع** را درنظرداشته باشیم. این روش فقط به پاسخ‌های خطی اعمال می‌شود و بنابراین بسیاری از پاسخ‌های غیرخطی رایج را پوشش نمی‌دهد. مثلاً دو باطری 1 ولت سری‌شده با مقاومت 1Ω را درنظربگیرید. توان تحویلی به مقاومت، مسلماً 4W است: ولی اگر به اشتباه روش تجمیع را به‌کاربریم، هر باطری 1W توان را می‌پوشاند و بنابراین کل توان 2W خواهد شد. این پاسخ اشتباه است ولی به سادگی می‌توان چنین اشتباهی کرد.

۵ـ۲ تبدیل منابع

منابع ولتاژ واقعی

تاکنون با منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل کار می‌کردیم، و حالا وقت آن است که با ملاحظه منابع **واقعی** قدمی به سمت واقعیت برداریم. این منابع موجب می‌شوند تا دید واقع‌بینانه‌تری از وسایل فیزیکی داشته باشیم. با تعریف منابع **واقعی** خواهیم دید که منابع ولتاژ و جریان بدون تأثیر بقیه مدار به یکدیگر قابل تبدیل‌اند. این منابع را **معادل** می‌خوانیم. روش ما بر هر دو نوع منبع وابسته و مستقل قابل اعمال است، با این وجود خواهیم دید که این کار در مورد منبع وابسته چندان مفید نیست.

منبع ولتاژ ایده‌آل را به‌صورت منبعی تعریف کردیم که ولتاژ دوسرش مستقل از جریان آن بود. یک منبع dc، 1V جریان 1 آمپری را از مقاومت 1Ω و جریان 1000000A را از مقاومت 1μΩ عبور می‌دهد و قادر است توان نامحدودی را تولید کند. البته در عمل چنین وسیله‌ای وجود ندارد و قبلاً نشان دادیم که یک منبع ولتاژ فیزیکی در جریان‌ها و یا توان‌های کوچک دریافتی از آن ایده‌آل است. مثلاً یک باطری ماشین می‌تواند، یک منبع ولتاژ 12Vdc ایده‌آل تصور شود، به‌شرطی‌که جریان در چند آمپر محدود باشد (شکل ۵ـ۱۱(الف)). با این وجود هر کسی متوجه شده است که در اتومبیلی که چراغ‌هایش روشن است، هنگام استارت‌زدن چراغ‌ها ضعیف می‌شوند، زیرا از باطری خواسته می‌شود که علاوه بر جریان لازم برای لامپ‌ها، حدود 100A را تحویل دهد. تحت این شرایط، یک منبع ولتاژ ایده‌آل نمایش صحیحی از یک باطری نیست.



شکل ۵ـ۱۱ (الف) یک منبع ولتاژ 12Vdc برای مدل‌سازی باطری یک اتومبیل. (ب) مدل دقیق‌تری که در آن افت ولتاژ در جریان‌های بالا لحاظ شده است.

تعریف بهتری از رفتار یک وسیله واقعی این‌است‌که در جریان‌های بالا برای ولتاژ پایانه‌ها افتی درنظرگرفته شود. اجازه بدهید که فرض کنیم باطری در جریان خروجی صفر، 12V و به ازای جریان 100A، 11V باشد. چگونه می‌توان این رفتار را مدل‌سازی کرد. مدل دقیق‌تر این منبع می‌تواند از یک منبع ولتاژ 12V ایده‌آل، سری با مقاومتی که در جریان 100Ω، ولتاژ 1V را در دو سر خود دارد، تشکیل شود. یک محاسبه سرانگشتی نشان می‌دهد که مقدار مقاومت 1V/100A = 0.01Ω است و منبع ولتاژ ایده‌آل به همراه این مقاومت، **منبع ولتاژ واقعی** را تشکیل می‌دهد (شکل ۵ـ۱۱(ب)). بنابراین ما از ترکیب سری عناصر مدار ایده‌آل شامل یک منبع مستقل ولتاژ و یک مقاومت، یک مدل واقعی را پیاده کرده‌ایم. البته نباید انتظار داشته باشیم تا چنین ترکیبی را در باطری اتومبیل خود بیابیم. هر دستگاه واقعی با مشخصه جریان ـ ولتاژ پایانه‌هایش تعریف می‌شود، و تلاش ما باید در این راستا باشد که با ترکیب عناصر ایده‌آل مشخصه جریان ـ ولتاژ مشابهی را حداقل در یک محدوده‌ای از جریان، ولتاژ یا توان به‌دست‌آوریم. در شکل ۵ـ۱۲(الف)، مدل دو جزئی واقعی باطری را که به یک مقاومت بار R_L وصل است می‌بینیم. ولتاژ پایانه منبع واقعی برابر با ولتاژ دو سر R_L است و با V_L نشان داده شده است*. شکل ۵ـ۱۲(ب) نمودار جریان بار I_L را به‌عنوان تابعی از ولتاژ بار V_L برای این منبع واقعی نشان می‌دهد. معادله KVL برای مدار شکل ۵ـ۱۲(الف) برحسب I_L و V_L چنین است:

$$12 = 0.01I_L + V_L$$

و بنابراین

$$I_L = 1200 - 100V_L$$

این یک معادله خطی از I_L و V_L است و نمودار آن در شکل ۵ـ۱۲(ب) نیز خط مستقیمی است. هر نقطه روی خط متعلق به یک مقدار از R_L است. مثلاً، نقطه وسط خط راست وقتی به‌دست‌می‌آید که مقاومت بار برابر مقاومت داخلی منبع واقعی، یا $R_L = 0.01\Omega$ باشد. در این‌جا ولتاژ بار دقیقاً نصف ولتاژ منبع ایده‌آل است.

وقتی $R_L = \infty$ باشد و هیچ جریانی به‌وسیله بار کشیده نشود، منبع واقعی مدار باز بوده و ولتاژ پایانه، یا ولتاژ مدار باز $V_{Loc} = 12V$ می‌گردد. از طرف دیگر اگر $R_L = 0$ باشد، آن‌گاه جریان بار اتصال کوتاه $I_{Lsc} = 1200A$ می‌گردد. در عمل چنین کاری موجب تخریب باطری و تجهیزات اندازه‌گیری می‌شود.

چون نمودار I_L در برابر V_L خط مستقیمی است، بنابراین دو مقدار V_{Loc} و I_{Lsc} به تنهایی منحنی $I_L - V_L$ را معین می‌کنند.

خط بریده افقی در نمودار V_L-I_L شکل ۵ـ۱۲(ب) را برای یک منبع ولتاژ ایده‌آل نشان می‌دهد و در آن ولتاژ پایانه در ازای هر مقدار جریان بار ثابت می‌ماند. برای منبع ولتاژ واقعی، ولتاژ پایانه فقط در جریان‌های پایین مقدار نزدیک به منبع ایده‌آل دارد.

اکنون یک منبع ولتاژ واقعی کلی را مطابق شکل ۵ـ۱۳(الف) درنظربگیرید. ولتاژ منبع ایده‌آل v_s و مقاومت R_s که مقاومت درونی یا مقاومت خروجی نام دارد، با آن سری است. مجدداً ما باید توجه کنیم که مقاومت واقعاً به‌صورت یک مقاومت جداگانه وجود ندارد بلکه فقط کاهش ولتاژ را در ازای افزایش جریان موجب می‌گردد. وجود آن موجب می‌شود تا ما رفتار یک منبع ولتاژ را بهتر مدل‌سازی کنیم.

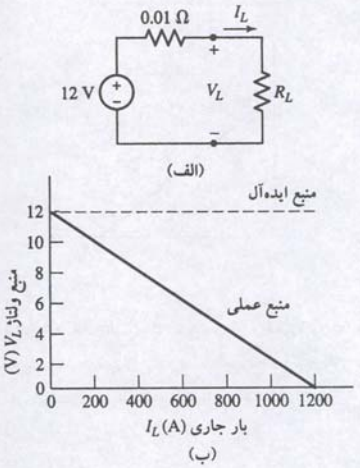
رابطه خطی بین v_L و i_L برابر است با:

$$v_L = v_s - R_s i_L \qquad (۹)$$

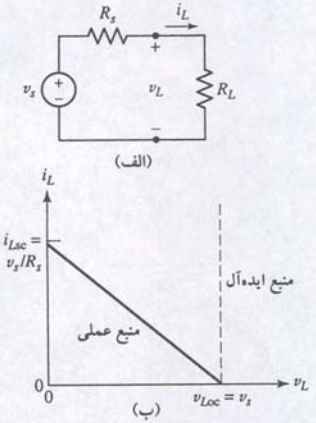
که در شکل ۵ـ۱۳(ب) ترسیم شده است. ولتاژ مدار باز ($R_L = \infty$ و بنابراین $i_L = 0$) برابر است با:

$$v_{Loc} = v_s \qquad (۱۰)$$

• از این پس کمیت‌های dc را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. حروف کوچک کمیتی متغیر با زمان ac را نشان می‌دهند. در مواردی که هم ac و هم dc صحیح است از حروف کوچک استفاده خواهد شد.



شکل ۵ـ۱۲ (الف) منبع واقعی که رفتار یک باطری اتومبیل 12V را تقریب کرده، و به مقاومت بار R_L متصل شده است. (ب) رابطه بین I_L و V_L خطی است.



شکل ۵ـ۱۳ (الف) یک منبع ولتاژ واقعی متصل به مقاومت R_L. (ب) ولتاژ پایانه منبع ولتاژ واقعی با افزایش I_L، کاهش می‌یابد و لذا $R_L = V_L/I_L$ کم می‌شود. ولتاژ پایانه یک منبع ولتاژ ایده‌آل در ازای هر جریان بار ثابت می‌ماند.

و جریان اتصال کوتاه ($R_L = 0$ و $V_L = 0$) برابر است با:

$$i_{Lsc} = \frac{v_s}{R_s} \qquad (11)$$

مجدداً ملاحظه می‌شود که این مقادیر محل برخورد خط راست شکل ۵ـ۱۳(ب) با محورها می‌باشند و آن را کاملاً تعریف می‌کنند.

منابع جریان واقعی

در دنیای واقعی، منبع جریان ایده‌آل وجود ندارد، و نمی‌توان وسیله‌ای فیزیکی یافت که مستقل از مقاومت بار جریان ثابتی را به مداری تحویل دهد یا ولتاژ دو سر پایانه‌هایش ثابت باشد. گرچه مدارهای ترانزیستوری معینی وجود دارند که جریان ثابتی را به گستره وسیعی از مقاومت‌ها حمل می‌کنند، ولی مقاومت بار را می‌توان آنقدر بزرگ اختیار کرد که جریان آن بسیار کوچک باشد. درواقع توان بینهایت متأسفانه هرگز وجود ندارد.

یک منبع جریان واقعی به‌صورت ترکیبی از یک منبع جریان ایده‌آل موازی با یک مقاومت داخلی R_p تعریف می‌شود. چنین منبعی در شکل ۵ـ۱۴ (الف) نشان داده شده است که در آن جریان i_L و ولتاژ v_L مربوط به R_L نیز مشخص شده‌اند، با به کارگیری KCL داریم:

$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_p} \qquad (12)$$

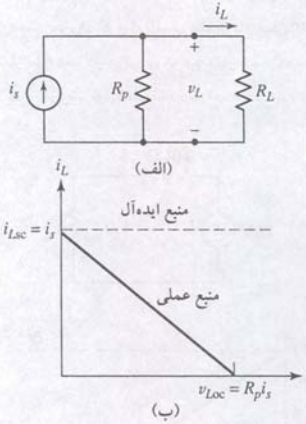
که باز هم رابطه‌ای خطی است. ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه عبارتند از:

$$v_{Loc} = R_p i_s \qquad (13)$$

و

$$i_{Lsc} = i_s \qquad (14)$$

تغییرات جریان بار و تغییر ولتاژ بار را می‌توان با تغییر مقدار R_L تحقیق کرد، شکل ۵ـ۱۴(ب). خط راست از انتهای اتصال کوتاه (شمال غربی) به مدار باز (در جنوب شرقی) با تغییر R_L از صفر تا بی‌نهایت اهم کشیده می‌شود. نقطه وسط خط در $R_L = R_p$ قرار دارد. واضح است که جریان باز i_L و جریان منبع ایده‌آل تقریباً فقط بر ی مقادیر کوچک ولتاژ بار با هم برابرند و این هنگامی صحیح است که مقاومت R_L نسبت به R_p کوچک باشد.



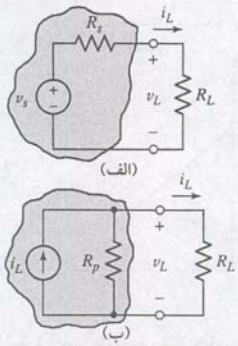
شکل ۵ـ۱۴ (الف) یک منبع جریان واقعی کلی که به یک مقاومت بار R_L وصل است. (ب) جریان بار تولیدشده با منبع جریان واقعی به‌عنوان تابعی از ولتاژ بار.

منابع واقعی معادل

با تعریف هر دو منبع واقعی، اکنون آماده‌ایم تا معادل‌های آن‌ها را مورد بحث قرار دهیم. دو منبع را معادل گوییم اگر بتوانند مقادیری برابر با v_L و i_L را هنگام اتصال به R_L تولید کنند. البته این‌که مقدار R_L چقدر است اهمیتی ندارد. چون $R_L = \infty$ و $R_L = 0$ دو مقاومت بار هستند، منابع معادل ولتاژ مدار باز و جریان مدار بسته یکسانی تولید خواهند کرد. به بیان دیگر، اگر دو منبع معادل ولتاژ واقعی و معادل جریان واقعی داشته باشیم، هر دو را می‌توان در داخل جعبه سیاهی تصور کرد که فقط یک جفت پایانه دارند، و در این حال به هیچ وجه با اندازه‌گیری جریان یا ولتاژ در یک بار مقاومتی نمی‌توان گفت که کدام منبع در کدام جعبه قرار گرفته است.

منبع ولتاژ واقعی و مقاومت R_L شکل ۵ـ۱۵(الف) را به همراه مداری مرکب از منبع جریان واقعی و مقاومت R_L شکل ۵ـ۱۵(ب) در نظر بگیرید، محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر مقاومت بار R_L در شکل ۵ـ۱۵(الف) برابر است با:

$$v_L = v_s \frac{R_L}{R_s + R_L} \qquad (15)$$



شکل ۵ـ۱۵ (الف) یک منبع ولتاژ واقعی متصل به بار R_L. (ب) منبع جریان واقعی معادل متصل به همان بار.

محاسبه ساده دیگری نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر مقاومت بار R_L در شکل ۵ـ۱۵(ب) چنین است:

$$v_L = [i_s \frac{R_p}{R_p + R_L}] \cdot R_L$$

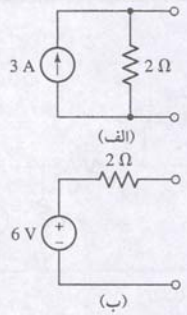
به لحاظ الکتریکی دو منبع واقعی با هم معادلند به‌شرطی‌که:

$$R_s = R_p \qquad (16)$$

و

$$v_s = R_p i_s = R_s i_s \qquad (17)$$

که در این‌جا به‌عنوان انتخابی مناسب، R_s را به‌عنوان مقاومت داخلی هر یک از دو مقاومت فرض می‌کنیم.



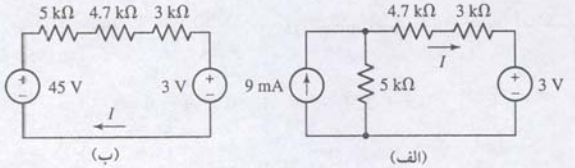
شکل ۵ـ۱۶ (الف) یک منبع جریان واقعی. (ب) منبع ولتاژ معادل واقعی.

به‌منظور شرحی بر کاربرد این ایده، منبع جریان واقعی شکل ۵ـ۱۶(الف) را درنظربگیرید. چون مقاومت داخلی آن 2Ω است، مقاومت داخلی معادل منبع ولتاژ واقعی نیز 2Ω است. ولتاژ منبع ولتاژ ایده‌آل در منبع ولتاژ واقعی $6V = (3)(2)$ می‌باشد. این منبع ولتاژ واقعی معادل در شکل ۵ـ۱۶(ب) دیده می‌شود.

برای تست معادله، اجازه بدهید، تا مقاومت 4Ω را متصل به هر یک از دو منبع تصور کنیم. در هر دو حال جریان بار 1A، ولتاژ بار 4V و توان مصرفی 4W را در مقاومت 4Ω ایجاد می‌نماید، با این وجود توجه کنید که منبع جریان ایده‌آل توان 12W را به مقاومت حمل می‌کند، درحالی‌که منبع ولتاژ ایده‌آل فقط 6W حمل می‌نماید. علاوه بر آن، مقاومت داخلی منبع ولتاژ واقعی فقط 8W توان را جذب می‌کند، درحالی‌که مقاومت داخلی منبع ولتاژ واقعی فقط 2W توان مصرف می‌نماید. بنابراین می‌بینیم که دو منبع واقعی فقط نسبت به آن‌چه انتقال می‌دهند معادلند و درونا با هم معادل نیستند!

مثال ۵ـ۴

جریان داخل مقاومت 4.7kΩ را در شکل ۵ـ۱۷ (الف) پس از تبدیل منبع 9mA به معادل منبع ولتاژ محاسبه کنید.



شکل ۵ـ۱۷ (الف) مداری با هر دو نوع منبع ولتاژ و جریان. (ب) مدار پس از تبدیل منبع جریان به یک منبع ولتاژ معادل.

منبع معادل از یک منبع ولتاژ مستقل $45V = (5k\Omega)$ × $(9mA)$ سری با یک مقاومت 5kΩ تشکیل شده است، شکل (۵ـ۱۷(ب)).

معادله KVL حول حلقه را می‌نویسیم:

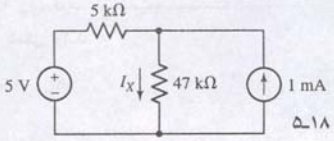
$$-45 + 5000I + 4700I + 3000I + 3 = 0$$

که به راحتی قابل حل بوده و جریان $I = 3.307mA$ از آن حاصل می‌گردد.

تمرین

۵ـ۳ برای مدار شکل ۵ـ۱۸ جریان I_x در مقاومت 47kΩ را پس از اجرای تبدیل منبع ولتاژ به‌دست‌آورید.

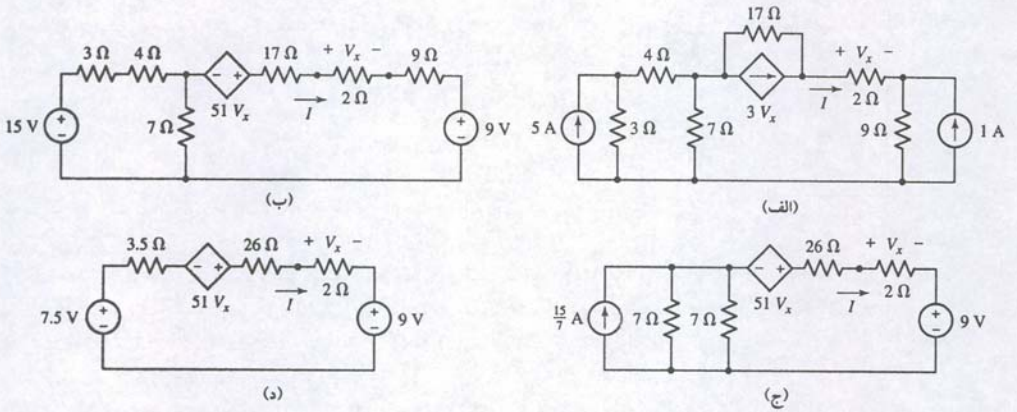
جواب: $192\mu A$



شکل ۵ـ۱۸

مثال ۵ـ۵

با استفاده از تبدیل منبع، جریان عبوری از مقاومت 2Ω در شکل ۱۹ـ۵ (الف) را محاسبه نمایید.



شکل ۱۹ـ۵ (الف) مداری با دو منبع جریان مستقل و یک منبع وابسته. (ب) مدار پس از تبدیل هر منبع به یک منبع ولتاژ. (ج) منبع پس از ادغام بیشتر. (د) مدار نهایی.

حل را با تبدیل هر منبع جریان به منبع ولتاژ (شکل ۱۵ـ۵(ب)) آغاز می‌کنیم و هدف از این کار تبدیل مدار به یک حلقه ساده است.

به دو دلیل باید مراقب باشیم تا مقاومت 2Ω در مدار نگهداری شود: یکی این‌که متغیر کنترل منبع وابسته در دو سر آن ظاهر می‌گردد و دوم می‌خواهیم جریان داخل آن را بیابیم. معهذا می‌توان مقاومت‌های 17Ω و 9Ω را با هم ترکیب کرد، زیرا با هم سری‌اند. همچنین می‌توان مقاومت‌های 3Ω و 4Ω را با هم ترکیب کرده و مقاومت 7Ω را به‌دست‌آورد. سپس در تبدیل منبع 15V به منبع 15/7A طبق شکل ۱۹ـ۵(ج) از آن استفاده می‌شود.

در آخرین گام ساده‌سازی می‌بینیم که می‌توان دو مقاومت 7Ω را با هم ترکیب کرده و به یک مقاومت 3.5Ω تبدیل نمود، و سپس به کمک آن منبع جریان 15/7A به منبع ولتاژ 7.5V تبدیل می‌گردد. حاصل کار مدار تک‌حلقه شکل ۱۹ـ۵(د) است. اکنون جریان **I** با استفاده از KVL به‌دست‌می‌آید:

$$-7.5 + 3.5I - 51V_x + 28I + 9 = 0$$

که

$$V_x = 2I$$

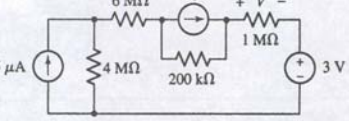
بنابراین

$$I = 21.28\text{mA}$$

تمرین

۵ـ۴ برای مدار شکل ۵ـ۲۰، ولتاژ V را در دو سر مقاومت 1MΩ با تبدیلات متوالی منبع به‌دست‌آورید.

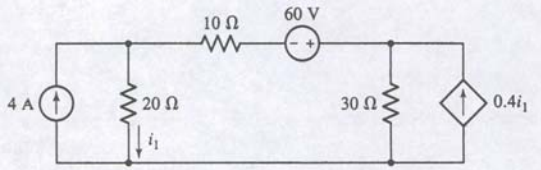
جواب: 27.23V



شکل ۵ـ۲۰

چند نکته کلیدی

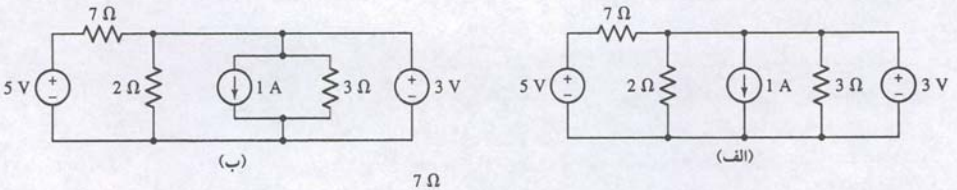
ما از منابع واقعی و تبدیل منابع با چند مشاهده خاص چنین جمع‌بندی می‌کنیم. اول، وقتی ما یک منبع ولتاژ را تبدیل می‌کنیم، باید مطمئن باشیم که منبع با مقاومت تحت بررسی سری است. مثلاً در شکل ۵ـ۲۱، تبدیل منبع ولتاژ با استفاده از مقاومت Ω 10 پذیرفته است، زیرا آن‌ها سری هستند. با این وجود این درست نیست که با منبع ولتاژ V 60 و مقاومت Ω 30 عمل تبدیل صورت گیرد و این خطایی است که به دفعات رخ می‌دهد.



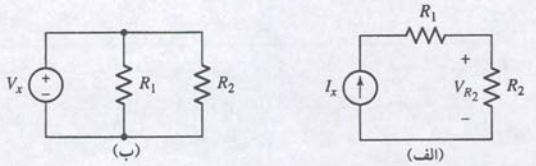
شکل ۵ـ۲۱ مدار نمونه‌ای که نشان می‌دهد تبدیل منبع چگونه می‌تواند تعیین شود.

به طریقی مشابه وقتی منبع جریانی را با ترکیبی از مقاومت تبدیل می‌کنیم باید مطمئن باشیم که آن‌ها موازی‌اند. منبع جریان شکل ۵ـ۲۲ (الف) را درنظربگیرید. ما می‌توانیم تبدیل منبع جریانی را با مقاومت Ω 3 انجام دهیم چون آن‌ها موازی‌اند. اما پس از تبدیل ممکن‌است این ابهام پیش آید که مقاومت راکجا بگذاریم. در این مواقع بهتر است تا قطعات تبدیل‌شونده را مطابق شکل ۵ـ۲۲(ب) دوباره ترسیم نماییم. آنگاه تبدیل به یک منبع ولتاژ با استقرار صحیح مقاومت طبق شکل ۵ـ۲۲(ج) را انجام می‌دهیم. البته مقاومت می‌تواند بالا یا پایین منبع ولتاژ باشد.

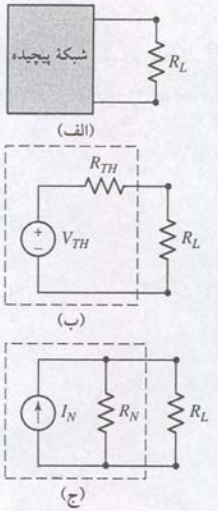
همچنین بررسی حالت غیرعادی سری‌بودن منبع جریان با یک مقاومت و دوگان آن ارزشمند است. بگذارید با مدار ساده شکل ۵ـ۲۳(الف) شروع کنیم که در آن ما علاقمند به ولتاژ دو سر مقاومت R_2 هستیم. توجه داریم که جدا از مقدار R_1، $V_{R_2} = I_x R_2$ است. گرچه ممکن‌است تلاش در تبدیل نامناسب منبع در چنین مداری بکنیم، در واقع ممکن‌است به سادگی R_1 را چشم‌پوشی کنیم (با این شرط که مورد توجه ما نباشد). وضع مشابهی هنگامی رخ می‌دهد که منبع ولتاژ موازی مقاومتی باشد (شکل ۵ـ۲۳(ب)). دوباره اگر ما فقط به کمیتی مربوط به R_2 علاقمند باشیم، ممکن‌است خود را درگیر با نوعی تبدیل منبع روی منبع ولتاژ و مقاومت R_1 ببینیم. در واقعیت ما ممکن‌است تا جایی که R_2 مورد توجه است، از مقاومت R_1 چشم بپوشیم ـ یعنی وجود آن تغییر در ولتاژ دو سر R_2 یا جریان درون آن و یا توان تلف‌شده به وسیله آن را نخواهد داشت.



شکل ۵ـ۲۲ (الف) مداری با منبع جریان باید به منبع ولتاژ تبدیل شود. (ب) رسم مجدد مدار برای اجتناب از خطاها. (ج) ترکیب منبع / مقاومت تبدیل‌شده.



شکل ۵ـ۲۳ (الف) مدار با یک مقاومت سری با منبع جریان. (ب) منبع ولتاژ موازی با دو مقاومت.



شکل ۲۴ـ۵ (الف) یک شبکه پیچیده با مقاومت بار R_L. (ب) یک شبکه معادل تونن متصل به مقاومت R_L. (ج) شبکه معادل نورتن متصل به R_L.

خلاصه تبدیل منبع

۱. **هدف رایج در تبدیل منبع داشتن فقط منبع جریان یا فقط منبع ولتاژ در مدار است.** خصوصاً اگر روش تحلیل مدار تحلیل گرهی یـ تحلیل مش باشد، روشن و ساده‌تر خواهد بود.

۲. **تکرار تبدیل منبع می‌تواند برای ساده‌سازی مدار و نهایتاً ترکیب منابع و مقاومت‌ها استفاده شود.**

۳. **مقدار مقاومت در حین یک انتقال منبع تغییر نمی‌یابد ولی همان مقاومت نیست (در همان مکان نیست).** این بدان معنی است که جریان‌ها و ولتاژهای مربوط به مقاومت اصلی به‌طور غیرقابل برگشتی وقتی که تبدیل منبع انجام می‌شود از دست می‌روند.

۴. **اگر ولتاژ یا جریان مربوط به یک مقاومت خاص به صورت متغیر کنترل‌کننده برای منبع وابسته عمل می‌نماید، نباید در هیچ تبدیل منبعی نقش داشته باشد.** مقاومت اولیه باید در مدار نهایی حفظ شود و دست نخورد.

۵. **اگر ولتاژ یا جریان یک عنصر خاص موردنظر است، آن عنصر نباید در تبدیل منبع شرکت داشته باشد.** عنصر اصلی باید در مدار نهایی دست‌نخورده بماند.

۶. در یک تبدیل منبع، نوک پیکان منبع جریان مربوط به پایانه «+» منبع ولتاژ است.

۷. یک تبدیل منبع روی یک منبع جریان و مقاومت لازم دارد که دو عنصر موازی باشند.

۸. یک تبدیل منبع روی یک منبع ولتاژ و مقاومت لازم دارد که دو عنصر سری باشند.

۵ـ۳ مدارهای معادل تونن و نورتن

اکنون که تبدیل منبع و اصل تجمیع را معرفی کردیم، دو تکنیک دیگر را بیان می‌کنیم تا به‌طور گسترده در تحلیل مدارهای خطی به‌کاررروند. اولین تکنیک به‌نام مهندس فرانسوی ام.ال. تونن[1] که در زمینه تلگراف کار می‌کرد و در سال ۱۸۸۳ طی مقاله‌ای تئوری را به‌چاپ رساند، خوانده شده است. تکنیک دوم نتیجه‌ای از اولی است و به‌نام دانشمند آزمایشگاه تلفن بل، ای.ال. نورتن[2] نامیده شده است.

اکنون فرض کنید فقط به تحلیل بخشی از مدار علاقمندیم. مثلاً، بخواهیم جریان، ولتاژ و توان انتقالی به یک بار مقاومتی را توسط بقیه مدار معین کنیم. بقیه مدار می‌تواند از مقاومت‌ها و منابع تشکیل شده باشد (شکل ۲۴ـ۵ (الف)). یا شاید بخواهیم پاسخ را برای مقادیر متفاوت مقاومت به‌دست‌آوریم. قضیه تونن می‌گوید که می‌توان همه چیز، به‌جز مقاومت بار را، با یک منبع ولتاژ مستقل سری‌شده با یک مقاومت جایگزین کرد (شکل ۲۴ـ۵ (ب)).

در این تبدیل پاسخ اندازه‌گیری‌شده در مقاومت بدون تغییر باقی می‌ماند. با استفاده از قضیه نورتن، مدار معادلی متشکل از یک منبع جریان مستقل موازی با یک مقاومت، حاصل می‌گردد (شکل ۲۴ـ۵ (ج)).

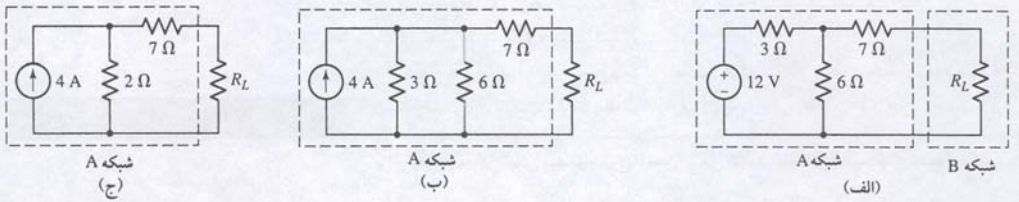
بنابراین واضح است که یکی از کاربردهای قضایای نورتن و تونن جایگزینی بخش عمده‌ای از مدار، یعنی بخش پیچیده و نامطلوب با معادل بسیار ساده آن است. مدار جدید و ساده اجازه می‌دهد تا محاسبات ولتاژ، جریان و توان انتقالی به بار از مدار اصلی به سادگی محاسبه گردد. همچنین این مدار معادل، ما را در انتخاب مناسب‌ترین مقاومت کمک می‌کند. مثلاً در یک مدار ترانزیستوری، معادل تونن و نورتن ما را قادر می‌سازد تا حداکثر توان دریافتی از تقویت‌کننده و انتقالی به بلندگو تعیین شود.

مثال ۶ـ۵

در مدار شکل ۲۵ـ۵ (الف)، معادل‌های تونن و نورتن را برای بخش سمت چپ R_L معین کنید.

نواحی خط‌چین، شبکه را به بخش‌های A و B تفکیک می‌کنند. فرض می‌کنیم شبکه B که تنها از مقاومت بار R_L تشکیل شده، مورد توجه ما باشد. شبکه A با تکرار تبدیل منبع و جایگزینی آن با یک منبع جریان واقعی 4A، موازی با مقاومت 3Ω، ساده می‌گردد (شکل ۲۵ـ۵ (ب)).

1. M.L.Thevenin 2. E.L.Norton

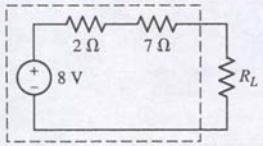


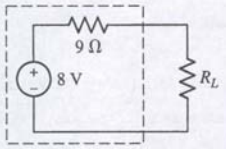
آن‌گاه، مقاومت‌های موازی با هم ترکیب شده و از آن مقاومت 2Ω حاصل می‌شود (شکل ۲۵ـ۵ (ج)) و منبع جریان واقعی حاصل از تبدیل نیز به منبع ولتاژ واقعی بازگردانده می‌شود (شکل ۲۵ـ۵ (د)). نتیجه نهایی در شکل ۲۵ـ۵ (ه) دیده می‌شود.

از دید مقاومت بار R_L، این مدار (معادل تونن) معادل است با مدار اصلی، و از دید ما، مدار بسیار ساده‌تر می‌باشد، و ما می‌توانیم به راحتی توان انتقالی به بار را محاسبه کنیم:

$$P_L = \left(\frac{8}{9 + R_L}\right)^2 R_L$$

علاوه بر آن از مدار معادل می‌بینیم که حداکثر ولتاژ حاصل در دو سر R_L برابر 8V است که مربوط به $R_L = \infty$ می‌باشد. تبدیل سریع شبکه A به منبع جریان واقعی (معادل نورتن) بیان می‌دارد که حداکثر جریان انتقالی به بار، 8/9A است و در $R_L = 0$ رخ می‌دهد. هیچ‌یک از این واقعیت‌ها به راحتی در مدار اصلی آشکار نیست.





شکل ۲۵ـ۵ (الف) مداری که به دو بخش تقسیم شده است. (ب) تا (د) مراحل میانی ساده‌سازی شبکه. (ه) مدار معادل تونن.

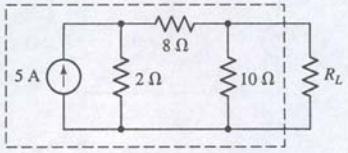
تمرین

۵ـ۵ با روش تکرار تبدیل منبع، معادل نورتن داخل بخش خط‌چین شکل ۲۶ـ۵ را به‌دست‌آورید.

جواب: 1A و 5Ω.

قضیه تونن

استفاده از تبدیل منبع برای یافتن شبکه معادل تونن یا نورتن به خوبی در مثال ۶ـ۵ کار کرد، ولی به سرعت می‌تواند در مواردی که منابع وابسته وجود دارند یا مدار مرکب از تعداد زیادی عنصر باشد، غیر عملی گردد. روشی دیگر استفاده از تئوری یا قضیه تونن (یا نورتن) است. ما قضیه را به نحوی به صورت رویه‌ای اسلوب‌دار بیان می‌کنیم تا روش طبق وضعیتی که با آن مواجه می‌شود عملی‌تر گردد.



شکل ۲۶ـ۵

قضیه تونن*

۱. **با داشتن هر مدار خطی، آن را دوباره مرتب کنید تا به فرم دو شبکه A و B درآمده و به وسیله دو سیم مرتب گردد.** A شبکه‌ای است که باید ساده شود و B دست‌نخورده می‌ماند.

۲. **شبکه B را جدا کنید.** ولتاژ v_{oc} را به عنوان ولتاژی که اکنون در دو سر پایانه‌های شبکه A ظاهر می‌گردد تعریف نمایید.

۳. **هر منبع مستقل را در شبکه A خاموش (حذف) نمایید تا یک شبکه غیرفعال حاصل شود.** منابع وابسته را به همان شکل رها کنید.

۴. **یک منبع ولتاژ مستقل با مقدار v_{oc} را با شبکه غیرفعال سری کنید.** مدار را کامل نبندید. دو پایانه را غیرمتصل رها کنید.

۵. **شبکه B را به پایانه‌های شبکه A جدید وصل نمایید.** همه جریان‌ها و ولتاژها در B دست‌نخورده می‌مانند.

* اثبات قضیه تونن چون طولانی است در پیوست (۳) قرار داده شده است تا دانشجویان علاقمند به آن مراجعه نمایند.

توجه کنید که اگر هر قسمت از شبکه دارای منبع وابسته باشد، متغیر کنترل آن باید در همان بخش شبکه منبع وابسته باشد.

بگذارید ببینیم که آیا قضیه تونن را می‌توان به مدار شکل ۵ـ۲۵ با موفقیت اعمال نمود. ما معادل سمت چپ R_L را در مثال ۵ـ۶ ملاحظه کردیم، ولی مایلیم با روشی ساده‌تر همان حل را به‌دست آوریم.

مثال ۵ـ۷

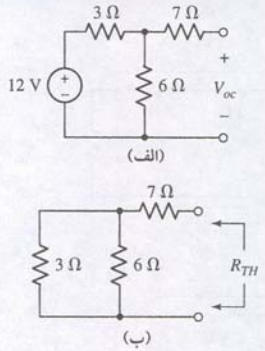
برای تعیین معادل تونن سمت چپ R_L مدار شکل ۵ـ۲۵ (الف) از قضیه تونن استفاده کنید.

کار را با قطع R_L و توجه به این نکته که جریانی از مقاومت 7Ω در مدار شکل ۵ـ۲۷ (الف) عبور نمی‌کند آغاز می‌کنیم. بنابراین V_{oc} در دو سر مقاومت 6Ω افت می‌کند (وقتی از مقاومت 7Ω جریانی نگذرد، افت ولتاژی هم در آن نداریم). پس با تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_{oc} = 12\left(\frac{6}{3+6}\right) = 8V$$

با کشتن شبکه A یعنی جایگزینی منبع 12V با یک مدار اتصال کوتاه، می‌بینیم که در شبکه مرده مقاومت 7Ω با ترکیب موازی مقاومت‌های 6Ω و 3Ω به‌طور سری بسته شده است (شکل ۵ـ۲۷ (ب)).

بنابراین، شبکه مرده قابل نمایش با یک مقاومت 9Ω با نام **مقاومت معادل تونن** شبکه A می‌باشد. پس معادل تونن برابر v_{oc} سری شده با مقاومت 9Ω بوده و با نتیجه قبلی ما وفاق دارد.

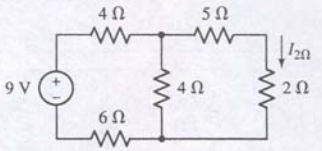


شکل ۵ـ۲۷ (الف) مدار شکل ۵ـ۲۵ (الف) با شبکه B (مقاومت R_L) که قطع شده است و ولتاژ دو سر پایانه‌ها با V_{oc} مشخص شده است. (ب) منبع متصل در شکل ۵ـ۲۵ (الف) کشته شده و ما به پایانه‌ای نگاه می‌کنیم که شبکه B برای تعیین مقاومت موثر شبکه A به آن وصل شده است.

تمرین

۵ـ۶ به‌وسیله قضیه تونن جریان درون مقاومت 2Ω را در مدار شکل ۵ـ۲۸ بیابید (راهنمایی: مقاومت 2Ω را به‌عنوان بخش B درنظربگیرید).

جواب: $V_{TH} = 2.571V$ ، $R_{TH} = 7.857\Omega$ و $I_{2\Omega} = 260.8mA$



شکل ۵ـ۲۸

چند نکته کلیدی

مدار معادلی که چگونگی به‌دست‌آوردن آن را آموختیم کلاً از شبکه B مستقل است، زیرا ابتدا شبکه B را حذف کردیم سپس ولتاژ مدار باز تولیدی به‌وسیله شبکه A را به هر طریقی به‌دست‌آوردیم. شبکه B را به این خاطر ذکر کردیم که بگوییم فرقی نمی‌کند چه شبکه‌ای به دو سر شبکه A متصل است. شبکه B بیانگر این شبکه کلی است.

نکاتی چند در مورد این قضیه وجود دارد که ذکر آن‌ها ارزشمند است:

- تنها محدودیت اعمال‌شده در A یا B این‌است‌که همه منابع وابسته در A (یا B) متغیرهای کنترلی را نیز در همان سمت A (یا B) دارند.
- در مورد پیچیدگی A یا B هیچ محدودیتی موجود نیست. هر یک از آن‌ها ممکن‌است هر ترکیبی از منابع ولتاژ یا جریان مستقل، منابع جریان یا ولتاژ وابسته خطی، مقاومت یا هر عنصری که خطی باشد را دارا باشند.
- شبکه مرده A را می‌توان با یک مقاومت R_{TH} که آن را مقاومت تونن می‌خوانیم نمایش داد. وجود منابع وابسته یا عدم وجود آن‌ها در شبکه مرده A اهمیتی ندارد.
- معادل تونن از دو مولفه تشکیل شده است: یک منبع ولتاژ سری با یک مقاومت. هر یک از آن‌ها ممکن‌است صفر هم باشد ولی معمولاً این چنین نیست.

قضیه نورتن

قضیه نورتن مفهوم نزدیکی به قضیه تونن دارد و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

نورتن

۱. **هر مدار خطی مفروض را دوباره به صورت دو شبکه A و B مرتب کنید که با دو سیم به هم وصل شده باشند.** A شبکه‌ای است که قرار است ساده شود؛ B دست‌نخورده می‌ماند. مثل قبل، اگر هر یک از دو شبکه حاوی منبع وابسته باشد، متغیر کنترل‌کننده آن باید در همان شبکه باشد.

۲. **شبکه B را قطع کنید و پایانه‌های A را اتصال کوتاه نمایید.** یک جریان i_{sc} را به عنوان جریانی که اکنون از پایانه‌های اتصال کوتاه‌شده A می‌گذرد، تعریف نمایید.

۳. **منابع مستقل را در شبکه خاموش (صفر یا حذف) نمایید تا یک شبکه غیرفعال حاصل شود.** منابع وابسته را دست‌نخورده بگذارید.

۴. **منبع جریان مستقل با مقدار i_{sc} را موازی با شبکه غیرفعال وصل کنید.** مدار را کامل نکنید. دو پایانه آزاد رها شود.

۵. **شبکه B را به پایانه‌های جدید شبکه A وصل کنید.**

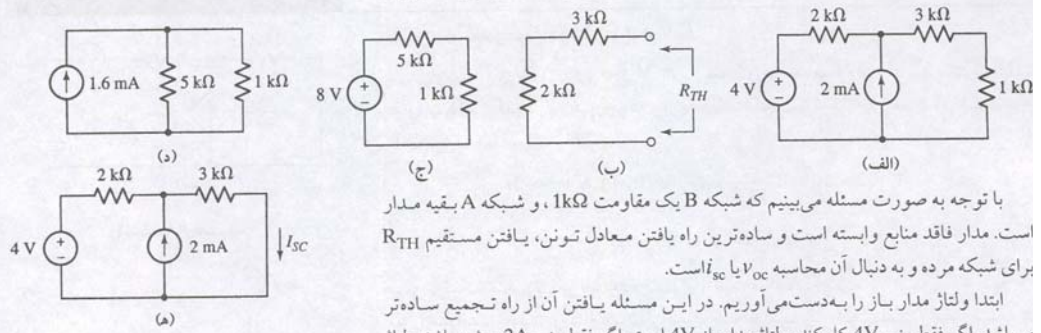
معادل نورتن یک شبکه خطی برابر است با منبع جریان i_{sc} که با مقاومت R_{TH} موازی شده باشد. بنابراین ملاحظه می‌شود که می‌توان معادل نورتن شبکه را از تبدیل معادل تونن هم به‌دست‌آورد. حاصل این عمل رابطه مستقیم بین v_{oc}، i_{sc} و R_{TH} است.

$$v_{oc} = R_{TH} i_{sc} \qquad (۱۸)$$

در مدارهای مقاومتی با منابع وابسته، اغلب می‌بینیم که در تعیین معادل تونن یا نورتن بهتر است که هم ولتاژ مدار باز و هم جریان اتصال کوتاه را پیدا کنیم و R_{TH} را از تقسیم این دو مقدار به‌دست‌آوریم. بنابراین توصیه می‌شود در هنگام یافتن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه، حتی در مسائل ساده بعدی مهارت لازم را کسب نمایید. اگر معادل‌های تونن و نورتن مستقیماً به‌دست‌آمدند رابطه (۱۸) برای تست بسیار مفید است. اکنون سه مثال متفاوت را برای تعیین مدار معادل تونن یا نورتن ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۵ـ۸

مدارهای معادل تونن و نورتن شبکه‌ای را که در شکل ۵ـ۲۹ (الف) به مقاومت 1kΩ وصل است بیابید.



شکل ۵ـ۲۹ (الف) مدار مفروضی که در آن مقاومت 1kΩ به‌عنوان شبکه B است. (ب) شبکه A با همه منابع کشته‌شده. (ج) معادل تونن در شبکه A نشان داده شده است. (د) معادل نورتن برای شبکه A. (ه) مداری برای تعیین I_{sc}.

با توجه به صورت مسئله می‌بینیم که شبکه B یک مقاومت 1kΩ، و شبکه A بقیه مدار است. مدار فاقد منابع وابسته است و ساده‌ترین راه یافتن معادل تونن، یافتن مستقیم R_{TH} برای شبکه مرده و به دنبال آن محاسبه v_{oc} یا i_{sc} است.

ابتدا ولتاژ مدار باز را به‌دست‌می‌آوریم. در این مسئله یافتن آن از راه تجمیع ساده‌تر می‌باشد. اگر فقط منبع 4V کار کند، ولتاژ مدار باز 4V است. اگر فقط منبع 2A روشن باشد ولتاژ مدار باز $2mA \times 2k\Omega = 4V$ خواهد شد. به‌هنگام قطع مقاومت 1kΩ، هیچ جریانی از مقاومت 3kΩ عبور نمی‌کند. اگر هر دو منبع مستقل روشن فرض شوند داریم: $v_{oc} = 4 + 4 = 8V$.

سپس هر دو منبع مستقل را می‌کشیم تا شبکه مرده A به‌دست‌آید. به این ترتیب با اتصال کوتاه‌شدن منبع ولتاژ 4V و قطع منبع جریان 2mA، طبق شکل ۵ـ۲۹ (ب) دو مقاومت 2kΩ و 3kΩ به‌صورت سری درمی‌آیند و معادل آن‌ها مقاومت 5kΩ است.

به‌این‌ترتیب معادل تونن مدار مطابق شکل ۵ـ۲۹(ج) به‌دست‌می‌آید و از آن نیز می‌توان سریعاً معادل نورتن شکل ۵ـ۲۹(د) را تعیین نمود. به منظور تست، اجازه بدهید I_{sc} را برای مدار مفروض شکل ۵ـ۲۹(و) به‌دست‌آوریم. از روش تجمیع و کمی تقسیم جریان استفاده می‌کنیم:

$$I_{sc} = I_{sc}\,|_{4V} + I_{sc}\,|_{2mA} = \frac{4}{2+3} + (2)\,\frac{2}{2\,3} + = 0.8 + 0.8 = 1.6mA$$

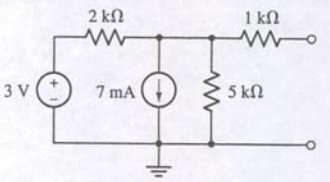
که صحت پاسخ را نشان می‌دهد.*

* اگر مقاومت‌ها به kΩ باشند، و ولتاژ به ولت، آن‌گاه به‌طور خودکار جریان به mA است.

تمرین

۵ـ۷ معادل‌های تونن و نورتن مدار شکل ۵ـ۳۰ را معین کنید.

جواب: -7.857 V، -3.235 mA و 2.429 kΩ

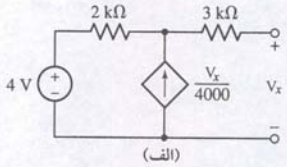


شکل ۵ـ۳۰

چه وقت منابع وابسته وجود دارند

فنی‌تر صحبت کنیم، همیشه برای ما یک "شبکه B" وجود ندارد تا ما قضیه تونن یا نورتن را برای آن به‌کار ببریم؛ در عوض می‌توانیم مدار معادلی از یک شبکه با دو پایانه را جست‌وجو کنیم که هنوز به شبکه دیگری وصل نیست. به‌هرحال اگر یک شبکه مانند B وجود داشته باشد که ما نمی‌خواهیم آن را در روند ساده‌سازی دخالت دهیم، ما باید اگر حاوی منابع وابسته است، کمی احتیاط را رعایت کنیم. در این‌گونه وضعیت‌ها، متغیر کنترل‌کننده یا عنصر مربوطه باید در شبکه B لحاظ شده و از شبکه A جدا شوند. در غیر این‌صورت راهی برای تحلیل مدار نهایی وجود ندارد زیرا کمیت منبع کنترل‌کننده از دست می‌رود.

اگر شبکه A حاوی منبع وابسته باشد، آن‌گاه دوباره ما باید مطمئن شویم که متغیر کنترل‌کننده و عنصر یا عناصر مربوط به آن نمی‌توانند در شبکه B باشند. تا این‌جا، ما فقط مدارهایی را ملاحظه کردیم که مقاومت‌ها و منابع مستقل داشتند. هر چند تکنیکی بگوییم رهاکردن یک منبع به صورت "مرده" یا "غیرفعال" هنگام ایجاد یک معادل تونن یا نورتن صحیح است، در عمل هیچ ساده‌سازی صورت نمی‌گیرد. چیزی که ما می‌خواهیم منبع ولتاژ مستقلی است که با یک مقاومت سری باشد، و یا منبع جریان مستقلی که با یک مقاومت تنها موازی شود ـ به بیان دیگر، یک معادل دو قطعه‌ای را نیاز داریم. در مثال‌های زیر ما معانی کاهش شبکه‌ها را با منابع وابسته و مقاومت‌ها به صورت یک مقاومت تنها ملاحظه می‌کنیم.



شکل ۵ـ۳۱ (الف) شبکه مفروضی که در آن معادل تونن موردنظر است.

مثال ۵ـ۹

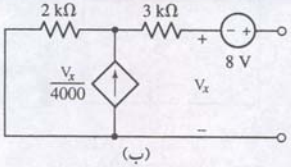
مطلوبست معادل تونن در شکل ۵ـ۳۱ (الف).

برای یافتن V_{oc}، می‌بینیم که $v_x = V_{oc}$ است و جریان منبع وابسته هم باید از مسیر مقاومت 2kΩ بگذرد زیرا هیچ جریانی از مقاومت 3kΩ نمی‌تواند عبور نماید. با استفاده از KVL حول حلقه بیرونی داریم:

$$-4 + 2 \times 10^3\,(-\frac{v_x}{4000}) + 3 \times 10^3(0) + v_x = 0$$

و

$$v_x = 8V = V_{oc}$$

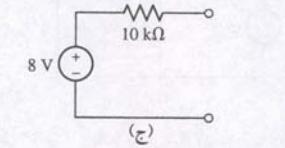


سپس به کمک قضیه تونن، می‌توان مدار معادل را با شبکه مرده A که طبق شکل ۵ـ۳۱(ب) به منبع 8V سری شده است، به‌دست‌آورد. البته بیان این مطلب صحیح است ولی چندان ساده و مفید نیست. در شبکه‌های مقاومتی خطی، مطمئناً معادل ساده‌تری مثل R_{TH}، برای شبکه A می‌توان به‌دست‌آورد.

وجود مدار وابسته مانع از این می‌شود تا R_{TH} را مستقیماً از ترکیب مقاومت در شبکه غیرفعال به‌دست‌آوریم. پس از اتصال کوتاه پایانه‌های خروجی در شکل ۵ـ۳۱(الف) واضح است که $v_x = 0$ و جریان منبع وابسته صفر است. بنابراین $I_{sc} = 4/(5 \times 10^3) = 0.8mA$ خواهد شد. به این ترتیب:

$$R_{TH} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{8}{(0.8 \times 10^3)} = 10k\Omega$$

و لذا معادل تونن در شکل ۵ـ۳۱(ج) به‌دست آمده است.

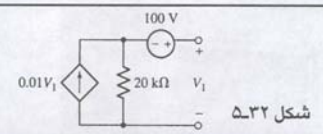


شکل ۵ـ۳۱ (ب) فرم ممکن ولی بدون استفاده معادل تونن. (ج) بهترین معادل تونن برای این شبکه مقاومتی خطی.

تمرین

۵ـ۸ معادل تونن را برای شبکه ۵ـ۳۲ به‌دست‌آورید (راهنمایی: تبدیل سریع روی منبع وابسته می‌تواند کارساز باشد).

جواب: -502.5mV و -100.5Ω.



شکل ۵ـ۳۲

مثال ۵ـ۱۰

به‌عنوان آخرین مثال، شبکه‌ای که فقط منبع وابسته دارد را ملاحظه می‌نماییم.

معادل تونن مدار شکل ۵ـ۳۳ (الف) را به‌دست‌آورید.

چون پایانه‌های سمت راست مدار قبلاً باز بوده‌اند، $i = 0$ است. درنتیجه، منبع وابسته مرده است، و لذا $v_{oc} = 0$ خواهد بود.

اکنون به جست‌وجوی مقدار R_{TH} که نمایشگر شبکه دو پایانه است می‌پردازیم. با این وجود نمی‌توانیم v_{oc} و i_{sc} را یافته و حاصل تقسیم آن‌ها را بیابیم، زیرا مدار فاقد منبع مستقل است و v_{oc} و i_{sc} هر دو صفراند. بنابراین باید حقّه‌ای سوار کنیم.

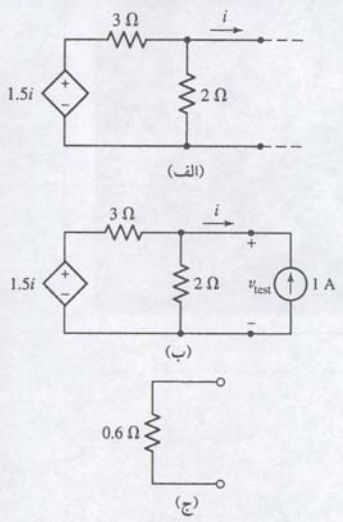
از خارج مدار یک منبع 1A به آن وصل می‌کنیم، و ولتاژ v_{test} حاصل را اندازه می‌گیریم و سپس $R_{TH} = v_{test}/I$ را به‌دست‌می‌آوریم. با مراجعه به شکل ۵ـ۳۳(ب)، می‌بینیم که $i = -1A$ است. با تحلیل گره داریم:

$$\frac{v_{test} - 1.5(-1)}{3} + \frac{v_{test}}{2} = 1$$

پس

$$v_{test} = 0.6V$$

و بنابراین $R_{TH} = 0.6\Omega$. معادل تونن در شکل ۵ـ۳۳(ج) نشان داده شده است.



شکل ۵ـ۳۳ (الف) شبکه بدون منبع مستقل و (ب) روشی برای تهیه R_{th}. (ج) معادل تونن برای مدار اصلی.

خلاصه‌ای از روش‌های به‌کاررفته

اکنون سه مثالی را بررسی می‌کنیم که برای آن‌ها معادل تونن و نورتن را به‌دست‌آوردیم. اولین مثال (شکل ۵ـ۲۹) فقط منابع مستقل و مقاومت داشت و می‌توانستیم چند روش مختلف را به آن اعمال نماییم. در تحلیل آن می‌باید R_{TH} را برای شبکه مرده و v_{oc} را برای شبکه روشن یا زنده حساب کنیم. همچنین می‌توانستیم R_{TH}، I_{sc}، یا v_{oc} و I_{sc} را به‌دست‌آوریم.

کاربرد عملی

مولتی‌متر دیجیتال

یکی از رایج‌ترین وسایل تست الکتریکی در آزمایشگاه، DMM یا مولتی‌متر دیجیتال است (شکل ۵ـ۳۴)، که برای اندازه‌گیری ولتاژ، جریان و مقاومت طراحی شده است.

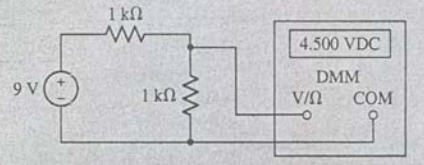
برای اندازه‌گیری ولتاژ، دو سیم از DMM به دو طرف عنصر مداری (شکل ۵ـ۳۵) وصل می‌شود. یک پایانه معمولاً با "V/Ω" مشخص می‌شود که مثبت است و پایانه دیگر معمولاً با علامت زمین مشخص می‌گردد. در این نوع اندازه‌گیری هیچ توانی از DMM به مدار منتقل نمی‌شود.

با توجه به بحث معادل‌های تونن و نورتن قبلی، واضح است که DMM دارای مقاومت تونن خاص خود است. این مقاومت معادل تونن موازی با مدار خواهد بود و مقدار آن ممکن است بر مقادیر اندازه‌گیری R_{DMM} تأثیر بگذارد (شکل ۵ـ۳۶).

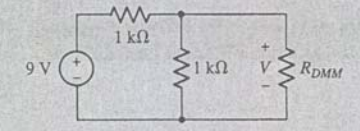
مقاومت ورودی یک DMM حدود 10MΩ یا بیشتر است. بنابراین ولتاژ اندازه‌گیری شده V در دو سر $10M\Omega \parallel 1k\Omega = 999.9\Omega$ ظاهر می‌گردد. با استفاده از تقسیم ولتاژ درمی‌یابیم که $V = 4.4998$ ولت است، که کمی کمتراز مقدار مورد انتظار 4.5 ولت می‌باشد. بنابراین مقدار مقاومت معین ولت‌متر خطایی جزیی را در مقدار اندازه‌گیری‌شده ایجاد می‌نماید.

برای اندازه‌گیری جریان، DMM باید با یک عنصر از مدار سری باشد و عموماً برای انجام آن باید سیمی را برید (شکل ۵ـ۳۷).

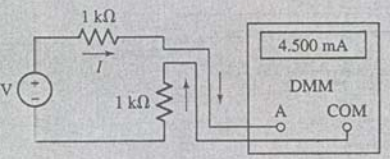
شکل ۵ـ۳۴ یک مولتی‌متر دیجیتال دستی.



شکل ۵ـ۳۵ DMM برای اندازه‌گیری ولتاژ dc وصل شده است.



شکل ۵ـ۳۶ DMM شکل ۵ـ۳۵ به فرم مقاومت معادل تونن R_{DMM}.



شکل ۵ـ۳۷ DMM متصل‌شده تا جریان را اندازه بگیرد.

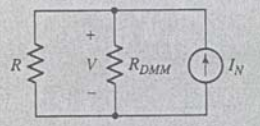
یک سیم DMM به پایانه زمین دستگاه و سیم دیگر به ورودی "A" وصل می‌شود تا جریان را اندازه بگیرد. در این حالت نیز DMM هیچ توانی را به مدار تحویل نمی‌دهد. در این شکل مقاومت معادل تونن (R_{DMM}) مربوط به DMM با مدار ما سری و بنابراین مقاومت آن می‌تواند اندازه‌گیری را متأثر سازد. معادله KVL را حول حلقه می‌نویسیم:

$$-9 + 1000I + R_{DMM}I + 1000I = 0$$

توجه کنید که چون آرایش دستگاه را برای اندازه‌گیری جریان تغییر داده‌ایم، مقاومت معادل تونن با حالتی که برای اندازه‌گیری ولتاژ به‌کار رفت یکی نیست. در واقع ما مایلیم که به‌طور ایده‌آل R_{DMM} به هنگام اندازه‌گیری جریان برابر صفر، و در اندازه‌گیری ولتاژ برابر ∞ باشد. اگر در اندازه‌گیری جریان $R_{DMM} = 0.1\Omega$ باشد، جریان 4.4998mA است که مختصر اختلافی را با مقدار مورد انتظار 4.5 دارا است. بسته به تعداد ارقام قابل نمایش به وسیله دستگاه، ما ممکن‌است حتی متوجه اثر مقاومت غیرصفر DMM روی اندازه‌گیری خود نشویم.

از همین دستگاه می‌توان برای اندازه‌گیری مقاومت موردنظری استفاده کرد به‌شرطی‌که در حین اندازه‌گیری هیچ منبع مستقلی فعال نباشد. از درون دستگاه جریانی به مقاومت موردنظر ارسال می‌گردد و مدار ولتمتر برای اندازه‌گیری ولتاژ حاصل به‌کار می‌رود. از جایگزینی DMM با معادل نورتن (که اکنون شامل یک منبع جریان مستقل برای تولید جریان از پیش تعیین شده است) می‌بینیم که R_{DMM} با مقاومت معلوم R موازی می‌شود (شکل ۵ـ۳۸).

در نتیجه، در واقع DMM مقدار $R_{DMM} \parallel R$ را اندازه می‌گیرد. اگر $R_{DMM} = 10M\Omega$ و $R = 10\Omega$ باشد، $R_{\text{اندازه‌گیری‌شده}} = 9.99999\Omega$ خواهد شد، که برای بسیاری از اهداف بیش از اندازه دقیق است، با این وجود اگر $R = 10M\Omega$ باشد $R_{\text{اندازه‌گیری‌شده}} = 5M\Omega$ می‌گردد. بنابراین مقاومت ورودی DMM عملاً محدوده بالایی را برای مقادیر مقاومت زیر تست ایجاد می‌کند. باید توجه داشت که اگر یک مولتی متر دیجیتال بر اساس آگاهی از R_{DMM} برنامه‌ریزی شود، امکان جبران و اندازه‌گیری مقاومت‌های بزرگ‌تر در آن وجود دارد.



شکل ۵ـ۳۸ DMM برای اندازه‌گیری مقاومت که با معادل نورتن جایگزین شده است. دیده می‌شود که R_{DMM} با مقاومت مجهول مورد اندازه‌گیری موازی است.

در مثال دوم (شکل ۵ـ۳۱) هر دو منبع وابسته و مستقل وجود داشتند، و در روش به‌کاررفته لازم بود تا v_{oc} و I_{sc} به‌دست‌آید. در این مثال مقدار R_{TH} به راحتی برای شبکه مرده به‌دست‌نمی‌آمد زیرا امکان غیرفعال کردن منبع وابسته وجود نداشت.

مثال سوم فاقد هر گونه منبع مستقل بود، و بنابراین معادل‌های تونن و نورتن منبع مستقل نداشتند. ما R_{TH} را با اعمال جریان 1A و یافتن $v_{test} = 1 \times R_{TH}$ به‌دست‌آوردیم. می‌توانستیم 1V به مدار اعمال کنیم و از $i = 1/R_{TH}$ مقاومت را به‌دست آوریم. این دو تکنیک مرتبط را می‌توان به هر مداری با منابع وابسته و با صفرکردن منابع مستقل، اعمال نمود.

دو روش دیگر دارای جاذبه هستند زیرا می‌توان آن‌ها را برای هر یک از سه شبکه مورد بحث فوق به‌کاربرد. در اولی کافی است که شبکه B را با v_s جایگزین کنید، جریانی که از پایانه مثبت آن خارج می‌شود را i بنامید. بعد با تحلیل شبکه A، i را به‌دست‌آورید و سپس معادله را به شکل $v_s = ai + b$ درآورید. در این صورت $a = R_{TH}$ و $b = v_{oc}$ خواهد بود.

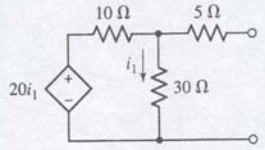
می‌توان منبع جریانی چون i_s را به‌کاربرد، ولتاژ آن را v درنظرگرفت و سپس $i_s = cv - d$ را تشکیل داد که $c = 1/R_{TH}$ و $d = i_{sc}$. این دو روش اخیر به هر مداری قابل اعمال است ولی دیگر روش‌هایی نیز می‌توان یافت که ساده‌تر و سریع‌ترند.

هرچند که ما همه توجه خود را به تحلیل مدارهای خطی معطوف داشته‌ایم، ولی بد نیست بدانیم که هر دو قضیه تونن و نورتن در شبکه غیرخطی B نیز معتبراند و کافی است فقط شبکه A خطی باشد.

تمرین

۵ـ۹ معادل تونن شبکه شکل ۵ـ۳۹ را پیدا کنید (راهنمایی: از منبع تست 1V استفاده نمایید).

جواب: $I_{test} = 50mA$ پس $R_{TH} = 20\Omega$.

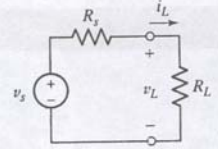


شکل ۵ـ۳۹

۵ـ۴ حداکثر انتقال توان

با توجه به یک منبع ولتاژ یا جریان واقعی می‌توان قضیه جالبی را برای توان بیان کرد. برای منبع ولتاژ واقعی (شکل ۵ـ۴۰) توان انتقالی به بار R_L برابر است با:

$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2} \qquad (19)$$



شکل ۵ـ۴۰ منبع ولتاژ واقعی متصل به بار مقاومتی R_L.

برای یافتن مقداری از R_L که حداکثر توان ممکن را از یک منبع جذب کند، از رابطه فوق نسبت به R_L مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\,p_L}{d\,R_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L (2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

آن‌گاه مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2R_L(R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2$$

یا

$$R_s = R_L$$

چون مقادیر $R_L = 0$ و $R_L = \infty$ هر دو یک می‌نیمم را به‌دست‌می‌دهند ($p_L = 0$) و نیز معادل‌بودن منبع ولتاژ واقعی و منبع جریان واقعی بیان شد، می‌توان **قضیه حداکثر انتقال توان** را اثبات‌شده دانست:

یک منبع ولتاژ مستقل سری با مقاومت R_s، یا یک منبع جریان مستقل موازی با مقاومت R_s حداکثر توان را به‌شرطی به بار R_L می‌دهد که در آن $R_L = R_s$ باشد.

خواننده ممکن‌است این قضیه را برحسب مقاومت معادل تونن شبکه بیان کند:

یک شبکه، حداکثر توان را هنگامی به مقاومت بار R_L تحویل می‌دهد که در آن R_L با مقاومت معادل تونن شبکه برابر باشد.

با توجه به قضیه حداکثر انتقال توان در شکل ۵ـ۱۶ یک مقاومت 2اهمی از هر دو منبع واقعی بیشترین توان را می‌گیرد (4.5W). مقدار مقاومتی که حداکثر توان (3.6kW) را از منبع شکل ۵ـ۱۱ جذب می‌کند 0.01Ω می‌باشد.

تفاوت عمده‌ای بین کشیدن حداکثر توان از یک منبع و حمل حداکثر توان به یک بار وجود دارد. اگر بار طوری باشد که مقاومت تونن آن معادل با مقاومت تونن شبکه‌ای باشد که به آن متصل است، حداکثر توان را از آن شبکه خواهد گرفت. هر تغییر در مقاومت بار موجب کاهش توان حمل‌شده به بار می‌گردد. با این وجود، فقط معادل تونن خود شبکه را درنظربگیرید. ما حداکثر توان ممکن را از منبع ولتاژ با کشیدن حداکثر جریان ممکن اخذ می‌کنیم، که این کار با اتصال کوتاه پایانه‌ها انجام می‌شود! با این وجود در این حالت غیرمتعارف ما توان صفر را به بار منتقل می‌نماییم - زیرا در این حالت $p = i^2R$ است و ما با $R = 0$ عمل اتصال کوتاه را انجام داده‌ایم.

با اِعمال عملیات جبری کمی به معادله (۱۹) که با حداکثر توان انتقالی برای $R_L = R_S = R_{TH}$ مرتبط است داریم:

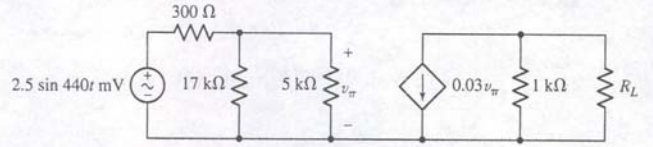
$$p_{\max|\text{delivered to load}} = \frac{v_s^2}{4R_s} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}}$$

که v_{TH} و R_{TH} نشان می‌دهند که منبع ولتاژ عملی شکل ۵ـ۴۰ هم به عنوان منبع معادل بعضی از منابع خاص می‌تواند شناخته شود.

همچنین غیرعادی نیست که قضیه حداکثر توان به غلط تفسیر شود. این قضیه برای کمک به ما برای یک بار بهینه جهت جذب حداکثر توان ارائه شده است. اگر مقاومت بار قبلاً مشخص شده باشد قضیه حداکثر توان کمکی نمی‌نماید. اگر به دلایلی ما بتوانیم مقاومت معادله معادل تونن شبکه را که به بار وصل است عوض کنیم، با تنظیم آن با بار تضمین‌کننده انتقال حداکثر توان نیست. یک بررسی سریع اتلاف توان در مقاومت تونن این مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۵ـ۱۱

در مدار شکل ۵ـ۴۱ مدلی از یک تقویت‌کننده ترانزیستوری امیتر مشترک دیده می‌شود. مقدار مقاومت بار R_L را طوری معین نمایید که طبقه اول حداکثر توان را به طبقه دوم منتقل کند و توان جذب‌شده واقعی را محاسبه کند.

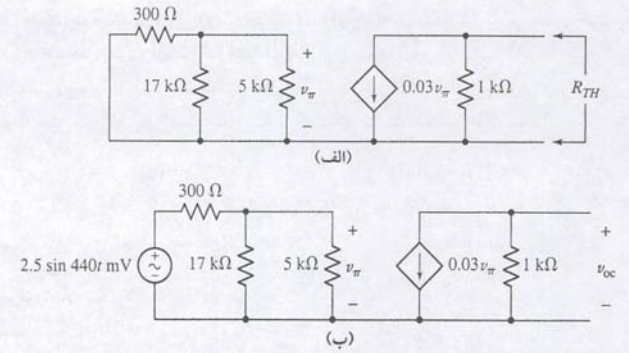


شکل ۵ـ۴۱ یک تقویت‌کننده امیتر مشترک که در آن R_L برای انتقال توان ماکزیمم نامشخص است.

چون از ما تعیین مقاومت بار خواسته شده است، تئوری حداکثر توان را اِعمال می‌کنیم. گام اول یافتن معادل تونن بقیه مدار است.

ما ابتدا مقاومت معادل تونن را به دست می‌آوریم که لازم می‌دارد تا R_L حذف شده و منبع مستقل اتصال کوتاه گردد (شکل ۵ـ۴۲(الف)).

چون $v_\pi = 0$ است، منبع جریان وابسته یک مدار باز است، پس $R_{TH} = 1\ \text{k}\Omega$ می‌باشد. این مقدار را می‌توان با اتصال یک منبع جریان 1 A به دو سر مقاومت 1 kΩ تصدیق نمود؛ v_π هنوز صفر خواهد بود، بنابراین منبع وابسته غیرفعال باقی می‌ماند و لذا برای R_{TH} نقشی ندارد.



شکل ۵ـ۴۲ (الف) مدار پس از حذف R_L و اتصال کوتاه‌شدن منبع مستقل. (ب) مدار برای تعیین V_{TH}.

برای حمل حداکثر توان به مقاومت بار باید R_L در مقدار $R_{TH} = 1\ \text{k}\Omega$ تنظیم شود.

برای یافتن v_{TH} مدار شکل ۵ـ۴۲(ب) را ملاحظه نمایید که همان شکل ۵ـ۴۱ است که R_L در آن حذف شده است. ما ممکن‌است بنویسیم:

$$v_{oc} = -0.03v_\pi(1000) = -30v_\pi$$

که v_π از یک رابطه تقسیم ولتاژ ساده به دست می‌آید:

$$v_\pi = (2.5 \times 10^{-3} \sin 440t)\left(\frac{3864}{300 + 3864}\right)$$

به نحوی که معادله تونن یک ولتاژ $-69.6 \sin 440t$ mV است که با مقاومت 1 kΩ سری است.

حداکثر توان با رابطه زیر داده می‌شود:

$$p_{\max} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}} = \boxed{1.211 \sin^2 440t\ \mu\text{W}}$$

تمرین

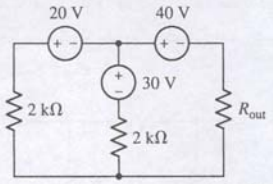
۵ـ۱۰ مدار شکل ۵ـ۴۳ را ملاحظه نمایید.

الف. اگر $R_{out} = 3\text{k}\Omega$ باشد، توان حمل‌شده به آن را پیدا کنید.

ب. حداکثر توان حمل‌شده به هر مقاومت R_{out} چقدر است؟

ج. R_{out} در دو مقدار 20mW توان جذب می‌کند. این دو مقدار را بیابید.

جواب: 230mW، 306mW، 59.2kΩ و 16.88Ω



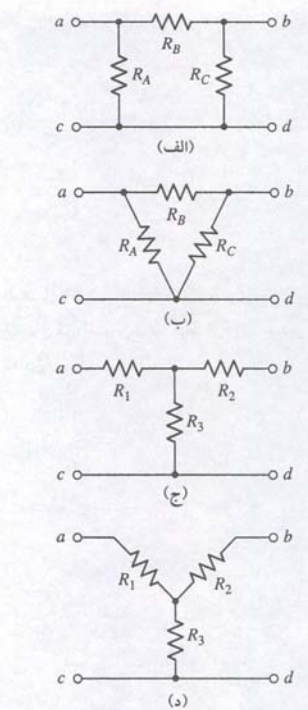
شکل ۵ـ۴۳

۵ـ۵ تبدیل ستاره ـ مثلث[1]

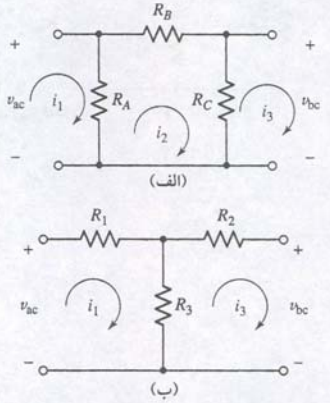
قبلاً دیدیم که ترکیب‌های سری و موازی مقاومت‌ها اغلب به کاهش قابل توجه پیچیدگی مدار منجر می‌گردد. در مواردی که چنین ترکیباتی وجود ندارد، برای دستیابی به آن، می‌توان منابع را تبدیل نمود. راه دیگر حصول به این هدف تکنیک مفیدی به‌نام تبدیل Δ-Y (ستاره ـ مثلث) است که از نظریه شبکه‌ها حاصل می‌شود.

مدارهای شکل ۵ـ۴۴ را ملاحظه کنید، در این شکل هیچ ترکیب موازی یا سری از مقاومت‌ها که مدار را ساده کند دیده نمی‌شود (توجه کنید که شکل ۵ـ۴۴ (الف) و (ب) و نیز ۵ـ۴۴ (ج) و (د) یکسانند و چون منبعی وجود ندارد، نمی‌توان تبدیل منبع انجام داد. با این وجود می‌توان این دو نوع شبکه را به هم تبدیل کرد.

1. delta-wye conversion



شکل ۴۴ـ۵ (الف) شبکه π متشکل از سه مقاومت و سه اتصال منحصربه‌فرد. (ب) همان شبکه به صورت Δ ترسیم شده است. (ج) یک شبکه T متشکل از سه مقاومت. (د) همان شبکه به صورت یک شبکه Y.



شکل ۴۵ـ۵ (الف) شبکه با برچسب $\prod$. (ب) شبکه با برچسب T.

ما ابتدا دو ولتاژ v_{ab} و v_{cd} و سه جریان i_1، i_2 و i_3 را طبق شکل ۴۵ـ۵ تعریف می‌کنیم. اگر دو شبکه معادل باشند، آن‌گاه ولتاژها و جریان‌های پایانه‌ها باید برابر باشند (جریان i_2 در شبکه T متصل وجود ندارد). اینک مجموعه‌ای از روابط بین R_A، R_B و R_C و R_1، R_2 و R_3 با تحلیل مش قابل تعریف است. مثلاً برای شبکه شکل ۴۵ـ۵(الف) می‌توان نوشت:

$$R_A i_1 - R_A i_2 = v_{ac} \quad (۲۰)$$

$$-R_A i_1 + (R_A + R_B + R_C) i_2 - R_C i_3 = 0 \quad (۲۱)$$

$$-R_C i_2 + R_C i_3 = -v_{bc} \quad (۲۲)$$

و برای شبکه شکل ۴۵ـ۵(ب) داریم:

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_3 = v_{ac} \quad (۲۳)$$

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_3 = -v_{bc} \quad (۲۴)$$

سپس i_2 را با استفاده از معادله (۲۱) از معادلات (۲۰) و (۲۲) حذف می‌کنیم، در نتیجه:

$$\left(R_A - \frac{R_A^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_1 - \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_3 = v_{ac} \quad (۲۵)$$

و

$$-\frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_1 + \left(R_C - \frac{R_C^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_3 = -v_{bc} \quad (۲۶)$$

با مقایسه جملات بین معادله (۲۵) و معادله (۲۳) می‌بینیم که:

$$R_3 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

به طریقی مشابه ما ممکن‌است عباراتی برای R_1 و R_2 برحسب R_A، R_B و R_C و نیز عباراتی برای R_A، R_B و R_C برحسب R_1، R_2 و R_3 بنویسیم. ما بقیه کار را به خواننده واگذار می‌کنیم. بنابراین برای تبدیل از شبکه Y به یک شبکه Δ مقادیر جدید مقاومت چنین محاسبه می‌شوند:

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

و در تبدیل شبکه Δ به Y، روابط زیر به کار می‌رود:

$$R_1 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

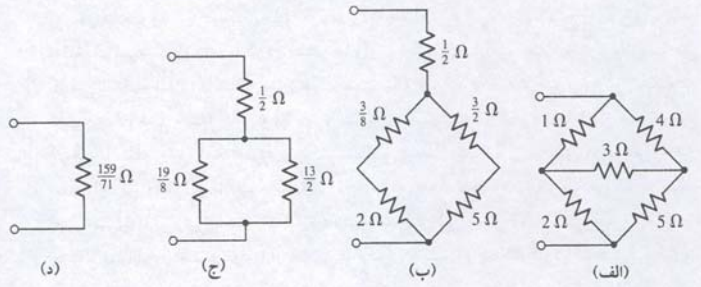
$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$$

استفاده از این روابط بسیار ساده است، معهذا شناخت چنین شبکه‌هاکمی تمرکز نیاز دارد.

مثال ۱۲ـ۵

با تبدیل Y-Δ مقاومت معادل تونن شکل ۴۶ـ۵ (الف) را پیدا کنید.



شکل ۴۶ـ۵ (الف) یک شبکه مقاومتی مفروض که مقاومت ورودی آن خواسته شده است. (ب) شبکه Δ فوقانی با یک شبکه Y معادل جایگزین شده است. (ج) و (د) ترکیبات سری و موازی که به یک مقاومت تنها تبدیل شده‌اند.

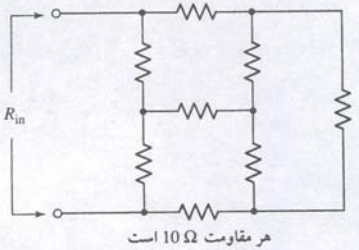
می‌بینیم که شبکه شکل ۴۶ـ۵(الف) از دو شبکه Δ که در مقاومت 3Ω شریکند تشکیل شده است. باید دقت کنیم که عجولانه هر دو شبکه Δ را به شبکه‌های Y تبدیل نکنیم. دلیل این امر پس از تبدیل شبکه فوقانی متشکل از مقاومت‌های 3Ω، 1Ω و 4Ω به شبکه Y واضح‌تر خواهد شد (شکل ۴۶ـ۵(ب)).

توجه کنید که در تبدیل شبکه بالایی به شبکه Y، مقاومت 3Ω را حذف کرده‌ایم. درنتیجه، راهی برای تبدیل شبکه اولیه Δ متشکل از مقاومت‌های 5، 2 و 3اهم به شبکه Y وجود ندارد. تبدیل را با ترکیب مقاومت‌های $\frac{3}{8}\,\Omega$ و 2Ω و مقاومت‌های $\frac{3}{2}\,\Omega$ و 5Ω طبق شکل ۴۶ـ۵(ج) پیش می‌بریم. آن‌گاه مقاومت $\frac{19}{8}\,\Omega$ موازی با $\frac{13}{2}\,\Omega$ خواهد بود و این ترکیب با مقاومت $\frac{1}{2}\,\Omega$ سری است. بنابراین می‌توان مدار اصلی شکل ۴۶ـ۵(الف) را با یک مقاومت $\frac{159}{71}\,\Omega$ جایگزین کرد (شکل ۴۶ـ۵(د)).

تمرین

۵ـ۱۱ با استفاده از تبدیل Y-Δ مقاومت معادل تونن مدار شکل ۴۷ـ۵ را به‌دست‌آورید.

جواب: 11.43Ω



شکل ۴۷ـ۵

۵ـ۶ انتخاب روش: مقایسه انواع تکنیک‌ها

در فصل ۳، قوانین جریان کیرشهف (KCL) و ولتاژ کیرشهف (KVL) معرفی شدند. این دو قانون به هر مداری قابل اعمال هستند، مشروط بر این‌که مدار را درنظر داشته باشیم. دلیل این‌است KCL و KVL به‌ترتیب از اصل بقاء بار و بقاء انرژی، که اصول اساسی‌اند، اخذ شده‌اند. بر اساس KCL، روش قوی تحلیل گرهی را خواهیم داشت. تکنیکی مشابه که بر KVL متکی است (و متأسفانه بر مدارهای سطح قابل اعمال است) و به تحلیل تک‌حلقه معروف است، نیز روش تحلیل مدار مفیدی به‌حساب می‌آید. در بیشتر بخش‌های این کتاب به مهارت‌های تحلیلی مربوط به مدارهای خطی توجه می‌شود. اگر بدانیم که مدار از اجزای خطی ساخته شده است، به بیان دیگر، همه ولتاژها و جریان‌ها با توابع خطی به هم مرتبط‌اند، آن‌گاه مدار را قبل از به‌کارگیری تحلیل گرهی یا تک‌حلقه ساده می‌کنیم. شاید مهم‌ترین نتیجه حاصل از این‌که با سیستم‌های کاملاً خطی سروکار داریم این باشد که بتوانیم اصل تجمیع را اعمال نماییم. با داشتن چندین منبع مستقل که بر روی مدار عمل می‌کنند، می‌توانیم سهم هر منبع را مستقل از دیگر منابع در پاسخ کل تعیین کنیم. این تکنیک در همه زمینه‌های مهندسی فراگیر بوده و ما با آن به دفعات سروکار خواهیم داشت. در بسیاری از موارد واقعی خواهیم

دید که هر چند منابع به‌طور همزمان روی سیستم ما عمل می‌کنند، ولی معمولاً یکی از آن‌ها بر پاسخ سیستم غلبه داشته و کنترل آن را در دست دارد. اصل تجمیع امکان شناسایی سریع آن منبع را برای ما فراهم می‌سازد، به‌شرطی‌که مدل سیستم با دقتی کافی خطی باشد.

در هر صورت، از دیدگاه تحلیل یک مدار، به‌جز در مواردی که سهم منبع خاصی روی یک پاسخ خواسته شده باشد، با لازدن آستین‌ها و به‌کارگیری مستقیم یکی از دو روش تحلیل گرهی یا تک‌حلقه‌ای تاکتیکی سر راست است. دلیل این‌است‌که به‌کارگیری روش تجمیع در مداری با 12 منبع مستقل نیاز به 12 بار ترسیم مدار اصلی دارد و آن وقت باید باز هم تحلیل گرهی یا حلقه را به‌کاربگیریم. ولی تکنیک تبدیل منابع اغلب ابزار مفیدی در تحلیل مدار است. اجرای روش تبدیل منابع به ما این اجازه را می‌دهد تا مقاومت‌ها و منابعی که در مدار اصلی سری یا موازی نیستند را یکپارچه کنیم. همچنین این روش اجازه می‌دهد تا همه یا حداقل بسیاری از منابع در مدار اصلی از یک نوع شده و به‌کارگیری تحلیل گرهی یا تک‌حلقه‌ای سرراست‌تر شود.

قضیه تونن به دلایل متعددی بسیار مهم است. هنگام کار با مدارهای الکترونیک، همواره نگران مقاومت معادل تونن در بخش‌های مختلف آن هستیم. این نگرانی خصوصاً در ورودی و خروجی طبقات مختلف اهمیت بیشتری دارد. علت این‌است‌که بهترین راه رسیدن به یک سیستم با رفتار بهینه، تطبیق مقاومت‌های آن‌ها است. ما مختصری از این خاصیت را در بحث انتقال توان حداکثر ملاحظه کردیم و دیدیم که مقاومت بار باید طوری انتخاب شود که با مقاومت معادل تونن مداری که بار به آن وصل است تطابق داشته باشد. با این وجود، در تحلیل‌های مکرر روزانه می‌بینیم که تبدیل بخشی از یک مدار به معادل تونن یا نورتن به اندازه تحلیل کامل آن کار می‌برد. بنابراین همچون روش تجمیع، روش‌های تونن و نورتن هنگامی اعمال می‌گردند که اطلاعات خاصی از بخش موردنظری از مدار لازم باشد.

۵-۷ خلاصه فصل و مرور

- اصل تجمیع بیان می‌دارد که پاسخ کل در یک مدار خطی را، از جمع پاسخ‌های جزئی حاصل از تک‌تک منابع که به تنهایی عمل می‌کنند می‌توان به‌دست‌آورد.
- روش تجمیع در مواردی به‌کارمی‌رود که هدف تعیین سهم یک منبع خاص در پاسخ باشد.
- مدلی عملی برای یک ولتاژ واقعی ترکیب سری مقاومت و یک منبع ولتاژ مستقل است. همچنین مدلی عملی برای یک منبع جریان واقعی، عبارت‌است‌از مقاومتی موازی با یک منبع جریان مستقل.
- تبدیل منابع به ما اجازه می‌دهد تا یک منبع ولتاژ واقعی را به یک منبع جریان واقعی تبدیل کنیم.
- تکرار تبدیل منابع که ضمن آن ترکیب مقاومت‌ها و منابع صورت می‌گیرد در ساده‌سازی مدار اهمیت بسزایی دارد.
- معادل تونن یک شبکه، مقاومتی سری با یک منبع ولتاژ مستقل است. مدار معادل نورتن نیز همان مقاومت ولی موازی با یک منبع جریان می‌باشد.
- روش‌های متنوعی برای به‌دست‌آوردن مقاومت معادل تونن وجود دارد که به بود یا نبود منابع وابسته، بستگی دارد.
- حداکثر توان انتقالی هنگامی رخ می‌دهد که مقاومت بار با مقاومت معادل تونن شبکه متصل به آن تطابق داشته باشد.
- وقتی که با یک شبکه مقاومتی اتصال Δ مواجه می‌شوید تبدیل آن به یک شبکه Y ساده است. این می‌تواند در ساده‌سازی شبکه قبل از تحلیل کمک کند. برعکس یک شبکه مقاومتی اتصال Y می‌تواند به شبکه اتصال Δ تبدیل شود تا در ساده‌کردن یک شبکه کمک کند.

۵-۸ خواندنی‌های کمکی

A book about battery technology, including characteristics of built-in resistance:

D. Linden, *Handbook of Batteries*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1995.

An excellent discussion of pathological cases and various circuit analysis theorems can be found in:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

مسائل

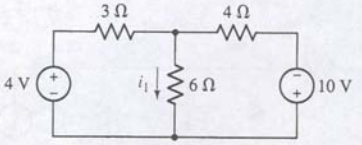
۵-۱ خطی‌بودن و تجمیع

۱. مفهوم خطی‌بودن بسیار با اهمیت است به این دلیل که سیستم‌های خطی راحت‌تر از سیستم‌های غیرخطی تحلیل می‌شوند. متأسفانه اکثر سیستم‌های واقعی طبیعتاً غیرخطی‌اند. با این وجود ممکن‌است برای یک سیستم غیرخطی مدلی خطی ایجاد کرد تا در محدوده کوچکی از متغیر کنترل معتبر باشد. به‌عنوان مثالی از این مطلب تابع نمایی ساده e^x را ملاحظه کنید. نمایش سری تیلور این تابع عبارتست‌از:

$$e^x \approx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

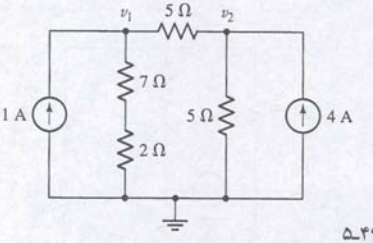
برای این تابع پس از حذف جملات x به بعد، یک مدل خطی بسازید. تابع جدید خود را در $x = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.10, 0.5, 1.0, 5.0$ ارزیابی کنید. برای چه مقداری از x مدل خطی تقریب خوبی را برای e^x تولید می‌کند؟

۲. در شکل ۵-۴۸، (الف) سهم منبع 4 V را در جریان i_1 مشخص کنید، (ب) سهم منبع 10 V را در i_1 معین نمایید و (ج) i_1 را تعیین کنید.



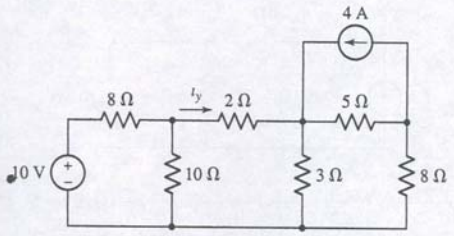
شکل ۵-۴۸

۳. با مراجعه به مدار دومنبعی شکل ۵-۴۹ سهم منبع 1 A را در v_1 به دست آورید و جریان کل درون مقاومت 7 Ω را معین سازید.



شکل ۵-۴۹

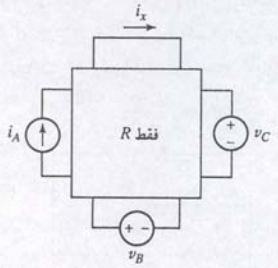
۴. اصل تجمیع را برای تعیین جریان i_y در مدار شکل ۵-۵۰ با ملاحظه تک‌تک منابع تعیین نمایید.



شکل ۵-۵۰

۵. برای مدار شکل ۵-۴۸ تنها مقادیر منبع را عوض کنید تا جریان i_1، ۱۰ برابر شود. هر دو مقدار جریان باید عوض شود و هیچ‌کدام صفر نباشد.

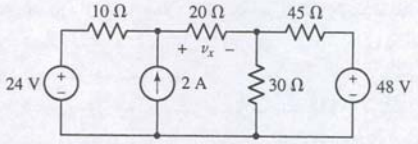
۶. وقتی در مدار شکل ۵-۵۱، منابع i_A و v_B فعالند و $v_C = 0$، $i_x = 20A$، با فعال‌بودن i_A، v_C و $v_B = 0$ آنگاه $i_x = -5A$ و بالاخره با روشن‌بودن هر سه منبع، $i_x = 12A$ است. اگر تنها منبع فعال، (الف) i_A، (ب) v_B و (ج) v_C باشد، i_x را حساب کنید. (د) اگر i_A و v_C از نظر اندازه دوبرابر شوند و v_B منفی شود، i_x را به‌دست‌آورید.



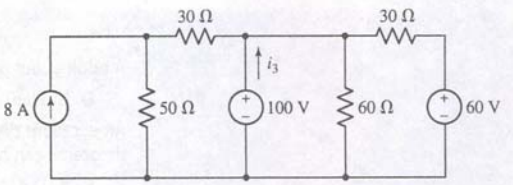
شکل ۵-۵۱

۷. با استفاده از تجمیع مقدار v_x در مدار شکل ۵-۵۲ را پیدا کنید.

۸. با به‌کارگیری تجمیع به مدار شکل ۵-۵۳، i_3 را بیابید.

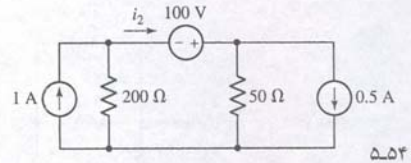


شکل ۵-۵۲



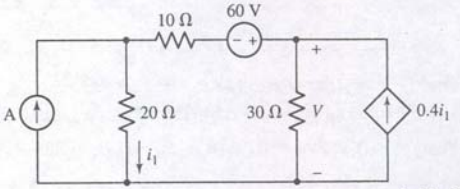
شکل ۵ـ۵۳

۹. (الف) با استفاده از قضیه تجمیع، i_2 را در مدار شکل ۵.۵۴ به‌دست‌آورید و (ب) توان جذب‌شده به‌وسیله هر یک از پنج عنصر مدار را محاسبه کنید.



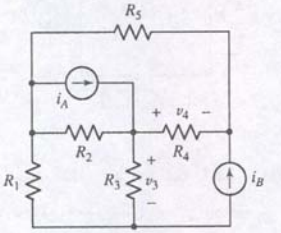
شکل ۵ـ۵۴

۱۰. تجمیع را روی مدار شکل ۵.۵۵ اعمال کرده و ولتاژ V را به‌دست‌آورید. توجه کنید که یک منبع وابسته وجود دارد.



شکل ۵ـ۵۵

۱۱. در مدار شکل ۵.۵۶: (الف) اگر $i_A = 10A$ و $i_B = 0$ باشد، آن‌گاه $v_3 = 80V$ است. اگر $i_A = 25A$ و $i_B = 0$ باشد، v_3 را پیدا کنید. (ب) اگر $i_A = 10A$ و $i_B = 25A$ باشد در این صورت $v_4 = 100V$ است ولی اگر $i_A = 25A$ و $i_B = 10A$ شود، $v_4 = -50V$ می‌گردد، اگر $i_A = 20A$ و $i_B = -10A$ باشد، v_4 را بیابید.

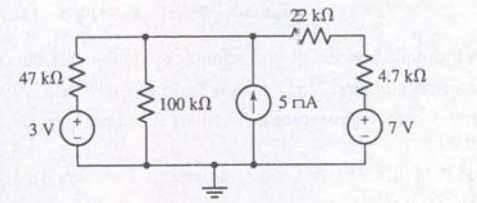


شکل ۵ـ۵۶

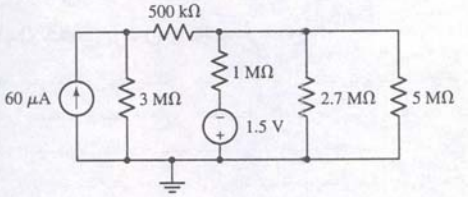
۱۲. از تجمیع برای تعیین ولتاژ دو سر منبع جریان شکل ۵.۵۷ استفاده کنید.

۱۳. از تجمیع استفاده کنید و توان تلف‌شده به‌وسیله مقاومت 500kΩ در شکل ۵.۵۸ را محاسبه نمایید.

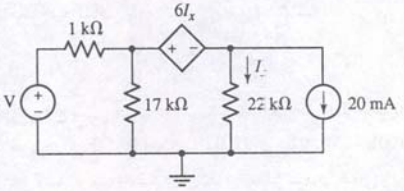
۱۴. از تجمیع برای تعیین ولتاژ دو سر مقاومت 17kΩ در شکل ۵.۵۹ استفاده نمایید. اگر میزان توان تلف‌شده مقاومت 250mW باشد حداکثر ولتاژ مثبتی که منبع 5V قبل از داغ‌شدن دارد چقدر است؟



شکل ۵ـ۵۷

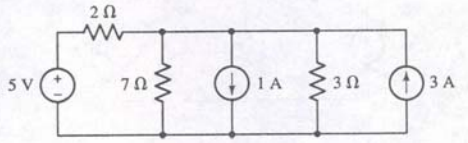


شکل ۵ـ۵۸



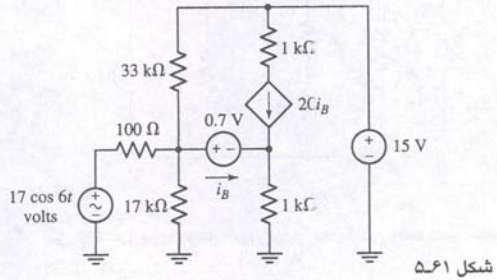
شکل ۵ـ۵۹

۱۵. کدام منبع در شکل ۵.۶۰ در توان تلف‌شده در مقاومت 2Ω سهم بیشتری دارد؟ کمترین سهم کدام است؟ مقدار توان تلف‌شده در مقاومت 2Ω را به‌دست‌آورید.



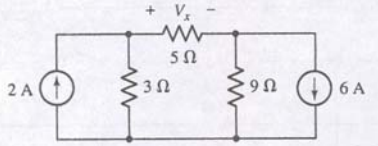
شکل ۵ـ۶۰

۱۶. از اصل تجمیع برای یافتن i_B در مدار شکل ۵.۶۱ استفاده کنید. این مدل متعلق به تقویت‌کننده ترانزیستوری دوقطبی است.



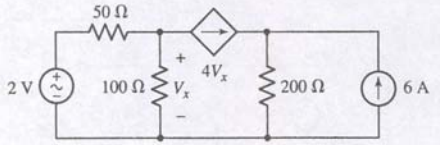
شکل ۵ـ۶۱

۱۷. برای مدار شکل ۵.۶۲: (الف) از تجمیع برای محاسبه V_x استفاده نمایید. (ب) سهم هر منبع در V_x را با استفاده از تحلیل dc sweep PSpice تحقیق کنید. یک شماتیک نام‌گذاری‌شده، خروجی probe وابسته به آن و خلاصه‌ای از نتایج را ارائه کنید.



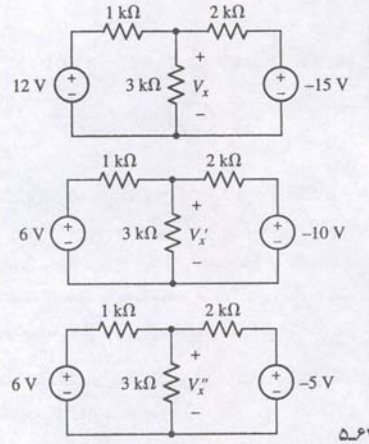
شکل ۵ـ۶۲

۱۸. برای مدار شکل ۵.۶۳: (الف) برای محاسبه v_x از تجمیع استفاده نمایید. (ب) نقش و سهم هر منبع را در v_x با تحلیل dc sweep PSpice تحقیق کنید. یک شماتیک نام‌گذاری‌شده، خروجی probe و خلاصه‌ای از نتایج را ارائه دهید.



شکل ۵ـ۶۳

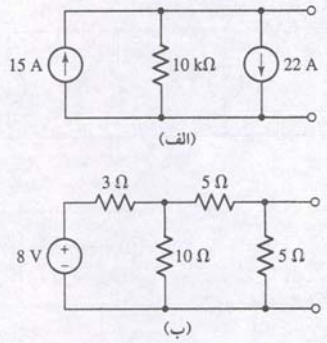
۱۹. سه مدار شکل ۵.۶۴ را ملاحظه نمایید. هر مدار را تحلیل کنید و نشان دهید که $V_x = V'_x + V''_x$ (یعنی تجمیع هنگامی ارجحیت دارد که منابع صفر شوند، ولی این اصل خیلی فراتر از آن است).



شکل ۵ـ۶۴

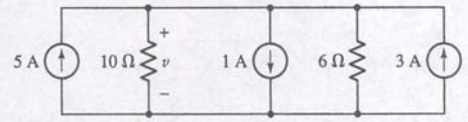
۵ـ۲ تبدیل منابع

۲۰. به کمک روش تبدیل منبع، (الف) مدار شکل ۵.۶۵ (الف) را به یک منبع ولتاژ مستقل سری با یک مقاومت تقریباً برابر و (ب) مدار شکل ۵.۶۵ (ب) را به یک منبع جریان مستقل با مقاومتی برابر و موازی با منبع تبدیل کنید. برای هر دو (الف) و (ب)، پایانه‌های سمت راست را در مدار نهایی آزاد بگذارید.



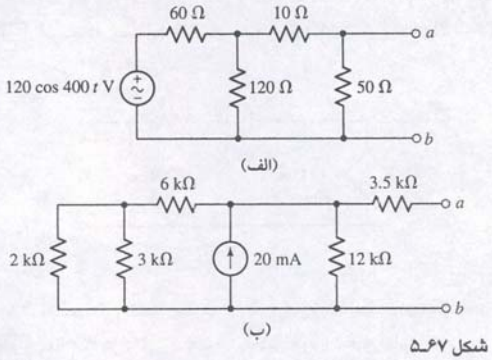
شکل ۵ـ۶۵

۲۱. (الف) از روش تبدیل منبع برای کاهش مدار شکل ۵.۶۶ به یک منبع ولتاژ واقعی سری با مقاومت Ω 10 استفاده کنید. (ب) v را محاسبه کنید. (ج) توضیح دهید که چرا مقاومت Ω 10 نباید در تبدیل منبع لحاظ شود.



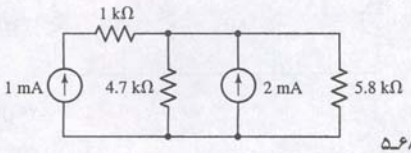
شکل ۵ـ۶۶

۲۲. از تبدیل منابع و ترکیب مقاومت‌ها برای ساده‌سازی هر دو شبکه شکل ۵.۶۷ استفاده کنید تا در سمت چپ پایانه‌های a و b فقط دو عنصر باقی بمانند.



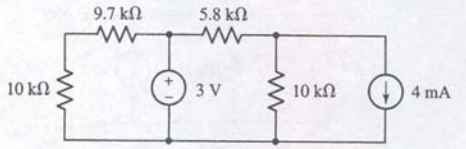
شکل ۵ـ۶۷

۲۳. با تبدیل منبع، توان تلف‌شده در مقاومت 5.8kΩ شکل ۵.۶۸ را معین نمایید.



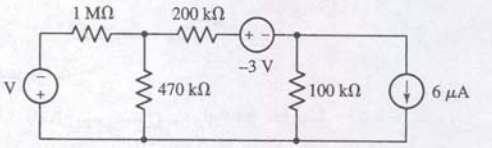
شکل ۵ـ۶۸

۲۴. با تبدیل منبع، توان تلف‌شده در مقاومت 5.8kΩ شکل ۵.۶۹ را معین نمایید.



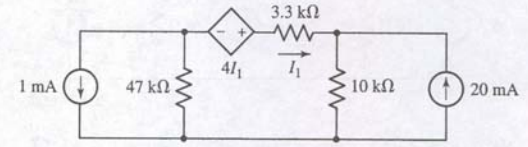
شکل ۵.۶۹

۲۵. توان تلف‌شده به‌وسیله مقاومت 1MΩ را با استفاده از تبدیل منبع در مدار شکل ۵.۷۰ به‌دست آورید.



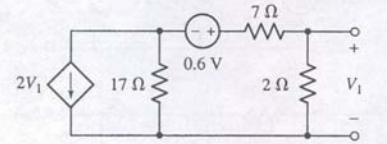
شکل ۵.۷۰

۲۶. با تبدیل منبع، مدار شکل ۵.۷۱ را ساده کنید و I_1 را مشخص نمایید.



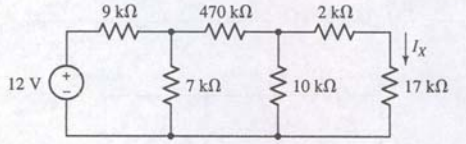
شکل ۵.۷۱

۲۷. (الف) با تبدیل منبع مدار شکل ۵.۷۲ را ساده کنید و سپس V_1 را به‌دست آورید. (ب) صحت تحلیل خود را با اجرای تحلیل PSpice مدار شکل ۵.۷۲ تحقیق نمایید.



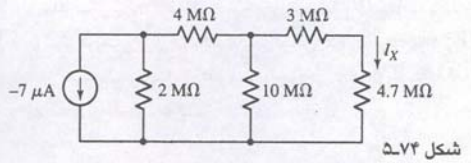
شکل ۵.۷۲

۲۸. (الف) با تکرار تبدیل منبع، I_x را در شکل ۵.۷۳ بیابید. (ب) با تحلیل PSpice در شکل ۵.۷۳، صحت تحلیل خود را تحقیق نمایید.



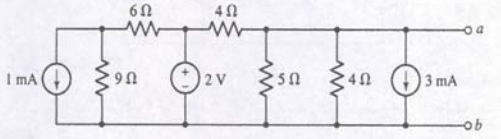
شکل ۵.۷۳

۲۹. با تکرار تبدیل منبع، جریان I_x را در مدار شکل ۵.۷۴ معین کنید.



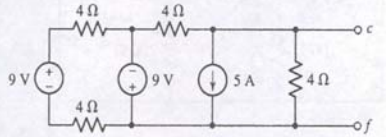
شکل ۵.۷۴

۳۰. مدار شکل ۵.۷۵ را به یک منبع موازی با یک مقاومت تبدیل نمایید.



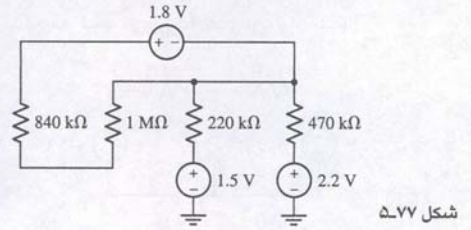
شکل ۵.۷۵

۳۱. با تبدیل منبع مدار شکل ۵.۷۶ را به یک منبع جریان موازی با یک مقاومت تبدیل نمایید.



شکل ۵.۷۶

۳۲. توان تلف‌شده به‌وسیله مقاومت 1MΩ در مدار شکل ۵.۷۷ را معین کنید.



شکل ۵.۷۷

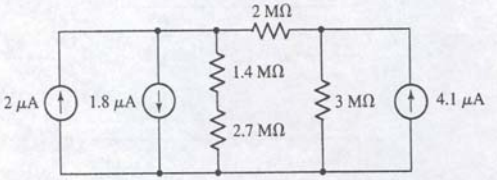
۳۳. اندازه‌گیری‌های جدول ۵.۱ روی یک باطری 1.5V آلکالاین انجام شده است. از اطلاعات موجود استفاده کرده، یک مدل منبع ولتاژ عملی دوعنصری برای باطری بسازید تا در محدودهٔ 1 الی 20mA نسبتاً دقیق باشد. توجه کنید که علاوه بر خطای اندازه‌گیری مسلم، مقاومت درونی باطری به مقدار قابل توجهی در محدوده اندازه‌گیری تغییر می‌یابد.

جدول ۵.۱ مشخصات اندازه‌گیری‌شدهٔ ولتاژ-جریان یک باطری 1.5V متصل به یک مقاومت متغیر.

جریان خروجی (mA)	ولتاژ پایانه‌ای (V)
0.0000589	1.584
0.3183	1.582
1.4398	1.567
7.010	1.563
12.58	1.558

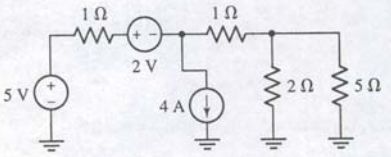
۳۴. از داده‌های جدول ۵.۱ برای ساخت یک مدل منبع جریان واقعی دوعنصری، که در محدوده 1 الی 20mA نسبتاً دقیق است، استفاده نمایید. توجه کنید که علاوه بر خطای مسلم اندازه‌گیری مقاومت داخلی باطری به میزان قابل توجهی در محدوده جریان اندازه‌گیری شده تغییر می‌کند.

۳۵. مدار شکل ۵.۷۸ را به یک منبع ولتاژ موازی با یک مقاومت تقلیل دهید.



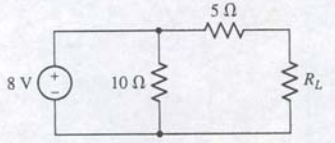
شکل ۵.۷۸

۳۶. توان جذب‌شده در مقاومت 5Ω شکل ۵.۷۹ چقدر است؟



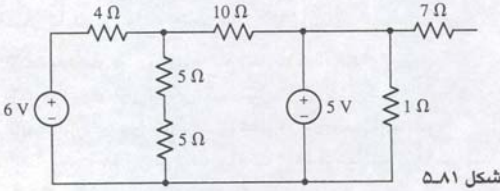
شکل ۵.۷۹

۳۷. (الف) مدار شکل ۵.۸۰ را به یک منبع جریان واقعی موازی با R_L تبدیل کنید. صحت پاسخ خود را با PSpice با مقدار 5 Ω برای R_L تحقیق کنید. برای هر مدار شماتیک مناسب را تحویل دهید و در آن ولتاژ دو سر R_L را مشخص کنید.



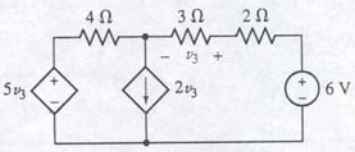
شکل ۵.۸۰

۳۸. (الف) مدار شکل ۵.۸۱ را تا حد ممکن کاهش دهید، دو منبع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل نمایید، سپس توان تلف‌شده در مقاومت 5 Ω بالا را محاسبه کنید. (ب) صحت پاسخ خود را با شبیه‌سازی هر دو مدار به وسیله PSpice تحقیق نمایید. یک مدار با برچسب‌های مناسب را برای هر مدار تحویل دهید به نحوی که توان تلف‌شده در مقاومت موردنظر به وضوح مشخص باشد. (ج) آیا مقدار 1 Ω یا 7 Ω در پاسخ شما به هر طریقی تأثیرگذارند. توضیح دهید؟ بگویید چرا بلی و چرا خیر؟



شکل ۵.۸۱

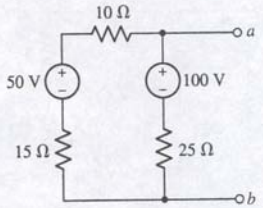
۳۹. برای مدار شکل ۵.۸۲ همه منابع را (هم وابسته و هم مستقل) به منابع جریان تبدیل کنید، منابع مستقل را ترکیب نموده و v_3 را محاسبه نمایید.



شکل ۵.۸۲

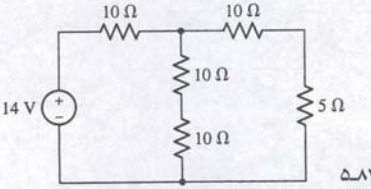
۵.۳ مدارهای معادل تونن و نورتن

۴۰. (الف) معادل تونن را در پایانه‌های a و b شکل ۵.۸۳ بیابید. به مقاومت متصل به a و b چقدر توان منتقل می‌گردد به‌شرطی‌که R_{ab} برابر (ب) 50Ω و (ج) 12.5Ω باشد.



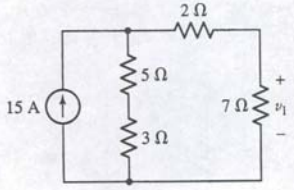
شکل ۵.۸۳

۴۱. (الف) قضیه تونن را برای ساده‌کردن شبکه متصل به مقاومت 5 Ω شکل ۵.۸۴ (الف) به کار ببرید. (ب) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 5 Ω را با استفاده از مدار ساده‌شده حساب کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice به دست آورید. شماتیک برچسب‌خورده را برای هر مدار با توان موردنظر مشخص‌شده تحویل دهید.



شکل ۵.۸۴

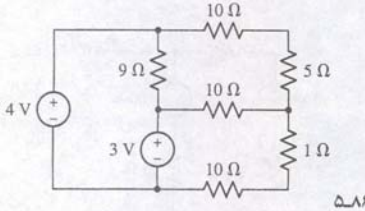
۴۲. (الف) معادل تونن شبکه متصل به مقاومت 7 Ω شکل ۵.۸۵ را به دست آورید. (ب) معادل نورتن شبکه متصل به مقاومت 7 Ω را پیدا کنید. (ج) ولتاژ v_1 را برای هر دو مدار خود محاسبه کنید. (د) مقاومت 7 Ω را با یک مقاومت 1 Ω جایگزین کرده و v_1 را دوباره برای هر مدار محاسبه نمایید.



شکل ۵.۸۵

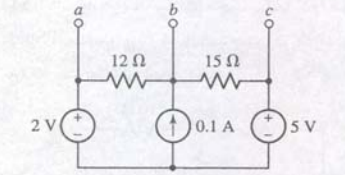
۴۳. (الف) یک لامپ تنگستن به ولتاژ تست 10 mV وصل است و جریان $400\,\mu A$ اندازه‌گیری شده است. معادله تونن لامپ چیست؟ اکنون لامپ به یک منبع تغذیه 110 V متصل است و جریان 363.6 mA اندازه‌گیری شده است. معادل تونن را بر اساس این اندازه‌گیری معین نمایید. چرا معادل تونن لامپ به شرایط تست وابسته است، و چه استدلالی اگر بخواهیم مدار حاوی لامپ را تحلیل کنیم، دارید.

۴۴. (الف) معادل‌های تونن و نورتن را برای شبکه متصل به مقاومت 1 Ω شکل ۵.۸۶ پیدا کنید. (ب) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 1 Ω را با استفاده از مدارهای معادل محاسبه کنید. (ج) با PSpice صحت را تحقیق نمایید. شماتیک هر سه مدار را با مشخص‌نمودن توان مورد تقاضا تحویل دهید.



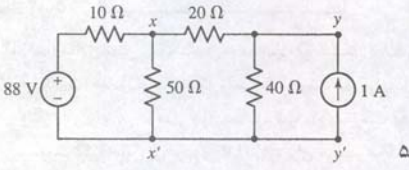
شکل ۵.۸۶

۴۵. برای شبکه شکل ۵.۸۷: (الف) پایانه c را حذف کنید و معادل تونن را از پایانه‌های a و b بیابید. (ب) پایانه a را حذف کنید و مرحله قبل را برای b و c تکرار نمایید.



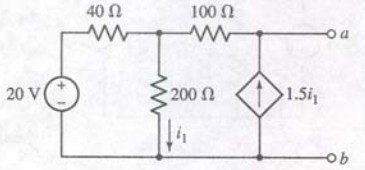
شکل ۵.۸۷

۴۶. معادل تونن شبکه شکل ۵.۸۸ را از پایانه‌های: (الف) x و x'، (ب) y و y'، به‌دست‌آورید.



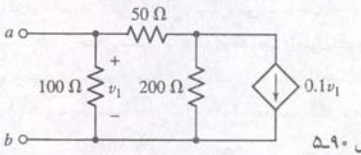
شکل ۵.۸۸

۴۷. (الف) معادل تونن شبکه شکل ۵.۸۹ را بیابید. (ب) چه توانی به مقاومت 100Ω در a و b انتقال می‌یابد؟



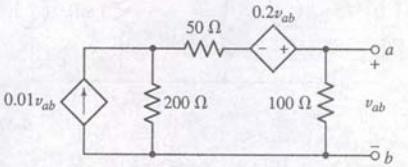
شکل ۵.۸۹

۴۸. معادل نورتن شبکه شکل ۵.۹۰ را بیابید.



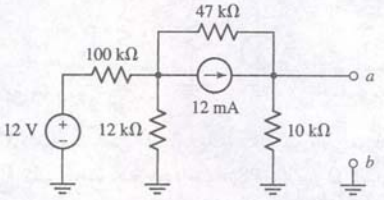
شکل ۵.۹۰

۴۹. معادل تونن شبکه دو پایانه شکل ۵.۹۱ را معین کنید.



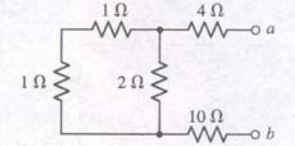
شکل ۵.۹۱

۵۰. معادل تونن شکل ۵.۹۲ را به‌دست‌آورید.



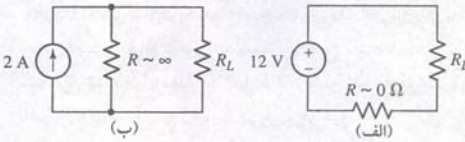
شکل ۵.۹۲

۵۱. برای شبکه شکل ۵.۹۳: (الف) معادل تونن و (ب) معادل نورتن را تعیین نمایید.



شکل ۵.۹۳

۵۲. برای مدار شکل ۵.۹۴ (الف) معادل نورتن شبکه متصل به R_L را به‌دست‌آورید. برای مدار شکل ۵.۹۴ (ب) معادل تونن شبکه متصل به R_L را تعیین کنید.



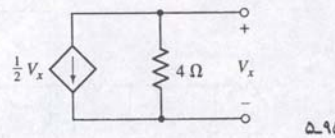
شکل ۵.۹۴

۵۳. معادل‌های تونن و نورتن شبکه شکل ۵.۹۵ را بیابید.

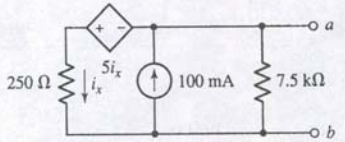
۵۴. معادل‌های تونن و نورتن شبکه شکل ۵.۹۶ را تعیین کنید.

۵۵. معادل‌های تونن و نورتن شبکه شکل ۵.۹۷ را به‌دست‌آورید.

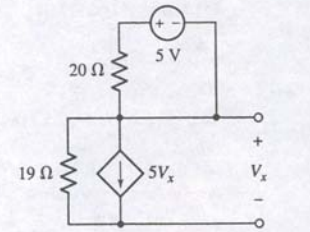
۵۶. مقاومت معادل تونن از دید مقاومت 2kΩ در مدار شکل ۵.۹۸ را پیدا کنید. از خط‌چین شکل چشم‌پوشی نمایید.



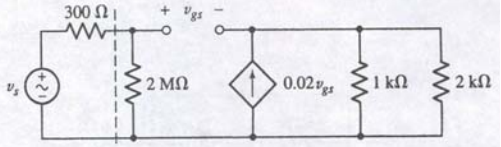
شکل ۵.۹۵



شکل ۵.۹۶



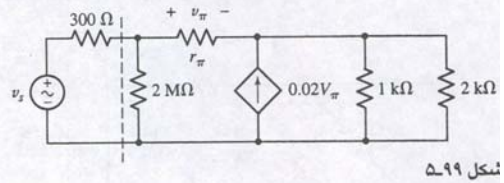
شکل ۵.۹۷



شکل ۵.۹۸

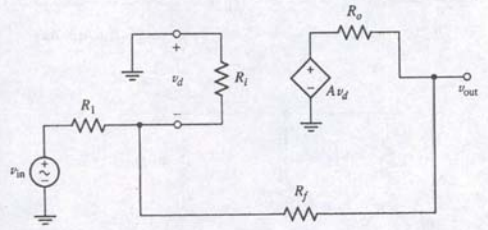
۵۷. با مراجعه به شکل ۵.۹۸، مقاومت معادل تونن مدار سمت راست خط‌چین را معین نمایید. این مدار یک تقویت‌کننده ترانزیستوری سورس مشترک است. شما مقاومت ورودی آن را محاسبه می‌نمایید.

۵۸. با توجه به شکل ۵.۹۹، مقاومت معادل تونن مدار سمت راست خط‌چین را به‌دست‌آورید. این مدار یک تقویت‌کننده ترانزیستوری امیتر مشترک است و شما مقاومت ورودی آن را محاسبه می‌کنید.



شکل ۵.۹۹

۵۹. مدار شکل ۵.۱۰۰ یک مدل نسبتاً دقیقی از یک تقویت‌کننده عملیاتی (op-amp) است. در مواردی که R_i و A خیلی بزرگ‌اند، $R_o \sim 0$ است، یک مقاومت باری (مانند بلندگو) متصل بین زمین و پایانه v_{out} ولتاژ $-R_f/R_1$- برابر بزرگتر از سیگنال v_{in} می‌بینند. مدار معادل تونن را پیدا کنید.

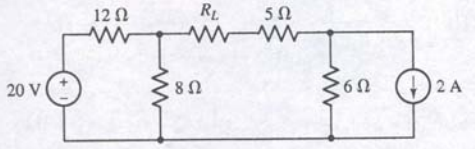


شکل ۵.۱۰۰

۵.۴ حداکثر انتقال توان

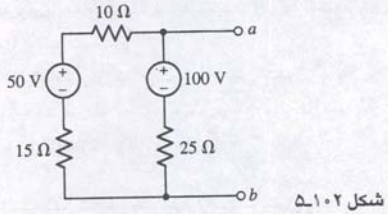
۶۰. با فرض این‌که می‌توانیم مقاومت معادل پریز برق خود را تعیین نماییم چرا سازندگان توستر، آون، مایکروویو و تلویزیون مقاومت معادل تونن هر وسیله را با آن تطبیق نمی‌دهند. آیا این کار انتقال حداکثر توان را موجب نمی‌شود.

۶۱. اگر بتوان هر مقداری برای R_L در شکل ۵.۱۰۱ انتخاب کرد، حداکثر توان مصرفی در R_L چقدر می‌باشد؟



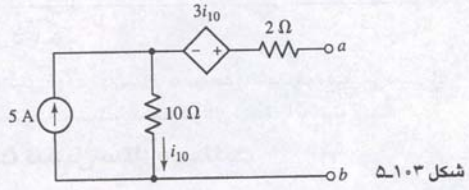
شکل ۵.۱۰۱

۶۲. (الف) معادل تونن را در پایانه‌های a و b برای شکل ۵.۱۰۲ به‌دست‌آورید. چقدر توان به مقاومت متصل به a و b منتقل می‌گردد به‌شرطی‌که R_{ab} برابر با (ب) 10Ω و (ج) 75Ω باشد؟



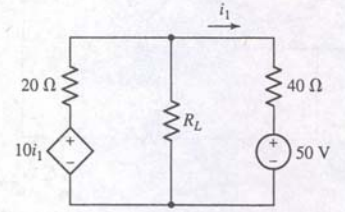
شکل ۵.۱۰۲

۶۳. (الف) معادل تونن شبکه شکل ۵.۱۰۳ را معین کنید و (ب) حداکثر توان دریافتی از آن چقدر است؟



شکل ۵.۱۰۳

۶۴. در شکل ۵.۱۰۴: (الف) مقدار R_L که حداکثر توان به آن منتقل می‌گردد چقدر است، (ب) ولتاژ دو سر R_L را محاسبه کنید (علامت + در بالا).



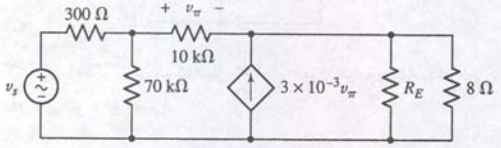
شکل ۵.۱۰۴

۶۵. یک منبع ولتاژ dc واقعی جریان 2.5A را وقتی یک لحظه اتصال کوتاه شده، فراهم ساخته و می‌تواند 80W توان را به بار 20Ω منتقل سازد. (الف) ولتاژ مدار باز را پیدا کنید. (ب) حداکثر توانی که می‌تواند به مقاومت منتخب بهینه انتقال دهد چقدر است؟ برای توان ماکزیمم، R_L چقدر باید باشد؟

۶۶. یک منبع جریان واقعی 10W توان را به مقاومت بار 250Ω و 20W توان را به یک بار 80Ω انتقال می‌دهد. یک مقاومت R_L با ولتاژ v_L و جریان i_L به آن وصل است. مقادیر R_L ، i_L و v_L را پیدا کنید اگر (الف) $v_L i_L$ حداکثر باشد، (ب) v_L حداکثر باشد و (ج) i_L حداکثر باشد.

۶۷. یک باطری می‌تواند به‌دقت به‌عنوان یک منبع ولتاژ 9V سری با مقاومت 1.2Ω در محدوده مورد نظری از جریان، مدل‌سازی شود. اگر یک مقاومت بی‌نهایت به باطری وصل شود هیچ جریانی از باطری عبور نمی‌کند. ضمناً می‌دانیم که حداکثر توان به مقاومت 1.2Ω انتقال می‌یابد، و به مقاومت‌های 1.1Ω و 1.3Ω توان منتقل‌شده کمتر است. با این وجود اگر پایانه‌های باطری را اتصال کوتاه کنیم (البته پیشنهاد نمی‌شود)، جریان بیشتری نسبت به مقاومت 1.2Ω به‌دست خواهیم آورد. آیا این در تضاد با آن‌چه برای بار مقاومت 1.2Ω دیدیم نیست (آیا توان متناسب با i^2 نمی‌باشد)؟ توضیح دهید.

۶۸. مدار شکل ۵.۱۰۵ بخشی از یک تقویت‌کننده صوتی است. اگر بخواهیم حداکثر توان را به بلندگوی 8Ω منتقل کنیم، چه مقداری از R_E مورد نیاز است؟ حل خود را با PSpice به تأیید برسانید.

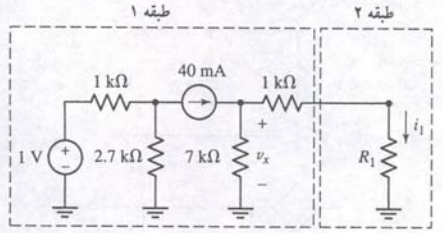


شکل ۵.۱۰۵

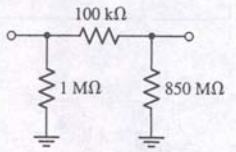
۶۹. شکل ۵.۱۰۶ مداری را که به دو بخش تفکیک شده نشان می‌دهد. R_1 را طوری انتخاب کنید که حداکثر توان از طبقه 1 به طبقه 2 منتقل گردد.

۵.۵ تبدیل ستاره ـ مثلث

۷۰. شبکه شکل ۵.۱۰۷ را به شبکه Y تبدیل نمایید.

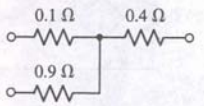


شکل ۵.۱۰۶



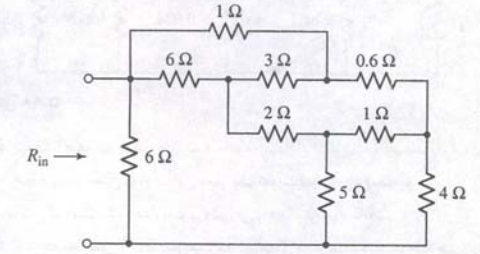
شکل ۵.۱۰۷

۷۱. شبکه شکل ۵.۱۰۸ را به شبکه Δ تبدیل کنید.



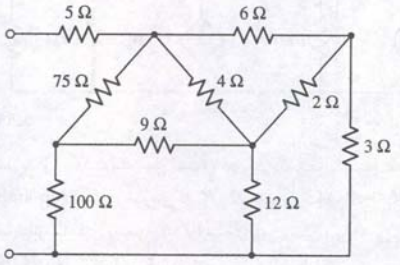
شکل ۵.۱۰۸

۷۲. R_{in} را در شبکه شکل ۵.۱۰۹ پیدا کنید.



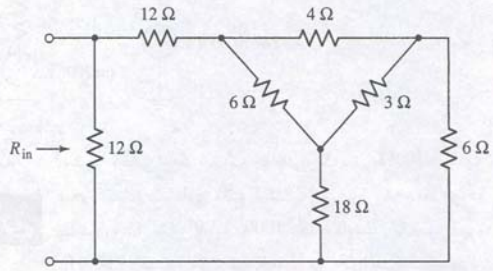
شکل ۵.۱۰۹

۷۳. از تبدیل Δ-Y و Y-Δ برای یافتن مقاومت شبکه شکل ۵.۱۱۰ استفاده نمایید.



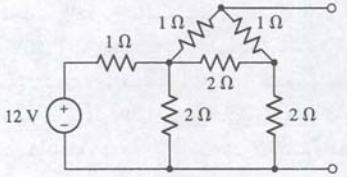
شکل ۵.۱۱۰

۷۴. R_{in} را برای مدار شکل ۵.۱۱۱ بیابید.



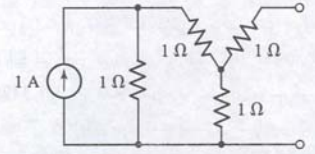
شکل ۵.۱۱۱

۷۵. معادل تونن مدار شکل ۵.۱۱۲ را به‌دست‌آورید.



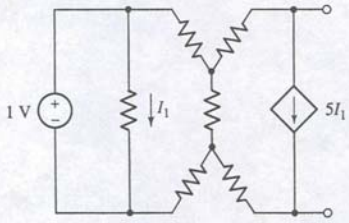
شکل ۵.۱۱۲

۷۶. معادل نورتن مدار شکل ۵.۱۱۳ را پیدا کنید.



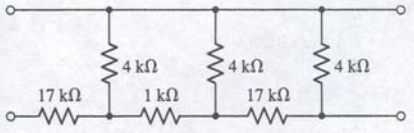
شکل ۵.۱۱۳

۷۷. اگر همه مقاومت‌ها در شکل ۵.۱۱۴ برابر 10Ω باشند، معادل تونن را برای مدار به‌دست‌آورید.



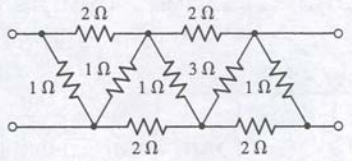
شکل ۵.۱۱۴

۷۸. (الف) شبکه شکل ۵.۱۱۵ را با سه مقاومت Y جایگزین کنید. (ب) تحلیل PSpice را برای تحقیق معادل‌بودن جواب به‌کاربرید (راهنمایی: یک مقاومت بار اضافه نمایید).



شکل ۵.۱۱۵

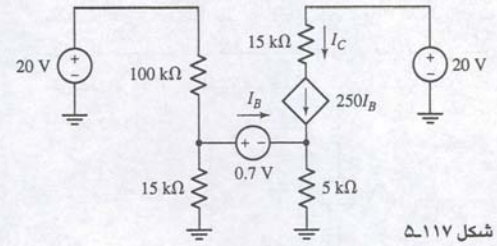
۷۹. (الف) به‌جای شبکه شکل ۵.۱۱۶ یک شبکه Δ سه مقاومتی قرار دهید. (ب) با تحلیل PSpice صحت جواب را نشان دهید. (راهنمایی: یک مقاومت بار اضافه نمایید).



شکل ۵.۱۱۶

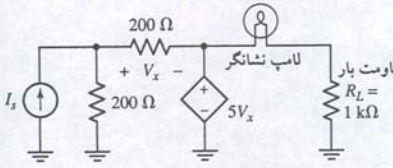
۵.۶ انتخاب روش: مقایسه انواع تکنیک‌ها

۸۰. مدار شکل ۵.۱۱۷ مدل نسبتاً دقیقی برای یک ترانزیستور دوقطبی پیوندی در ناحیه فعال مستقیم است. جریان کلکتور I_C را به‌دست‌آورید. صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید.



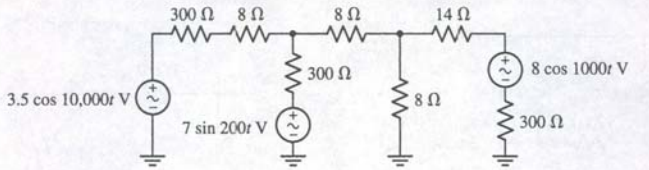
شکل ۵.۱۱۷

۸۱. مقاومت بار در شکل ۵.۱۱۸ می‌تواند به راحتی تا 1W توان را قبل از داغ‌شدن و آتش‌گرفتن تلف نماید. لامپ را می‌توان مقاومتی 10.6Ω تصور کرد، به‌شرطی‌که جریانی کمتر از 1A از آن عبور کند. برای بیش از 1A ، مقاومت آن 15Ω می‌باشد. حداکثر مقدار مجاز I_s چقدر است؟ پاسخ خود را با PSpice تست کنید.



شکل ۵.۱۱۸

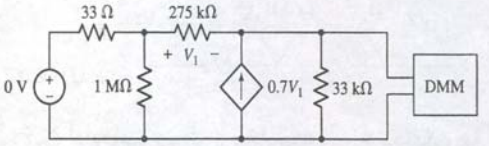
۸۲. گوش انسان می‌تواند امواج بین 20Hz تا 20kHz را بشنود. اگر هر مقاومت در شکل ۵.۱۱۹ یک بلندگوی 8Ω باشد، کدام‌یک از سیگنال ژنراتورها (که به‌عنوان یک منبع ولتاژ عملی مدل‌سازی می‌شود)



شکل ۵ـ۱۱۹

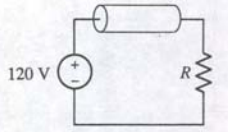
بیشترین صدا را تولید می‌کند؟ (بلندی صدا را متناسب با توان انتقالی به بلندگو تصور کنید) چون هر منبع در فرکانس متفاوتی عمل می‌کند، تجمیع توان در این‌جا قابل اعمال است.

۸۳. یک DMM طبق شکل ۵ـ۱۲۰ به مقاومتی وصل است. اگر مقاومت داخلی DMM برابر 1MΩ باشد، به هنگام اندازه‌گیری مقاومت، چه مقدار نمایش داده می‌شود؟



شکل ۵ـ۱۲۰

۸۴. یک ماده فلزی از یک شهاب‌سنگ در روستایی از ایالت ایندیانا یافت شده است. این ماده دارای مقاومت ویژه 50Ωcm بوده و در یک سیلندر جاسازی شده است. سیلندر به مدار شکل ۵ـ۱۲۱ وصل است و وابستگی‌های $T = 200P^{0.25}°C$ دارد، که توان P انتقال‌یافته به سیلندر برحسب وات است. مقاومت ماده آنقدرها به دما وابستگی نشان نمی‌دهد. اگر $R = 10\Omega$ باشد و حداکثر توان را جذب کند، دمای سیلندر چقدر است؟



شکل ۵ـ۱۲۱

۸۵. به‌عنوان بخشی از یک سیستم حفاظتی، یک سیم 100Ω نازک به پنجره با ماده غیرهادی وصل است. با این فرض که فقط دوازده باطری قابل شارژ 1.5V ، 1000 عدد مقاومت و یک بوق پیزو 2900Hz داشته باشیم که 15mA در 6V را می‌کشد، مداری طراحی کنید که بدون هر حرکت مکانیکی اجزاء در صورت شکسته‌شدن پنجره یا پاره‌شدن سیم، بوق را به‌صدا درآورد. توجه کنید که بوق به حداقل 6V dc نیاز دارد (حداکثر نیز 28V است).

۸۶. سه لامپ 45W دراصل به‌صورت یک شبکه Y با یک منبع 120V ac آرایش یافته است. وسط این اتصال با صفر آن به کارنرفته است. اگر شدت لامپ متناسب با توان کشیده‌شده به‌وسیله آن باشد، یک مدار جدید 120V ac طراحی کنید، به نحوی که سه لامپ آرایش Δ داشته و شدتی برابر با وضعیت Y داشته باشند. صحت طراحی را به‌وسیله PSpice با مقایسه توان مصرفی هر لامپ در مدار (آن‌ها را با مقاومت‌های مناسب مدل‌سازی نمایید) با توانی که هر کدام در شبکه Y مصرف می‌کردند، تحقیق کنید.

۸۷. یک LED قرمزرنگ مخصوص دارای حداکثر میزان جریان 35mA است و اگر از آن تجاوز کند، داغی و خرابی ناشی خواهد شد. مقاومت LED غیرخطی است، ولی سازنده حداقل مقاومت 47Ω و حداکثر 117Ω را برای آن اعلام کرده است. برای روشن‌کردن LED تنها باطری 9W موجود است. مداری طراحی کنید که بدون آسیب‌رساندن، حداکثر توان ممکن را به LED حمل کند. تنها از مقادیر استاندارد مقاومت استفاده نمایید.

فصل ششم

تقویت‌کننده عملیاتی

مقدمه

تاکنون به‌قدر کافی قوانین اصلی و تکنیک‌های تحلیل مدار به ما معرفی شده است تا بتوانیم آن‌ها را به چند مدار عملی جالب اِعمال کنیم. در این فصل ما بر یک وسیله الکتریکی مفید به نام تقویت‌کننده‌های عملیاتی [1] یا به‌طور خلاصه op amp توجه خواهیم کرد.

مفاهیم کلیدی

- مشخصات ایده‌آل op amp ها
- تقویت‌کننده‌های معکوس‌کننده و معکوس‌نکننده
- مدارهای تقویت‌کننده جمع و تفاضل
- طبقات op amp پی‌درپی
- استفاده از op amp در ساخت منابع ولتاژ و جریان
- مشخصات غیرایده‌آل op amp ها
- بهره ولتاژ و پسخورد
- مقایسه‌گرهای پایه مدارهای تقویت‌کننده در وسایل اندازه‌گیری

۶ـ۱ پیش‌زمینه

پیدایش تقویت‌کننده عملیاتی اولیه به دهه ۱۹۴۰ باز می‌گردد که در آن زمان مدارهای اصلی با استفاده از لامپ‌های خلاء برای انجام جمع، تفریق، تقسیم، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ساخته شد و به این ترتیب انجام آن‌ها با کامپیوترهای آنالوگ اولیه امکان‌پذیر گردید. این پیدایش ساخت کامپیوترهای آنالوگ (در برابر دیجیتال) را به دنبال داشت تا معادلات دیفرانسیل پیچیده را حل کند. اولین قطعه op amp تجاری که K2-W نام داشت، در حدود سال ۱۹۵۲ به وسیله Philbrick Researches inc. از بوستون ساخته شد و تا اول دهه ۱۹۷۰ ادامه یافت (شکل ۱ـ۶(الف)). این قطعات لامپ خلاء [2] اولیه با ۳ اونس وزن (85 g) و ابعاد $1\frac{33}{64}" \times 2\frac{9}{64}" \times 4\frac{7}{64}"$ (3.8 cm × 5.4 cm × 10.4 cm)، حدود US$0.22 فروخته می‌شد برعکس op amp های مدرن مدار مجتمع (IC) مانند Fairchild KA741 وزنی کمتر از 500 mg و ابعاد 5.7 mm × 4.9 mm × 1.8 mm داشته و تقریباً به US$0.22 فروخته می‌شوند.

در مقایسه با op amp های مبتنی بر لامپ‌های خلاء، op amp های مدرن از حدود 25 ترانزیستور یا بیشتر به همراه چندین مقاومت و خازن جهت تولید مشخصه رفتاری مطلوب در یک تراشه سیلیکان ساخته شده‌اند. بنابراین آن‌ها در سطح ولتاژ تغذیه بسیار پایین‌تری (مثلاً ±18 V در برابر ±300 V مربوط به K2-W) کار می‌نمایند و قابل اطمینان‌تر و کوچکترند (شکل ۱ـ۶(ب) و (ج)). در بعضی موارد IC ممکن‌است چندین op amp داشته باشد.

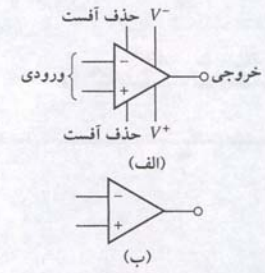
(ج)

(ب)

(الف)

شکل ۱ـ۶ مدار Philbrick op amp K2-W بر اساس یک جفت لامپ خلاء 12AX7A . (ب) LMV321 op amp که در انواع تلفن‌ها و بازی‌ها به کار می‌رود. (ج) LMC6035 op amp که در آن ۱۱۴ ترانزیستور فشرده‌شده و به قدری کوچک است که در بالای یک میخ قرار می‌گیرد.

1. operational amplifier 2. vacuum tube



شکل ۲ـ۶ (الف) نماد الکتریکی op amp. (ب) حداقل اتصال‌های لازم برای نمایش شماتیک op amp.

علاوه بر پایه خروجی و دو پایه ورودی، پایه‌های دیگری وجود دارند که از طریق آن‌ها انرژی لازم برای روشن‌شدن ترانزیستورها، تنظیم‌های بیرونی برای بالانس و جبران خروجی op amp، فراهم می‌گردد. سمبل یا نماد به‌کاررفته برای یک تقویت‌کننده عملیاتی در شکل ۲ـ۶(الف) ملاحظه می‌شود. در این‌جا ما به مدار درونی op amp یا IC کاری نداریم، بلکه فقط روابط ولتاژ و جریان بین پایانه‌های ورودی و خروجی را بررسی خواهیم کرد. بنابراین فعلاً نماد الکتریکی ساده‌تری مطابق شکل ۲ـ۶(ب) را به‌کارمی‌بریم. دو پایانه ورودی در سمت چپ و تنها پایانه خروجی در سمت راست دیده می‌شوند. پایانه‌ای که با "+" علامت خورده است به ورودی معکوس‌نکننده یا (غیرمعکوس‌گر) و "−" ورودی معکوس‌کننده یا (معکوس‌گر و یا وارونگر) معروفند.

۲ـ۶ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل

مهندسین مدارهای مجتمع هنگام طراحی یک op amp، می‌کوشند تا مشخصه مدار حاصل ایده‌آل باشد. در عمل خواهیم دید که اغلب تقویت‌کننده‌ها چنان خوب کار می‌کنند که می‌توان آن‌ها را ایده‌آل فرض کرد. مشخصه‌های یک op amp ایده‌آل، مبنای دو اصل یا قاعده اساسی را که تا حدی غیرعادی است تشکیل می‌دهند.

> قواعد یک op amp ایده‌آل:
> ۱. هیچ جریانی از هیچ‌یک از پایانه‌های ورودی داخل نمی‌شود.
> ۲. بین دو پایانه ورودی اختلاف پتانسیلی وجود ندارد.

در یک op amp واقعی جریان نشتی بسیار کمی به ورودی وارد می‌شود (گاهی به کوچکی 40 femtoamps). همچنین ممکن‌است در بعضی مواقع اختلاف پتانسیل کوچکی بین دو پایانه ورودی مشاهده کرد. با این وجود در مقایسه با دیگر ولتاژها و جریان‌ها در مدار این مقادیر آن‌قدر کوچکند که لحاظ آن‌ها در تحلیل، معمولاً تغییری در محاسبات ما نمی‌دهد.

هنگام تحلیل مدار op amp، یک نکته دیگر را باید به‌خاطر بسپاریم. برخلاف مدارهایی که تاکنون مطالعه کرده‌ایم، مدار op amp همواره بسته به **ورودی**، دارای **خروجی** است. بنابراین ما مدارهای op amp را با هدف دستیابی به عبارتی برای خروجی برحسب کمیت‌های ورودی بررسی خواهیم کرد. معمولاً بهتر است تحلیل مدار op amp را از ورودی شروع و به سمت خروجی پیش ببریم.

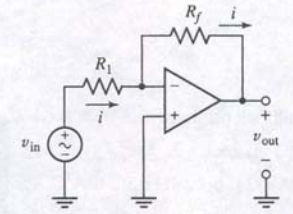
مدار شکل ۳ـ۶ به‌نام **تقویت‌کننده معکوس‌گر** شناخته می‌شود. ما این مدار را با شروع از منبع ولتاژ ورودی برای تحلیل به کمک KVL انتخاب کرده‌ایم. جریان i فقط از مقاومت‌های R_1 و R_f عبور می‌کند. اولین قاعده op amp ایده‌آل بیان می‌کند که هیچ جریانی وارد پایانه معکوس‌گر نمی‌گردد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$-v_{in} + R_1 i + R_f i + v_{out} = 0$$

و می‌توان آن را طوری مرتب کرد که ورودی را به خروجی مرتبط سازد:

$$v_{out} = v_{in} - (R_1 + R_f) i \qquad (۱)$$

ولی اکنون یک معادله و دو مجهول داریم، زیرا $v_{in} = 5\sin 3t$ mV و $R_1 = 4.7$ kΩ و $R_f = 47$kΩ می‌باشد. پس برای محاسبه ولتاژ خروجی نیاز به یک معادله دیگر است تا i را فقط برحسب v_{out} و v_{in}، R_1 و R_f بیان دارد.



شکل ۳ـ۶ op amp برای ساختن یک تقویت‌کننده معکوس‌گر به‌کاررفته است و در آن $v_{in} = 5\sin 3t$ mV، $R_1 = 4.7$ kΩ و $R_f = 47$ kΩ می‌باشد.

اکنون زمان مناسبی است تا متذکر شویم ما هنوز از قاعده ۲ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل استفاده نکرده‌ایم. چون ورودی معکوس‌نکننده به زمین وصل است، ولتاژ آن در صفر است. طبق قاعده ۲ از op amp، ورودی معکوس‌گر نیز در صفر ولت است. این بدان معنی نیست که دو ورودی به‌طور فیزیکی به هم اتصال دارند و ما نیز نباید چنین فرض‌هایی کنیم. در واقع دو ولتاژ یکدیگر را دنبال می‌کنند: اگر ما سعی در تغییر ولتاژ یک پایه بکنیم، پایه دیگر به سمت آن خواهد رفت. بنابراین می‌توان یک معادله KVL دیگر نوشت:

$$-v_{in} + R_1 i + 0 = 0$$

یا

$$i = \frac{v_{in}}{R_1} \qquad (۲)$$

با ترکیب معادلات (۲) و (۱)، عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} خواهیم داشت:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in} \qquad (۳)$$

با جایگزینی $v_{in} = 5\sin 3t$ mV، $R_1 = 4.7$kΩ و $R_f = 47$kΩ داریم:

$$v_{out} = -50\sin 3t \text{ mV}$$

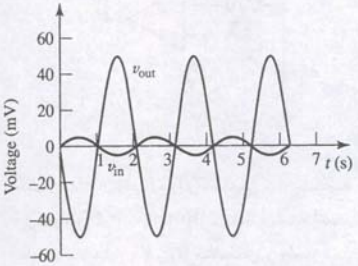
فرض کرده بودیم $R_f > R_1$، پس این مدار سیگنال ورودی v_{in} را تقویت می‌کند. اگر $R_f < R_1$ باشد مدار سیگنال ورودی را تضعیف خواهد کرد. همچنین توجه کنید که علامت ولتاژ خروجی مخالف ورودی است و به این دلیل نام **تقویت‌کننده معکوس‌گر** برای آن اختیار شده است. شکل ۴ـ۶ به منظور مقایسه، خروجی در برابر ورودی ترسیم شده است.

در این‌جا چنین به‌نظر می‌رسد که op amp ایده‌آل قانون KCL را نقض کرده است. خصوصاً این‌که هیچ جریانی از پایانه‌های ورودی وارد یا خارج نمی‌شود، ولی تا مقداری جریان از پایانه خروجی را داریم! شاید این وضعیت اینگونه تعبیر شود که op amp به نوعی از هیچ، الکترون تولید می‌کند و یا آن‌ها را همواره و برای همیشه نابود می‌نماید (بسته به جهت جریان). مسلماً این امکان‌پذیر نیست. مشکل این‌جا است که ما op amp را به همان طریق عناصر غیرفعال مورد توجه قرار داده‌ایم. در واقع، op amp نمی‌تواند کار کند مگر این‌که به منبع بیرونی وصل شده باشد و در واقع جریان پایانه خروجی آن از این منابع تأمین می‌شود.

هرچند نشان دادیم که مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ می‌تواند یک سیگنال ac را تقویت کند (در این‌جا یک موج سینوسی با فرکانس 3 rad/s و دامنه 5 mV)، با ورودی dc هم به همان خوبی کار می‌کند. ما این نوع عملکرد را در شکل ۵ـ۶ بررسی می‌کنیم، که مقادیر R_1 و R_f طوری انتخاب می‌شوند که ولتاژ خروجی حاصل 10- V باشد.

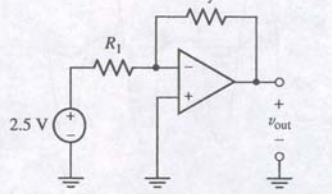
این همان مداری است که در شکل ۳ـ۶ ملاحظه کردیم ولی ولتاژ dc ورودی 2.5 V است. چون تغییر دیگری به عمل نیامده است، عبارتی که در معادله (۳) آمده است برای این مدار هم معتبر است. برای به‌دست‌آوردن خروجی مطلوب، ما به دنبال نسبت R_f به R_1 به مقدار 10/2.5 یا 4 هستیم. چون تنها نسبت اهمیت دارد، فقط کافی است که مقدار مناسبی را برای یک مقاومت انتخاب کنیم، آن‌گاه مقدار دومی مشخص خواهد شد. مثلاً ما می‌توانیم $R_1 = 100\ \Omega$ را برگزینیم (بنابراین $R_f = 400\ \Omega$ است) یا حتی $R_f = 8$ MΩ را انتخاب کنیم (که در این‌صورت $R_1 = 2$ MΩ است) و در عمل قیودی دیگر ممکن‌است انتخاب‌های ما را محدودتر سازند (مانند جریان تغذیه).

بنابراین آرایش مدار همچون یک نوع تقویت‌کننده معمولی ولتاژ کار می‌کند (با یک تضعیف‌کننده، اگر نسبت R_f به R_1 کمتر از 1 باشد)، ولی به نوعی خاصیت غیرمعمول تغییر علامت ورودی را دارد. با این وجود راه دیگری هم وجود دارد که به همان سادگی قابل تحلیل است ـ تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر در شکل ۶ـ۶ نشان داده شده است. ما چنین مداری را در مثال زیر بررسی می‌کنیم.



شکل ۴ـ۶ شکل موج‌های ورودی و خروجی در مدار تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر.

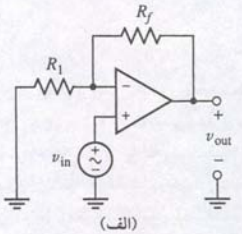
چون در چنین آرایشی پایانهٔ ورودی معکوس‌گر ولتاژ صفر پیدا می‌کند به آن نام زمین مجازی می‌دهند. این به معنی زمین‌شدن این پایانه نیست. این نام گاهی منشا بروز اشتباه در دانشجویان می‌شود. تمام کارهای لازم برای ممانعت از ایجاد اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های ورودی در درون op amp انجام می‌شود. پایانه‌های ورودی به هم اتصال کوتاه نمی‌شوند.



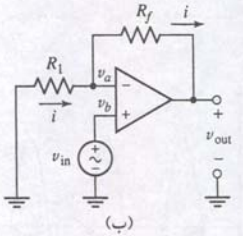
شکل ۵ـ۶ یک مدار تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر با 2.5 V ورودی.

مثال ۱ـ۶

شکل موج خروجی را برای مدار op amp معکوس‌نکننده شکل ۶ـ۶ (الف) رسم نمایید. از $v_{in} = 5\sin 3t$ mV، $R_1 = 4.7k\Omega$ و $R_f = 47k\Omega$ استفاده کنید.



(الف)



(ب)

شکل ۶ـ۶ (الف) برای ساختن تقویت‌کنندهٔ غیرمعکوس‌گر از op amp استفاده شده است. (ب) جریان‌های R_1 و R_f مشخص و ولتاژهای پایانه‌های ورودی نامگذاری شده است.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

ما به دنبال عبارتی برای v_{out} هستیم که فقط به کمیت‌های معلوم v_{in}، R_1 و R_f وابسته باشد.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

چون مقادیر مقاومت‌ها و ورودی مشخص شده‌اند ما با نام‌گذاری جریان i، و دو ولتاژ ورودی طبق شکل ۵ـ۶ (ب) شروع می‌کنیم. ضمناً فرض می‌کنیم که op amp ایده‌آل است.

- **ارائه طرح.**

گرچه تحلیل مش روش مناسبی برای دانشجویان است، ولی به‌نظر می‌رسد که برای op amp، تحلیل گرهی عملی‌تر است، زیرا راه مستقیمی برای تعیین جریان خارج‌شده از op amp وجود ندارد.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

دقت کنید که ما قاعده ۱ مربوط به op amp را به‌کارمی‌بریم و جریان یکسانی را در دو مقاومت فرض می‌کنیم: یعنی هیچ جریانی وارد پایانه ورودی نمی‌گردد. با استفاده از تحلیل گرهی برای یافتن عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} خواهیم داشت:

$$0 = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f} \quad \text{در گره } a \qquad (۴)$$

$$v_b = v_{in} \quad \text{در گره } b \qquad (۵)$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است؟**

هدف یافتن عبارتی است که ولتاژ خروجی را برحسب ولتاژ ورودی به‌دست‌دهد. زیرا به‌نظر نمی‌رسد که معادله (۴) یا (۵) این کار را انجام دهند. معهذا ما هنوز قاعده ۲ تقویت‌کننده ایده‌آل را به‌کار نبرده‌ایم و خواهیم دید که تقریباً در هر مدار تقویت‌کننده، هر دو قاعده باید به‌کاروند تا چنین عبارتی به‌دست‌آید. بنابراین داریم: $v_a = v_b = v_{in}$ و معادله (۴) چنین خواهد شد:

$$0 = \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{in} - v_{out}}{R_f}$$

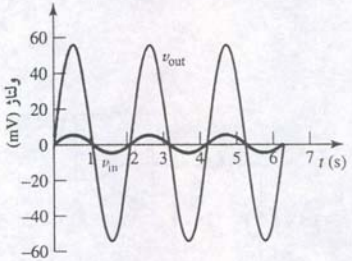
- **اقدام به حل.**

با مرتب‌کردن عبارت فوق، عبارتی برای ولتاژ خروجی برحسب ورودی v_{in} خواهیم داشت:

$$v_{out} = (1 + \frac{R_f}{R_1})v_{in} = 11v_{in} = 55\sin 3t \ \text{mV}$$

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟**

به‌منظور مقایسه، موج خروجی همراه با موج ورودی در شکل ۷ـ۶ ترسیم شده است. برخلاف شکل موج خروجی تقویت‌کننده معکوس‌گر، ورودی و خروجی برای نوع معکوس‌نکننده (غیرمعکوس‌گر) هم‌فازند. البته نباید چنین انتظار نداشت: این وضعیت از نام آن مشهود است. توجه کنید که این مدار قادر نیست فرکانس شکل موج را اصلاح کند، بلکه فقط روی دامنه آن اثر دارد.

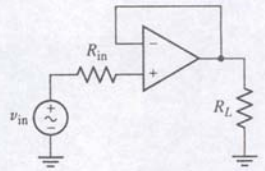


شکل ۷ـ۶ شکل موج‌های ورودی و خروجی مدار تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر.

تمرین

۱ـ۶ عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} برای مدار شکل ۸ـ۶ به‌دست‌آورید.

جواب: $v_{out} = v_{in}$. مدار به‌نام "دنبالگر ولتاژ" معروف است، زیرا ولتاژ خروجی، ولتاژ ورودی را ردیابی یا دنبال می‌کند.



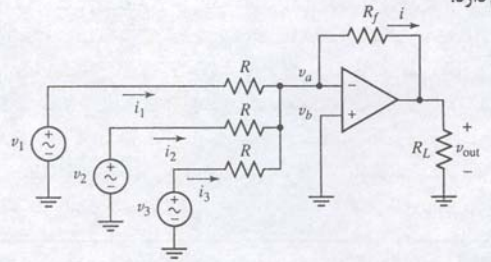
شکل ۸ـ۶

درست همچون تقویت‌کننده معکوس‌گر، تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر هم با ورودی‌های dc و ac کار می‌کند، ولی دارای بهره ولتاژ $v_{out}/v_{in} = 1 + (R_f/R_1)$ است. بنابراین اگر ما $R_f = 9\Omega$ و $R_1 = 1\Omega$ را انتخاب کنیم، ولتاژ خروجی v_{out}، ۱۰ برابر بزرگتر از ولتاژ ورودی v_{in} خواهد بود. برعکس تقویت‌کننده معکوس‌گر، خروجی و ورودی تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر (یا معکوس‌نکننده) دارای علامت یکسانی هستند و ولتاژ خروجی نمی‌تواند کمتر از ورودی باشد؛ زیرا حداقل بهره برابر 1 است. تقویت‌کننده‌ای که انتخاب می‌شود به کاربرد موردنظر ما بستگی دارد. در حالت خاص مدار دنبالگر ولتاژ شکل ۸ـ۶، نمایش‌دهنده یک تقویت‌کننده غیرمعکوس‌کننده است که در آن R_1 در ∞ و R_f در صفر تنظیم شده است. خروجی به لحاظ علامت و مقدار با ورودی برابر است. شاید این مدار به عنوان یک نوع مدار قابل طرح نباشد، ولی ما باید به خاطر بسپاریم که دنبالگر ولتاژ جریانی از ورودی نمی‌کشد (البته در حالت ایده‌آل) ـ یعنی می‌تواند بین ولتاژ ورودی v_{in} و یک بار مقاومتی که به خروجی تقویت‌کننده وصل است، R، به عنوان بافر عمل کند.

ما قبلاً ذکر کردیم نام "تقویت‌کننده عملیاتی" از استفاده از چنین وسایلی که اعمال حسابی روی سیگنال‌های آنالوگ انجام دهد نشأت گرفته است (آنالوگ یعنی غیردیجیتال، بلادرنگ، دنیای واقعی). همان‌طور که ما در دو مثال زیر خواهیم دید، این شامل هر دو عمل جمع و تفریق سیگنال‌های ورودی است.

مثال ۲ـ۶

برای مدار op amp شکل ۹ـ۶، v_{out} را برحسب v_1، v_2 و v_3 به‌دست‌آورید. این مدار تقویت‌کننده مجموع هم نام دارد.



شکل ۹ـ۶ مدار تقویت‌کنندهٔ مجموع سه ورودی.

در آغاز ملاحظه می‌شود که مدار فوق مشابه با مقدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ است. مجدداً هدف به‌دست‌آوردن عبارتی برای v_{out} (که در این حالت ولتاژ دو سر R_L است) برحسب ورودی‌های (در این‌جا v_1، v_2 و v_3) می‌باشد. چون هیچ جریانی نمی‌تواند وارد پایانه معکوس‌کننده شود، می‌دانیم:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

بنابراین می‌توانیم معادله زیر را در گره v_a بنویسیم:

$$0 = \frac{v_a - v_{out}}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} + \frac{v_a - v_3}{R}$$

این معادله حاوی v_{out} و ولتاژهای ورودی است، ولی متأسفانه ولتاژ گرهی v_a نیز در آن هست. برای حذف این کمیت نامشخص از عبارت فوق، باید معادله دیگری که v_a را به v_{out}، ولتاژهای ورودی، R_f و R ربط دهد بنویسیم. در این‌جا به‌خاطر می‌آوریم که هنوز قاعده ۲ تقویت‌کننده عملیاتی را به‌کار نبرده‌ایم و مطمئناً استفاده از هر دو قاعده را هنگام تحلیل مدار لازم داریم. بنابراین چون $v_a = v_b = 0$ است می‌توان نوشت:

$$0 = \frac{v_{out}}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + \frac{v_3}{R}$$

با مرتب‌کردن رابطه فوق عبارتی برای v_{out} به‌دست می‌آید:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3) \qquad (۶)$$

و در حالت خاص که $v_2 = v_3 = 0$ است می‌بینیم که نتیجه ما با معادله (۳) توافق دارد که برای مدار مشابهی طراحی شد.

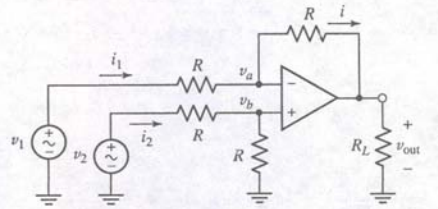
در این نتیجه چندین نکته جالب دیده می‌شود، اول این‌که اگر $R_f = R$ باشد، آن‌گاه خروجی منفی مجموع v_1، v_2 و v_3 است. علاوه‌بر آن ما می‌توانیم نسبت R_f را به R انتخاب کنیم تا جمع را در مقدار ثابتی ضرب کند. بنابراین، به عنوان مثال اگر سه ولتاژ سیگنال‌هایی را از سه منبع با مقیاس جداگانه نشان دهند، و طوری کالیبره شده باشند که 1 V = 1 lb (-1 lb برابر با پاوند وزن است)، می‌توانیم $R_f = R/2.205$ را برای یافتن ولتاژی که نمایش‌دهنده ترکیب وزن به کیلوگرم است، انتخاب کنیم (به دلیل ضریب تبدیل با خطایی حدود 1 درصد).

همچنین می‌بینید که R_L در عبارت نهایی به چشم نمی‌خورد. مادامی که R_L خیلی کوچک نباشد، روی عملکرد مدار تأثیری ندارد. در حال حاضر ما موضوع را تا آن حد دقیق بررسی نکرده‌ایم که این مسائل پیش‌بینی شود. این مقاومت درواقع معادل تونن وسیله‌ای را نشان می‌دهد که به خروجی op amp وصل می‌باشد. اگر وسیله خروجی یک ولتمتر ساده باشد، آن‌گاه R_L همان مقاومت معادل تونن در دو پایانه ولتمتر است (حدود 10MΩ یا بیشتر). همچنین ممکن‌است وسیله خروجی یک بلندگو باشد (معمولاً 8Ω)، که در این‌صورت صدای سه منبع را خواهیم شنید، در این‌حالت v_1 ، v_2 و v_3 می‌توانند میکروفون‌ها را نشان دهند.

یک نکته احتیاطی: اغلب بالاجبار تصور می‌شود که جریان i در شکل ۹ـ۶ نه فقط از R_f که از R_L نیز عبور می‌کند. ولی این‌چنین نیست! ممکن‌است جریان وارد پایانه op amp هم بشود، بنابراین جریان داخل دو مقاومت برابر نیستند. به این دلیل از نوشتن معادلات کیرشهف، KCL در پایانه خروجی op amp خودداری می‌کنیم. چون جریان خروجی op amp نامعلوم است، تحلیل گرهی بر مش در بسیاری از مدارهای op amp ارجحیت دارد.

تمرین

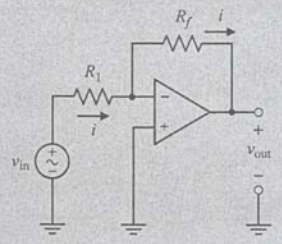
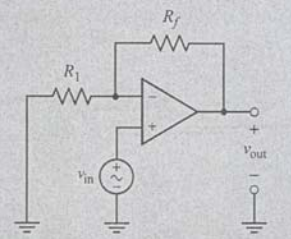
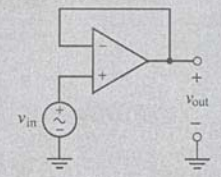
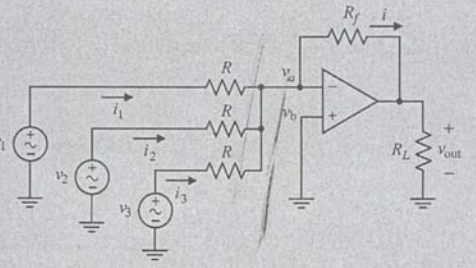
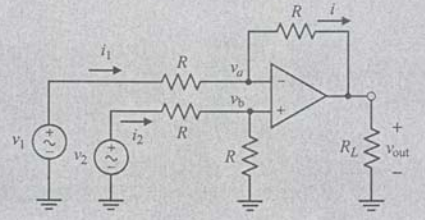
۲ـ۶ عبارتی برای v_{out} برحسب v_1 و v_2 در شکل ۱۰ـ۶ به‌دست‌آورید. این مدار به تقویت‌کننده تفاضلی معروف است.



شکل ۱۰ـ۶

جواب: $v_{out} = v_2 - v_1$. **راهنمایی:** برای به‌دست‌آوردن v_b از تقسیم ولتاژ استفاده نمایید.

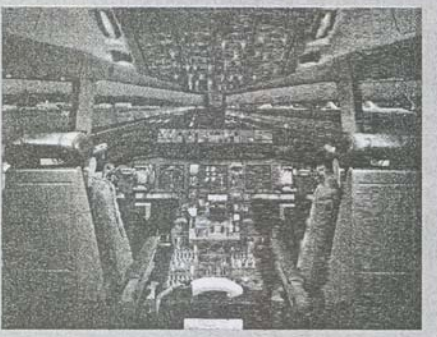
جدول ۱ـ۶ خلاصه مدارهای op amp پایه.

Name	Circuit Schematic	Input-Output Relation
تقویت‌کننده معکوس‌گر		$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in}$
تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر		$v_{out} = (1 + \frac{R_f}{R_1}) v_{in}$
دنبال‌گر ولتاژ (به آن تقویت‌کننده بهره واحد می‌گویند)		$v_{out} = v_{in}$
تقویت‌کننده مجموع		$v_{out} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3)$
تقویت‌کننده تفاضل‌گر		$v_{out} = v_2 - v_1$

کاربرد عملی

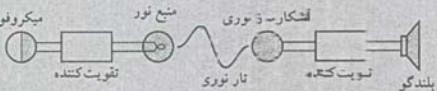
سیستم درون ارتباطی فیبر نوری

سیستم ارتباط درونی بین دو نقطه را می‌توان بسته به محیط مورد استفاده، به روش‌های متعددی برپا کرد. سیستم‌های فرکانس رادیویی توان پایین خوب کار می‌کنند. ولی در معرض تداخل دیگر امواج RF و استراق سمع می‌باشند. استفاده از یک سیم ساده برای اتصال میکروفون به یک بلندگو بسیاری از تداخل‌های RF را حذف می‌کند (البته به همراه یک تقویت‌کننده مناسب). ولی سیم‌ها به علت فرسایش روکش در معرض خوردگی و اتصالی هستند و نیز وزن آن‌ها در هواپیماها و کاربردهای نظیر آن مسئله‌ساز است (شکل ۱۱ـ۶).



شکل ۱۱ـ۶ این محیط کاربرد اغلب قیدهای طراحی را تعیین می‌کند.

روش دیگر تبدیل سیگنال الکتریکی از میکروفون به یک سیگنال نوری است، که می‌تواند از فیبر نوری نازک با قطر حدود $50\mu m$ انتقال یابد. آنگاه سیگنال نوری دوباره به سیگنال الکتریکی برگردانده شده و پس از تقویت به بلندگو ارسال می‌گردد. نمودار شماتیک چنین سیستمی در شکل ۱۲ـ۶ مشاهده می‌گردد. برای مخابره دوطرفه، دو سیستم از این نوع لازم است.

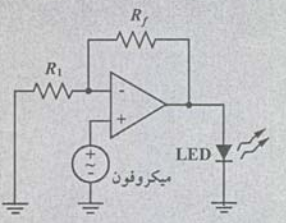


شکل ۱۲ـ۶ نمودار یک سیستم مخابراتی سادهٔ فیبر نوری.

ما ارسال و دریافت سیگنال نوری را جداگانه بررسی خواهیم کرد، زیرا در واقع مدار الکتریکی آن‌ها مستقل از یکدیگرند. شکل ۱۳ـ۶ مدار مولد سیگنال را نشان می‌دهد و شامل یک میکروفون، یک دیود تولیدکننده نور (LED)، و یک مدار تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر برای راه‌اندازی LED است. آنچه دیده نمی‌شود اتصالات لازم تریّ برای خود op amp ها است. نور خارج‌شده از LED حدوداً متناسب با جریان آن است. می‌دانیم که بهره ولتاژ تقویت‌کننده با رابطه زیر داده می‌شود،

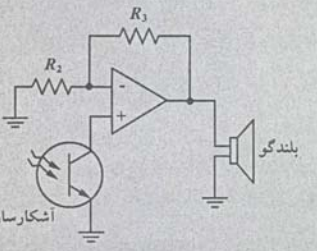
$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

که مستقل از مقاومت LED است. برا انتخاب مقدار R_1 و R_f، ما باید ولتاژ ورودی از میکروفون و خروجی لازم به بلندگو را بدانیم تا LED را روشن کنیم. یک اندازه‌گیری ساده نشان می‌دهد که حداکثر ولتاژ خروجی میکروفون وقتی که از صوت معمولی استفاده می‌کند، حدود 40mV است. طبق مشخصات سازندگان حداکثر ولتاژ دو سر LED برابر 1.6V است. بهره طراحی را $1.6/0.04 = 40$ اختیار می‌نماییم. با انتخاب $R_1 = 1\ k\Omega$، مقدار $R_f = 39\ k\Omega$ خواهد شد.



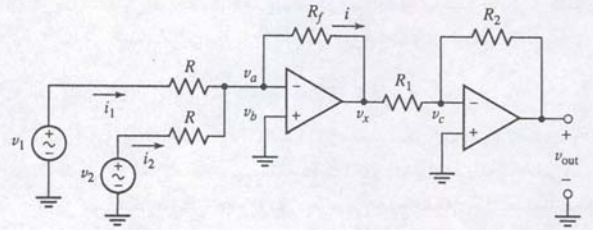
شکل ۱۳ـ۶ مدار تبدیل سیگنال الکتریکی حاصل از میکروفون به سیگنال نوری.

مدار شکل ۱۴ـ۶ بخش گیرنده سیستم ارتباط درونی ما است. این مدار، سیگنال نوری را از فیبر به سیگنال الکتریکی تبدیل می‌کند به نحوی که صدای قابل شنودی از بلندگو شنیده می‌شود.



شکل ۱۴ـ۶ مدار گیرنده برای تبدیل سیگنال نوری به سیگنال صوتی.

پس از اتصال خروجی LED به فیبر نوری، سیگنالی حدود 10mV (حداکثر) به وسیله آشکارساز نوری اندازه‌گیری می‌شود. بلندگو با حداکثر توان 100mW و مقاومت معادل 8Ω انتخاب شده است. پس ولتاژ ماکزیمم مجاز آن 894mV است. بنابراین باید با انتخاب R_2 و R_3 تقویت‌کننده‌ای با بهره $894/10 = 89.4$ طراحی کنیم. با انتخاب $R_2 = 10k\Omega$ می‌بینیم که باید $R_3 = 884k\Omega$ باشد و به این ترتیب طراحی پایان می‌یابد. در عمل مدار کار خواهد کرد ولی به دلیل غیرخطی‌بودن LED، صوت حاصل کمی اعوجاج‌دار خواهدبود. ما اثبات طراحی را به متون پیشرفته‌تر الکترونیک محول می‌کنیم.



شکل ۱۵ـ۶ یک مدار op amp دو طبقهٔ تشکیل‌شده از یک تقویت‌کنندهٔ جمع‌کننده و یک مدار تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر.

۳ـ۶ طبقات پی‌درپی

گرچه op amp وسیله کاملاً انعطاف‌پذیری است، کاربردهای بسیار زیادی وجود دارند که یک op amp برای آن کفایت نمی‌کند. در این موارد، می‌توان نیازهای کاربرد را با اتصال پی‌درپی (متوالی) چند op amp در یک مدار مرتفع کرد. مثالی از این نوع در شکل ۱۵ـ۶ ملاحظه می‌گردد، که متشکل از مدار تقویت‌کننده مجموع شکل ۹ـ۶، با تنها دو منبع ورودی است و خروجی آن به یک تقویت‌کننده ساده معکوس‌گر متصل است. نتیجه این کار یک مدار op amp دو طبقه یا دو مرحله است.

ما قبلاً هر یک از این دو مدار را به‌طور جداگانه تحلیل کردیم. بر اساس تجربیات قبلی‌مان، اگر دو تقویت‌کننده جدا از هم باشند انتظار داریم که:

$$v_x = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad (۷)$$

و

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} v_x \qquad (۸)$$

در واقع چون دو مدار به یک نقطه وصلند و ولتاژ v_x با این اتصال تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد، ما می‌توانیم معادلات (۷) و (۸) را ترکیب کنیم:

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad (۹)$$

که مشخصه ورودی ـ خروجی مدار شکل ۱۵ـ۶ را توصیف می‌نماید. ما ممکن‌است همیشه نتوانیم چنین کاهشی انجام داده و طبقات را شناسایی کنیم. بنابراین ارزشمند است که ببینیم چگونه یک مدار دوطبقه شکل ۱۵ـ۶ به‌طور کلی قابل تحلیل است.

وقتی که مدارهای پی‌درپی را تحلیل می‌کنیم، بهتر است از طبقه آخر شروع کرده و به سمت طبقه ورودی باز گردیم. با توجه به قاعده 1 در op amp ایده‌آل، از هر دو مقاومت R_1 و R_2 جریان یکسانی عبور می‌کند. با نوشتن معادله گرهی مناسبی در نقطه v_c داریم:

$$0 = \frac{v_c - v_x}{R_1} + \frac{v_c - v_{out}}{R_2} \qquad (۱۰)$$

با اعمال قاعده ۲ در یک op amp ایده‌آل، می‌توان در معادله (۸)، $v_c = 0$ را درنظرگرفت. درنتیجه:

$$0 = \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} \qquad (۱۱)$$

چون هدف یافتن v_{out} برحسب v_1 و v_2 است به اولین op amp باز می‌گردیم تا v_x را برحسب دو کمیت ورودی به‌دست آوریم.

با اعمال قاعده ۱ تقویت‌کننده در ورودی معکوس‌کننده اولین op amp داریم:

$$0 = \frac{v_a - v_x}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} \qquad (۱۲)$$

قاعده ۲ تقویت‌کننده ایده‌آل اجازه می‌دهد تا v_a را در معادله (۱۲) با صفر جایگزین کنیم چون $v_a = v_b = 0$ می‌باشد. بنابراین معادله (۱۲) چنین خواهد شد:

$$0 = \frac{v_x}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} \qquad (۱۳)$$

اکنون معادله‌ای برای v_{out} برحسب v_x (معادله ۱۱) و معادله دیگری برای v_x برحسب v_1 و v_2 (معادله ۱۳) داریم. این معادلات به ترتیب با معادلات (۷) و (۸) برابرند و به این معنی است که اتصال پی‌درپی طبق شکل ۱۵ـ۶ رابطه ورودی ـ خروجی هیچ طبقه‌ای را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد. با ادغام معادلات (۱۱) و (۱۳) می‌بینیم که رابطه ورودی ـ خروجی برای op amp پی‌درپی یا متوالی برابر است با:

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad (۱۴)$$

که با معادله (۹) برابر است.

بنابراین مدار پی‌درپی همچون تقویت‌کننده مجموع، ولی بدون معکوس‌کردن فاز بین ورودی و خروجی عمل می‌کند. با انتخاب دقیق مقاومت، می‌توان مجموع دو ولتاژ ورودی را تقویت یا تضعیف کرد. اگر $R_1=R_2=R$ و $R_f=R$ باشد، می‌توان مداری با خروجی $v_{out} = v_1 + v_2$ داشت.

مثال ۳ـ۶

یک سیستم سوخت‌گازی چندتانکی در یک ماهواره کوچک نصب است. مقدار سوخت در هر تانک با اندازه‌گیری فشار (به psia[1]) ردیابی می‌شود. جزئیات تکنیکی ظرفیت تانک و فشار سنسور و محدوده ولتاژ در جدول ۲ـ۶ داده شده است. مداری طراحی کنید که یک ولتاژ مثبت dc را برای باقیمانده سوخت، مثلاً $1\ V = 100\%$ را فراهم کند.

جدول ۲ـ۶ داده‌های تکنیکی سیستم ردیابی فشار.

ظرفیت تانک ۱	10,000 psia
ظرفیت تانک ۲	10,000 psia
ظرفیت تانک ۳	2000 psia
محدوده فشار سنسور	0 to 12,500 psia
ولتاژ خروجی سنسور	0 to 5 Vdc

از جدول ۲ـ۶ ملاحظه می‌شود که سیستم دارای سه تانک گاز جداگانه است و بنابراین سنسورهای جداگانه‌ای لازم است. هر سنسور می‌تواند در ازای فشاری از 12500 psia تا 5 V متناظر آن را تولید کند. بنابراین وقتی تانک ۱ پر است، سنسور آن $5 \times (10000/12500) = 4\ V$ را تولید خواهد کرد. وضع مشابهی برای ردیاب تانک ۲ وجود دارد. با این وجود سنسور متصل به تانک ۳ حداکثر $5 \times (2000/12500) = 800\ mV$ را تولید خواهد کرد.

یک راه‌حل ممکن مدار شکل ۱۶ـ۶ (الف) است که از یک طبقه تقویت‌کننده مجموع تشکیل شده و v_1، v_2 و v_3 خروجی‌های سه سنسور را نشان می‌دهد، و به دنبال آن یک تقویت‌کننده معکوس‌گر آمده است که برای تنظیم مقدار و علامت ولتاژ است. چون مقاومت خروجی سنسور به ما گفته نشده است، ما با فری مطابق شکل ۱۶ـ۶ (ب) را برمی‌گزینیم، در نتیجه جریان از سنسور جاری نخواهد شد.

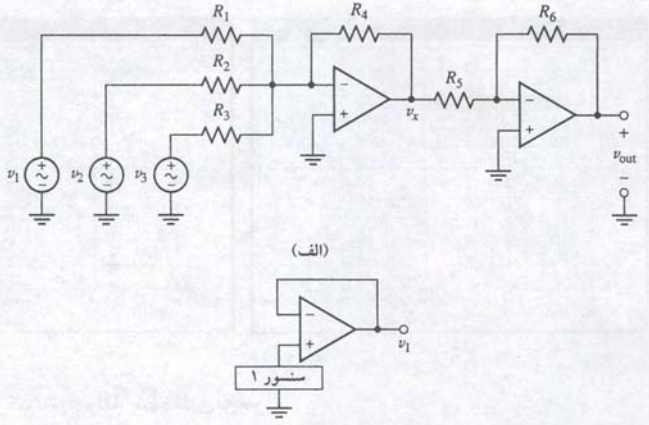
برای حفظ سادگی طراحی، ما با انتخاب R_1، R_2، R_3 و R_4 به مقدار $1\ k\Omega$ شروع می‌کنیم، البته هر مقدار کار را مادامی که هر چهار مقاومت مساوی باشند انجام می‌دهد. بنابراین خروجی طبقه جمع‌کننده برابر است با:

$$v_x = -(v_1 + v_2 + v_3)$$

مرحله آخر باید این ولتاژ را معکوس کرده و آن را طوری مقیاس‌بندی کند که ولتاژ خروجی $1\ V$ در ازای پربودن هر سه تانک حاصل گردد. نتیجه حالت پر عبارت‌است‌از $v_x = -(4 + 4 + 8.8) = -8.8\ V$. بنابراین آخرین حالت به نسبت ولتاژ $R_6/R_5 = 1/8.8$ نیاز دارد. با انتخاب اختیاری $R_6 = 1\ k\Omega$ ما درمی‌یابیم که باید $R_5 = 8.8\ k\Omega$ باشد تا طرح تکمیل گردد.

©Corbis

۱. پاوند بر اینچ مربع. این یک اندازه‌گیری اختلاف فشار نسبت به خلاء است.

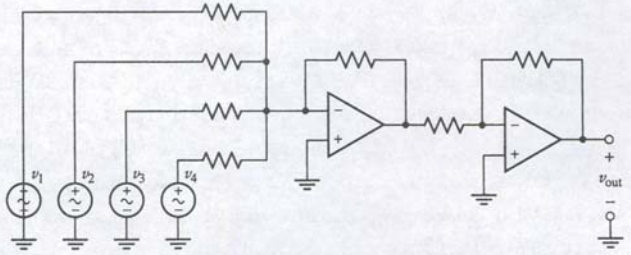


شکل ۱۶ـ۶ (الف) مدار پیشنهادی برای خواندن مانده سوخت. (ب) طراحی بافر برای پرهیز از خطاهای مربوطه با مقاومت سنسور و محدودیت‌های ناشی از توانایی تهیه جریان. چنین بافری برای هر سنسور به کار می‌رود و به این ترتیب ورودی‌های v_1، v_2 و v_3 برای طبقه تقویت‌کننده مجموع فراهم می‌گردد.

تمرین

۳ـ۶ یک پل تاریخی در حال نابودی است. تا بازسازی آن، تصمیم بر این‌است‌که فقط اتومبیل‌های زیر 1600 kg وزن اجازه عبور داشته باشند. برای ردیابی آن، یک سیستم توزین طراحی شده است. چهار سیگنال ولتاژ مستقل از چهار گوشه سیستم توزین اخذ شده است که در آن $1\ mV = 1\ kg$ است. مداری طراحی کنید تا سیگنال ولتاژ مثبتی را روی یک DMM (مولتی‌متر دیجیتال) به عنوان وزن کل خودرو نشان دهد به نحوی که $1\ mV = 1\ kg$ باشد. شما می‌توانید تصور کنید که برای سیگنال ولتاژ حاصل از سنسورها نیازی به بافر نیست.

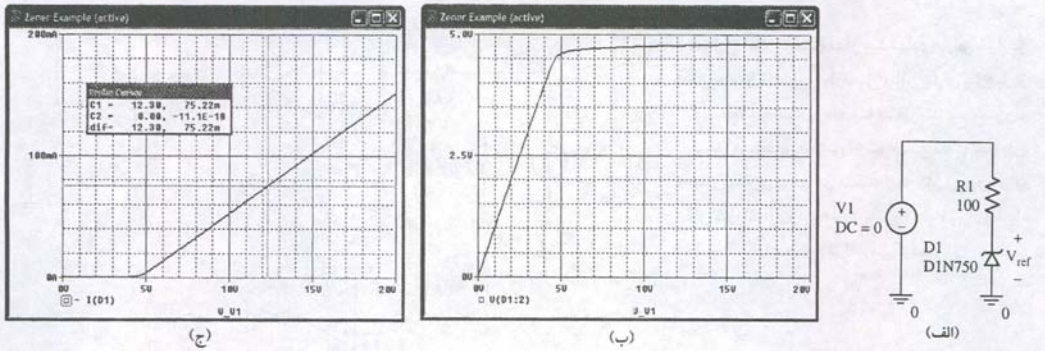
جواب: شکل ۱۷ـ۶ را ملاحظه کنید.



شکل ۱۷ـ۶ یک حل ممکن برای تمرین ۳ـ۶ این‌است‌که همه مقاومت‌ها $10\ k\Omega$ باشند (هرچند مادامی که همه مقاومت‌ها یکسان گرفته شوند، مقدار مهم نیست). ولتاژهای ورودی v_1، v_2، v_3 و v_4 سیگنال‌های ولتاژ را از سنسورها و v_{out} سیگنال ولتاژ را برای اتصال به پایانه ورودی مثبت DMM نشان می‌دهند. ولتاژ مرجع برای هر پنج ولتاژ و نیز DMM، نقطه زمین است.

۴ـ۶ مدارهای منابع ولتاژ و جریان

در این فصل و فصل قبل به دفعات استفاده از منابع جریان یا ولتاژ ایده‌آل را مطرح کردیم که این مدارها بدون توجه به مدار متصل به آن‌ها، فرض می‌شود که جریان یا ولتاژ خروجی آن‌ها ثابت باشد. البته همان‌طور که در بخش ۲ـ۵ ذکر شد به هنگام استفاده از منابع واقعی که در داخل آن‌ها مقاومتی گذاشته شده یا ذاتاً آن را دارند، فرض ما در رابطه با این استقلال محدودیت دارد. اثر چنین مقاومتی کاهش در ولتاژ خروجی منبع در مواردی است که تقاضای جریان زیاد باشد، و یا کاهش جریان در مواردی است که ولتاژ بیشتری از منبع جریان خواسته شود. همان‌طور که در این بخش بحث شد، امکان دارد مدارهایی با مشخصه‌های اطمینان‌بخش‌تری را با op amp ساخت.



شکل ۱۸ـ۶ (الف) شماتیک PSpice یک مدار مرجع ولتاژ ساده مبتنی بر دیود زنر 1N750 است. (ب) شبیه‌سازی مدار که ولتاژ V_{ref} را به عنوان تابعی از ولتاژ مولد V1 نشان می‌دهد. (ج) شبیه‌سازی جریان دیود که نشان می‌دهد هرگاه V1 از 12.3 V تجاوز کند، قابلیت آن از حداکثر تجاوز خواهد کرد (دقت کنید که در این محاسبه فرض بر این‌است‌که یک دیود زنر ایده‌آل ولتاژ زنری 12.2 V دارد).

یک منبع ولتاژ اطمینان‌بخش

یکی از رایج‌ترین مفاهیم تهیه یک ولتاژ مرجع مقاوم[1] استفاده از قطعه‌ای به نام دیود زنر است. نماد این دیود مثلثی با خطی Z مانند در آن، مانند شکل ۱۸ـ۶(الف) است که برای دیود 1N750 نشان داده شده است.

هرچند که قطعه دو پایانه است، دیود زنر با یک مقاومت (خطی) تفاوت بسیار دارد. خصوصاً درحالی‌که مقاومت یک قطعه متقارن است، یک دیود چنین نیست. در عوض دو پایانه آن با آند[2] (بخش قاعده مثلث دیود) و کاتد[3] (سمت رأس مثلث) نام‌گذاری شده، و بسته به این‌که از چه سمت در مدار قرار گیرد رفتار بسیار متفاوتی را از خود به نمایش می‌گذارد. دیود زنر نوع خاصی از دیود زنر است که برای استفاده با ولتاژ مثبت در کاتد نسبت به آند طراحی شده است. وقتی که به این طریق بسته شود گوییم که دیود به‌طور معکوس تغذیه شده است. برای ولتاژهای کم، دیود مثل مقاومت عمل می‌کند، و با افزایش ولتاژ، جریان به صورت خطی افزایش کوچکی می‌یابد. به محض این‌که ولتاژ به حد معینی (V_{BR}) برسد ـ که به آن ولتاژ شکست معکوس یا ولتاژ زنری دیود می‌گویند ـ ولتاژ دیگر به اندازه قابل توجهی افزایش پیدا نمی‌کند، ولی در اصل هر جریانی می‌تواند تا میزان حداکثر دیود (75 mA برای 1N750، که ولتاژ زنر آن 4.7 V است) جریان داشته باشد.

اجازه بدهید تا نتیجه شبیه‌سازی در شکل ۱۸ـ۶(ب) را ملاحظه کنیم، که ولتاژ V_{ref} دو سر دیود را ضمن تغییر ولتاژ منبع V1 از 0 تا 20 V نشان می‌دهد. به شرطی که V1 در بالای 5 V باقی بماند، ولتاژ دو سر دیود اساساً ثابت است. بنابراین ما می‌توانیم V1 را با یک باتری 9 V جایگزین کنیم و زیاد به افت ولتاژ مرجع که به علت دشارژ باتری است توجه نکنیم. هدف از R1 در این مدار در واقع تهیه افت ولتاژ لازم بین باتری و دیود است. مقدار آن باید طوری انتخاب شود که کار دیود زنر را در ولتاژ زنری‌اش تضمین کند ولی کمتر از حداکثر جریان باشد. مثلاً شکل ۱۸ـ۶(ج) نشان می‌دهد که در مدار، جریان از حداکثر مقدار 75 mA به شرطی عبور می‌کند که ولتاژ V1 بزرگتر از 12 V باشد. بنابراین مقدار مقاومت R1 باید بر طبق ولتاژ منبع موجود مقدار بگیرد. ما این مطلب را در مثال ۴ـ۶ می‌شکافیم.

مثال ۴ـ۶

یک مدار مبتنی بر دیود زنر 1N750 طراحی کنید که با یک باتری 9V راه می‌افتد و ولتاژ مرجع 4.7 V تولید می‌کند.

1N750 دارای قابلیت حداکثر جریان 75 mA و ولتاژ زنری 4.7 V است. ولتاژ 9 V باتری می‌تواند کمی بسته به حالت شارژ آن تغییر کند، ولی ما این را به خاطر طراحی فعلی چشم می‌پوشیم.

1. consistent 2. anode 3. cathode

یک مدار ساده مانند آنچه در شکل ۱۹ـ۶(الف) دیده می‌شود برای هدف ما مناسب است. تنها موضوع تعیین مقدار مناسبی برای مقاومت R_{ref}است.

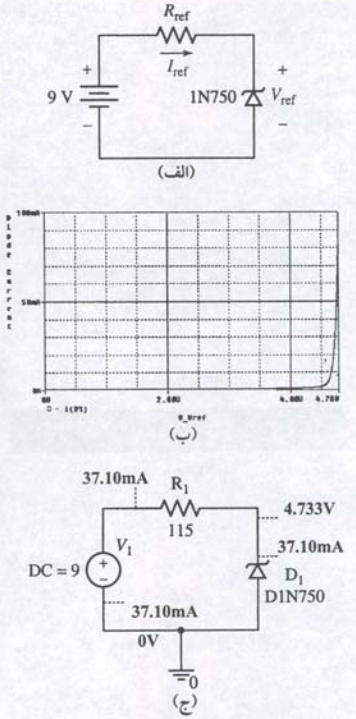
اگر در دو سر دیود 4.7 V افت وجود داشته باشد، آن‌گاه افت ولتاژ دو سر R_{ref}برابر 9 - 4.7 = 7.3 V است. بنابراین:

$$R_{ref} = \frac{9 - V_{ref}}{I_{ref}} = \frac{4.3}{I_{ref}}$$

با تعیین مقدار جریان، R_{ref}را می‌توان مشخص کرد. ما می‌دانیم که I_{ref}نباید از 75 mA برای این دیود تجاوز نماید، و مقادیر بزرگ‌تر جریان سبب دشارژ سریع‌تر باتری خواهد شد. با این وجود همان‌طور که در شکل ۱۹ـ۶(ب) دیده می‌شود، ما نمی‌توانیم به راحتی I_{ref}را انتخاب کنیم. جریان‌های خیلی پایین اجازه کار دیود را در ناحیه شکست نمی‌دهند. در غیاب وجود رابطه جریان ـ ولتاژ (که غیرخطی است) ما در قبال 50% حداکثر جریان، به‌طور سرانگشتی، طراحی را ادامه می‌دهیم. بنابراین

$$R_{ref} = \frac{4.3}{0.0375} = 115\ \Omega$$

جزئیات عملیات را می‌توانید با اجرای شبیه‌سازی PSpice مدار آخر به دست آورید، هر چند از شکل ۱۹ـ۶(ج) می‌بینیم که نتیجه اولیه ما منطقاً با ۱ درصد به هدف نزدیک است.



شکل ۱۹ـ۶ (الف) مدار مرجع ولتاژ مبتنی بر دیود زنر 1N750 . (ب) رابطه V-I دیود. (ج) شبیه‌سازی PSpice طرح نهایی.

ولتاژ مرجع دیود زنر مدار شکل ۱۸ـ۶(الف) در بسیاری از موارد خیلی خوب کار می‌کند، ولی ما به نوعی از نظر مقدار ولتاژ وابسته به دیودهای زنر موجود، محدودیت داریم. همچنین اغلب درمی‌یابیم که مداری که در شکل نشان داده شده است مناسب کاربردهایی که بیش از چند میلی‌آمپر جریان لازم دارند، نیست. در این موارد، ما ممکن‌است از مدار مرجع زنر در کنار یک طبقه تقویت‌کننده مطابق شکل ۲۰ـ۶استفاده کنیم. نتیجه این کار ولتاژ با ثباتی خواهد بود که می‌تواند با تنظیم مقدار R_1یا R_fبدون سوئیچ به دیود زنر دیگر، کنترل شود.

تمرین

۴ـ۶ مداری برای تهیه یک ولتاژ مرجع 6 V با استفاده از دیود زنر 1N750 و یک تقویت‌کننده معکوس‌نکننده طراحی کنید.

جواب: با استفاده از مدار شکل ۲۰ـ۶ مقادیر $V_{bat} = 9\ V$، $R_{ref} = 115\ \Omega$، $R_1 = 1\ K$ و $R_f = 26\ \Omega$را انتخاب کنید.

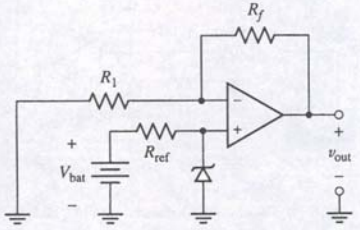
یک منبع جریان قابل اطمینان

مدار شکل ۲۱ـ۶(الف) را درنظربگیرید که V_{ref}با منبع ولتاژ تنظیم‌شده مانند شکل ۱۹ـ۶ (الف) تهیه شده است. خواننده ممکن‌است تشخیص دهد که این مدار یک تقویت‌کننده معکوس‌گر است که ما پایه خروجی را درنظرمی‌گیریم. ما می‌توانیم از این مدار به عنوان یک منبع جریان استفاده کنیم، که R_Lیک بار مقاومتی را نشان می‌دهد.

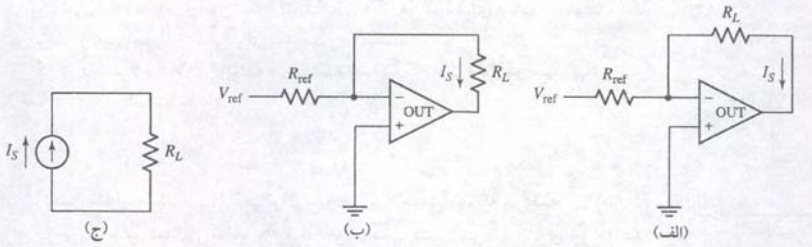
ولتاژ ورودی V_{ref}در دو سر مقاومت مرجع R_{ref}ظاهر می‌شود، چون ورودی معکوس‌نکننده تقویت‌کننده به زمین وصل شده است. با نبود جریان در ورودی معکوس‌گر، جریان جاری در مقاومت بار R_Lبرابر است با:

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

به بیان دیگر جریان تحویلی به R_Lبه مقاومت آن بستگی ندارد ـ و این از صفات اصلی یک منبع جریان است. همچنین ارزشمند است بدانیم که ما در این‌جا ولتاژ خروجی را به عنوان



شکل ۲۰ـ۶ یک منبع ولتاژ آمپلی‌فایری (تقویت‌کنندگی) بر اساس مرجع ولتاژ زنر.



شکل ۲۱ـ۶ (الف) یک منبع جریان مبتنی بر op amp با ولتاژ مرجع V_{ref}. (ب) ترسیم مجدد مدار برای مشخص‌ترکردن بار. (ج) مدل مدار. مقاومت R_L معادل نورتن یک مدار با بار غیرفعال نامشخص.

یک کمیت مطلوب در نظر نگرفته‌ایم. در عوض، ممکن‌است مقاومت بار را به عنوان نوعی معادل نورتن (یا تونن) مدار بار غیرفعالی درنظربگیریم که توان را از مدار op amp دریافت می‌کند. با ترسیم مجدد مدار مطابق شکل ۲۱ـ۶(ب) می‌بینیم که اشتراک زیادی با مدار شکل ۲۱ـ۶(ج) دارد. به بیان دیگر می‌توانیم این مدار تقویت‌کننده را به صورت منبع جریان به کار ببریم و مشخصه‌های آن تا حد جریان خروجی ماکزیمم انتخاب شود.

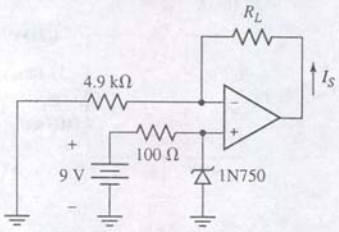
مثال ۵ـ۶

یک منبع جریان که 1 mA جریان را به یک بار مقاومتی حمل می‌کند طراحی کنید.

بر اساس طراحی مدارهای شکل ۲۰ـ۶ و ۲۱ـ۶ (الف)، می‌دانیم که جریان در مقاومت با R_L چنین است:

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

که مقادیر V_{ref} و R_{ref} باید انتخاب شوند و مداری که V_{ref} را تهیه می‌کند نیز باید طراحی گردد. ما اگر از دیود زنر 1N750 استفاده کنیم که با یک باتری 9 V و مقاومت 100 Ω سری است، با توجه به شکل ۱۸ـ۶(ب) ولتاژ 4.9 V در دو سر دیود وجود خواهد داشت. بنابراین $V_{ref} = 4.9$ V مقاومت R_{ref} را برابر $4.9\ \text{k}\Omega = 4.9/10^{-3}$ دیکته می‌کند. مدار کامل در شکل ۲۲ـ۶ دیده می‌شود.



شکل ۲۲ـ۶ یک طرح ممکن برای منبع جریان مطلوب. به تغییر جهت جریان در شکل ۲۱ـ۶(ب) توجه کنید.

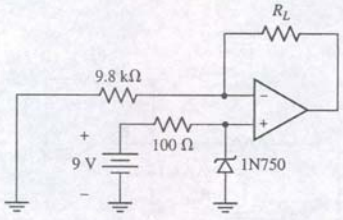
دقت کنید که اگر ما فرض کنیم ولتاژ دیود 4.7 V است، خطا در جریان طراحی‌شده فقط چند درصد است و در داخل 5 تا 10 درصد تغییر مقاومت است که انتظار آن را می‌توان داشت.

تنها موضوع باقیمانده این‌است‌که آیا می‌توان 1 mA جریان را برای هر مقداری از R_L تهیه کرد. برای حالت $R_L = 0$، خروجی op amp برابر 4.9 V خواهد بود که غیرمنطقی نیست. با افزایش مقاومت بار، در هر صورت، ولتاژ خروجی op amp افزایش پیدا می‌کند. در نهایت ما باید به نوعی محدودیت، طبق بحث بخش ۵ـ۶ برخورد کنیم.

تمرین

۵ـ۶ یک منبع جریان که بتواند 500 μA را برای یک بار مقاومتی تولید کند، طراحی نمایید.

جواب: شکل ۲۳ـ۶ را به عنوان یک راه‌حل نگاه کنید.



شکل ۲۳ـ۶ یک حل ممکن برای تمرین ۵ـ۶

۶ـ۵ ملاحظات عملی

مدلی دقیق‌تر برای op amp

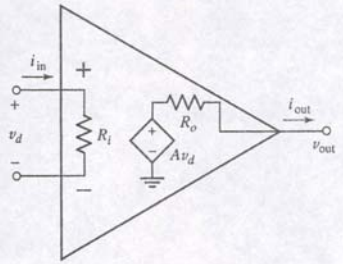
می‌توان یک op amp را با کاهش ساختارش به‌عنوان یک منبع ولتاژ وابسته کنترل‌شده با ولتاژ تصور کرد. منبع ولتاژ وابسته خروجی op amp را فراهم می‌کند و ولتاژی که به آن بستگی دارد همان ولتاژ اعمال‌شده به پایانه‌های ورودی است. نمودار شماتیک یک مدل نسبتاً عملی op amp در شکل ۲۴ـ۶ دیده می‌شود که شامل منبع ولتاژ وابسته با بهره ولتاژ A، یک مقاومت خروجی R_o و یک مقاومت ورودی R_i است. جدول ۳ـ۶ نمونه‌ای از مقادیر را برای این پارامترها در انواع تجاری تقویت‌کننده‌های عملیاتی نشان می‌دهد.

جدول ۳ـ۶ پارامترهای نوعی چند op amp مختلف.

Part Number	μA741	LM324	LF411	AD549K	OPA690
Description	General purpose	Low-power quad	Low-offset, low-drift JFET input	Ultralow input bias current	Wideband video frequency op amp
Open loop gain A	2×10^5 V/V	10^5 V/V	2×10^5 V/V	10^6 V/V	2800 V/V
Input resistance	2 MΩ	*	1 TΩ	10 TΩ	190 kΩ
Output resistance	75 Ω	*	~1 Ω	~15 Ω	*
Input bias current	80 nA	45 nA	50 pA	75 fA	3 μA
Input offset voltage	1.0 mV	2.0 mV	0.8 mV	0.150 mV	±1.0 mV
CMRR	90 dB	85 dB	100 dB	100 dB	65 dB
Slew Rate	0.5 V/μs	*	15 V/μs	3 V/μs	1800 V/μs
PSpice Model	✓	✓	✓		

پارامتر A را **بهره ولتاژ حلقه باز** تقویت‌کننده می‌نامند و معمولاً در محدوده 10^5 تا 10^6 است. با توجه به لیست تقویت‌کننده‌های جدول ۳ـ۶ ملاحظه می‌شود که همه آن‌ها در مقایسه با بهره ولتاژ 11 در مثال ۱ـ۶ بهره ولتاژ خیلی بالایی دارند. باید به‌خاطر سپرد که تفکیک بهره ولتاژ حلقه باز خود op amp و بهره ولتاژ حلقه بسته یک op amp خاص مهم است. در این‌جا منظور از "حلقه" مسیر بیرونی بین پایه خروجی و پایه ورودی معکوس‌کننده است، که می‌تواند یک سیم، یک مقاومت یا بسته به نوع کاربرد، نوع دیگری از عناصر باشد.

μA741 یک op amp بسیار متداول است که در اصل به وسیله فرچایلد (Fairchild corporation) در سال ۱۹۶۸ ساخته شد، این تقویت‌کننده دارای بهره ولتاژ حلقه باز 200,000، یک مقاومت ورودی 2MΩ و یک مقاومت خروجی 75Ω است. برای این‌که ببینیم چگونه یک تقویت‌کننده ایده‌آل رفتار این دستگاه خاص را تقریب می‌نماید، اجازه بدهید تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ را دوباره بررسی کنیم.



شکل ۲۴ـ۶ مدل دقیق‌تر op amp.

مثال ۶ـ۶

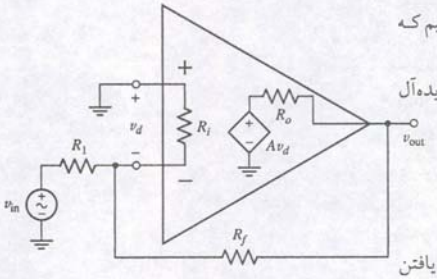
با استفاده از مقادیر مناسب مدل تقویت‌کننده μA741 در شکل ۲۴ـ۶، مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ را دوباره تحلیل کنید.

حل را با جایگزینی نماد op amp ایده‌آل شکل ۳ـ۶ با مدل مشروح‌تر شروع می‌کنیم که حاصلش شکل ۲۵ـ۶ است.

دقت کنید که شما دیگر نمی‌توانید قواعد op amp ایده‌آل را به‌کاربرید زیرا مدل ایده‌آل را استفاده نمی‌کنیم. بنابراین دو معادله گرهی را می‌نویسیم:

$$0 = \frac{-v_d - v_{in}}{R_1} + \frac{-v_d - v_{out}}{R_f} + \frac{-v_d}{R_i}$$

$$0 = \frac{v_{out} + v_d}{R_f} + \frac{v_{out} - Av_d}{R_o}$$



شکل ۲۵ـ۶ مدار تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر با استفاده از مدل دقیق‌تر op amp.

با اجرای مقداری عملیات جبری سرراست ولی نسبتاً طولانی، v_d را در دو معادله برای یافتن عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} حذف می‌کنیم:

$$v_{out} = \left[\frac{(R_o + R_f)}{R_o - AR_f}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i}\right) - \frac{1}{R_f}\right]^{-1} \frac{v_{in}}{R_1} \qquad (۱۵)$$

با جایگزینی $R_i = 2\text{M}\Omega$، $R_o = 75\Omega$، $R_f = 47\text{k}\Omega$، $R_1 = 4.7\ \text{k}\Omega$، $v_{in} = 5 \sin 3t$ mV و $A = 2 \times 10^5$، داریم:

$$v_{out} = -9.999448\ v_{in} = -49.99724 \sin 3t \text{ mV}$$

از مقایسه این رابطه با عبارت حاصل برای یک op amp ایده‌آل ($v_{out} = -10v_{in} = -50 \sin 3t$ mV) می‌بینیم که یک op amp ایده‌آل مدل نسبتاً دقیقی است.

به علاوه فرض دیود ایده‌آل کاهش قابل توجهی را در جبر مورد نیاز موجب می‌شود. توجه کنید که اگر $A \to \infty$ ، $R_o \to 0$ ، $R_i \to \infty$ میل کنند، معادله (۱۵) به معادلهٔ زیر کاهش می‌یابد:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in}$$

و این همان چیزی است که قبلاً برای ایده‌آل‌بودن تقویت‌کننده به دست آوردیم.

تمرین

۶ـ۶ برای مدار op amp شکل ۶ـ۳ با فرض بهره حلقه باز معین (A) ، مقاومت ورودی معین (R_i) و مقاومت خروجی صفر (R_o) عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} به‌دست‌آورید.

جواب: $v_{out}/v_{in} = -AR_fR_i/(R_fR_i + R_1R_i + R_1R_f - AR_1R_i)$

به‌دست‌آوردن قواعد op amp

دیدیم که op amp ایده‌آل مدل تقریباً دقیقی برای رفتار انواع واقعی آن است. با این وجود استفاده از نوع دقیق‌تر آن که بهره حلقه باز معین، مقاومت ورودی معین و مقاومت خروجی غیرصفر دارد، راه سرراست‌تری در به‌دست‌آوردن دو قاعده op amp ایده‌آل می‌باشد. با مراجعه به شکل ۲۴ـ۶ می‌بینیم که ولتاژ خروجی مدار باز یک op amp واقعی به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$v_{out} = Av_d \qquad (۱۶)$$

v_d را که گاهی به آن **ولتاژ ورودی تفاضلی** گفته می‌شود به صورت زیر می‌نویسیم:

$$v_d = \frac{v_{out}}{A} \qquad (۱۷)$$

انتظار داریم محدودیت‌های عملی بر ولتاژ خروجی v_{out} حاصل از op amp واقعی وجود داشته باشد. در بخش بعد خواهیم دید که باید op amp را به منابع تغذیه ولتاژ dc بیرونی برای راه‌اندازی مدار داخلی وصل کرد. این منابع ولتاژ، حداکثر مقدار v_{out} را تعیین می‌کنند و معمولاً در محدوده 5 تا 24V می‌باشند. اگر ولتاژ 24V را بر بهره حلقه باز μA741 (2×10^5) تقسیم کنیم، داریم $v_d = 120\mu V$. گرچه مقدار این ولتاژ صفر ولت نیست، ولی این ولتاژ کوچک در مقایسه با ولتاژ خروجی 24V ، عملاً صفر است. یک op amp ایده‌آل دارای بهره حلقه باز بی‌نهایت است و درنتیجه مستقل از v_{out} ، ولتاژ $v_d = 0$ می‌باشد که منجر به قاعده ۲ op amp می‌گردد.

قاعده ۱ برای op amp بیان می‌دارد که "به هیچ وجه جریانی در هیچ یک از ورودی‌ها جریان پیدا نمی‌کند". با توجه به شکل ۲۳ـ۶ جریان ورودی op amp برابر است با:

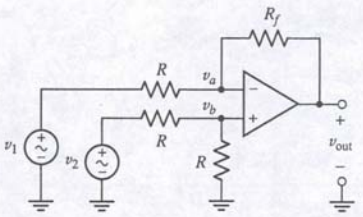
$$i_{in} = \frac{v_d}{R_i}$$

چند لحظه قبل دیدیم که v_d نوعاً ولتاژی کوچک است. همان‌طور که از جدول ۳ـ۶ می‌توان ملاحظه کرد مقاومت ورودی یک op amp نوعی خیلی بزرگ و از مگااهم تا تراهم است. با توجه به $v_d = 120\mu V$ در بالا و $R_i = 2M\Omega$ ، جریان ورودی 60pA حاصل می‌گردد. این جریانی فوق‌العاده کوچک است و برای اندازه‌گیری آن آمپرمتر خاصی به‌نام پیکوآمپرمتر نیاز داریم. از جدول ۳ـ۶ درمی‌یابیم که جریان ورودی نوعی (یا دقیقتر بگوییم جریان تغذیه، یا بایاس ورودی) از یک μA741 تنها 80nA است که سه برابر بیش از تخمین ما است. این یکی از معایب مدل op amp مورد استفاده ماست که برای تهیه جریان دقیق ورودی تهیه نشده است. در مقایسه با دیگر جریان‌ها در مدار یک op amp ، این مقدار هم اساساً صفر می‌باشد. op amp های مدرن‌تر (مانند AD549) جریان بایاس کمتری دارند. پس نتیجه می‌شود که قانون 1 op amp ایده‌آل فرضی منطقی است.

از بحث فوق نتیجه می‌گیریم که بهره ولتاژ حلقه باز و مقاومت ورودی یک op amp ایده‌آل بی‌نهایت است. معهذا هنوز مقاومت خروجی و اثرات احتمالی آن را در مدار بررسی نکرده‌ایم. در شکل ۲۴ـ۶ داریم:

$$v_{out} = Av_d - R_o i_{out}$$

که i_{out} پایه خروجی op amp جاری است. پس هر مقدار غیرصفری از R_o ولتاژ خروجی را کاهش می‌دهد. افزایش جریان هم تأثیر مشابهی دارد. بنابراین مقاومت خروجی تقویت‌کننده را صفر درنظر می‌گیرند. حداکثر مقاومت خروجی تقویت‌کننده‌ای μA741 برابر 75Ω و حتی در انواع جدی‌تر AD549 و AD515A کمتر از آن است.



شکل ۲۶ـ۶ op amp در نقش تقویت‌کنندهٔ تفاضلی.

حذف حالت مشترک

op amp را **تقویت‌کننده تفاضلی** هم می‌خوانند، چون خروجی متناسب با تفاضل ولتاژ بین دو پایانه ورودی است. به این معنی اگر ولتاژ برابری را به هر دو پایانه ورودی اعمال کنیم، انتظار داریم خروجی صفر باشد. این قابلیت op amp یکی از مهم‌ترین جاذبه‌های آن است و به نام **حذف حالت مشترک** شناخته می‌شود. مدار شکل ۲۶ـ۶ چنان وصل شده است تا ولتاژ خروجی زیر را تولید نماید:

$$v_{out} = v_2 - v_1$$

اگر $v_1 = 2 + 3 \sin 3t$ V و $v_2 = 2$ V باشند، انتظار داریم که خروجی -3 sint 3t V بشود؛ ولتاژ 2 V مولفه‌ای مشترک برای v_1 و v_2 می‌باشد که نباید تقویت شود و در خروجی هم ظاهر نگردد.

برای تقویت‌کننده‌های عملی، ما در واقع سهم کمی از خروجی را در پاسخ به سیگنال‌های مشترک داریم. برای مقایسه یک op amp با دیگری، اغلب بیان توانمندی یک تقویت‌کننده به حذف سیگنال‌های مد مشترک به وسیله پارامتری به نام نسبت حذف حالت مشترک[1] یا CMRR صورت می‌گیرد. با تعریف v_{OCM} به عنوان خروجی حاصل به هنگام برابری ورودی‌ها ($v_1 = v_2 = v_{CM}$)، می‌توان بهره حالت مشترک یک تقویت‌کننده را چنین تعریف کرد:

$$A_{CM} = \left|\frac{v_{oCM}}{v_{CM}}\right|$$

سپس CMRR را برحسب نسبت بهره مد تفاضلی به بهره مد مشترک تعریف می‌کنیم:

$$\text{CMRR} \equiv \left|\frac{A}{A_{CM}}\right| \qquad (۱۸)$$

اغلب این رابطه به صورت دسی‌بل (dB) در مقیاس لگاریتمی بیان می‌شود:

$$\text{CMRR}_{(dB)} \equiv 20 \log_{10} \left|\frac{A}{A_{CM}}\right| \text{dB} \qquad (۱۹)$$

مقادیر نمونه چند نوع op amp در جدول ۳ـ۶ آمده است؛ یک مقدار 100 dB متعلق به نسبت مطلق 10^5 برای A به A_{CM} است.

پسخورد منفی

دیدیم که بهره حلقه باز یک op amp خیلی بزرگ و به‌طور ایده‌آل بی‌نهایت است، ولی در عمل مقدار واقعی آن می‌تواند با مقدار تعیین‌شده به وسیله سازنده متفاوت باشد. مثلاً دما

1. Common Mode Rejection Ratio

می‌تواند اثرات قابل توجهی روی عملکرد یک op amp داشته باشد به نحوی که رفتار آن در $-20^{\circ}C$ به کلی با دمای روزی آفتابی متفاوت است. همچنین بین انواع ساخته‌شده در زمان‌های مختلف نیز تفاوت چشمگیری ملاحظه می‌شود. اگر مداری طراحی کنیم که در آن بهره حلقه باز ضربدر ولتاژ یکی از پایانه‌های ورودی باشد، پیش‌بینی ولتاژ خروجی با دقتی مناسب مشکل خواهد بود، و انتظار می‌رود با دما تغییر کند.

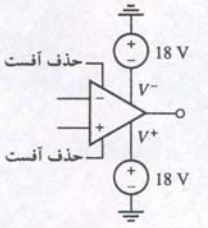
راه‌حل چنین مشکل بالقوه به‌کارگیری **پسخورد منفی** است. این تکنیک عبارت‌است‌از فرآیند تفاضل بخش کوچکی از خروجی از ورودی. اگر پدیده‌هایی بتوانند مشخصات مدار را به نحوی تغییر دهند که خروجی تمایل به افزایش داشته باشد، در همان زمان ورودی کم می‌شود. پسخورد منفی زیاد مانع از هر گونه تقویت مفید می‌گردد، ولی مقدار کم آن ثُبات و پایداری را به‌دنبال دارد. مثالی از یک پسخورد منفی احساس ناخوشایندی است که در دستان خود در نزدیکی شعله آتش داریم. هرچه بیشتر به آتش نزدیک شویم، سیگنال منفی بزرگ‌تری از دستان خود حس خواهیم کرد. با این وجود، زیاده‌روی در پسخورد منفی می‌تواند موجب انزجار از گرما و نهایتاً انجماد و به دنبال آن مرگ شود. پسخورد مثبت فرآیندی است که در آن بخشی از سیگنال خروجی به ورودی بازگردانده شده است. مثال رایجی از آن هنگامی است که یک میکروفون به سمت گوینده گرفته شده و صدای خیلی ملایمی به سرعت تقویت‌شده و این تقویت به فریاد تبدیل می‌شود. پسخورد مثبت نهایتاً سیستمی ناپایدار را به دست می‌دهد.

همه مدارهایی که در این فصل ملاحظه می‌شوند پسخورد منفی را به وسیله یک مقاومت بین پایه خروجی و پایه ورودی معکوس‌گر خواهند داشت. حلقه حاصل بین خروجی و ورودی، وابستگی ولتاژ خروجی روی مقدار واقعی بهره حلقه باز راکاهش می‌دهد (در مثال ۶.۶ ملاحظه شد). پس لزومی ندارد که بهره حلقه باز دقیق op amp مورد استفاده معلوم باشد، زیرا تغییرات A اثر مهمی بر رفتار مدار ندارد. پسخورد منفی، همچنین پایداری را در مواردی که A به محیط op amp حساس است، افزایش می‌دهد. مثلاً اگر A ناگهان در پاسخ به یک تغییر در دمای محیط افزایش یابد، یک ولتاژ پسخورد بزرگ‌تری به ورودی معکوس‌گر اضافه می‌شود. این خود موجب کاهش تفاضل ولتاژ ورودی v_d و بنابراین تغییر کمتر Av_d می‌گردد. باید توجه داشت که بهره مدار حلقه بسته همیشه کمتر از بهره آن در حلقه باز است. این بهایی است که ما برای پایداری و کاهش حساسیت به تغییرات پارامتر می‌پردازیم.

اشباع[1]

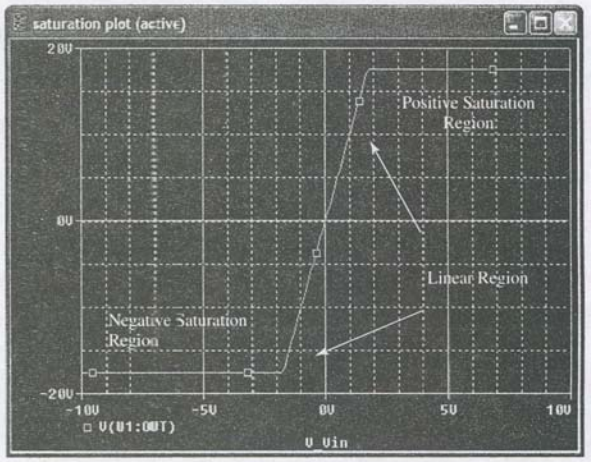
تاکنون op amp را با فرض این‌که مشخصات آن مستقل از نحوه اتصال آن در مدار است کاملاً خطی فرض کردیم. در عمل، لازم است تغذیه‌ای را به op amp متصل کنیم تا مدار راه‌اندازی شود (شکل ۲۷ـ۶). معمولاً یک تغذیه مثبت بین 5 تا 24V به پایانه V^+ و تغذیه‌ای منفی به همان اندازه به پایانه V^- وصل می‌گردد. در عمل مواردی وجود دارد که تنها یک تغذیه متصل می‌گردد و نیز دو مقدار ولتاژ با هم اختلاف دارند. سازندگان op amp معمولاً حداکثر ولتاژ تغذیه را مشخص می‌کنند و مقادیر فراتر از آن به ترانزیستورهای داخلی آسیب می‌رسانند.

ولتاژهای تغذیه به هنگام طراحی اهمیت خاصی دارند زیرا مقدار آن‌ها بیانگر حداکثر ولتاژ ممکن خروجی op amp می‌باشد. در عمل این ولتاژ خروجی حداکثر حدود یک ولت از تغذیه کمتر می‌باشد. به عنوان مثال مدار op amp شکل ۲۶ـ۶ را درنظربگیرید که اینک به عنوان تقویت‌کننده معکوس‌نکننده با بهره 10 متصل شده است. همان‌طور که در شبیه‌سازی PSpice در شکل ۲۸ـ۶ ملاحظه می‌شود، در واقع ما رفتاری خطی از op amp را مشاهده می‌کنیم ولی این رفتار فقط در محدوده ± 1.71 V برای ولتاژ ورودی است.



شکل ۲۷ـ۶ op amp با منابع تغذیهٔ مثبت و منفی. برای مثال دو منبع 18 V به‌کاررفته است؛ به پلاریته هر منبع توجه نمایید.

1. saturation



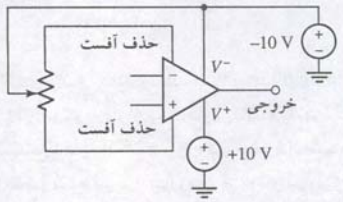
شکل ۲۸ـ۶ مشخصهٔ ورودی ـ خروجی یک op amp μA741 با بهره 10 و تغذیه ± 18 که به صورت معکوس‌نکننده است.

در خارج این محدوده، دیگر خروجی متناسب با ورودی نیست و به حداکثر مقدار 17.6 V می‌رسد. این اثر غیرخطی به اشباع معروف است و به این حقیقت اشاره دارد که افزایش بیشتر در ولتاژ ورودی تغییری در ولتاژ خروجی نمی‌دهد. این پدیده به بن دلیل رخ می‌دهد که خروجی op amp نمی‌تواند از ولتاژ تغذیه تجاوز کند. مثلاً اگر op amp را با 9V+ و 5V- راه بیندازیم آنگاه ولتاژ خروجی به 5V- و 9V+ محدود خواهد شد. خروجی op amp پاسخی خطی و محدود به نواحی اشباع مثبت و منفی است و به‌عنوان یک قانون کلی سعی خواهیم کرد که هنگام طراحی مدار، ندانسته وارد ناحیه اشباع نشویم. بنابراین باید ولتاژ کار به‌دقت بر اساس بهره حلقه بسته و حداکثر ولتاژ ورودی انتخاب گردد.

ولتاژ آفست ورودی

چند نکته عملی وجود دارند که باید هنگام کار با یک op amp درنظرگرفته شوند. یکی از این نکات غیرایده‌آل که ارزش گفتن ندارد، تمایل op amp به داشتن خروجی غیرصفر حتی به‌هنگام اتصال دو ورودی است. مقدار خروجی تحت این شرایط به‌نام ولتاژ آفست خوانده می‌شود و ورودی لازم برای کاهش خروجی به صفر را **ولتاژ آفست ورودی** گویند. با مراجعه به جدول ۳ـ۶ ملاحظه می‌شود که مقادیر نمونه برای ولتاژ آفست ورودی حدود میلی‌ولت یا کمتر است.

اغلب تقویت‌کننده‌ها با دو پایه‌ای که روی آن "صفر آفست" یا "بالانس" نوشته شده ارائه می‌گردند. این پایانه‌ها را با اتصال به یک مقاومت متغیر می‌توان برای تنظیم ولتاژ خروجی به‌کاربرد. یک مقاومت متغیر، قطعه‌ای سه پایانه است که به‌طور متداولی در موارد مسابهی به‌عنوان کنترل ولوم رادیو و نظایر آن به‌کارمی‌رود. این وسیله دارای پیچ ولومی است که برای انتخاب مقدار واقعی مقاومت قابل چرخش است. اگر مقاومت متغیر فقط با دو پایانه انتهایی‌اش مورد استفاده قرار گیرد مقاومت آن جدا از وضعیت ولوم، مقداری ثابت خواهد بود. با استفاده از پایانه وسط و یکی از دو انتها مقاومتی دیده می‌شود که مقدارش به وضعیت ولوم وابسته است. شکل ۲۹ـ۶ نمونه‌ای از مدار را نشان می‌دهد که برای تنظیم ولتاژ خروجی یک op amp به‌کاررفته است. برگه اطلاعات سازندگان ممکن‌است مدار جداگانه و متفاوتی را برای یک وسیله پیشنهاد نماید.

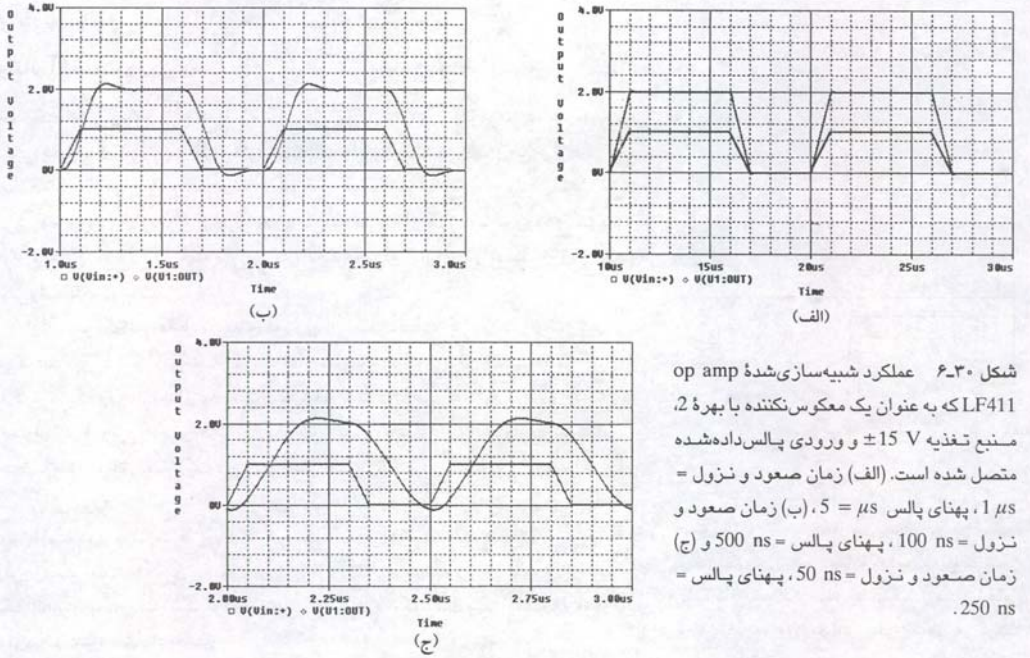


شکل ۲۹ـ۶ مدار خارجی پیشنهادی برای تهیه ولتاژ خروجی صفر. منابع تغذیه ± 10 V نشان داده شده تنها یک مثال هستند. در مدار نهایی ولتاژ تغذیه واقعی به‌طور عملی انتخاب می‌گردد.

سرعت واکنش[1]

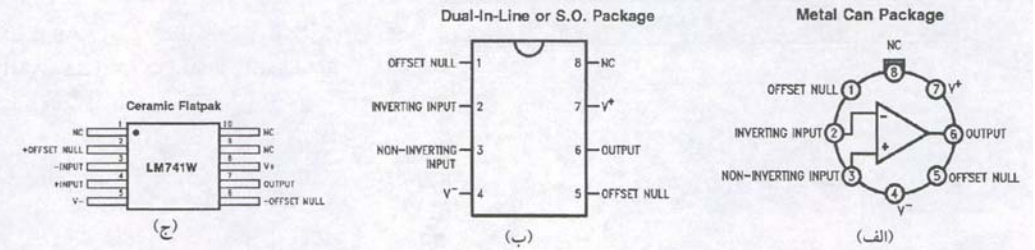
تاکنون، ما فرض کردیم که op amp به سیگنال‌ها با هر فرکانسی به‌طور یکسان پاسخ می‌دهد، ولی جای تعجب نیست که بدانیم در عمل از این بابت محدودیت‌هایی وجود دارد. چون می‌دانیم که مدارهای op amp در dc به خوبی کار می‌کنند، که در واقع در فرکانس صفر است، باید رفتار آن را ضمن افزایش فرکانس بررسی کنیم. یک معیار از رفتار فرکانسی یک op amp، سرعت واکنش آن است که عبارتنداز سرعت پاسخ ولتاژ خروجی به تغییرات ورودی. اغلب آن را به صورت $V/\mu s$ بیان می‌کنند. مشخصات نمونه از سرعت واکنش چند قطعه موجود تجاری در جدول ۳ـ۶ ارائه شده است که مقادیری از مرتبه چند ولت بر میلی‌ثانیه را به دست می‌دهد. یک نمونه استثنایی OPA690 است که به عنوان یک op amp برای کاربردهای ویدیویی طراحی شده است و در چند صد MHz کار می‌کند. خواهیم دید که سرعت واکنش $1800\ V/\mu s$ برای این وسیله دور از واقعیت نیست، هرچند دیگر پارامترهای آن چون جریان تغذیه ورودی و CMRR به همین علت آسیب دیده‌اند.

شبیه‌سازی PSpice در شکل ۳۰ـ۶ نزول در عملکرد یک op amp را به علت محدودیت سرعت واکنش نشان می‌دهد. مدار شبیه‌سازی از یک LF411 است که به عنوان تقویت‌کننده غیرمعکوس‌کننده با بهره 2 و تغذیه ± 15 V آرایش یافته است. شکل موج ورودی، موج‌زیرین بوده و مقدار پیک آن 1 V است؛ خروجی در قسمت بالاتر کشیده شده است. شبیه‌سازی مربوط به شکل ۳۰ـ۶ (الف) دارای زمان صعود و نزول $1\ \mu s$ است که از نظر انسان زمانی کوتاه است ولی به راحتی LF411 از عهده آن برمی‌آید. با کاهش زمان صعود و نزول به اندازه 10 تا 100 ns (شکل ۳۰ـ۶ (ب)) ملاحظه می‌کنیم که LF411 در دنبال‌کردن ورودی کمی مشکل پیدا کرده است. در زمان صعود و نزول 50 ns (شکل ۳۰ـ۶ (ج)) می‌بینیم نه فقط



شکل ۳۰ـ۶ عملکرد شبیه‌سازی‌شدهٔ op amp LF411 که به عنوان یک معکوس‌نکننده با بهرهٔ 2، منبع تغذیه ± 15 V و ورودی پالس‌داده‌شده متصل شده است. (الف) زمان صعود و نزول = $1\ \mu s$، پهنای پالس $= 5\ \mu s$، (ب) زمان صعود و نزول = 100 ns، پهنای پالس = 500 ns و (ج) زمان صعود و نزول = 50 ns، پهنای پالس = 250 ns.

1. slew rate



شکل ۳۱ـ۶ چند بسته‌بندی مختلف op map LM741. (الف) بسته‌بندی فلزی استوانه‌ای. (ب) بسته‌بندی دو ردیفه. (ج) بسته‌بندی مسطح سرامیکی.

تأخیری قابل توجه بین خروجی و ورودی وجود دارد، بلکه شکل موج به مقدار قابل توجهی تغییر شکل یافته است که ویژگی خوبی برای یک تقویت‌کننده نیست. این رفتار مشاهده‌شده با سرعت واکنش $15\ V/\mu s$ در جدول ۳ـ۶ ارتباط دارد، و بیان می‌کند که خروجی برای تغییر از 0 به 2 V (یا از 2 V به 0) ممکن‌است نیاز به 130 ns داشته باشد.

بسته‌بندی

تقویت‌کننده‌های عملیاتی جدید بسته به محیط مصرف در انواع متنوعی از بسته‌بندی در دسترسند. بعضی از آن‌ها برای دماهای بالا مناسبند و به طرق مختلف بر روی مدار چاپی نصب می‌گردند. شکل ۳۱ـ۶ چند نمونه مختلف از LM741 که به وسیله ناسیونال ساخته شده را نشان می‌دهد. عبارت "NC" که در کنار یک پایه قرار دارد به معنی "نبود اتصال" است. این بسته‌بندی‌ها استاندارد هستند و در رابطه با مدارات مجتمع مختلف به کارگرفته می‌شوند. معمولاً تعداد پایه‌ها از حد لازم بیشتر است.

تحلیل کامپیوتری

همان‌طور که دیدیم PSpice در پیش‌بینی خروجی یک مدار op amp، بسیار مفید است خصوصاً در حالتی که ورودی‌ها با زمان تغییر کنند. با این وجود خواهیم دید که مدل ایده‌آل op amp، به‌خوبی با شبیه‌سازی‌های PSpice هم‌خوانی دارد. هنگام اجرای شبیه‌سازی یک مدار op amp باید توجه داشت که منابع تغذیه مثبت و منفی به آن وصل شوند. گرچه مدل، پایه‌های صفر آفست را که برای صفرکردن ولتاژ خروجی نشان می‌دهد، ولی PSpice از آن‌ها استفاده نمی‌کند و بنابراین آزاد رها می‌شوند.

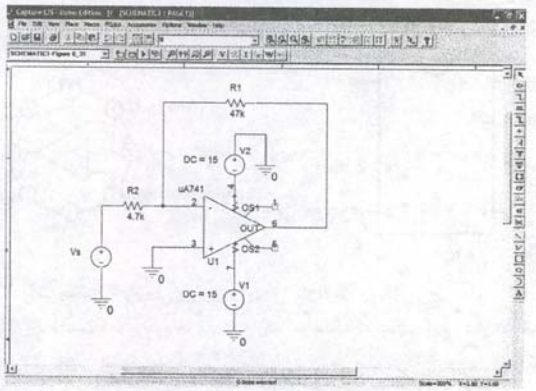
جدول ۳ـ۶ شماره قطعه متفاوتی را در حد ارزیابی آن نشان می‌دهد. انواع مدل‌های تجاری این نرم‌افزار در دسترس‌اند.

مثال ۷ـ۶

با PSpice مدار شکل ۳ـ۶ را شبیه‌سازی کنید. اگر منبع تغذیه dc، ± 15V، به‌کار رفته باشد نقطه(های) شروع اشباع را مشخص نمایید. بهره محاسبه‌شده را با آن‌چه که برای مدل op amp ایده‌آل پیش‌بینی شده بود، مقایسه کنید.

کار را با ترسیم مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ با استفاده از ابزار ترسیمی شماتیک شکل ۳۲ـ۶ آغاز می‌کنیم. توجه کنید که دو منبع تغذیه dc جداگانه 15V برای تغذیه op amp لازم است.

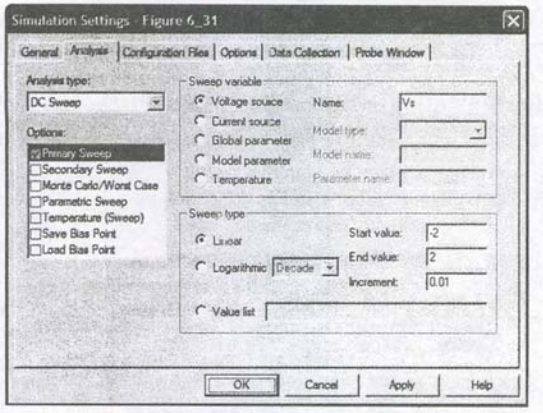
تحلیل قبلی ما بهره 10- را برای op amp ایده‌آل پیش‌بینی کرده بود. با یک ورودی 5 sin3t mV خروجی 50- sin3t mV به‌دست‌خواهد آمد. با این وجود به‌طور ضمنی فرض کردیم که هر ولتاژ ورودی با ضریب 10- تقویت می‌شود. بر اساس ملاحظات عملی، انتظار داریم که این مطالب برای ولتاژهای کوچک ورودی صحت داشته باشد، ولی خروجی نهایتاً به مقداری در حد ولتاژ تغذیه به اشباع می‌رسد.



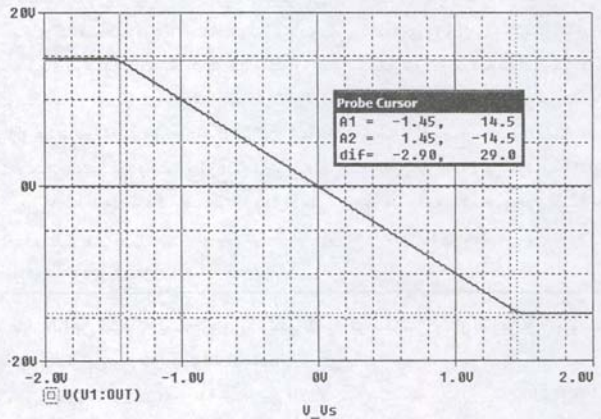
شکل ۶ـ۳۲ مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر μA741 شکل ۶ـ۳ که با ابزار رسم شماتیک کشیده شده است.

نتیجه تحلیل dc sweep برای $-2 < V_s < 2$ در شکل ۶ـ۳۳ نشان داده شده است که کمی وسیع‌تر از ولتاژ تغذیه تقسیم بر بهره ولت است بنابراین نتایج شامل نواحی اشباع مثبت و منفی خواهد بود. با استفاده از cursor tool هم می‌بینیم که مشخصه ورودی ـ خروجی تقویت‌کننده در شکل ۶ـ۳۴ (الف) نیز در محدوده وسیعی مربوط به $-1.462V < V_s < +1.462V$ خطی است، که دوباره در شکل ۶ـ۳۴ (ب) برای وضوح بیشتر نشان داده شده است. این محدوده کمی کوچک‌تر از محدوده‌ای است که از تقسیم ولتاژهای مثبت و منفی تغذیه بر بهره به‌دست می‌آید. در خارج این محدوده، خروجی op amp به اشباع می‌رسد، و فقط به مقدار کمی به ولتاژ ورودی وابسته است. در دو ناحیه اشباع، مدار به‌عنوان یک تقویت‌کننده عمل نمی‌کند.

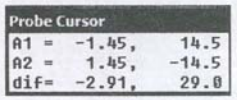
با افزایش تعداد ارقام مکان‌نما (Tools, options, Number of cursor digit) به 10، درمی‌یابیم که به ازای ولتاژ ورودی $v_s = 1.0V$، ولتاژ خروجی 9.9958340- است که کمی کوچک‌تر از مقدار پیش‌بینی‌شده 10- در مدل تقویت‌کننده ایده‌آل است، و نیز کمی با مقدار حاصل در مثال ۶ـ۳، یعنی 9.999448- تفاوت دارد. هنوز نتایج پیش‌بینی‌شده با PSpice برای μA741 در چند صدم درصدی مدل تحلیلی است و نشان می‌دهد که مدل op amp ایده‌آل تقریب بسیار خوبی برای مدارهای مجتمع است.



شکل ۶ـ۳۳ پنجره DC Sweep Setup.



(الف)



(ب)

شکل ۶ـ۳۴ (الف) ولتاژ خروجی مدار op amp که با ابزار مکان‌نما ترسیم و در آن ناحیه اشباع مشخص است. (ب) پنجرهٔ بزرگ‌شدهٔ مکان‌نمای prob.

تمرین

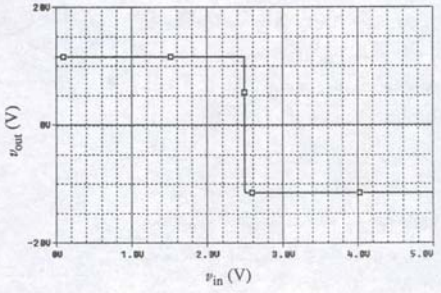
۶ـ۷ بقیه مدارهای op amp این فصل را شبیه‌سازی کنید و نتایج باقیمانده را با آن‌چه در مدل ایده‌آل پیش‌بینی شده بود مقایسه نمایید.

۶ـ۶ مقایسه‌گرها و تقویت‌کننده‌های وسایل اندازه‌گیری

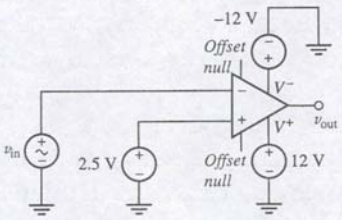
مقایسه‌گرها

هر مدار op amp که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته است اتصالی را بین پایه خروجی و پایه معکوس‌گر ورودی داشته است. این عمل را حلقه بسته [1] می‌نامند و برای تهیه پسخورد منفی طبق آنچه که قبلاً بحث شد از آن استفاده می‌شود. حلقه بسته روشی ارجح در استفاده از یک op amp به عنوان تقویت‌کننده است زیرا رفتار مدار را از تغییرات ناشی از بهره حلقه باز که به علت تغییر دما یا تفاوت‌های ساخت می‌باشد، جدا می‌سازد. البته مواردی وجود دارد که در آن آرایش حلقه باز برای op amp ترجیح داده می‌شود. وسایلی که در این گونه کاربردها به دفعات استفاده می‌شوند را مقایسه‌گر [2] می‌نامند، زیرا آن‌ها کمی متفاوت با op amp های معمولی ساخته می‌شوند تا سرعت آن‌ها در اِعمال حلقه باز بهبود یابد.

شکل ۶ـ۳۵ (الف) یک مدار مقایسه‌گر ساده است که یک ولتاژ مرجع به ورودی معکوس‌نکننده آن متصل بوده و ولتاژ مورد مقایسه (v_{in}) هم به ورودی معکوس‌گر وصل است.



(ب)



(الف)

شکل ۶ـ۳۵ (الف) یک مدار مقایسه‌گر ساده با 2.5 V ولتاژ مرجع. (ب) گراف مشخصه ورودی ـ خروجی.

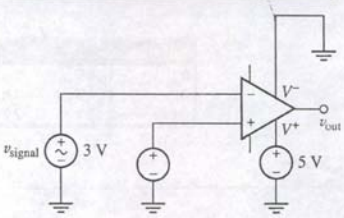
1. closed loop 2. comparator

چون op amp دارای بهره حلقه باز، A، خیلی بزرگی است (10^5 یا بیشتر که معمولاً می‌توان در جدول ۳ـ۶ مشاهده کرد)، اختلاف ولتاژ زیادی بین پایانه‌های ورودی لازم نیست تا آن را به حالت اشباع ببرد. در واقع یک اختلاف ولتاژ ورودی به اندازه ولتاژ تغذیه تقسیم بر A لازم است ـ تقریباً $120\ \mu V \pm$ برای مدار شکل ۳۵ـ۶ (الف) و $A = 10^5$. خروجی تفکیک‌شده (جدا از هم شده) مقایسه‌گر در شکل ۳۵ـ۶ (ب) دیده می‌شود که پاسخ بین دو مقدار اشباع مثبت و منفی تغییر کرده است و در آن هیچ ناحیه تقویت خطی ملاحظه نمی‌شود. بنابراین یک خروجی 12 V از مقایسه‌گر نشانگر ورودی کمتر از ولتاژ مرجع، و یک خروجی 12 V منفی بیانگر ورودی بزرگتر از مرجع است اگر ما ولتاژ مرجع را به ورودی معکوس‌گر ببندیم رفتار حاصل مخالف خواهد بود.

مثال ۸ـ۶

یک مدار طراحی کنید که یک خروجی "منطق 1" را اگر سیگنال ولتاژ به زیر 3 V برود تهیه نماید و در غیر این‌صورت صفر ولت است.

چون می‌خواهیم خروجی مقایسه‌گر ما بین 0 و 5 V نوسان کند، ما از یک op amp با یک تغذیه تک‌ورودی 5 V+ استفاده می‌کنیم که مطابق شکل ۳۶ـ۶ متصل شده است. ما یک ولتاژ مرجع 3 V+ به ورودی معکوس‌نکننده وصل می‌کنیم که ممکن‌است با دو باتری 1.5 V سری یا یک مدار مرجع دیود زنر مناسب فراهم شده باشد. سیگنال ولتاژ ورودی (v_{signal}) هم به ورودی معکوس‌گر وصل است. در واقع محدوده ولتاژ اشباع یک مدار مقایسه‌گر کمی کمتر از ولتاژ منبع تغذیه است، بنابراین کمی تنظیم ممکن‌است همراه با اشباع یا تست لازم باشد.

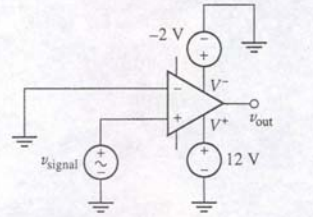


شکل ۳۶ـ۶ یک طراحی برای مدار موردنظر.

تمرین

۸ـ۶ مداری طراحی کنید که اگر v_{signal} از 0 V تولید کند، خروجی 12 V را تولید می‌نماید در غیر این صورت 2 V- تولید می‌شود.

جواب: یک راه ممکن شکل ۳۷ـ۶ است.



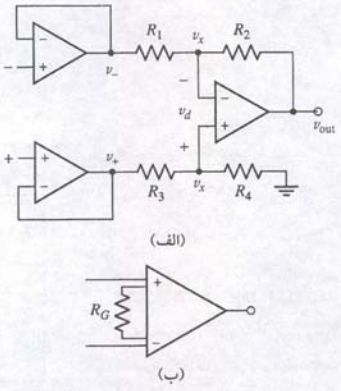
شکل ۳۷ـ۶ یک راه‌حل ممکن برای تمرین ۸ـ۶

تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری

مدار مقایسه‌گر مبنا بر روی اختلاف ولتاژ بین دو پایانه ورودی به دستگاه عمل می‌کند، ولی سیگنال‌ها را تقویت نمی‌کند زیرا خروجی متناسب با ورودی نیست. تقویت‌کننده تفاضلی شکل ۱۰ـ۶ هم مادامی که به اشباع نرود بر روی اختلاف ولتاژ بین ورودی‌های معکوس‌کننده و معکوس‌نکننده عمل کرده و خروجی متناسب با این تفاضل تولید می‌نماید. با این وجود وقتی که با ولتاژ ورودی کوچک سروکار داریم، راه بهتر وسیله‌ای به نام تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری است، که در واقع از سه تقویت‌کننده در یک بسته استفاده می‌نماید.

مثالی از یک آرایش تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری در شکل ۳۸ـ۶ (الف) و نماد آن در شکل ۳۸ـ۶ (ب) دیده می‌شود. هر ورودی مستقیماً به طبقه دنبال‌گر ولتاژ[1] (ولتاژ فالوور) اعمال شده و هر دو خروجی دنبال‌گرها به یک طبقه تقویت‌کننده تفاضلی اعمال می‌گردد. این وسیله خصوصاً در مواردی مناسب است که سیگنال ولتاژ ورودی خیلی کوچک است (مثلاً از مرتبه میلی‌ولت) از ولتاژ تولیدشده به وسیله ترموکوپل‌ها، یا گیج‌های کششی[2]، یا یک سیگنال پارازیت حالت مشترک در حد چند ولت می‌توان نام برد.

اگر اجزای تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری همگی در یک تراشه ساخته شوند، آن‌گاه ممکن‌است انتظار داشت که مشخصه‌های وسیله هم‌خوانی داشته باشند و به نسبت به مقاومت‌های دقیقی دست یابیم. برای این‌که CMRR تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری



شکل ۳۸ـ۶ (الف) تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری مبنا. (ب) نماد مورد استفاده رایج.

1. voltage follower 2. strain gauge

حداکثر شود، انتظار داریم $R_2/R_1 = R_4/R_3$ باشد، به نحوی که تقویت برابر مولفه‌های حالت مشترک سیگنال‌های ورودی به دست آید. برای شکافتن بیشتر موضوع، ولتاژ را در خروجی دنبال‌گر ولتاژ بالا "v_-" و ولتاژ در خروجی دنبال‌گر ولتاژ پایین را "v_+" می‌نامیم. با فرض این‌که هر سه تقویت‌کننده ایده‌آل باشند و نام‌گذاری ولتاژ در هر ورودی طبقه تفاضلی با v_x می‌توان معادلات گرهی زیر را نوشت:

$$\frac{v_x - v_-}{R_1} + \frac{v_x - v_{out}}{R_2} = 0 \qquad (۲۰)$$

و

$$\frac{v_x - v_+}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} = 0 \qquad (۲۱)$$

با حل معادله (۲۱) برای v_x داریم:

$$v_x = \frac{v_+}{1 + R_3/R_4} \qquad (۲۲)$$

و با جایگزین در معادله (۲۰) عبارتی برای v_{out} برحسب ورودی داریم:

$$v_{out} = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_4/R_3}\right) v_+ - \frac{R_2}{R_1} v_- \qquad (۲۳)$$

واضح است که معادله (۲۳)، در حالت کلی اجازه تقویت مولفه‌های حالت مشترک را می‌دهد. در حالت خاص که به هر حال $R_4/R_3 = R_2/R_1 = K$ است، معادله (۲۳) به $K(v_+ - v_-) = Kv_d$ کاهش می‌یابد به طوری که برای op amp های آیده‌آل تنها تفاضل تقویت می‌شود و بهره هم با نسبت مقاومت‌ها تعیین می‌گردد. چون این مقاومت‌ها برای تقویت‌کننده دستگاه اندازه گیری درونی است و به وسیله کاربر قابل دسترسی نیستند. قطعات عملی مانند AD622 اجازه تنظیم بهره را بین 1 الی 1000 می‌دهند که این کار به وسیله مقاومت خارجی بین دو پایه که در شکل ۳۸ـ۶ (ب) نشان داده شده است، انجام می‌گردد.

۷ـ۶ خلاصه فصل و مرور

- در تحلیل op amp ایده‌آل دو قاعده اساسی را باید به کاربرد:
  ۱. هیچ جریانی به هیچ‌یک از پایانه‌های ورودی وارد نمی‌شوند.
  ۲. هیچ اختلاف پتانسیلی بین پایانه‌های ورودی وجود ندارد.
- هدف از تحلیل مدارهای op amp معمولاً یافتن ولتاژ خروجی برحسب بعضی از کمیت یا کمیت‌های ورودی است.
- تحلیل گرهی معمولاً بهترین انتخاب در op amp است و بهتر است از ورودی شروع و به سمت خروجی ادامه یابد.
- برای جریان خروجی op amp نمی‌توان مقدار فرض کرد، بلکه باید پس از تعیین ولتاژ خروجی، آن را به دست آورد.
- بهره مدار op amp معکوس‌گر با معادله زیر داده می‌شود:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_{in}} v_{in}$$

- بهره مدار op amp معکوس‌نکننده با معادله زیر داده می‌شود:

$$v_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{in}$$

- همواره یک مقاومت از پایه خروجی یک op amp به پایه ورودی معکوس‌گر وصل می‌شود تا بدین‌وسیله با پسخورد منفی، پایداری را افزایش دهد.
- مدل op amp ایده‌آل بر پایه بهره حلقه باز بینهایت A، مقاومت ورودی بی‌نهایت و مقاومت صفر خروجی، R_o، استوار است.
- در عمل، محدوده ولتاژ خروجی op amp با ولتاژهای تغذیه تعیین می‌گردد.

۶ـ۸ خواندنی‌های کمکی

Two very readable books which deal with a variety of op amp applications are:

R. Mancini (ed.), *Op Amps Are For Everyone,* 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003. Also available on the Texas Instruments website (www.ti.com).

W. G. Jung, *Op Amp Cookbook,* 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997.

Characteristics of Zener and other types of diodes are covered in Chapter 1 of

W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design,* 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

One of the first reports of the implementation of an "operational amplifier" can be found in

J. R. Ragazzini, R. M. Randall, and F. A. Russell, "Analysis of problems in dynamics by electronic circuits," *Proceedings of the IRE* **35**(5), 1947, pp. 444–452.

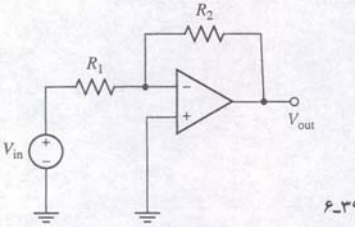
And an early applications guide for the op amp can be found on the Analog Devices, Inc. website (www.analog.com):

George A. Philbrick Researches, Inc., *Applications Manual for Computing Amplifiers for Modelling, Measuring, Manipulating & Much Else.* Norwood, Mass.: Analog Devices, 1998.

مسائل

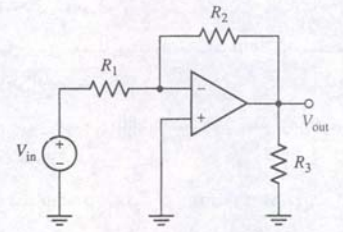
۶ـ۲ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل

۱. برای مدار op amp شکل ۶ـ۳۹، V_{out} را به دست آورید اگر (الف) $V_{in} = 3V$، $R_1 = 10\Omega$ و $R_2 = 100\Omega$ باشد؛ (ب) $V_{in} = 2.5V$، $R_1 = 1M\Omega$ و $R_2 = 1M\Omega$ و (ج) $V_{in} = -1V$، $R_1 = 3.3k\Omega$ و $R_2 = 4.7\ k\Omega$.



شکل ۶ـ۳۹

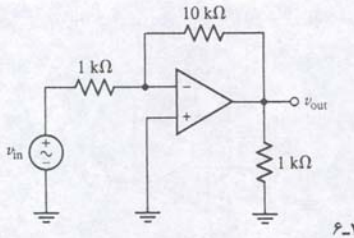
۲. برای مدار تقویت‌کننده شکل ۶ـ۴۰ V_{out} را به دست آورید اگر (الف) $V_{in} = 1.5V$، $R_1 = 10\Omega$، $R_2 = 47\Omega$ و $R_3 = 10\Omega$، (ب) $V_{in} = -9V$، $R_1 = 1M\Omega$، $R_2 = 1M\Omega$ و $R_3 = 1k\Omega$ و (ج) $V_{in} = 100mV$، $R_1 = 1k\varepsilon$، $R_2 = 6.8k\Omega$ و $R_3 = 330\Omega$ باشد.



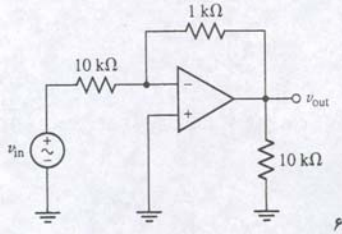
شکل ۶ـ۴۰

۳. ولتاژ خروجی V_{out} برای مدار op amp در شکل ۶ـ۴۱ را رسم کنید اگر (الف) $v_{in} = 2 \sin 5t\ V$ و (ب) $v_{in} = 1 + 0.5 \sin 5t\ V$ باشد.

۴. ولتاژ خروجی V_{out} برای مدار op amp در شکل ۶ـ۴۲ را رسم کنید اگر (الف) $v_{in} = 10 \cos 4t\ V$ و (ب) $v_{in} = 15 + 4 \cos 4t\ V$ باشد.



شکل ۶ـ۴۱



شکل ۶ـ۴۲

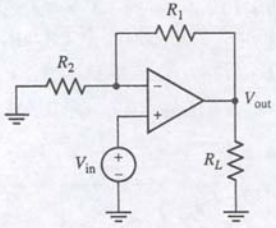
۵. مداری رسم کنید که $-9\ V$ را به بار $47\ k\Omega$ حمل کند، اگر فقط $\pm 5\ V$ برای تغذیه موجود باشد (برای این مسئله لازم نیست منابع تغذیه که به $\pm 5\ V$ محدود نیستند را رسم کرد).

۶. مداری برای حمل $+20\ V$ به یک مقاومت $1\ k\Omega$ رسم کنید، اگر منابع تغذیه $\pm 5\ V$ باشد (لازم نیست منابع تغذیه که به $\pm 5\ V$ محدود نیستند را رسم کرد).

۷. مداری طراحی کنید که $+1.5\ V$ را به یک بار نامشخص حمل کند، اگر فقط یک منبع تغذیه موجود باشد. لازم نیست منبع تغذیه را در op amp لحاظ کنید.

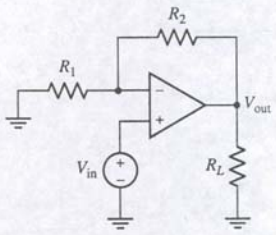
۸. یک مدار برای حمل $+3\ V$ به بار ناشناخته‌ای طراحی کنید. اگر فقط یک منبع تغذیه موجود باشد لازم نیست منبع تغذیه را در op amp لحاظ کنید.

۹. برای مدار op amp شکل ۶ـ۴۳، V_{out} را به دست آورید اگر (الف) $V_{in} = 300\ mV$، $R_1 = 47\ \Omega$ و $R_2 = 10\ \Omega$ باشد؛ (ب) $V_{in} = -1\ V$، $R_1 = 1M\Omega$ و $R_2 = 1\ M\Omega$ و (ج) $V_{in} = 1.5V$، $R_1 = 4.7\ k\Omega$ و $R_2 = 3.3\ k\Omega$.



شکل ۶ـ۴۳

۱۰. برای مدار شکل ۶ـ۴۴، V_{out} را به دست آورید اگر (الف) $V_{in} = 200\ mV$، $R_L = 10\ k\Omega$، $R_1 = 10\ \Omega$ و $R_2 = 47\ \Omega$؛ (ب) $V_{in} = -9\ V$، $R_L = 1\ k\Omega$، $R_1 = 1\ M\Omega$ و $R_2 = 1\ M\Omega$ و (ج) $V_{in} = 100\ mV$، $R_L = 330\ \Omega$، $R_1 = 1\ k\Omega$ و $R_2 = 6.8\ k\Omega$.

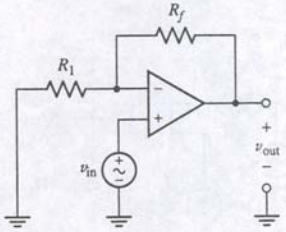


شکل ۶ـ۴۴

۱۱. در مدار شکل ۶ـ۴۵، $R_1 = R_f = 1\ k\Omega$ است. ولتاژ خروجی V_{out} را رسم کنید اگر

الف. $v_{in} = 4 \sin 10t\ V$

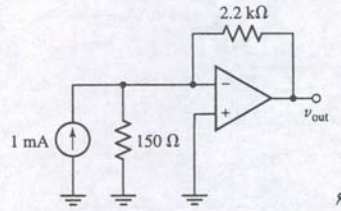
ب. $v_{in} = 1 + 0.255 \sin 10t\ V$ باشد.



شکل ۶ـ۴۵

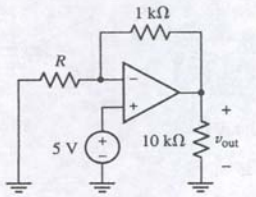
۱۲. در مدار op amp شکل ۶ـ۴۵، $R_1 = 2\ k\Omega$ و $R_f = 1\ k\Omega$ است. ولتاژ خروجی v_{out} را رسم کنید اگر (الف) $v_{in} = 2 \cos 2t\ V$ و (ب) $v_{in} = 4 + \cos 2t\ V$.

۱۳. با مراجعه به شکل ۶ـ۴۶، ولتاژ v_{out} را محاسبه کنید.



شکل ۶ـ۴۶

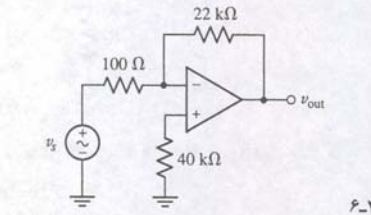
۱۴. در مدار شکل ۶ـ۴۷، چه مقداری برای R لازم است تا توان 150mW به مقاومت 10kΩ منتقل شود.



شکل ۶ـ۴۷

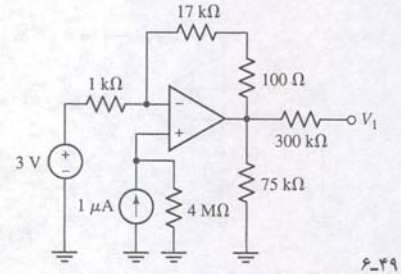
۱۵. یک میکروفون می‌تواند 0.5V را وقتی کسی در فاصله 20ft دست می‌زند، انتقال دهد. یک سوئیچ الکترونیک مقاومت تونن معادل 670Ω را داشته و برای فعال‌شدن به 100mA جریان نیاز دارد. مداری طراحی کنید که میکروفون را به سوئیچ الکترونیک وصل کند که با دست‌زدن فردی فعال شود.

۱۶. برای مدار شکل ۶.۴۸ عبارتی برای v_{out} برحسب v_s به‌دست‌آورید.



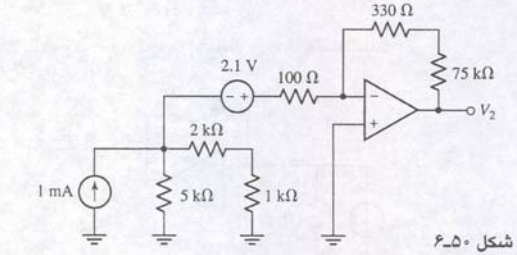
شکل ۶.۴۸

۱۷. برای مدار شکل ۶.۴۹، v_1 را محاسبه کنید.



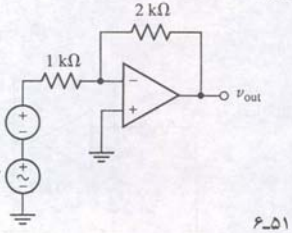
شکل ۶.۴۹

۱۸. برای مدار شکل ۶.۵۰، v_2 را محاسبه نمایید.



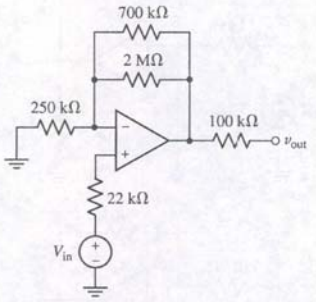
شکل ۶.۵۰

۱۹. عبارتی برای v_{out} در مدار شکل ۶.۵۱ پیدا کنید و در $t = 3$ آن را ارزیابی نمایید.



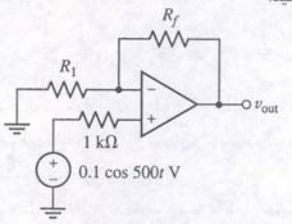
شکل ۶.۵۱

۲۰. چه مقداری از v_{in} منجر به خروجی 18V در مدار شکل ۶.۵۲ می‌گردد؟



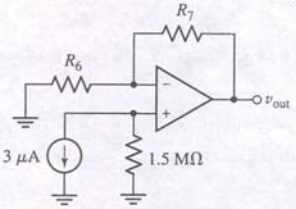
شکل ۶.۵۲

۲۱. R_1 و R_f را در شکل ۶.۵۳ برای محاسبه $v_{out} = 23.7\cos 500t$ V انتخاب کنید.



شکل ۶.۵۳

۲۲. عبارتی برای v_{out} در شکل ۶.۵۴ بدون استفاده از تبدیل منبع به‌دست‌آورید.



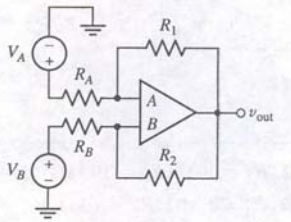
شکل ۶.۵۴

۲۳. با مراجعه به مدار شکل ۶.۵۵:

(الف) اگر $v_A = 0$ ، $v_B = 1$V ، $R_A = R_B = 10$kΩ ، $R_1 = 70$kΩ ، $R_2 = \infty$ و $v_{out} = 8$V باشد، کدام پایانه (A یا B) معکوس‌نکننده است؟

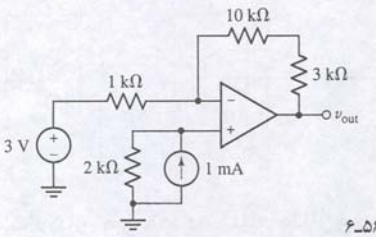
(ب) $v_A = 10$ V ، $v_B = 0$ V است. اگر B ورودی وارونگر باشد، R_A ، R_B ، R_1 و R_2 را برای تولید یک ولتاژ خروجی 20 V انتخاب نمایید.

(ج) $v_A = v_B = 1$ V ، $R_1 = 0$ و $R_2 = \infty$ است. کدام پایانه ورودی (A یا B) وارونگر است؟ توضیح دهید.



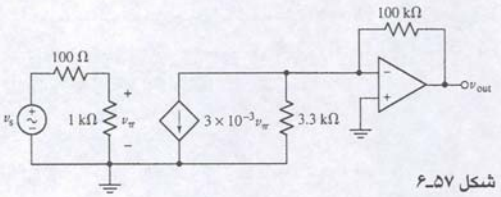
شکل ۶.۵۵

۲۴. برای مدار op amp شکل ۶.۵۶، v_{out} را حساب کنید.



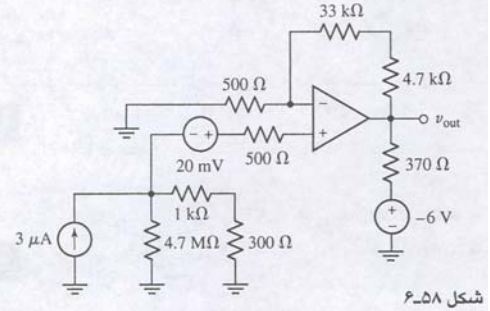
شکل ۶.۵۶

۲۵. اگر در مدار شکل ۶.۵۷ $v_s = 5\sin 3t$ V باشد، v_{out} را در $t = 0.25$s به‌دست‌آورید.



شکل ۶.۵۷

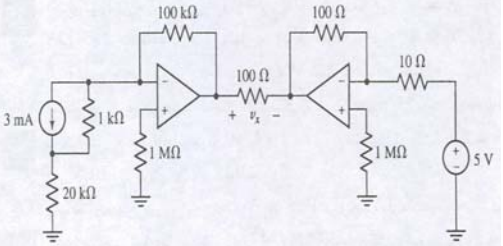
۲۶. از تکنیک‌های تحلیل مدار مناسب برای محاسبه v_{out} در شکل ۶.۵۸ استفاده نمایید.



شکل ۶.۵۸

۲۷. در شکل ۶.۵۸، منبع 3μA را با منبع 27μA جایگزین کرده سپس v_{out} را محاسبه کنید.

۲۸. v_x را برای مدار دو تقویت‌کننده‌های شکل ۶.۵۹ به‌دست‌آورید.

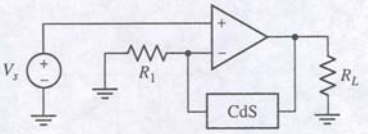


شکل ۶.۵۹

۲۹. عبارتی برای تقویت‌کننده مجموع، که در آن هر مقاومت مقدارخاص خود را دارد به‌دست‌آورید.

۳۰. عبارتی برای تقویت‌کننده تفاضلی، که در آن هر مقاومت مقدار خاصی را دارد، به‌دست‌آورید.

۳۱. سولفید کادمیوم (CdS) معمولاً برای ساخت مقاومت‌های حساس به نور در سطح آن استفاده‌می‌شود. در شکل ۶.۶۰، یک فتوسل به‌عنوان مقاومت پسخورد R_f به‌کاررفته‌است. در تاریکی محض، مقاومت آن 100kΩ و در نور 6 شمع برابر 10kΩ است. R_L معادل تونن مداری است‌که به‌هنگام اعمال 1.5 V یا کمتر به پایانه‌هایش فعال‌می‌شود. R_1 و v_s را طوری تعیین کنید که مقدار R_L با نور 2 شمع یا بیشتر فعال شود.



شکل ۶.۶۰

۳۲. دو میکروفون در یک استودیو ضبط مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی برای صوت و دیگری برای آلات موسیقی. مداری طراحی کنید که بتواند خروجی هر دو میکروفون را ترکیب نماید، ولی صوت دو برابر آلات موسیقی، تقویت شود.

۳۳. یک سیگنال سینوسی روی آفست dc، 2V، سوار است (به بیان دیگر مقدار متوسط موج سینوسی 2 V است). مداری برای حذف آفست dc طراحی کنید و سیگنال سینوسی را با ضریب 100 تقویت نمایید (بدون معکوس‌کردن فاز).

۶-۳ طبقات پی‌درپی

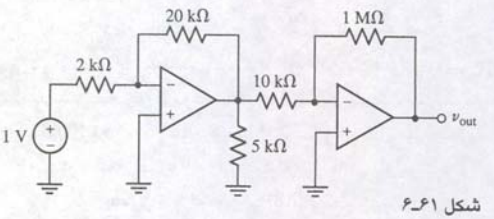
۳۴. مداری طراحی کنید که متوسط سه ولتاژ v_1، v_2 و v_3 را در خروجی‌اش تولید نماید.

۳۵. یک سیستم موجودی فروشگاه الکترونیکی از یک ترازو در زیر هر پالت استفاده می‌کند، خروجی ترازو طوری تنظیم شده است که در ازای هر کیلوگرم 1 mV را تولید می‌کند. یک مدار طراحی نمایید تا ولتاژ خروجی متناسب با وزن کل گروهی از اقلام مشابه در انبار را تولید (توزیع‌شده بین چهار پالت)، و در آن وزن هر پالت کسر شده باشد (وزن پالت به عنوان ولتاژ مرجع برای هر پالت در نظر گرفته شود). ولتاژ خروجی شما باید چنان کالیبره شود که 1 mV برای 1 kg باشد.

۳۶. یک تفنگ رادار سازنده‌ای برای اندازه‌گیری، سرعت عمودی یک ولتاژ خروجی متناسب با سرعت شیئی که هدف است را فراهم می‌کند، به نحوی که 10 mV = 1 mph. اگر سرعت‌سنج خودرو طوری تنظیم شود تا یک سیگنال متناسب با سرعتش تولید کند، و 10 mV = 1 mph باشد، یک مدار چندطبقه طراحی کنید که (الف) یک سیگنال ولتاژ برابر با اختلاف سرعت خودروی سرعت‌دار و خودروی پلیس را تولید نماید (به طوری که سرعت پلیس در 1 mph کمتر =

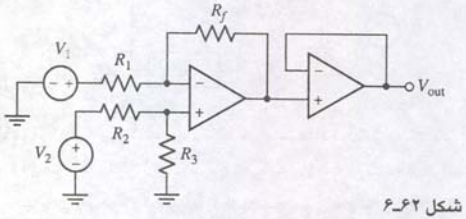
10 mV) و (ب) سیگنال ولتاژی برای هر یک از سه کمیت به kph فراهم کند به طوری که 10 mV = 1 kph باشد.

۳۷. v_{out} را برای مدار شکل ۶.۶۱ محاسبه کنید.



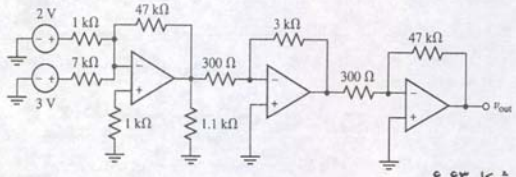
شکل ۶.۶۱

۳۸. عبارتی برای v_{out} برحسب v_1 و v_2 برای مدار شکل ۶.۶۲ به‌دست‌آورید.



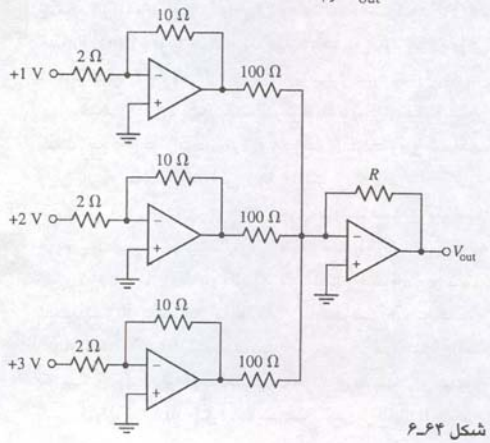
شکل ۶.۶۲

۳۹. برای مدار op amp پی‌درپی در شکل ۶.۶۳، ولتاژ خروجی هر طبقه را محاسبه نمایید.



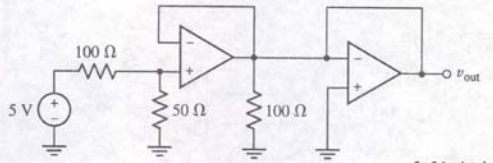
شکل ۶.۶۳

۴۰. با مراجعه به مدار op amp شکل ۶.۶۴ چه مقداری از R برای تهیه $v_{out} = 10$ V لازم است؟



شکل ۶.۶۴

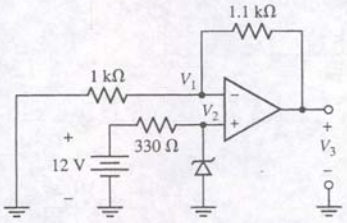
۴۱. v_{out} را برای مدار دو طبقه op amp شکل ۶.۶۵ حساب کنید.



شکل ۶.۶۵

۶.۴ مدارهای مربوط به منابع ولتاژ و جریان

۴۲. (الف) مدار شکل ۶.۶۶ از یک دیود 1N750 استفاده می‌نماید که با ولتاژ زنر 4.7 V مشخص شده است. ولتاژهای V_1، V_2 و V_3 را تعیین کنید. (ب) صحت تحلیل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید. یک شماتیک را با برچسب مناسب نشان دهید و روی منابع هر اختلاف بین دو تحلیل اظهارنظر نمایید.



شکل ۶.۶۶

۴۳. مداری برای تولید یک ولتاژ مرجع 5.1 V+ به عنوان ورودی به یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی کنید اگر فقط باتری 9 V موجود باشد. از دیود 1N4733 که ولتاژ زنری 5.1 V را در جریان 76 mA تولید کند استفاده کنید.

۴۴. یک مدار برای تولید ولتاژ مرجع 2.5 V- را در ورودی یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی نمایید اگر باتری‌های 9 V موجود باشد. از یک دیود 1N4740 که ولتاژ زنری 10 V در جریان 25 mA را دارا است استفاده کنید.

۴۵. مداری برای تولید یک ولتاژ مرجع 12 V+ به عنوان ورودی به یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی کنید اگر باتری‌های 9 V موجود باشد. از یک دیود 1N4747 استفاده کنید که ولتاژ زنری 20 V در جریان 12.5 mA دارد.

۴۶. (الف) مداری برای تولید ولتاژ مرجع 5 V- به عنوان یک ورودی به دنبال‌گر ولتاژ به‌کار می‌رود، اگر باتری‌های 9 V موجود باشند. از دیود 1N4728 استفاده کنید که ولتاژ زنری 3.3 V در جریان 76 mA دارد. (ب) طرح خود را برای تهیه ولتاژ مرجع 2.2 V+ اصلاح کنید.

۴۷. یک مدار منبع جریان طراحی کنید که بتواند 25 mA را به یک بار نامشخص بدهد. از دیود زنر 1N4740 استفاده نمایید که ولتاژ شکست آن 10 V در جریان 25 mA است.

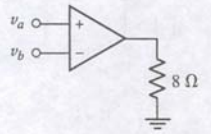
۴۸. یک مدار منبع جریان که بتواند 12.5 mA برای یک بار ناشناخته تولید کند، طراحی نمایید. از دیود زنر 1N4747 استفاده کنید که دارای ولتاژ شکست 20 V در جریان 12.5 mA است.

۴۹. یک منبع جریان طراحی کنید که بتواند جریان 75 mA را برای بار ناشناخته‌ای تولید نماید. از یک دیود 1N4747 استفاده کنید، که ولتاژ شکست 20 V در جریان 12.5 mA تولید کند. اگر تقویت‌کننده با ±15 V تغذیه شود، محدود باری که می‌تواند به طرح شما متصل شود را مشخص کنید.

۵۰. با استفاده از مدل دقیق‌تر μA741، توان انتقالی به مقاومت 8Ω در شکل ۶.۶۷ چقدر است. به‌شرطی‌که:

الف. $v_a = v_b = 1$ nV ب. $v_b = 1$ nV, $v_c = 0$

ج. $v_b = 2$pV, $v_a = 1$fV د. $v_b = 50\mu$V, $v_a = -4\mu$V



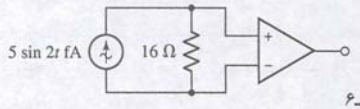
شکل ۶.۶۷

۵۱. یک مدار op amp معکوس‌گر با AD549 ساخته شده است. اگر $R_1 = 270$kΩ و $R_f = 1$MΩ باشند، چه جریان ورودی تغذیه‌ای (بایاس) لازم است. (الف) $v_s = 1$ mV، (ب) $v_s = -7.5$ mV و (ج) $v_s = 1$ V.

۵۲. v_{out} را برای مدار شکل ۶.۶۸ به‌دست‌آورید، اگر:

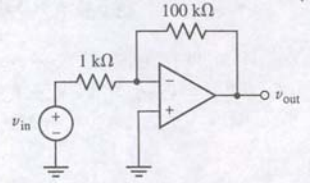
الف. $A = 10^5$، $R_i = 100$MΩ و $R_o = 0$ باشد.

ب. $A = 10^6$، $R_i = 1$TΩ و $R_o = 0$ باشد.



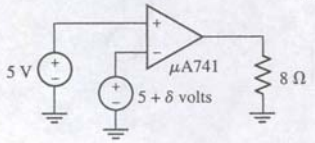
شکل ۶.۶۸

۵۳. برای مدار شکل ۶.۶۹، (الف) عبارتی برای v_{out}/v_{in} به‌دست‌آورید به‌شرطی‌که $R_i = \infty$، $R_o = 0$ و A بی‌نهایت باشد. (ب) چه مقداری برای بهره حلقه باز A لازم است تا بهره حلقه بسته در یک درصد مقدار ایده‌آل خود باشد.



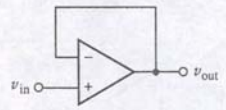
شکل ۶.۶۹

۵۴. برای مدار شکل ۶.۷۰، توان تلف‌شده به وسیله مقاومت 8Ω را به‌دست‌آورید. به‌شرطی‌که δ برابر با (الف) 0V، (ب) 1nV و (ج) 2.5 μV باشد.



شکل ۶.۷۰

۵۵. با استفاده از پارامترهای AD549، v_{out} را برای مدار شکل ۶.۷۱ محاسبه کنید به شرطی که $v_{in} = -16$mV باشد.



شکل ۶.۷۱

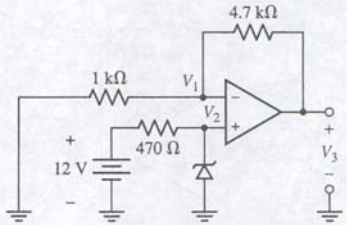
۶.۵ ملاحظات عملی

۵۶. یک عبارت برای ولتاژ خروجی دنبال‌گر برحسب ولتاژ v_{in} برای حالتی که بهره حلقه باز متناهی و مقاومت ورودی معین و مقاومت خروجی غیرصفر است طراحی کنید. نشان دهید که برای حالت op amp ایده‌آل، عبارت به $v_{out} = v_{in}$ کاهش می‌یابد.

۵۷. (الف) یک مدل کامل op amp که شامل وجود بهره حالت مشترک A_{CM} در خروجی باشد، بسازید. (ب) از مدل برای $R_i = \infty$، 10^5، $R_o = 0$ و $A_{CM} = 10$ و $A_{CM} = 0$ استفاده کنید. (ج) پاسخ خود را با مقایسه کنید.

۵۸. سرعت واکنش را تعریف نمایید و اهمیت آن را در موج خروجی یک مدار توضیح دهید.

۵۹. مدار شکل ۶.۷۲ از یک دیود 1N750 استفاده می‌نماید، که با یک ولتاژ 4.7 V مشخص شده است. (الف) ولتاژهای V_1، V_2 و V_3 را تعیین نمایید. (ب) پاسخ خود را با اجرای شبیه‌سازی PSpice، و استفاده از μA741 و تغذیه ±18 V تحقیق نمایید. نتیجه خود را به درستی نام‌گذاری (برچسب‌زنی) کنید. اگر حل شبیه‌سازی دقیقاً موافق با محاسبه دستی نیست، سعی کنید که عامل اختلاف را پیدا کنید. (ج) حداقل مقداری که با آن منبع می‌تواند به 12 V قبل از توقف مدار زنر، کاهش یابد چقدر است.

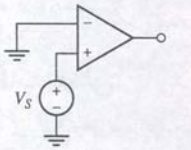


شکل ۶.۷۲

۶۰. به کمک PSpice یک مدار op amp، μA741، با تغذیه ±15V، $R_1 = 10$kΩ و $R_f = 1$MΩ را شبیه‌سازی کنید. مشخصه ورودی - خروجی را ترسیم نمایید و نواحی خطی و اشباع مثبت و منفی را برچسب بزنید. آیا بهره پیش‌بینی‌شده به‌وسیله شبیه‌سازی با مدل ایده‌آل وفاق دارد.

۶۱. اگر بدانیم که کاربردهای ما فقط نیاز به معکوس‌کردن آرایش op amp دارد و نیازی به قطع ولتاژ خروجی نیست، حداقل تعداد پایه‌های لازم برای بسته‌بندی op amp چیست؟ هر کدام را با نام لیست نمایید.

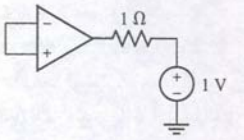
۶۲. مدار شکل ۶ـ۷۳ را با PSpice شبیه‌سازی کنید. به شرطی که (الف) از μA741 استفاده شود، (ب) LM324 استفاده شده باشد، (ج) LF411 به‌کار رفته باشد. ولتاژ تفاضل ورودی v_s لازم برای اشباع هر کدام را اگر تغذیه $\pm$15 باشد به‌دست‌آورید.



شکل ۶ـ۷۳

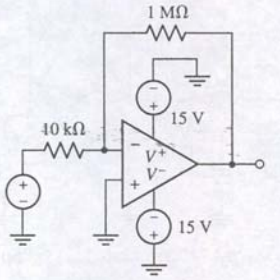
۶۳. با PSpice مدار op amp معکوس‌نکننده μA741 را با تغذیه $\pm$15V، $R_1 = 4.7k\Omega$ و $R_f = 1M\Omega$ شبیه‌سازی کنید. مشخصه‌های ورودی ـ خروجی را ترسیم نمایید و نواحی خطی و اشباع را معین کنید. آیا بهره با آنچه به مدل ایده‌آل متعلق است همخوانی دارد؟

۶۴. از مفهوم مدار شکل ۶ـ۷۴ برای تعیین مقاومت خروجی μA741 و LF411 استفاده کنید. ولتاژ تغذیه را تغییر دهید و ببینید آیا نتایج شبیه‌سازی تغییر می‌کند یا نه.



شکل ۶ـ۷۴

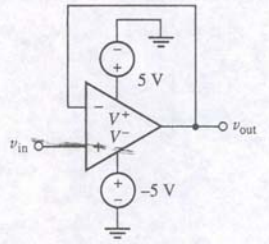
۶۵. مدار شکل ۶ـ۷۵ را با LM324 شبیه‌سازی کنید. (الف) جریان تغذیه و ولتاژ ورودی تفاضلی را معین کنید. این نتایج را با مقادیر مربوط به مدل مشروح و جدول ۶ـ۳ مقایسه کنید. (ب) بگویید آیا ولتاژ تغذیه مقادیر به‌دست‌آمده را تحت تأثیر قرار می‌دهد یا خیر.



شکل ۶ـ۷۵

۶۶. سنسوری یک سیگنال ولتاژ بین 30mV- و 75mV+ را تولید می‌کند. (الف) اگر یک تقویت‌کننده معکوس‌گر با بهره ولتاژ $|v_{out}/v_{in}| = 1000$، تغذیه dc، $\pm$15V به‌کاررود محدوده ولتاژ مورد انتظار چقدر است. (ب) اگر تقویت‌کننده از نوع معکوس‌نکننده و تغذیه نیز $\pm$15V باشد حداکثر نسبت مقاومت R_f/R_1 به‌کاررفته بدون اشباع چقدر است؟

۶۷. (الف) مدار شکل ۶ـ۷۶ را با استفاده از μA741 در محدوده $-10V < v_{in} < +10V$ شبیه‌سازی کنید. ولتاژهای دقیق شروع اشباع را با ابزار مکان‌نما معین نمایید. (ب) یک μA741 op amp قادر به تولید تا 35mA جریان تحت شرایط اتصال کوتاه دایم است. حداکثر مقدار ممکن را برای جریان اتصال کوتاه مجاز به وسیله مدل PSpice معین نمایید.



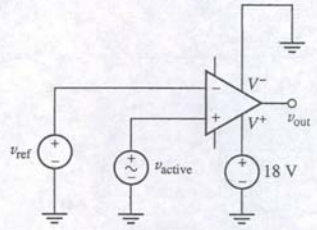
شکل ۶ـ۷۶

۶۸. طی تلاش برای اصلاح امنیت انتقال، یک سیگنال وابسته به زمان به یک سیگنال رادیویی قبل از مخابره اضافه شده است. همان سیگنال با فرکانس دیگری نیز مخابره شده است. با فرض این‌که هر آنتن گیرنده به صورت یک منبع ولتاژ وابسته به زمان، موازی با مقاومت 300Ω مدل‌سازی شود، مداری برای جداکردن دو سیگنال طراحی کنید، سیگنال اصلی را حذف کنید و سیگنال صوتی را با ضریب 10 تقویت نموده و حاصل آن را به بلندگوی 8Ω منتقل نمایید.

۶۹. یک مدار تقویت‌کننده که بتواند یک ولتاژ خروجی برابر با متوسط سه ولتاژ ورودی تولید کند، طراحی نمایید. شما می‌توانید فرض کنید که ولتاژهای ورودی در محدوده $-10V < v_{in} < +10V$ مورد اعتمادند. صحت طراحی خود را با PSpice و مجموعه ولتاژهای ورودی مناسب تحقیق کنید.

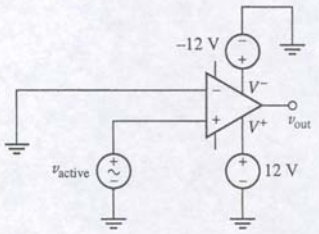
۶ـ۶ مقایسه گرها و تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری

۷۰. برای مدار شکل ۶ـ۷۷ ولتاژ مورد انتظار خروجی v_{out} را به صورت تابعی از $-5\ V \le v_{active} \le +5\ V$ برای v_{active} رسم کنید، به شرطی که v_{ref} برابر باشد با (الف) 3- V و (ب) 3+ V.



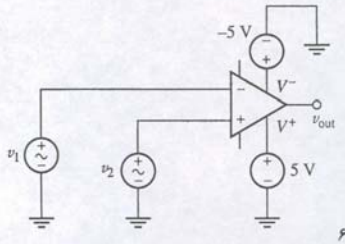
شکل ۶ـ۷۷

۷۱. برای مدار شکل ۶ـ۷۸ ولتاژ خروجی v_{out} را به صورت تابعی از v_{active} رسم کنید اگر $-2\ V \le v_{active} \le +2\ V$ باشد. صحت حل خود را با استفاده از μA741 تحقیق کنید (هرچند که این تقویت‌کننده برای استفاده به عنوان مقایسه‌گر کند است ولی شبیه‌سازی آن خوب کار می‌کند). روی نتایج نام‌گذاری مناسبی به‌کار ببرید.



شکل ۶ـ۷۸

۷۲. برای مدار شکل ۶ـ۷۹ (الف) ولتاژ خروجی مورد انتظار v_{out} را به صورت تابعی از v_1 برای $-5\ V \le v_1 \le +5\ V$ رسم کنید، اگر $v_2 = +2\ V$ باشد، (ب) ولتاژ خروجی را به صورت تابعی از v_2 با $-5\ V \le v_2 \le +5\ V$ رسم کنید اگر $v_1 = +2\ V$ باشد.

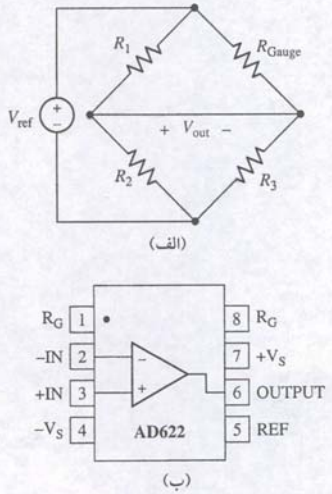


شکل ۶ـ۷۹

۷۳. در کاربردهای منطقی دیجیتال، یک سیگنال 5 V+ با حالت منطقی "1" و یک سیگنال 0 V با حالت منطقی "0" نشان داده می‌شود. برای پردازش یک سری اطلاعات واقعی با کامپیوتر دیجیتال، نوعی واسط لازم است که معمولاً یک مبدل آنالوگ به دیجیتال (A/D) است ـ که وسیله‌ای برای تبدیل سیگنال‌های آنالوگ به دیجیتال می‌باشد. مداری طراحی کنید که به صورت یک A/D یک بیت (1 bit) کار کند و هر ولتاژ کمتر از 1.5 V در منطق "0" و هر سیگنال بیشتر از 1.5 V به صورت منطق "1" نشان داده شود.

۷۴. برای تقویت‌کننده‌های دستگاه‌های اندازه‌گیری در شکل ۶ـ۳۸ (الف) فرض کنید که سه op amp داخلی ایده‌آل هستند، سپس CMRR را برای موارد زیر معین کنید: (الف) $R_1 = R_3$ و $R_2 = R_4$؛ (ب) هر چهار مقاومت متفاوت‌اند.

۷۵. یک کاربرد رایج برای تقویت‌کننده‌های دستگاه‌های اندازه‌گیری، اندازه‌گیری ولتاژها در مدارهای گیج کشش مقاومتی است. این سنسورهای گیج کششی با تغییر مقاومت‌هایی که به علت تغییر شکل رخ می‌دهند کار می‌کنند (شکل ۶ در فصل ۲). آن‌ها اغلب بخشی از مدار پل می‌باشد (شکل ۶ـ۸۰ (الف))، که در آن گیج کششی با R_G نشان داده شده است. (الف) نشان دهید که $V_{out} = V_{in}\left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_{Gauge}}\right]$. (ب) تحقیق کنید که $V_{out} = 0$ خواهد بود اگر سه مقاومت R_1، R_2 و R_3 همگی با مقاومت R_{Gauge} غیرکششی برابر باشند. (ج) برای کاربرد موردنظر، گیج انتخابی دارای یک مقاومت غیرکششی 5 kΩ است و یک افزایش مقاومت حداکثر 50 mΩ مورد انتظار است. تنها منبع تغذیه $\pm$12 V موجود است. با استفاده از تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری شکل ۶ـ۸۰ (ب) مداری طراحی کنید که یک سیگنال ولتاژ 1 V+ را وقتی گیج در حداکثر بار است تولید نماید.



شکل ۶ـ۸۰

مشخصات AD622

بهره تقویت‌کننده G می‌تواند از 2 تا 100 با اتصال مقاومتی بین پایه‌های 1 الی 8 و رابطه زیر تغییر کند:

$$R = \frac{50.5}{G - 1}\ k\Omega$$

فصل هفتم

خازن‌ها و القاگرها

مفاهیم کلیدی

- رابطه ولتاژ ـ جریان برای یک خازن ایده‌آل
- رابطه ولتاژ ـ جریان یک القاگر ایده‌آل
- محاسبه انرژی ذخیره‌شده در خازن‌ها و القاگرها
- تحلیل پاسخ خازن و القاگر به امواج متغیر با زمان
- ترکیب سری و موازی القاگرها
- مدار op amp با استفاده از خازن‌ها
- مدل‌سازی PSpice برای عناصر ذخیره‌ساز انرژی

مقدمه

در این فصل ما دو عنصر غیرفعال جدید، یعنی خازن و القاگر را معرفی می‌کنیم که هر یک می‌توانند هم مقدار معینی انرژی را ذخیره کنند و هم تحویل دهند. از این دیدگاه آن‌ها با منابع ایده‌آل تفاوت دارند، زیرا آن‌ها نمی‌توانند مقدار انرژی معینی را برای فاصله زمانی نامتناهی ارائه کنند. گرچه آن‌ها به عنوان عناصر خطی کلاسه‌بندی شده‌اند، رابطه جریان ـ ولتاژ برای این عناصر جدید به زمان وابسته است، و منتهی به مدارهای جالب زیادی می‌گردد. همان‌طور که به زودی خواهیم دید، محدوده مقادیر ظرفیت و القایی که با آن‌ها مواجه می‌شویم خیلی بزرگ است و ممکن‌است در مقطعی از زمان بر رفتار سیستم تأثیر بگذارند و در مواردی دیگر هم اهمیت نداشته باشند. چنین موضوعاتی در کاربردهایی مدرن از مدارها، خصوصاً سیستم‌های کامپیوتر و مخابرات که رفته رفته در آن‌ها فرکانس‌های کاری و چگالی عناصر زیاد می‌شود، به‌طور پیوسته‌ای اهمیت بیشتری پیدا می‌کنند.

۷ـ۱ خازن

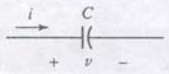
مدل خازن ایده‌آل

قبلاً منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل را **عناصر فعال** خواندیم ولی یک مقاومت خطی را **عنصری غیرفعال** نام نهادیم. با این وجود تعاریف فعال و غیرفعال هنوز کمی مبهم‌اند و باید روی آن‌ها بیشتر تمرکز کرد. اکنون یک عنصر فعال را به‌صورت عنصری تعریف می‌کنیم که بتواند توان متوسط بزرگ‌تر از صفری را به تعدادی عناصر خارجی (بیرون) تحویل نماید، و متوسط‌گیری نیز در فاصله زمانی بی‌نهایت انجام می‌شود. منابع ایده‌آل، عناصری فعالند، و تقویت‌کننده‌های عملیاتی نیز وسایلی فعال محسوب می‌شوند. با این وجود یک عنصر غیرفعال به صورت عنصری تعریف می‌شود که نمی‌تواند در مدت‌زمان بی‌نهایت، توان متوسط بزرگ‌تر از صفری را تحویل دهد. مقاومت، در این دسته‌بندی قرار می‌گیرد و انرژی دریافتی به وسیله آن نیز به گرما تبدیل می‌شود و هرگز انرژی‌ای را تولید نمی‌کند.

اکنون عنصر غیرفعال جدیدی که خازن نام دارد را معرفی می‌کنیم. ما خازن C را با رابطه ولتاژ ـ جریان زیر معرفی می‌کنیم:

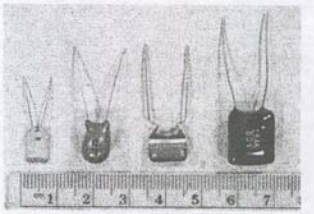
$$i = C \frac{dv}{dt} \qquad (۱)$$

که v و i قراردادهای یک عنصر غیرفعال را طبق شکل ۱ـ۷ ارضا می‌کنند. باید همواره به خاطر بسپاریم که v و i توابعی از زمان هستند و حتی به منظور تأکید، اگر گاهی لازم باشد آن‌ها را با $v(t)$ و $i(t)$ نشان خواهیم داد. از معادله (۱) می‌توان واحد ظرفیت خازن را به‌صورت آمپر ثانیه بر ولت یا کولن بر ولت تعریف کرد. ما از این پس یک کولن بر ولت را فاراد[1] نامیده و آن را به‌عنوان واحد ظرفیت برمی‌گزینیم.

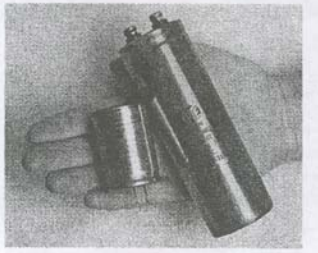


شکل ۱ـ۷ نماد و قرارداد عناصر غیرفعال ولتاژ و جریان خازن.

1. Farad



(الف)



(ب)

(ج)

شکل ۲ـ۷ چند مثال از خازن‌های تجاری موجود. (الف) از چپ به راست: سرامیک 270 pF، تانتالیوم 20 μF، پلی‌استر 15 nF و پلی‌استر 150 nF. (ب) از چپ: الکترولیت VDC 40 2000 μF و الکترولیت VDC 35 25,000 μF. (ج) شروع از کوچکتر در جهت عقربه ساعت: الکترولیت VDC 63 100 μF، الکترولیت VDC 50 2200 μF، الکترولیت VDC 2.5 55 μF و الکترولیت VDC 50 4800 μF. دقت کنید که با یک استثنا، مقادیر بزرگ بسته‌بندی بزرگتری دارند. در آن حالت مصالحه چیست؟

مثال ۱ـ۷

اگر $C = 2F$ باشد، جریان جاری در خازن شکل ۱ـ۷ را برای دو موج شکل ۳ـ۷ معین کنید.

جریان خازن i به ولتاژ دو سر آن v با معادله (۱) مرتبط می‌شود:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

خازن ایده‌آل تعریف‌شده با رابطه (۱) فقط یک مدل ریاضی از یک وسیله واقعی است. یک خازن از دو سطح هادی که بار بر روی آن پهن می‌شود، تشکیل شده است. این صفحات با لایه‌ای از عایق که مقاومت بالایی دارد، از یکدیگر جدا شده‌اند. اگر این مقاومت بسیار بزرگ و مثلاً بی‌نهایت فرض شود، آنگاه بارهای مخالف و مساوی واقع بر صفحات خازن هرگز دوباره از داخل عنصر با هم ترکیب نمی‌شوند. ساخت قطعه فیزیکی با توجه به نماد مداری شکل ۱ـ۷ صورت می‌گیرد. بیایید فرض کنیم که یک منبع خارجی به این خازن متصل شده و جریان مثبتی از یک صفحه آن وارد و از صفحه دیگر خارج می‌شود. هر جریانی که وارد شود به همان اندازه از آن خارج می‌گردد و جز این هم از یک عنصر دو پایانه نمی‌توان انتظار داشت. اکنون درون خازن را بررسی می‌کنیم. جریان مثبت وارده به یک صفحه نشان‌دهنده بار مثبتی است که از طریق سیم پایانه به سمت صفحه آن حرکت می‌کند. این بار نمی‌تواند از خازن عبور کند و بنابراین روی صفحه انبار می‌شود. درواقع جریان و بار رو به افزایش با معادله زیر به هم ارتباط دارند:

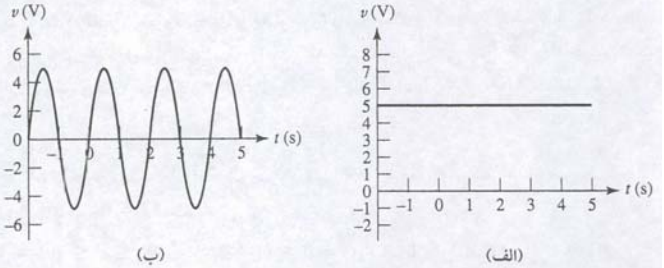
$$i = \frac{dq}{dt}$$

اکنون این صفحه را به صورت یک گره بزرگ درنظربگیرید و قانون جریان کیرشهف را اعمال کنید. ظاهراً این قانون معتبر نیست، جریان از یک سمت و از مدار خارجی وارد صفحه می‌شود، ولی از صفحه بیرون نمی‌رود. این مطلب بیش از یک قرن قبل، ذهن دانشمند اسکاتلندی، جی.سی.ماکسول[1] را مشغول کرده بود. تئوری الکترومغناطیسی تک‌میدانی را که نهایتاً وی ارائه کرد، فرضیه "جریان جابه‌جایی" را مطرح می‌کند و در هر جا که میدان الکتریکی یا ولتاژ با زمان تغییر نماید، وجود دارد. جریان جابه‌جایی بین صفحه خازن و درون آن، درست شبیه جریان در یک هادی می‌باشد. بنابراین اگر هر دو جریان جابه‌جایی و هدایتی را درنظربگیریم قانون جریان کیرشهف صادق است. البته تحلیل مدار این جریان جابه‌جایی داخلی را درنظر نمی‌گیرد و چون خوشبختانه با جریان هدایت مدار برابر است، می‌توان فرضیه ماکسول را به‌عنوان تغییر ولتاژ دو سر خازن لحاظ نمود.

خازنی با دو صفحه موازی A، و فاصله صفحات d دارای ظرفیت $C = \varepsilon A/d$ می‌باشد که در آن ε **ضریب گذردهی** خازن یا **ضریب عایق‌سازی ماده** بین صفحات می‌باشد. در ساختار خازن فرض می‌شود که ابعاد صفحات خازن خیلی بزرگتر از d است. برای هوا یا خلاء $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854$ pF/m است. بسیاری از خازن‌ها از لایه دی‌الکتریک یا عایق نازکی با ضریب گذردهی بزرگتر استفاده می‌نمایند تا ابعاد آن کوچک شود. نمونه‌هایی از انواع خازن‌های تجارتی در شکل ۲ـ۷ دیده می‌شود. باید به‌خاطر داشته باشیم که هر دو صفحه هادی که به هم مستقیماً نچسبیده باشند، ظرفیت غیرصفری (هرچند خیلی کوچک) دارند. ضمناً باید توجه داشت که ظرفیت چندصد **میکروفاراد** از لحاظ مقدار، بزرگ تلقی می‌شود.

با معرفی معادله (۱) چندین مشخصه مهم از مدل ریاضی استنتاج می‌گردد. یک ولتاژ ثابت در دو سر خازن جریان صفری را در آن نشان می‌دهد. بنابراین یک خازن برای dc به‌صورت "مدار باز" است. علامت خازن هم این خاصیت را نشان می‌دهد. همچنین هر تغییر ناگهانی در ولتاژ دو سر آن به یک منبع جریان بی‌نهایت نیاز دارد. چون چنین منبعی جنبه فیزیکی ندارد، بنابراین معتقدیم که ولتاژ دو سر خازن آناً عوض نمی‌شود.

1. J.C. Maxwell



شکل ۳ـ۷ (الف) یک ولتاژ dc به پایانه‌های خازن اعمال شده است. (ب) به پایانه‌های خازن یک ولتاژ سینوسی اعمال شده است.

برای شکل موج ترسیم‌شده در شکل ۳ـ۷ (الف)، $\frac{dv}{dt} = 0$ است، پس $i = 0$ می‌باشد؛ نتیجه در شکل ۴ـ۷ (الف) رسم شده است. برای حالت موج سینوسی شکل ۳ـ۷ (ب) انتظار داریم که جریان کسینوسی به عنوان پاسخ جاری شده و فرکانس برابری با دو برابر اندازه داشته باشد (چون $C = 2F$ است). نتیجه در شکل ۴ـ۷ (ب) ملاحظه می‌شود.

تمرین

۱ـ۷ جریان جاری در خازن **5 mF** را در پاسخ به ولتاژ v تعیین کنید. (الف) **20 V**- و (ب) $-2e^{-5t}$ **V**.

جواب: (الف) 0 A؛ (ب) $-50e^{-5t}$ mA.

روابط ولتاژ ـ جریان انتگرالی

ولتاژ خازن را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (۱) بیان کرد، ابتدا رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$dv = \frac{1}{C}\,i(t)\,dt$$

و سپس در فاصله زمانی t_0 و t از رابطه ولتاژهای مربوط به آن‌ها انتگرال می‌گیریم:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0) \qquad (۲)$$

معادله (۲) را می‌توان به‌صورت انتگرالی نامعین به‌علاوه یک ثابت انتگرال نوشت:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt + k$$

بالاخره در بسیاری از مسائل واقعی نمی‌توان $v(t_0)$، که همان ولتاژ اولیه دو سر خازن است را نادیده گرفت. در این‌گونه موارد از لحاظ ریاضی $t_0 = -\infty$ و $v(-\infty) = 0$ فرض می‌شود و در این صورت:

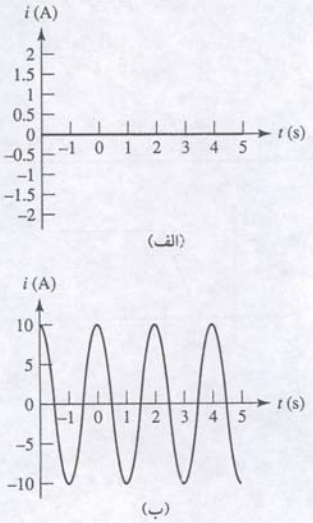
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt'$$

توجه کنید در مواردی که متغیر t یکی از حدود انتگرال است، از متغیر فرضی t' استفاده می‌کنیم که از لحاظ مباحث ریاضی ایرادی ندارد.

چون انتگرال جریان در هر فاصله زمانی با بار ذخیره شده در آن فاصله بر روی صفحات خازن برابر است می‌توان ظرفیت را چنین تعریف نمود:

$$q(t) = Cv(t)$$

که $q(t)$ و $v(t)$ به ترتیب مقادیر لحظه‌ای بار روی صفحات و ولتاژ بین صفحات می‌باشند.

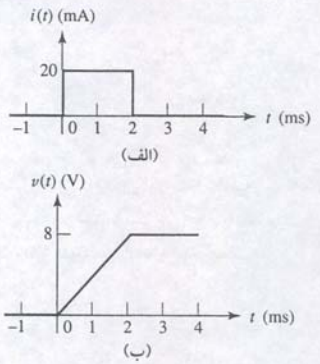


شکل ۴ـ۷ (الف) مادامی که ولتاژ اِعمال‌شده dc باشد، $i = 0$ است. (ب) جریان فرم کسینوسی در پاسخ به ولتاژ سینوسی دارد.

مثال ۲ـ۷

ولتاژ خازن مربوط به جریان ترسیمی در شکل ۵ـ۷ (الف) را بیابید.

با تفسیر گرافیکی معادله (۲) می‌بینیم که اختلاف بین مقادیر ولتاژ در t و t_0 متناسب با سطح زیر منحنی جریان بین این دو زمان است. ضریب تناسب 1/C است. می‌توان سطح را از



شکل ۵ـ۷ (الف) شکل موج جریان اعمال‌شده به خازن $5\mu F$. (ب) موج ولتاژ حاصل با انتگرال‌گیری ترسیمی (جمع).

شکل ۵ـ۷(الف) و با بررسی مقادیر مطلوب t_0 و t به‌دست‌آورد. اجازه بدهید نقطه شروع t_0 را قبل از زمان صفر اختیار کنیم. برای راحتی کار اولین فاصله زمانی بین $-\infty$ و 0 اختیار شده است و چون شکل موج بیان می‌دارد که هرگز جریانی از ابتدا به خازن اعمال نشده، پس:

$$v(t_0) = v(-\infty) = 0$$

با توجه به معادله (۲)، انتگرال جریان بین $t_0 = -\infty$ و 0، برابر صفر می‌باشد. زیرا در این فاصله $i = 0$ است، پس:

$$v(t) = 0 \quad t \le 0 \qquad \text{یا} \qquad v(t) = 0 + v(-\infty) \qquad -\infty \le t \le 0$$

اگر حالا فاصله زمانی را محدوده موج مربعی $0 \le t \le 2\text{ms}$ فرض کنیم، داریم:

$$v(t) = \frac{1}{5\times10^{-6}} \int_0^t 20 \times 10^{-3}\, dt' + v(0)$$

چون $v(0) = 0$ بنابراین:

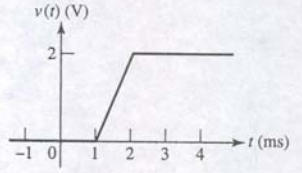
$$v(t) = 4000t \qquad 0 < t \le 2\text{ms}$$

برای فاصله نیم بی‌نهایت بعد از پالس، انتگرال $i(t)$ مجدداً صفر است، به نحوی که:

$$v(t) = 8 \qquad t \ge 2\text{ms}$$

نتایج ترسیمی ساده‌تر از عبارات ریاضی به‌نظر می‌رسند (شکل ۵ـ۷(ب)).

تمرین



شکل ۶ـ۷

۲ـ۷ جریان داخل خازن 100pF را اگر ولتاژ آن به صورت تابع زمانی شکل ۶ـ۷ باشد معین کنید.

جواب: در $-\infty \le t \le 1\text{ ms}$، 0A؛ در $1\text{ ms} \le t \le 2\text{ ms}$، 200nA و در $t \ge 2\text{ ms}$، 0A.

ذخیره‌سازی انرژی

توان انتقالی به یک خازن با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}$$

انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی‌اش برابر است با:

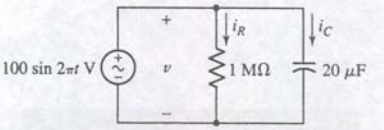
$$\int_{t_0}^{t} p\, dt = C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt}\, dt = C\int_{v(t_0)}^{t} v\, dv = \frac{1}{2}C\left\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\right\}$$

و بنابراین:

$$w_C(t) - w_C(t_0) = \frac{1}{2}C\left\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\right\} \qquad (۳)$$

که انرژی ذخیره‌شده $w_C(t_0)$ برحسب ژول (J) و ولتاژ در t_0 برابر $v(t_0)$ می‌باشد. اگر انرژی در t_0 را صفر فرض کنیم با بیان این‌که ولتاژ خازن هم در آن لحظه صفر است، آن‌گاه:

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 \qquad (۴)$$



شکل ۷ـ۷ یک منبع ولتاژ سینوسی به یک شبکهٔ RC موازی وصل شده است. مقاومت $1\text{M}\Omega$ می‌تواند نشان‌دهندهٔ مقاومت لایهٔ دی‌الکتریک خازن واقعی باشد.

بیایید یک مثال عددی ساده را ملاحظه نماییم. همان‌طور که در شکل ۷ـ۷ ملاحظه می‌کنید، یک منبع ولتاژ سینوسی با یک مقاومت $1\text{M}\Omega$ و یک خازن $20\mu F$ موازی است. می‌توان مقاومت موازی را نمایشی از مقاومت معین دی‌الکتریک بین صفحات خازن فیزیکی دانست (مقاومت ایده‌آل دارای مقاومت بی‌نهایت است).

مثال ۳ـ۷

حداکثر انرژی ذخیره‌شده در خازن شکل ۷ـ۷ و انرژی تلف‌شده در مقاومت را در فاصله زمانی $0 < t < 0.5\text{s}$ بیابید.

- **هدف مسئله را شناسایی نمایید.**

انرژی ذخیره‌شده در خازن با زمان تغییر می‌نماید. از ما حداکثر مقدار در یک فاصله زمانی خاص خواسته شده است. همچنین کل انرژی تلف‌شده در مقاومت در همین فاصله مورد تقاضا است. در واقع این دو سوال کاملاً از هم جدا هستند.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری کنید.**

تنها منبع انرژی در مدار، منبع ولتاژ مستقل است، که مقدار $100\sin 2\pi t$ V را دارد. البته فقط زمان $0 < t < 0.5\text{s}$ مورد توجه ما است. مدار به‌طور صحیحی نام‌گذاری شده است.

- **ارائه طرح.**

ما انرژی خازن را با ارزیابی ولتاژ معین خواهیم کرد. برای یافتن انرژی تلف‌شده در مقاومت، در یک فاصله زمانی، باید از $p_R = i_R^2 \cdot R$ انتگرال بگیریم.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

انرژی ذخیره‌شده برابر است با:

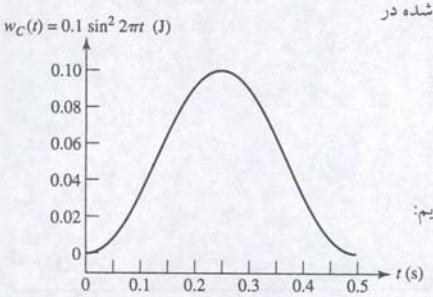
$$w_C(t) = \tfrac{1}{2}Cv^2 = 0.1\sin^2 2\pi t \quad \text{J}$$

حالا عبارتی را برای توان تلف‌شده در مقاومت برحسب جریان i_R به‌دست می‌آوریم:

$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4}\sin 2\pi t \quad \text{A}$$

بنابراین انرژی تلف‌شده در مقاومت بین 0 و 0.5 ثانیه برابر است با:

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R\, dt = \int_0^{0.5} 10^{-2}\sin^2 2\pi t\, dt \quad \text{J}$$



شکل ۸ـ۷ نمودار انرژی ذخیره‌شده در خازن برحسب زمان.

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

برای ذخیره انرژی در خازن عبارتی وجود دارد. نمودار آن در شکل ۸ـ۷ ترسیم شده است. انرژی تلف‌شده در مقاومت شامل کمیت‌های نامشخص نیست و بنابراین باید به راحتی محاسبه شود.

- **اقدام به حل.**

از نمودار مربوط به انرژی ذخیره‌شده در خازن، می‌بینیم که از مقدار 0 در $t = 0$ به یک مقدار 100mJ در $t = \frac{1}{4}\text{ s}$ می‌رسد، و سپس در مدت $\frac{1}{4}\text{ s}$ دیگر به صفر باز می‌گردد. بنابراین $w_{C_{max}} = 100\text{mJ}$ خواهد بود. با ارزیابی عبارت انتگرال برای انرژی تلف‌شده در مقاومت، داریم $w_R = 2.5\text{mJ}$.

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟**

ما انتظار نداریم که یک انرژی ذخیره‌شده منفی را که در نمودار حذف شده است، محاسبه کنیم. علاوه‌برآن، چون حداکثر مقدار $\sin 2\pi t$ برابر 1 است، حداکثر انرژی مورد انتظار $(1/2)(20\times10^{-6})(100)^2 = 100\text{ mJ}$ خواهد بود.

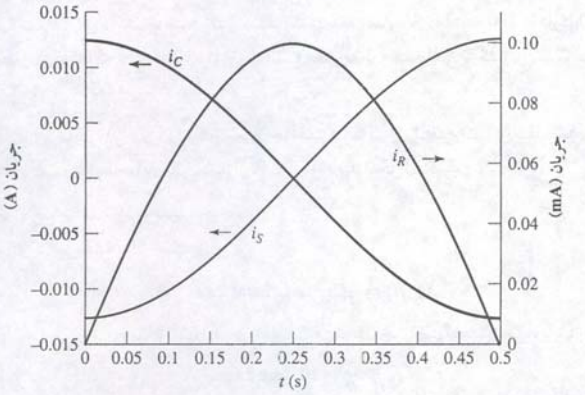
مقاومت در یک پریود 0 تا 500 ms، انرژی 2.5 mJ را تلف کرده است، ولی خازن حداکثر 100 mJ را در همان فاصله زمانی ذخیره کرده است. پس بر سر 97.5 mJ دیگر چه آمده است؟ برای پاسخ به آن جریان خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$i_C = 20\times10^{-6}\frac{dv}{dt} = 0.004\pi\cos 2\pi t$$

و جریان i_s که از منبع ولتاژ می‌گذرد برابر است با:

$$i_s = -i_C - i_R$$

که هر دوی آن‌ها در شکل ۹ـ۷ ترسیم شده‌اند. مشاهده می‌کنید که جریان جاری‌شده در مقاومت بخش کوچکی از جریان منبع است؛ البته جای تعجب نیست زیرا $1\ M\Omega$ نسبتاً مقاومت بزرگی است. با عبور جریان از منبع، مقدار کمی به سمت مقاومت هدایت می‌شود، و بقیه آن به خازن رفته و آن را شارژ می‌کند. پس از زمان $t = 250\ ms$، به نظر می‌رسد جریان منبع تغییر علامت می‌دهد؛ اینک جریان از خازن به منبع باز می‌گردد. بخش عمده‌ای از انرژی ذخیره‌شده در خازن به منبع ولتاژ ایده‌آل باز می‌گردد، و فقط مقدار کمی از آن در مقاومت تلف شده است.



شکل ۹ـ۷ نمودار جریان‌های مقاومت، خازن و منبع در فاصله زمانی 0 تا 500 ms.

تمرین

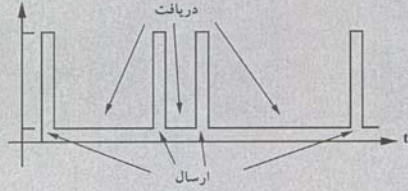
۳ـ۷ انرژی ذخیره‌شده در خازن $1000\mu F$ در $t = 50\mu s$ را محاسبه کنید. به شرطی که ولتاژ دو سر آن $1.5\ \cos 10^5 t$ ولت باشد.

جواب: $90.52\mu J$

کاربرد عملی

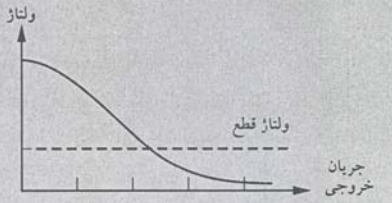
باطری هیبرید ـ وسایل فوق خازن

تلفن‌های دیجیتال موبایل و ماهواره‌ای سه مدکاری اساسی دارند: غیرفعال، دریافت و ارسال. معمولاً دریافت سیگنال نیاز به مصرف جریان زیاد از باطری ندارد، ولی ارسال آن جریان زیادی را لازم دارد (شکل ۱۰ـ۷). در مقابل زمان تلف‌شده در ارسال معمولاً کسر کوچکی از کل زمان جذب انرژی به وسیله سیستم است (شکل ۱۰ـ۷).



شکل ۱۰ـ۷ نمودار نمونه دوره کاری تلفن موبایل که جریان لازم برای ارسال و دریافت را نشان می‌دهد.

همان‌طور که در فصل ۵ دیدیم، باطری‌ها فقط در جریان‌های کم ولتاژ ثابتی را تحویل می‌دهند. بنابراین وقتی که تقاضای جریان افزایش یابد، ولتاژ باطری افت پیدا می‌کند (شکل ۱۱ـ۷). این کاهش منجر به ایجاد مشکلاتی می‌گردد، زیرا اکثر مدارها دارای حداقل ولتاژ یا **ولتاژ قطعی** هستند که در کمتر از آن به‌درستی کار نمی‌کنند.



شکل ۱۱ـ۷ مثالی از رابطهٔ ولتاژ ـ جریان یک باطری.

اگر جریان اوج دریافتی طوری باشد که ولتاژ باطری به کمتر از ولتاژ قطع افت کند، در این صورت به باطری بزرگ‌تری نیاز است. با این وجود، این امر در وسایل متحرک مطلوب نیست بلکه باطری‌های سبک و کوچک ترجیح داده می‌شوند. راه حل دیگر استفاده از قطعه‌ای هیبرید متشکل از یک باطری استاندارد و یک خازن خاص می‌باشد (گاهی آن را خازن الکتروشیمیایی یا فوق خازن می‌گویند). مثالی از این قطعه تجاری در شکل ۱۲ـ۷ دیده می‌شود.

اساس کار وسیله هیبرید، این‌است‌که وقتی باطری جریان لازم برای مدار را تأمین می‌کند (مثل وقتی‌که تلفن در مد دریافت است)، خازن انرژی را از باطری کسب می‌نماید ($\frac{1}{2} CV^2$). اگر تقاضای جریان ناگهان بالا برود (مثل ارسال به وسیله تلفن)، ولتاژ باطری کاهش خواهد یافت. در این لحظه جریانی در پاسخ به $\frac{dv}{dt}$ حاصل از خازن شارژشده خارج می‌گردد. با این شرط که مقاومت معادل تونن خیلی کوچک‌تر از مقاومت داخلی باطری باشد، جریان به‌جای حرکت به سمت باطری به سمت تلفن خواهد رفت. بار، خازن را به سرعت ترک می‌کند و به این ترتیب این جریان برای مدت کوتاهی تقویت می‌شود. با این وجود اگر عمل ارسال کوتاه‌مدت باشد، خازن به خوبی می‌تواند باطری را کمک کرده و از خاموشی مدار جلوگیری کند. در فصل ۸ خواهید دید که چطور می‌توان با دانستن مقاومت تونن باطری و مدار، مدت زمان کمک خازن به باطری را حساب کرد.

شکل ۱۲ـ۷ ترکیبی از باطری ـ فوق خازن.

مشخصات مهم یک خازن ایده‌آل:

۱. اگر ولتاژ دو سر خازن با زمان تغییر نکند جریان عبوری از آن صفر است. بنابراین خازن برای dc به‌صورت مدار باز عمل می‌کند.

۲. می‌توان مقدار انرژی محدودی در خازن ذخیره کرد، حتی اگر جریان عبوری از آن صفر باشد، مانند هنگامی که ولتاژ دو سرش ثابت می‌باشد.

۳. ولتاژ خازن هرگز به‌طور ناگهانی تغییر نمی‌کند، مگر این‌که جریان عبوری از خازن بی‌نهایت باشد. یک خازن به هر تغییر ناگهانی ولتاژ دو سرش همچون مقاومت فنر در برابر نیرو، از خود واکنش نشان می‌دهد.

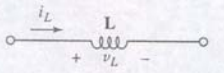
۴. خازن هرگز انرژی تلف نمی‌کند و فقط آن را ذخیره می‌نماید. البته این جمله برای مدل ریاضی آن صحت دارد ولی برای خازن فیزیکی به دلیل وجود مقاومت صحیح نیست.

۷ـ۲ القاگر

مدل القاگر ایده‌آل

هرچند که از نقطه‌نظر یک مدار، القاگر را با معادله ولتاژ ـ جریان تعریف می‌کنیم، چند اظهارنظر در مورد تئوری میدان مغناطیسی به درک بهتر تعریف کمک خواهد کرد. در اوایل سال‌های ۱۸۰۰ اورستد[1] دانشمند دانمارکی نشان داد که یک هادی حامل جریان، می‌تواند یک میدان مغناطیسی تولید کند (هنگامی که جریان برقرار باشد سوزن قطب‌نما در جوار آن

1. Oersted



شکل ۱۳ـ۷ نماد الکتریکی و قرارداد ولتاژ و جریان برای القاگر.

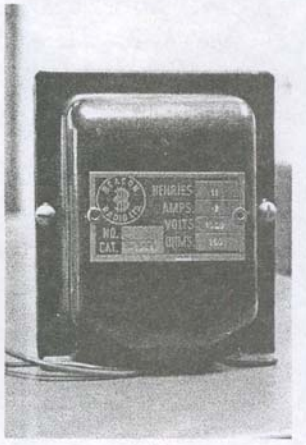
منحرف می‌گردد) چندی بعد دانشمند فرانسوی آمپر[1] اندازه‌گیری‌هایی را انجام داد و نشان داد که این میدان مغناطیسی به‌طور خطی با جریانی که آن را تولید کرده است متناسب می‌باشد. قدم بعدی ۲۰ سال بعد و به هنگامی رخ داد که دانشمند انگلیسی مایکل فارادی[2] و مخترع آمریکایی ژوزف هنری[3]، هر دو تقریباً به‌طور همزمان اعلام نمودند که تغییر میدان مغناطیسی می‌تواند یک ولتاژ را در مدار مجاور القاء نماید، ضریب تناسب را ضریب القاء یا القاکنایی می‌نامیم و با L نشان داده می‌شود. پس:

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad (۵)$$

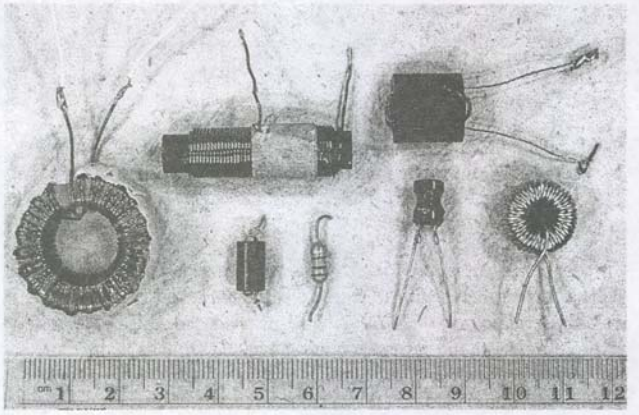
باید توجه داشت که v و i توابعی از زمان هستند. وقتی‌که بخواهیم بر این خصوصیت تأکید کنیم آن‌ها را با $v(t)$ و $i(t)$ نشان می‌دهیم.

سمبل یا نماد مدار برای القاگر در شکل ۱۳ـ۷ ملاحظه می‌گردد. لازم به ذکر است که قرارداد عناصر غیرفعال درست مثال مقاومت و خازن، رعایت شده است. واحد اندازه‌گیری القاگر یا القاکنایی هنری (H) است و معادله مربوط به آن نشان می‌دهد که هنری بیان کوتاه ولت‌ثانیه بر آمپر است.

القاگری که القاکنایی آن با معادله (۵) تعریف شود، مدلی ریاضی است و عنصری ایده‌آل می‌باشد که ما از آن برای تقریب القاگر واقعی استفاده خواهیم کرد. برای ساخت یک القاگر فیزیکی ممکن‌است یک سیم را به صورت سیم‌پیچ (سیم‌لوله) درآوریم. پیچیدن سیم باعث می‌شود تا اثر جریان مولد میدان مغناطیسی و تعداد مدارهای مجاور میدان که ولتاژ فارادی در آن‌ها القا می‌شود، افزایش یابد. نتیجه این اثر دوگانه این‌است‌که القاکنایی یک سیم‌پیچ تقریباً متناسب با مربع تعداد دورهای کامل آن است. مثلاً یک القاگر یا پیچک که از مارپیچ بلندی با دورهای نزدیک بهم تشکیل شده است، القاکنایی $\mu N^2 A/s$ را دارد که در آن A سطح مقطع، s طول محوری سیم‌پیچ، N تعداد دور و μ ثابت ماده داخل سیم‌پیچ موسوم تراوایی[4] است. برای فضای آزاد (و تقریباً هوا) $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m $= 4\pi n$ H/cm است. چند نمونه از القاگرهای تجاری در شکل ۱۴ـ۷ نشان داده شده است.



(ب)



(الف)

شکل ۱۴ـ۷ (الف) چندین نمونه القاگر تجاری که گاهی "چوک" نامیده می‌شوند. در جهت عقربه ساعت و شروع از چپ: القاگر هسته فرّیت تیوبی‌شکل μH 287، القاگر سیلندری هسته فرّیت μH 266، القاگر سیلندری هسته فرّیت μH 215 طراحی‌شده برای فرکانس‌های VHF. القاگر تیوپی هسته پودر آهن μH 85، القاگر شکل بوبین μH 10. القاگر سیم محوری μH 100 و القاگر هسته پنهان μH 7 که برای RF به کار می‌رود. (ب) یک القاگر H 11، با ابعاد 10 cm (ارتفاع) × 8 cm (پهنا) × 8 cm (ضخامت).

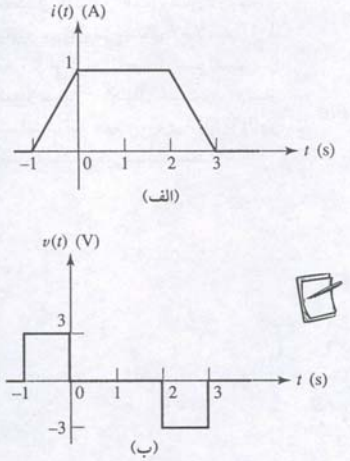
1. Ampere 2. M. Faraday 3. J. Henry 4. permeability

اکنون بیایید معادله (۵) را وارسی نماییم تا بعضی از مشخصات الکتریکی این مدل ریاضی را تعیین کنیم. این معادله نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر یک القاگر متناسب است با آهنگ زمانی تغییرات جریانی که از آن می‌گذرد. به خصوص این معادله نشان می‌دهد که در دو سر القاگری که جریان ثابتی را حمل می‌کند، جدا از اندازه جریان، ولتاژی وجود ندارد. بر طبق این مطلب، می‌توان به یک القاگر به دیدهٔ یک "مدار اتصال کوتاه برای dc" نگاه کرد.

واقعیت دیگری که از معادله (۵) حاصل می‌شود این‌است‌که یک تغییر ناگهانی یا ناپیوسته در جریان به ولتاژ بی‌نهایتی در دو سر القاگر نیاز دارد. به بیان دیگر اگر بخواهیم یک تغییر ناگهانی در یک جریان القاگر ایجاد نماییم باید ولتاژ بی‌نهایتی به آن اعمال کنیم. هرچند که به لحاظ تئوری اعمال تابع ولتاژ بی‌نهایت مانعی ندارد ولی در یک سیستم واقعی فیزیکی چنین چیزی دارای مفهوم نیست. به زودی خواهیم دید که یک تغییر ناگهانی در جریان القاگر، به تغییر ناگهانی انرژی در القاگر احتیاج داشته، و این خود نیز توان بی‌نهایت منبع در آن لحظه را لازم دارد و دوباره توان بی‌نهایت در جریان واقعی وجود ندارد. برای دوری از ولتاژ و توان بی‌نهایت، نباید اجازه دهیم تا جریان القاگر از یک مقدار به مقدار دیگری **ناگهان** پرش کند.

اگر بخواهیم مدار یک القاگر فیزیکی را که جریان از آن عبور می‌کند باز کنیم، در دو سر کلید جرقه‌ای ظاهر خواهد شد. این پدیده در سیستم برق بعضی از اتومبیل‌ها به کار می‌رود که در آن‌ها جریان کویل به‌وسیله دلکو متوقف شده و جرقه‌ای در دو سر شمع ایجاد می‌گردد. گرچه این وضع آناً رخ نمی‌دهد ولی زمان آن بسیار کوتاه است و درنتیجه ولتاژ زیادی تولید می‌گردد. وجود ولتاژ بالا در دو سر فاصله‌ای کوچک میدان الکتریکی قوی را به‌وجودمی‌آورد، و انرژی ذخیره‌شده ضمن یونیزه‌کردن هوا، جرقه‌ای را تولید می‌نماید.

می‌توان معادله (۵) را به صورت گرافیکی تفسیر کرد و در صورت لزوم حل نمود. مثال ۴ـ۷ را در این مورد ملاحظه کنید.



شکل ۱۵ـ۷ (الف) شکل موج جریان در یک القاگر 3H. (ب) شکل موج ولتاژ مربوط به $v = 3di/dt$.

مثال ۴ـ۷

اگر مطابق شکل ۱۵ـ۷ (الف) موج جریان در یک القاگر 3H باشد، ولتاژ القاگر را به‌دست‌آورده آن را رسم کنید.

اگر ولتاژ v جریان i طوری تعریف شود که قرارداد عناصر غیرفعال معتبر باشد، آن‌گاه می‌توانیم از معادله (۵) برای یافتن شکل موج ولتاژ استفاده کنیم:

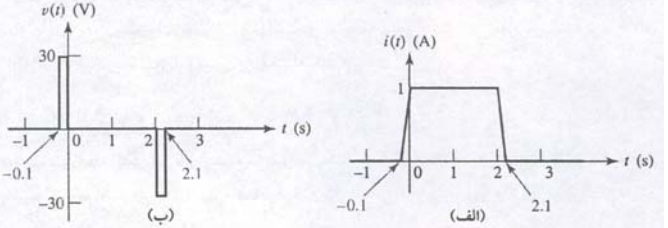
$$v = 3\frac{di}{dt}$$

چون جریان در $t < -1$s صفر است، ولتاژ نیز در این فاصله صفر می‌باشد. سپس جریان با آهنگ خطی 1A/s شروع به افزایش می‌نماید و به این ترتیب ولتاژ ثابت $L\frac{di}{dt} = 3$V تولید می‌گردد. در طی 2 ثانیه بعدی، جریان ثابت و لذا ولتاژ صفر می‌گردد. کاهش نهایی جریان منجر به $\frac{di}{dt} =$ -1 A/s و بنابراین $v =$ -3V می‌شود. برای $t > 3$s، $i(t)$ ثابت (صفر) است و بنابراین برای آن فاصله زمانی $v(t) = 0$ خواهد شد. شکل موج کامل در شکل ۱۵ـ۷ (ب) ترسیم شده است.

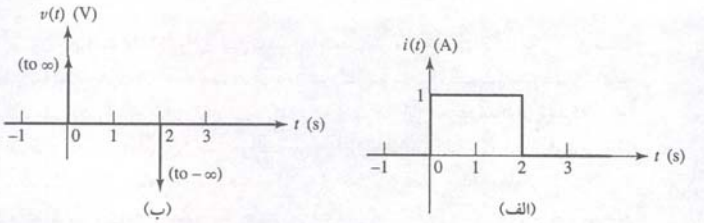
مثال ۵ـ۷

اکنون بیایید اثر افزایش و یا افول سریع‌تر جریان بین صفر و 1A را بررسی کنیم.

ولتاژ القاگر حاصل از اعمال موج جریان شکل ۱۶ـ۷ (الف) در القاگر مثال ۴ـ۷ را بیابید.



شکل ۱۶ـ۷ (الف) زمان لازم برای تغییر جریان شکل ۱۵ـ۷ (الف)، از 0 به 1 و از 1 به 0، یک دهم شده است. (ب) ولتاژ حاصل. توجه کنید که برای وضوح بیشتر عرض پالس بزرگ‌تر از آن‌چه هست درنظرگرفته شده است.



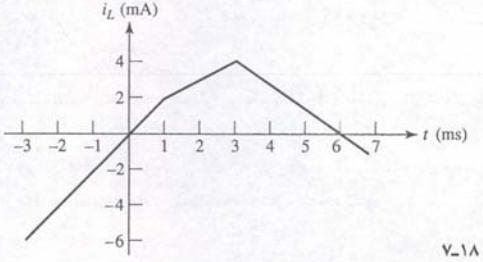
شکل ۱۷ـ۷ (الف) زمان لازم برای تغییر جریان موج شکل ۱۶ـ۷ (الف) از 0 به 1 و از 1 به 0، صفر شده است؛ پس تغییر جریان ناگهانی است. (ب) ولتاژ متناظر با این جریان، روی القاگر 3H دو ضربهٔ با اندازه بی‌نهایت است.

توجه کنید که زمان صعود و نزول به 0.1s کاهش یافته است. بنابراین اندازهٔ هر مشتق، 10 بار بزرگ‌تر خواهد شد. این وضعیت جریان و ولتاژ در شکل ۱۶ـ۷ (الف) و (ب) نشان داده شده است. در امواج شکل ۱۵ـ۷ (ب) و ۱۶ـ۷ (ب) جالب این‌است‌که سطح زیر هر پالس ولتاژ 3Vs است. اجازه بدهید تا به بررسی موضوع ادامه دهیم. کاهش بیشتر زمان صعود و نزول موج جریان مقدار ولتاژ متناسب بیشتری را تولید می‌کند ولی این تغییر فقط در فاصله‌ای از زمان است که جریان افزایش یا کاهش یابد. تغییر ناگهانی در جریان موجب تولید جرقه یا ولتاژی بی‌نهایت می‌گردد (هر کدام سطح 3Vs را دارند) که در شکل‌های ۱۷ـ۷ (الف) و (ب) نشان داده شده است. این جرقه‌ها از لحاظ مقدار برابر ولی در جهات مختلف تولید می‌شوند و برای تغییر ناگهانی جریان لازمند.

تمرین

۴ـ۷ جریان درون القاگر 0.2H در شکل ۱۸ـ۷ دیده می‌شود. فرض کنید قرارداد عناصر غیرفعال معتبر باشد آن‌گاه v_L را در T برابر با: (الف) 0، (ب) 2ms و (ج) 6ms بیابید.

جواب: 0.4V، 0.2V و -0.267V.



شکل ۱۸ـ۷

رابطه انتگرالی ولتاژ ـ جریان

القاکنایی را با معادله مشتقی ساده‌ای تعریف کردیم:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

و توانستیم چندین نتیجه را در مورد مشخصه‌های یک القاگر از این رابطه به‌دست‌آوریم. مثلاً دریافتیم که می‌توان یک القاگر را در جریان ثابت به‌صورت یک اتصال کوتاه تصور کرد و توافق کردیم که جریان القاگر نمی‌تواند از یک مقدار به مقدار دیگر ناگهان تغییر یابد، زیرا لازمه آن وجود منبع ولتاژ و توان بی‌نهایت در کنار القاگر می‌باشد. این معادله ساده هنوز حاوی اطلاعات زیادی است. با نوشتن این معادله به فرم زیر:

$$di = \frac{1}{L}v\,dt$$

به سمت رابطه انتگرالی سوق داده می‌شویم. بگذارید اول محدوده‌های انتگرال را مشخص کنیم. می‌خواهیم جریان i در زمان t برقرار و دو مقدار، محدوده‌های بالای انتگرال را در دو

طرف انتگرال تشکیل دهند. محدوده‌های پایین هم می‌توانند با فرض جریان $i(t_0)$ در زمان t_0، به‌طور کلی تعریف شوند، بنابراین:

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di' = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

که به معادله زیر منجر می‌گردد:

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt'$$

یا

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)} \qquad (۶)$$

معادله (۵) ولتاژ القاگر را برحسب جریان بیان می‌کند، درصورتی‌که معادله (۶) جریان برحسب ولتاژ است. برای معادله آخر فرم‌های دیگری هم پیشنهاد شده است. ما آن را به صورت انتگرال نامعین همراه با ثابت انتگرال خواهیم نوشت:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v\,dt + k \qquad (۷)$$

همچنین فرض می‌کنیم که ما مسئله ایده‌آلی را حل می‌کنیم و در آن در $t_0 = -\infty$ جریانی و یا انرژی در القاگر وجود ندارد. بنابراین $i(-\infty) = 0$ $(t_0) = i$ بوده و آن‌گاه

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt' \qquad (۸)$$

خواهد بود. بیایید کاربرد چنین انتگرالی را با مثال ساده‌ای که در آن ولتاژ دو سر القاگر معین است، بررسی کنیم.

مثال ۶ـ۷

ولتاژ دو سر یک القاگر 2H برابر $6\cos 5t$ است. اگر $i(t = -\frac{\pi}{2}) = 1A$ باشد، جریان القاگر را به‌دست آورید.

از معادلهٔ (۶):

$$i(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} 6\cos 5t'\,dt' + i(t_0)$$

یا

$$i(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\sin 5t - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\sin 5t_0 + i(t_0)$$

$$= 0.6\sin 5t - 0.6\sin 5t_0 + i(t_0)$$

اولین جمله نشان می‌دهد که جریان القاگر به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند. جملات دوم و سوم مقادیر ثابتی هستند که صرفاً وقتی مقدار جریان در زمان مشخصی به صورت عددی معین شود مفهوم پیدا می‌کنند. با فرض این‌که جریان در $t = -\frac{\pi}{2}$ برابر 1A باشد، ما $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ و $i(t_0) = 1$ را درنظر می‌گیریم و در این‌صورت:

$$i(t) = 0.6\sin 5t - 0.6\sin(-2.5\pi) + 1$$

یا

$$i(t) = 0.6\sin 5t + 1.6$$

این نتیجه را می‌توان از معادله (۷) هم به‌دست‌آورد. داریم:

$$i(t) = 0.6\sin 5t + k$$

و با جریان 1A در $t = -\frac{\pi}{2}$ مقدار عددی k را مطابق زیر به‌دست می‌آوریم:

$$1 = 0.6 \sin(-2.5\pi) + k$$

یا

$$k = 1 + 0.6 = 1.6$$

و مطابق قبل

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + 1.6$$

با این ولتاژ خاص در این مثال، معادله (۸) می‌رود که مشکل‌دار شود. ما معادله را بر این فرض استوار کردیم که در $t = -\infty$ جریان آن صفر است. برای اطمینان، این شرط باید در دنیای فیزیکی واقعیت داشته باشد و نه در مدل ریاضی. در مدل ریاضی همه عناصر و توابع تحریک ایده‌آل درنظرگرفته شدند. مشکل پس از انتگرال‌گیری ظهور می‌کند یعنی داریم:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t' \Big|_{-\infty}^{t}$$

انتگرال را در حد پایین ارزیابی می‌نماییم:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin(-\infty)$$

سینوس $-\infty$ نامعین است و بنابراین ما نمی‌توانیم عبارت خود را ارزیابی کنیم. معادلهٔ (۷) فقط هنگامی مفید است که ما توابعی را که در $t \to -\infty$ به سمت صفر می‌روند، ارزیابی کنیم.

تمرین

۷ـ۵ یک القاگر 100 mH دارای ولتاژ $v_L = 2e^{-3t}$ V در دو سر پایانه‌اش است. جریان القاگر حاصل را اگر $i_L(-0.5) = 1$ A باشد، معین کنید.

جواب: $-\frac{20}{3} e^{-3t} + 30.9$ A

با این وجود نباید زود قضاوت کنیم، زیرا هر کدام از معادلات (۶)، (۷) و (۸) که از این پس از آن‌ها استفاده می‌کنیم بسته به مسئله و کاربرد مزایای خاص خود را دارد. معادله (۶) روشی طولانی و عمومی را نمایانگر است و نشان می‌دهد که ثابت انتگرال، از جنس جریان است. معادله (۸) کمی از معادله (۷) خلاصه‌تر است و در آن نقش ثابت انتگرال حذف شده است. بالاخره معادله (۸) عبارتی فوق‌العاده است، زیرا ثابتی لازم ندارد، با این وجود، فقط برای جریان صفر در $t = -\infty$ و هنگامی که عبارت تحلیلی جریان در $-\infty$ معین است کاربرد دارد.

ذخیره انرژی

اکنون بیایید توجه خود را به توان و انرژی معطوف کنیم. توان جذب‌شده حاصل‌ضرب جریان و ولتاژ است:

$$p = vi = Li \frac{di}{dt}$$

انرژی w_L جذب‌شده به وسیله القاگر در میدان مغناطیسی حول سیم‌پیچ ذخیره می‌گردد و به صورت انتگرال توان در یک فاصله مطلوب زمانی بیان می‌شود:

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt' = L \int_{t_0}^{t} \frac{di}{dt'} dt' = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i\,di = \frac{1}{2} L \left\{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \right\}$$

بنابراین

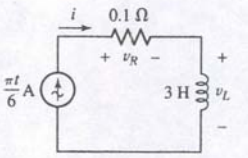
$$w_L(t) - w_L(t_0) = \tfrac{1}{2} L \left\{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \right\} \qquad (۹)$$

که مجدداً فرض می‌کنیم در t_0 مقدار جریان $i(t_0)$ است. هنگام استفاده از عبارت انرژی مرسوم است که جریان در t_0 را صفر اختیار کنند، و نیز فرض می‌شود که انرژی هم در این زمان صفر باشد. در این صورت داریم:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2 \qquad (۱۰)$$

به این ترتیب از این پس به‌عنوان مرجع، انرژی صفر هنگامی فرض می‌شود که جریان القاگر در آن لحظه نیز صفر باشد. از آن لحظه به بعد، که جریان صفر است، هیچ انرژی در سیم‌پیچ ذخیره نمی‌گردد. هر وقت جریان صفر نبود، مستقل از جهت و علامت آن، انرژی در القاگر ذخیره می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که انرژی برای مدتی به القاگر تحویل و مدتی دیگر از آن باز پس گرفته می‌شود. همه انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر ایده‌آل از آن باز پس گرفته می‌شود و در مدل ریاضی هیچ جای مصرف وجود ندارد، با این وجود یک سیم‌پیچ فیزیکی باید از سیم واقعی ساخته شود و بنابراین مقاومت به همراه آن است. پس انرژی نمی‌تواند ذخیره و بدون تلفات بازیابی شود.

این ایده‌ها را می‌توان با مثال ساده‌ای روشن کرد. در شکل ۱۹ـ۷ یک القاگر 3H با مقاومت 0.1Ω و منبع جریان $i_s = 12 \sin \frac{\pi t}{6}$ سری شده است. مقاومت را می‌توان مقاومت سیم مربوط به سیم‌پیچ فیزیکی تصور کرد.



شکل ۱۹ـ۷ استفاده از یک منبع جریان سینوسی به‌عنوان تابع تحریک مدار سری RL. مقاومت 0.1Ω مقاومت ذاتی سیمی است که القاگر با آن ساخته شده است.

مثال ۷ـ۷

حداکثر انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۱۹ـ۷ را بیابید و انرژی تلف‌شده در مقاومت را حین ذخیره انرژی و بازیافت آن محاسبه کنید.

انرژی ذخیره شده در القاگر برابر است با:

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 = 216 \sin^2 \frac{\pi t}{6} \text{ J}$$

که این انرژی از عدد صفر در $t = 0$ به 216J در $t = 3$s افزایش می‌یابد. بنابراین حداکثر انرژی ذخیره‌شده همان 216J خواهد بود.

پس از رسیدن به اوج در $t = 3$s، انرژی کلاً القاگر را ترک می‌کند. بیایید ببینیم در ازای ذخیره و بازیابی این انرژی 216J در 6 ثانیه چه بهایی را پرداخته‌ایم. توان تلف‌شده در مقاومت به راحتی محاسبه می‌شود:

$$p_R = i^2 R = 14.4 \sin^2 \frac{\pi t}{6} \text{ W}$$

بنابراین انرژی تبدیل‌شده به گرما در این مدت برابر است با:

$$w_R = \int_0^6 p_R\,dt = \int_0^6 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t\,dt$$

یا

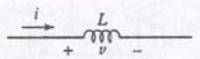
$$w_R = \int_0^6 14.4 \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi}{3} t\right) dt = 43.2 \text{ J}$$

بنابراین در فرآیند ذخیره و بازیابی 216J انرژی در 6 ثانیه، 43.2J هزینه کرده‌ایم. این مقدار 20% از حداکثر انرژی ذخیره شده است ولی در بسیاری از القاگرها این مقدار بزرگ ضریب القاء، کمیتی منطقی است. برای ضریب القاء 100μH، می‌توان به حوالی 2 یا 3 درصدی انرژی حداکثر رسید.

تمرین

۷ـ۶ فرض کنید در شکل ۲۰ـ۷، L = 25mH است. (الف) v را در $t = 12$ms به‌دست آورید. به‌شرطی‌که $i = 10te^{-100t}$ A باشد. (ب) i را در $t = 0.1$s محاسبه کنید، اگر $v = 6e^{-12t}$ V و $i(0) = 10$A باشد. اگر $i = 8(1 - e^{-40t})$ mA باشد. مطلوبست: (ج) توان حمل‌شده به القاگر در $t = 50$ms و (د) انرژی ذخیره‌شده در القاگر در $t = 40$ms.

جواب: -15.06mV، 24.0A، 7.49μW و 0.510μJ.



شکل ۲۰ـ۷

اکنون اجازه بدهید چهار مشخصه کلیدی یک القاگر را که از تعریف معادله $v = L\frac{di}{dt}$ به‌دست می‌آید، جمع‌بندی کنیم.

مشخصه‌های مهم یک القاگر ایده‌آل:

۱. اگر جریانی که از القاگر عبور می‌کند با زمان تغییر نکند، ولتاژی در دو سر آن وجود نخواهد داشت. بنابراین القاگر برای dc اتصال کوتاه است.

۲. حتی اگر ولتاژ دو سر القاگری صفر باشد، مقدار معینی انرژی می‌تواند در آن ذخیره شود. مثلاً اگر جریان عبوری از آن ثابت باشد این نکته معتبر است.

۳. امکان تغییر جریان درون یک القاگر در مدت زمان صفر وجود ندارد. برای تحقق آن باید ولتاژ دو سر القاگر بی‌نهایت باشد. القاگر در برابر هر تغییر در جریان خود، شبیه به مقاومت جرم در برابر تغییر سرعت، از خود مقاومت نشان می‌دهد.

۴. القاگر هرگز انرژی را مصرف نمی‌کند، بلکه فقط آن را ذخیره می‌نماید. گرچه این مطلب برای مدل ریاضی کاملاً صحیح است، به دلیل وجود مقاومت در القاگر فیزیکی صحت ندارد.

با مطالعه مجدد چهار عبارت و جایگزینی دوگان بعضی از کلمات به نتایج جالبی می‌رسیم. اگر در چهار عبارت فوق، القاگر با خازن، ضریب القا با ظرفیت، ولتاژ و جریان دو سر و عبوری از آن، مدار باز و اتصال کوتاه، فنر و جرم، تغییر مکان یا جابه‌جایی با سرعت تعویض شود، چهار عبارت قبلی متعلق به خازن به‌دست می‌آیند.

۷ـ۳ ترکیب القاگرها و خازن‌ها

اکنون که خازن و القاگر را به لیست عناصر مدار غیرفعال خود اضافه نمودیم، باید ببینیم آیا روش‌هایی که در تحلیل مدارهای مقاومتی معرفی کردیم معتبرند یا خیر. همچنین بد نیست طریقه جایگزینی ترکیبات سری و موازی آن‌ها را با معادل ساده‌تر همچون فصل ۳ بیاموزیم.

ابتدا به دو قانون کیرشهف نگاه می‌کنیم، که هر دو آن‌ها اصل بحث ما را تشکیل می‌دهند. با این وجود هنگام بیان این دو موضوع، هیچ محدودیتی بر نوع عناصر تشکیل‌دهنده شبکه نیست. بنابراین هر دو آن‌ها معتبر باقی می‌مانند.

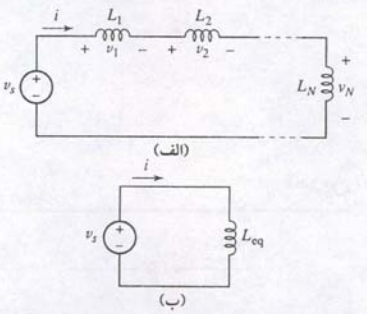
القاگرهای سری

اکنون می‌توانیم روال‌های مربوط به کاهش مقاومت‌ها را به معادلشان تعمیم داده و به‌طور مشابه به القاگرها و خازن‌ها اعمال کنیم. ابتدا منبع ولتاژ ایده‌آلی را که به N القاگر سری، طبق شکل ۲۱ـ۷ (الف) وصل است ملاحظه می‌نماییم. می‌خواهیم القاگری معادل با القاکنایی L_{eq} به‌دست‌آوریم، به‌طوری‌که اگر جایگزین این N القاگر شود، جریان $i(t)$ تغییر نکند. مدار معادل در شکل ۲۱ـ۷ (ب) رسم شده است. با اعمال KVL به مدار اصلی داریم:

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + \ldots + v_N \\ &= L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \ldots + L_N\frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \ldots + L_N)\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

یا به‌طور خلاصه:

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} L_n\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}\sum_{n=1}^{N} L_n$$



شکل ۲۱ـ۷ (الف) مداری شامل N القاگر سری. (ب) مدار معادل مطلوب که در آن

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots + L_N$$

ولی برای مدار معادل داریم:

$$v_s = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

و بنابراین القاکنایی معادل برابر است با:

$$L_{eq} = (L_1 + L_2 + \ldots + L_N)$$

یا

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n \qquad (11)$$

القاگری که معادل با چند القاگر سری است، القاکنایی یا ضریب القایی آن با جمع القاکنایی القاگرها در مدار اصلی برابر است. این دقیقاً شبیه نتیجه‌ای است که ما برای مقاومت‌های سری به‌دست آوردیم.

القاگرهای موازی

ترکیب تعدادی القاگر موازی با نوشتن تنها معادله گرهی برای مدار اصلی، شکل ۲۲ـ۷ (الف)

$$\begin{aligned} i_S &= \sum_{n=1}^{N} i_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{L_n}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_n(t_0)\right] \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\right)\int_{t_0}^{t} v\,dt + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0) \end{aligned}$$

و مقایسه آن با مدار معادل شکل ۲۲ـ۷ (ب) حاصل می‌شود:

$$i_S = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_S(t_0)$$

چون قانون جریان کیرشهف لازم می‌دارد که $i_s(t_0)$ با مجموع جریان شاخه‌ها در t_0 برابر باشد، دو جمله انتگرال نیز باید با یکدیگر برابر باشند، از این‌رو:

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N} \qquad (12)$$

در حالت خاص که دو القاگر با هم موازی‌اند:

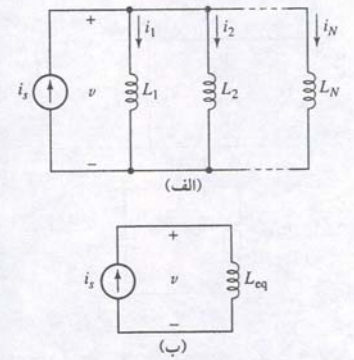
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \qquad (13)$$

می‌بینیم که القاگرهای موازی درست مثل مقاومت‌های موازی با هم ترکیب می‌شوند.

خازن‌های سری

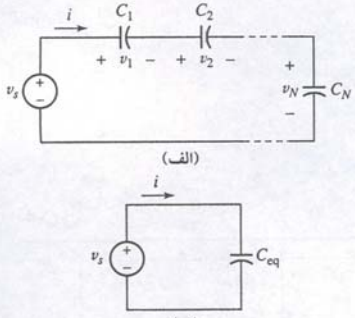
برای یافتن خازنی که معادل N خازن سری باشد، مدار شکل ۲۳ـ۷ (الف) و معادل آن در شکل ۲۳ـ۷ (ب) را به‌کار برده و چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_S &= \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_n(t_0)\right] \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n}\right)\int_{t_0}^{t} i\,dt + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0) \end{aligned}$$



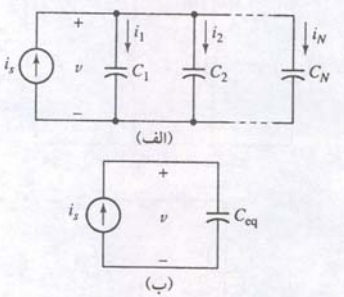
شکل ۲۲ـ۷ (الف) ترکیب موازی N القاگر. (ب) مدار معادل که در آن

$$L_{eq} = [(1/L_1) + (1/L_2) + \ldots + (1/L_N)]^{-1}$$



شکل ۲۳ـ۷ (الف) مداری شامل N خازن سری. (ب) مدار معادل که در آن

$$C_{eq} = [1/C_1 + 1/C_2 + \ldots + 1/C_N]^{-1}$$



شکل ۷ـ۲۴ (الف) ترکیب موازی N خازن. (ب) مدار معادل که در آن

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_N$$

و

$$v_S = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^{t} i\,dt + v_S(t_0)$$

با این وجود قانون ولتاژ کیرشهف برابری $v_s(t_0)$ و مجموع ولتاژ خازن‌ها در t_0 را برقرار می‌کند. بنابراین:

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N} \qquad (۱۴)$$

بنابراین خازن‌های سری، همچون سری‌شدن رسانایی‌ها و یا مقاومت‌های موازی با یکدیگر ترکیب می‌شوند. حالت خاص معادل دو خازن سری به رابطه زیر منتهی می‌گردد:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad (۱۵)$$

خازن‌های موازی

بالاخره به کمک شکل ۷ـ۲۴ ظرفیت معادل N خازن موازی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

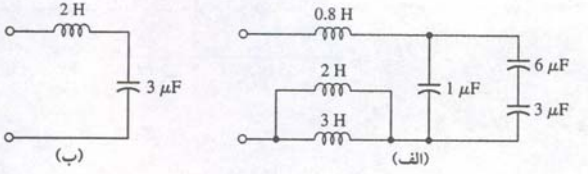
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_N \qquad (۱۶)$$

و جای تعجبی ندارد که ببینیم خازن‌های موازی چون مقاومت‌های سری با یکدیگر ترکیب می‌شوند، یعنی کافی است همه ظرفیت‌ها را با هم جمع کنیم.

این فرمول‌ها ارزش حفظ کردن را دارند. فرمول‌های اعمال‌شده به ترکیبات سری و موازی القاگرها با فرمول‌های نظیرشان در ترکیب مقاومت‌ها یکی هستند، بنابراین فرمول‌های مذکور واضح به‌نظر می‌رسند. با این وجود باید دقت کرد که در ترکیب‌های سری و موازی خازن‌ها، عبارات برخلاف مقاومت‌ها و القاگرها است و اغلب به هنگام عمل موجب خطاهای فاحش در محاسبات می‌گردد.

مثال ۸ـ۷

شبکه شکل ۷ـ۲۵ (الف) را با ترکیب سری و موازی ساده بیان کنید.



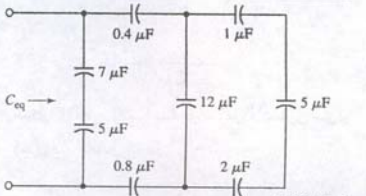
شکل ۷ـ۲۵ (الف) یک شبکهٔ مفروض LC. (ب) مدار معادل آن.

ابتدا خازن‌های 3 و $6\mu F$ به معادل $2\mu F$ خود تبدیل می‌شوند و آن‌گاه این خازن با عنصر $1\mu F$ که موازی است ترکیب می‌گردد و حاصل آن معادل $3\mu F$ می‌باشد. به‌علاوه القاگرهای 3 و 2H با معادل 1.2H جایگزین شده و سپس با عنصر 0.8H جمع می‌شود تا القاکنایی 2H به دست آید. مدار معادل ساده‌شده در شکل ۷ـ۲۵ (ب) دیده می‌شود.

تمرین

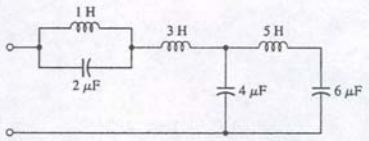
۷ـ۷ C_{eq} را برای شبکه شکل ۷ـ۲۶ بیابید.

جواب: $3.18\mu F$



شکل ۷ـ۲۶

شبکه شکل ۷ـ۲۷ حاوی سه القاگر و سه خازن است ولی سری یا موازی هیچ‌یک از دو عنصر خازن و القاگر وجود ندارد. ساده‌سازی این شبکه با تکنیک‌های ارائه‌شده امکان‌پذیر نیست.



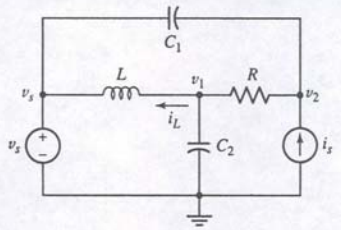
شکل ۷ـ۲۷ یک شبکه LC بدون قابلیت ترکیب سری یا موازی خازن‌ها و القاگرها.

۷ـ۴ نتایج خطی‌بودن

اجازه بدهید به تحلیل مش و گرهی بازگردیم. چون می‌توانیم قانون کیرشهف را با حاشیه امنیت کافی اعمال کنیم، مشکلی در نوشتن معادلاتی که کافی و مستقلند نداریم. این معادلات انتگرال ـ مشتق خطی با ضرایب ثابتند که حتی ذکر آن‌ها مشکل است، چه رسد به حل آن‌ها. بنابراین ما فقط به نوشتن آن‌ها اکتفا می‌کنیم تا با کاربرد قوانین کیرشهف در مدارهای RLC آشنا شویم. حل معادلات ساده‌تر را در فصل‌های بعدی بحث خواهیم کرد.

مثال ۹ـ۷

معادلات گرهی را برای مدار شکل ۷ـ۲۸ بنویسید.



شکل ۷ـ۲۸ یک مدار RLC چهار گره‌ای و ولتاژ گره‌های آن‌ها.

ولتاژهای گرهی طبق شکل انتخاب شده‌اند، و ما جمع جریان‌هایی که گره مرکزی را ترک می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}(v_1 - v_S)\,dt + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} = 0$$

که در آن $i_L(t_0)$ مقدار جریان القاگر در آغاز انتگرال‌گیری است. در گره سمت راست داریم:

$$C_1\frac{d(v_2 - v_S)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_S = 0$$

با نوشتن مجدد دو رابطه اخیر داریم:

$$\frac{v_1}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_1\,dt - \frac{v_2}{R} = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_S\,dt - i_L(t_0)$$

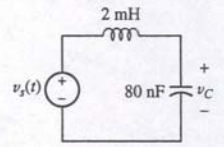
$$-\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1\frac{dv_2}{dt} = C_1\frac{dv_S}{dt} + i_S$$

این معادلات انتگرال ـ مشتق، همان‌هایی هستند که وعده داده بودیم و در این‌جا به چند نکته جالب در مورد آن‌ها اشاره می‌نماییم. اول این‌که در معادلات فوق منبع ولتاژ v_s به فرم عبارات انتگرالی و مشتقی ظاهر شده است و نه به فرم ساده v_s. چون هر دو منبع برای همه زمان‌ها وجود دارند باید بتوانیم عبارات انتگرالی و مشتقی را ارزیابی نماییم. دوم، مقدار جریان اولیه در القاگر، $i_L(t_0)$ به‌عنوان منبع جریان (ثابت) در گره وسطی عمل می‌کند.

تمرین

۷ـ۸ اگر $v_C(t) = 4\cos 10^5 t$ V در مدار شکل ۷ـ۲۹ باشد، $v_s(t)$ را بیابید.

جواب: $-2.4\cos 10^5 t$ V



شکل ۷ـ۲۹

در این لحظه ما سعی نخواهیم کرد تا معادلات انتگرال ـ مشتق را حل کنیم. با این وجود بد نیست وقتی که نیروهای محرکه توابع سینوسی هستند، مدار را بررسی کنیم و در صورت امکان نسبت ولتاژ ـ جریان (به‌نام امپدانس) یا جریان ـ ولتاژ (ادمیتانس) را برای هر سه عنصر غیرفعال تعریف نماییم. آن‌گاه ولتاژهای گرهی تنها با یک ضریب وارد معادلات می‌شوند و نه به صورت مشتق و انتگرال و دوباره یک مجموعه معادله جبری خطی خواهیم داشت. این معادلات جبری را می‌توان به کمک دترمینان یا با روش حذف متغیرها حل کرد.

می‌توان نشان داد که مزیت خطی‌بودن شامل مدارهای RLC نیز می‌گردد. طبق تعاریف قبلی ما در مورد یک مدار خطی، این مدارها نیز خطی هستند زیرا رابطه ولتاژ ـ جریان برای القاگر و یا خازن رابطه‌ای خطی است. برای القاگر داریم:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

و ضرب جریان در ثابت K، ولتاژی را به‌دست‌می‌دهد که K برابر بزرگ‌تر است. در فرم انتگرال:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

می‌توان دید که اگر هر عبارت K برابر شود، آنگاه جریان اولیه هم باید در K ضرب گردد.

بررسی مشابهی در مورد خازن نشان می‌دهد که خازن هم خطی است. بنابراین مداری متشکل از منابع مستقل منابع وابسته خطی، القاگرها و خازن‌ها، یک مدار خطی می‌باشد.

در این مدار خطی مجدداً پاسخ متناسب با نیروی محرکه است. برای اثبات این ادعا، معادلات انتگرال ـ مشتق را برای مجموعه می‌نویسیم. بیایید همه جملاتی که فرم Ri، $L\,di/dt$ و $1/C\int i\,dt$ دارند را در سمت چپ معادله بنویسیم و ولتاژ منابع مستقل را به سمت راست منتقل کنیم. به‌عنوان مثالی ساده، یکی از معادلات می‌تواند فرم زیر را داشته باشد:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_C(t_0) = v_S$$

اگر هر منبع مستقلی K برابر شود آنگاه سمت راست هر معادله به اندازه K برابر می‌شود. اکنون هر جمله در سمت چپ یا جمله‌ای خطی شامل چند جریان حلقه یا یک ولتاژ اولیه خازن است. برای این‌که همه پاسخ‌ها (جریان حلقه‌ها) K برابر شوند، باید ولتاژ خازن را هم در K ضرب کنیم. یعنی باید ولتاژ اولیه خازن را مانند یک منبع مستقل درنظربگیریم و آن را هم K برابر نماییم. به طریقی مشابه جریان‌ها نیز در تحلیل گرهی به صورت جریان منابع مستقل ظاهر می‌شوند.

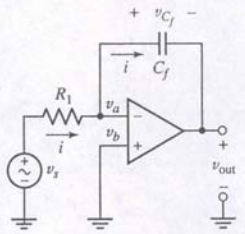
بنابراین اصل تناسب منبع و پاسخ قابل تعمیم به یک مدار کلی، RLC نیز هست و به دنبال آن می‌توان گفت که اصل تجمیع نیز معتبر می‌باشد. تأکید می‌کنیم که مقدار جریان‌های اولیه در القاگرها و ولتاژ در هر خازن باید در اصل تجمیع به صورت منابع مستقل درنظر گرفته شوند و هر یک از آن‌ها به نوبت غیرفعال شوند. در فصل ۵ آموختیم که اصل تجمیع، نتیجه طبیعت خطی مدارهای مقاومتی است. این مدارها به این دلیل خطی‌اند که رابطه ولتاژ ـ جریان برای مقاومت خطی و نیز قوانین کیرشهف هم خطی‌اند. قبل از اعمال اصل تجمیع به مدارهای RLC، لازم است روشی را برای حل معادلات توصیف‌کننده آن‌ها هنگامی که فقط یک منبع وجود دارد، معرفی کنیم. دراین‌جا باید احساس اطمینان کنیم که هر مدار خطی پاسخی را که دامنه‌اش با دامنه منبع متناسب است، تولید خواهد کرد. آنگاه آماده‌ایم تا اصل تجمیع را اعمال کنیم و در آن القاگر یا خازنی را درنظربگیریم که در آن جریان القاگر و ولتاژ خازن در t_0 - t مشخص شده و هرگاه نوبتش فرا برسد باید کشته شود.

قضایای تونن و نورتن بر خطی‌بودن مدار اولیه، قابلیت اعمال قضایای کیرشهف و اصل تجمیع استوار است. مدار RLC کلی کاملاً با این شرایط مطابقت دارد، و بنابراین نتیجه می‌شود که همه مدارهای خطی حاوی هر ترکیبی از منابع ولتاژ و جریان مستقل، منابع جریان و ولتاژ وابسته خطی، مقاومت‌های خطی، القاگرها و خازن‌ها را می‌توان با این دو قضیه تحلیل کرد. در این‌جا لازم نیست مجدداً قضایا را تکرار کنیم زیرا قبلاً چنان بیان شده‌اند که به مدار کلی RLC نیز قابل اعمال باشند.

۷ـ۵ مدارهای op amp ساده با خازن

در فصل ۶ با چند نوع مدار تقویت‌کننده مبتنی بر op amp ایده‌آل آشنا شدیم. تقریباً در هر مورد، دیدیم که خروجی با ترکیبی از مقاومت به ولتاژ ورودی مرتبط است. اگر یک یا چند عدد از این مقاومت‌ها را با یک خازن تعویض کنیم، امکان دارد مدار جالبی به‌دست‌آید و در آن خروجی با مشتق یا انتگرال ولتاژ ورودی متناسب باشد. در عمل این‌گونه مدارها کاربرد وسیعی دارند. مثلاً یک سنسور سرعت را می‌توان به مدار یک op amp وصل کرد تا سیگنالی متناسب با شتاب را تولید نماید. یا سیگنال خروجی می‌تواند نشان‌دهنده برخورد بار روی یک الکترود فلزی در پریود خاصی باشد که این‌کار فقط با اندازه‌گیری جریان انجام می‌گردد.

برای ساخت یک انتگرال‌گیر با استفاده از op amp، ما ورودی معکوس‌نکننده را به زمین وصل می‌کنیم و یک خازن ایده‌آل به‌عنوان عنصر پسخورد از خروجی به این ورودی وصل می‌نماییم و بالاخره یک منبع سیگنال v_s را از طریق مقاومت ایده‌آل طبق شکل ۳۰ـ۷ به آن متصل می‌کنیم.



شکل ۳۰ـ۷ op amp ایده‌آلی که به عنوان انتگرال‌گیر وصل شده است.

با اجرای تحلیل گرهی در ورودی وارونگر داریم:

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + i$$

می‌توانیم جریان i را به ولتاژ دو سر خازن مرتبط نماییم:

$$i = C_f\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

و بنابراین:

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + C_f\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

با به‌کارگیری قاعده ۲ برای op amp ایده‌آل، می‌دانیم $v_a = v_b = 0$ است، بنابراین:

$$0 = \frac{-v_s}{R_1} + C_f\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

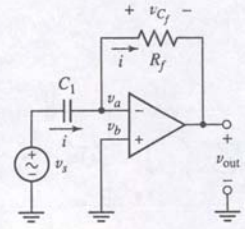
با انتگرال‌گیری و حل v_{out} داریم:

$$v_{C_f} = v_a - v_{out} = 0 - v_{out} = \frac{1}{R_1C_f}\int_0^t v_s\,dt' + v_{C_f}(0)$$

یا

$$v_{out} = -\frac{1}{R_1C_f}\int_0^t v_s\,dt' - v_{C_f}(0) \qquad (17)$$

بنابراین برای ساخت یک **انتگرال‌گیر**، یک مقاومت، یک خازن و یک op amp را با هم ترکیب کردیم. توجه کنید که اولین جمله خروجی $\frac{1}{RC}$ ضربدر منفی انتگرال ورودی از $t' = 0$ تا t است و دومین جمله منفی مقدار اولیه v_{C_f} می‌باشد. مثلاً مقدار $(RC)^{-1}$ را با $R = 1M\Omega$ و $C = 1\mu F$ می‌توان به واحد تبدیل کرد. دیگر ترکیبات می‌تواند ولتاژ خروجی را افزایش یا کاهش دهد.



شکل ۳۱ـ۷ یک op amp ایده‌آل به عنوان مشتقگیر.

قبل از این‌که مدار انتگرال‌گیر را به کناری بگذاریم، ممکن‌است سوالی از طرف خواننده مطرح شود "آیا می‌توانیم به‌جای خازن از القاگر استفاده کرده و یک مشتق‌گیر بسازیم". البته می‌توانیم ولی طراحان مدار معمولاً از به‌کارگیری القاگرها حتی‌الامکان به دلیل سایز، وزن، قیمت، مقاومت و ظرفیت آن خودداری می‌کنند. در عوض محل مقاومت و خازن را در شکل ۲۷ـ۷ تعویض می‌نمایند و به این ترتیب یک مشتق‌گیر ساخته می‌شود.

مثال ۱۰ـ۷

عبارتی برای ولتاژ خروجی مدار op amp شکل ۳۱ـ۷ به‌دست‌آورید.

حل را با معادله گرهی در پایه ورودی وارونگر با $v_{C_1} = v_a - v_s$ آغاز می‌کنیم.

$$0 = C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f}$$

با به‌کارگیری قاعده ۲، $v_a - v_b = 0$ است. بنابراین:

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_{out}}{R_f}$$

با حل برای v_{out} داریم:

$$v_{out} = R_f C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt}$$

چون $v_{C_1} = v_a - v_b = v_s$:

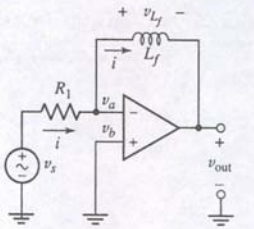
$$v_{out} = -R_f C_1 \frac{dv_s}{dt}$$

بنابراین با تعویض مقاومت و خازن در شکل ۳۰ـ۷ به‌جای انتگرال‌گیر یک مشتق‌گیر خواهیم داشت.

تمرین

۹ـ۷ عبارتی برحسب v_{in} برای v_{out} در مدار شکل ۳۲ـ۷ به‌دست‌آورید.

جواب: $v_{out} = -L_f/R_1 dv_s/dt$.



شکل ۳۲ـ۷

۷ـ۶ دوگانگی

مفهوم دوگانگی به بسیاری از مفاهیم اصول مهندسی إعمال می‌شود. در این بخش، دوگانگی را برحسب معادلات مدار تعریف می‌کنیم. دو مدار را "دوگان" یکدیگر گوییم اگر معادلات مشی که یکی از آن‌ها را بیان می‌کند، از لحاظ ریاضی با معادلات گرهی دیگری همشکل باشد. اگر معادله مش یک مدار با معادله گرهی متناظر با مدار دیگر از لحاظ عادی هم‌شبیه باشند، آن دو مدار را دقیقاً دوگان یکدیگر گوییم. البته متغیرهای ولتاژ و جریان نمی‌توانند یکسان باشند. دوگانگی به خواصی اشاره دارد که به وسیله مدارهای دوگان بروز داده می‌شود.

بیایید تعریف را تفسیر کنیم و از آن با نوشتن دو معادله مش در شکل ۳۳ـ۷ مدار دوگان را بسازیم. دو جریان حلقه‌ای i_1 و i_2 را تخصیص می‌دهیم و معادلات مش زیر را می‌نویسیم:

$$3i_1 + 4\frac{di_1}{dt} - 4\frac{di_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad (۱۸)$$

$$-4\frac{di_1}{dt} + 4\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t i_2\,dt + 5i_2 = -10 \qquad (۱۹)$$

البته فرض بر این است که در $t = 0$ ولتاژ $v_C = 10\text{V}$ باشد.

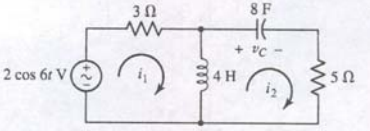
اکنون دو معادله‌ای را می‌سازیم که دقیقاً دوگان مدار را تشکیل دهند. می‌خواهیم این دو از نوع معادلات گرهی باشند و لذا شروع به جایگزینی جریان‌های حلقه i_1 و i_2 با ولتاژهای گرهی v_1 و v_2 در معادلات (۹) و (۱۰) می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$3v_1 + 4\frac{dv_1}{dt} - 4\frac{dv_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad (۲۰)$$

$$-4\frac{dv_1}{dt} + 4\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t v_2\,dt + 5v_2 = -10 \qquad (۲۱)$$

حال به‌دنبال مداری خواهیم گشت که توسط دو معادله فوق بیان شود.

ابتدا خطی را برای نمایش گره مرجع خطی می‌کشیم و سپس دو گره با ولتاژهای v_1 و v_2 را نسبت به مرجع مشخص می‌کنیم. معادله (۲۰) نشان می‌دهد که یک منبع جریان $2\cos 6t$ A بین گره 1 و گره مرجع وصل است و جهت آن طوری است که جریان وارد گره 1 می‌شود. این معادله همچنین نشان می‌دهد که بین گره 1 و گره مرجع یک رسانایی 3S قرار دارد. به سراغ معادله (۲۱) می‌رویم و ابتدا جملات غیرمشترک یعنی آن‌هایی که در معادله (۲۰) نیستند را درنظر می‌گیریم. این جملات نشان می‌دهند که بین گره 2 و گره مرجع یک القاگر 8H و یک رسانای 5S وجود دارد. دو جمله مشابه در معادلات (۲۰) و (۲۱) نشان می‌دهد که یک خازن 4F در میان دو گره قرار دارد. مدار با نصب این خازن در بین دو گره کامل می‌شود. جمله ثابت در سمت راست معادله (۲۱) مقدار جریان القاگر در $t = 0$ است. به بیان دیگر $i(0) = 10\text{A}$.



شکل ۳۳ـ۷ مداری که می‌خواهیم با استفاده از تعریف دوگانگی مدار دقیقاً دوگانش را به‌دست‌آوریم.

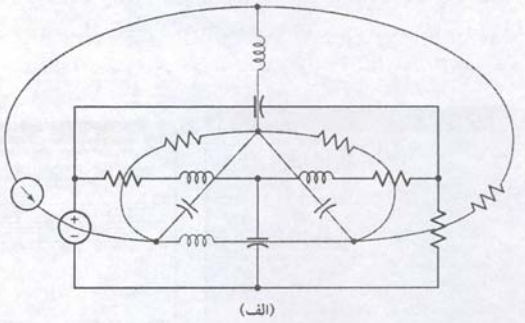
مدار دوگان در شکل ۳۴ـ۷ نشان داده شده است. چون در مجموعه معادلات از لحاظ عددی یکسانند، مدارها دقیقاً دوگان یکدیگرند.

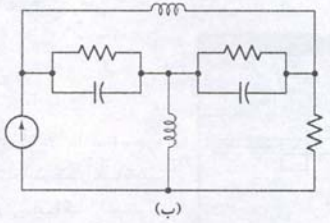
برای یافتن مدارهای دوگان می‌توان روشی ساده‌تر را هم به کاربرد و حتی معادلات را هم ننوشت. بنابراین در این‌گونه موارد به معادلات مش یا تک‌حلقه آن‌ها فکر می‌کنیم. در هر مش باید یک گره غیرمرجع داشته باشیم، و به‌علاوه گره مرجع هم باید باشد. بنابراین روی نمودار داده‌شده در وسط هر مش گرهی را مستقر می‌نماییم و گره مرجع را به صورت خطی نزدیک نمودار و یا یک حلقه به دور مدار درنظر می‌گیریم. هر عنصری که در مرز دو مش قرار دارد، یک عنصر مشترک است و در دو معادله مش به‌صورت جملاتی یکسان و با علائم مختلف ظاهر می‌شود. به‌جای این عنصر، باید عنصری را جایگزین کرد که در دو معادله گرهی ظاهر می‌شود. بنابراین آن را بین گره غیر مرجع داخل حلقه‌ای که عنصر دوگان بین آن‌ها قرار دارد، می‌گذاریم. نوع عنصر دوگان را هم به آسانی می‌توان تعیین کرد. اگر به‌جای القاگر از خازن، به‌جای خازن از القاگر، به‌جای مقاومت از رسانایی و به‌جای رسانایی از مقاومت استفاده کنیم، شکل ریاضی و معادلات تغییر نمی‌یابد. بنابراین القاگر 4H که بین مش‌های 1 و 2 در مدار شکل ۳۳ـ۷ مشترک است به صورت خازن 4F ظاهر می‌شود که در مدار دوگان بین گره‌های 1 و 2 قرار دارد.

دوگان عناصری که تنها در یک حلقه قرار دارند، باید بین گره متناظر آن حلقه و گره مرجع قرار گیرند. مجدداً با توجه به شکل ۳۳ـ۷ ولتاژ $2\cos 6t$ V فقط در مش 1 وجود دارد. دوگان آن منبع جریان $2\cos 6t$ است که فقط به گره 1 و گره مرجع وصل است. چون منبع ولتاژ در جهت ساعتگرد است، منبع جریان هم باید به طرف گره غیرمرجع باشد. بالاخره، برای ولتاژ اولیه موجود در دو سر خازن 8F در مدار مفروض باید اولویت قایل شد. معادلات نشان می‌دهند که دوگان این ولتاژ اولیه در دو سر خازن، جریان اولیه‌ای است که در مدار دوگان از القاگر عبور می‌کند. مقادیر عددی یکسانند و علامت صحیح جریان اولیه به راحتی با ملاحظه ولتاژ اولیه در مدار مفروض و جریان اولیه مدار دوگان، به‌عنوان منبع به راحتی معین می‌شوند. بنابراین اگر v_C در مدار اصلی به‌عنوان منبع تصور شود به‌صورت $-v_C$ در سمت راست معادله حلقه ظاهر می‌گردد. در مدار دوگان تصور جریان i_L به‌عنوان منبع منجر به جمله $-i_L$ در سمت راست معادله گرهی می‌شود. چون هر دو به هنگام ایفای نقش منبع علامت یکسانی دارند، آنگاه اگر $v_C(0) = 10\text{V}$ باشد $i_L(0)$ نیز 10A خواهد بود.

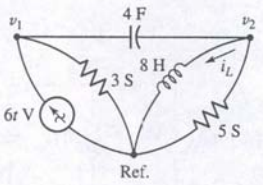
مدار شکل ۳۳ـ۷ در شکل ۳۵ـ۷ تکرار شده و دوگان دقیق آن نیز روی همان نمودار رسم شده است. برای رسم آن، هر عنصر را بین گره‌های واقع در مرکز هر مش و گره مرجع قرار می‌دهیم. کشیدن یک گره مرجع بزرگ به دور مدار، کار را آسان می‌کند. پس از رعایت استاندارد در ترسیم، شکل ۳۴ـ۷ به‌دست خواهد آمد.

مثال دیگری از ایجاد دوگان یک مدار در شکل ۳۶ـ۷ (الف) و (ب) دیده می‌شود. چون هیچ مقداری برای عنصری مشخص نشده است، این دو مدار دوگان هستند ولی لزوماً دوگان دقیق نیستند. مدار اصلی را می‌توان با فرض یک گره در مرکز هر یک از پنج مش شکل ۳۶ـ۷ (ب) و ادامه روش فوق به‌دست‌آورد.

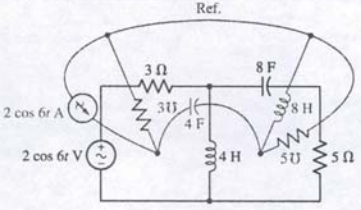




شکل ۳۶ـ۷ (الف) دوگان مدار، روی خود مدار رسم شده است. (ب) شکل مناسب‌تر مدار دوگان.



شکل ۳۴ـ۷ مدار دوگان دقیق مدار شکل ۳۳ـ۷.



شکل ۳۵ـ۷ دوگان مدار شکل ۳۳ـ۷ که مستقیماً از مدار به‌دست‌آمده است.

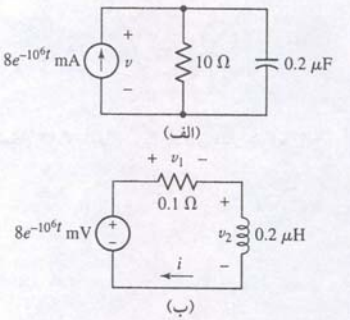
مفهوم دوگانگی را می‌توان در زبانی که با آن تحلیل و طرز کار مدار بیان می‌شود هم وارد کرد. مثلاً اگر منبع ولتاژی با یک خازن سری باشد و بخواهیم جمله "منبع ولتاژ موجب ایجاد جریان در خازن می‌شود" را بیان کنیم، جمله دوگان "منبع جریان موجب ایجاد ولتاژ در دو سر القاگر می‌شود" خواهد بود. اگر در بیان جمله دقت نشود، مانند "جریان دور مدار سری می‌چرخد" برای درک دوگان آن باید ابتکار به خرج داد.

برای تمرین در به‌کاربردن زبان دوگانگی، می‌توانید دوگان قضیه تونن را بیان کنید. حاصل، قضیه نورتن خواهد بود.

صحبت از عناصر دوگان، زبان دوگان و مدارهای دوگان کردیم. و اما شبکه دوگان چیست؟ مقاومت R و القاگر L سری با آن را درنظربگیرید. در دوگان این شبکه دو پایانه وجود داشته و به راحتی با اتصال چند منبع ایده‌آل به شبکه مفروض به‌دست‌می‌آید. آن‌گاه مدار دوگان به صورت منبع دوگان موازی با رسانایی G که همان مقدار R را دارد و یک ظرفیت C که دارای اندازه L است به دست خواهد آمد. ما شبکه دوگان را به صورت شبکه‌ای دو پایانه‌ای که به منبع دوگان وصل شده ملاحظه می‌کنیم. بنابراین جفت پایانه‌های بین G و C به صورت موازی به هم وصل می‌شوند.

قبل از پایان بحث، باید متذکر شویم که دوگانگی بر اساس معادلات مش و گرهی تعریف شد. چون مدارهای غیرمسطح نمی‌توانند با معادلات مش بیان شوند، مداری که در صفحه ترسیم نشود دوگان ندارد.

ما از اصل دوگان برای کاهش کاری که باید در تحلیل مدارهای استاندارد ساده انجام شود، استفاده می‌کنیم. پس از تحلیل مدار سری RL، مدار RC موازی به توجه کمتری نیاز دارد، نه به این علت که اهمیتش کمتر است، بلکه به دلیل این‌که تحلیل دوگان آن را می‌دانیم. چون حاصل تحلیل مدارهای پیچیده را نمی‌توان به خاطر سپرد، معمولاً دوگان در تحلیل این مدارها، حل سریعی را در اختیار نمی‌گذارد.



شکل ۷ـ۳۷

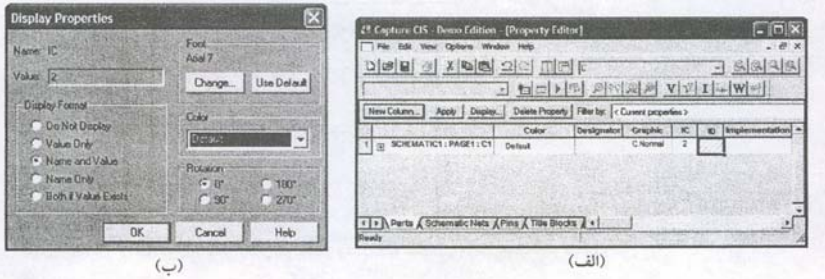
تمرین

۷ـ۱۰ یک معادله گرهی برای مدار شکل ۷ـ۳۷ (الف) بنویسید و با جایگزینی نشان دهید که $v = -80e^{-10^6}t$ mV یک حل است. با این فرض، پیدا کنید (الف) v_1، (ب) v_2 و (ج) i را برای مدار شکل ۷ـ۳۷ (ب).

جواب: $-80e^{-10^6}t$ mV، $-8e^{-10^6}t$ V، $16e^{-10^6}t$ mA و $-80e^{-10^6}t$ mA

۷ـ۷ مدل‌سازی خازن‌ها و القاگرها با PSpice

هنگام استفاده از PSpice برای تحلیل مدارهای حاوی القاگرها و خازن‌ها، اغلب لازم است تا مقدار اولیه هر عنصر را مشخص کنیم (یعنی $v_C(0)$، $i_L(0)$). برای این کار باید روی نماد آن عنصر دو بار کلیک کرد تا جعبهٔ گفتگوی شکل ۷ـ۳۸(الف) ظاهر شود. همچنانکه خواهیم دید در جوار مقدار ظرفیت (1nF در پیش‌فرض) می‌توان مقدار اولیه (IC=) را هم مشخص کرد.



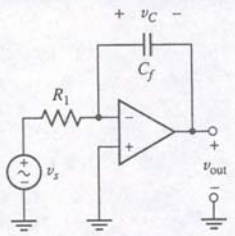
شکل ۷ـ۳۸ (الف) پنجره ویرایش‌گر خاصیت خازنی. (ب) کادر دیالوگ خصوصیات نمایشگر.

یک جعبه محاوره مشابهی را می‌توان با دو بار کلیک بر روی سمبل القاگر به‌دست‌آورد. اگر بخواهیم مقادیر اولیه روی شماتیک قرار گیرند، باید روی Change Display کلیک کنیم و انتخاب مناسب را انجام دهیم. توجه کنید که وقتی ابتدا خازن روی شماتیک قرار گیرد، به صورت افقی مستقر می‌شود و پایانه مرجع مثبت برای ولتاژ اولیه پایانه سمت چپ است.

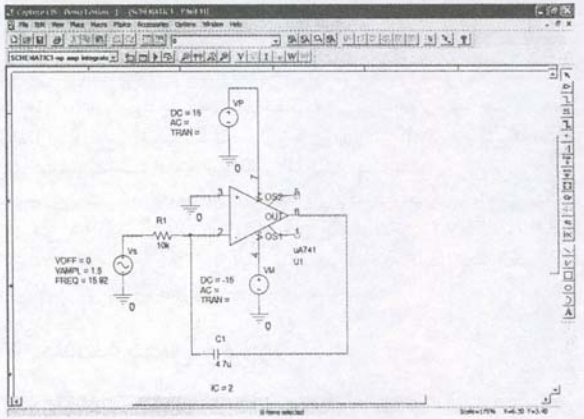
مثال ۱۱ـ۷

موج ولتاژ خروجی مدار شکل ۷ـ۳۹ را شبیه‌سازی کنید، به‌شرطی‌که $v_s = 5\sin 100t$ V، $R_1 = 100\text{k}\Omega$، $C_f = 4.7\ \mu\text{F}$ و $v_C(0) = 2$V باشد.

با ترسیم شماتیک مدار آغاز می‌کنیم و سعی خواهیم کرد تا ولتاژ اولیه را در دو سر خازن (شکل ۷ـ۴۰) برقرار کنیم. توجه کنید که باید فرکانس از 100rad/s به $100/2\pi = 15.92$Hz تبدیل شود.

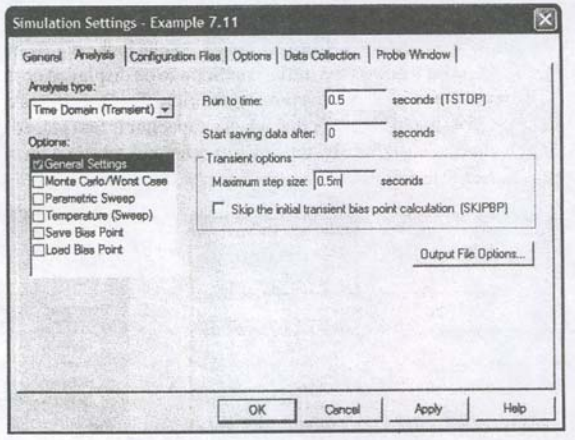


شکل ۷ـ۳۹ یک مدار انتگرال‌گیر op amp.

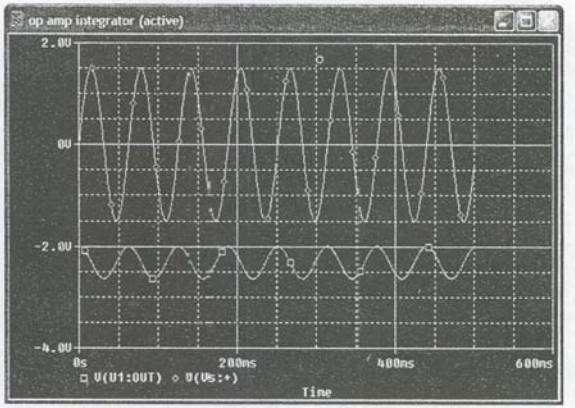


شکل ۷ـ۴۰ رسم مدار شکل ۷ـ۳۹ با ابزار ترسیم شماتیک.

برای فراهم‌کردن ولتاژها و جریان‌های متغیر با زمان باید آن‌چه که تحلیل گذرا خوانده می‌شود را اجرا نماییم. تحت منوی Setup، سعی در انتخاب Transient Analgesis کنید، در این حالت جعبه محاوره شکل ۷ـ۴۱ باید ظاهر گردد. Final Time زمان پایان شبیه‌سازی را



شکل ۷ـ۴۱ کادر محاوره تنظیم پارامترهای تحلیل گذرا. زمان نهایی را 0.5s گذاشته‌ایم تا چند تناوب از شکل موج به‌دست‌آید.
$(1/15.92 \approx 0.06\text{s})$



شکل ۴۲-۷ خروجی probe مدار انتگرال شبیه‌سازی‌شده همراه با ورودی برای مقایسه.

مشخص می‌سازد. PSpice خود اقدام به انتخاب فواصل زمانی منفصل، برای محاسبه ولتاژها و جریان‌های مختلف می‌نماید. گاهی پیام خطایی مبنی بر عدم وجود حل گذرا دریافت می‌شود. در این‌گونه موارد، بهتر است مقداری برای Step Ceiling وارد کنیم که حداکثر گام زمانی بین محاسبات است. البته هرچه گام کوتاه‌تر باشد بهتر است.

با توجه به تحلیل قبلی و معادله (۱۷)، انتظار داریم که خروجی برابر با منفی انتگرال موج ورودی یعنی $v_{out} = 0.319 \cos 100t - 2.319$ V که در شکل ۴۲-۷ می‌بینیم باشد. مقدار اولیه 2 ولت در دو سر خازن با مقدار ثابتی ترکیب می‌شود که حاصل انتگرال‌گیری است و نتیجه‌اش مقدار متوسط غیرصفری در خروجی است.

۸-۷ خلاصه فصل و مرور

- جریان درون یک خازن $i = C\frac{dv}{dt}$ است.
- ولتاژ دو سر خازن با رابطه زیر به جریانش مرتبط است:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0)$$

- یک خازن برای جریان‌های dc به صورت مدار باز عمل می‌کند.
- ولتاژ دو سر یک القاگر با رابطه $v = L\frac{di}{dt}$ معین می‌گردد.
- جریان عبوری از القاگر با رابطه زیر به ولتاژش مربوط می‌شود:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

- یک القاگر در جریان‌های dc به صورت مدار اتصال کوتاه عمل می‌نماید.
- انرژی ذخیره‌شده فعلی در یک خازن برابر $\frac{1}{2}Cv^2$ است، درحالی‌که انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر $\frac{1}{2}Li^2$ می‌باشد. مرجع هر دوی آن‌ها به زمانی است که در آن‌ها انرژی نبوده است.
- ترکیبات سری و موازی القاگرها را می‌توان با روابطی مشابه مقاومت‌ها در هم ادغام کرد.
- ترکیبات سری و موازی خازن‌ها را می‌توان برعکس مقاومت‌ها تصور کرد.
- خازنی که در یک op amp معکوس‌گر به‌عنوان عنصر پسخورد به‌کار می‌رود ولتاژ خروجی متناسب با انتگرال ولتاژ ورودی را تولید می‌نماید. با تعویض مقاومت ورودی با خازن پسخورد، ولتاژ خروجی متناسب با مشتق ورودی خواهد بود.
- چون خازن‌ها و القاگرها عناصر خطی‌اند، KVL، KCL، تجمیع، قضایای تونن و نورتن و تحلیل‌های گرهی و مش به مدار آن‌ها قابل اعمال است.

- مفهوم دوگانگی تصویر دیگری در روابط بین مدارهای حاوی القاگر و خازن را به‌دست می‌دهد.
- PSpice اجازه می‌دهد تا ولتاژ اولیه‌ای در دو سر یک خازن یا جریان اولیه‌ای در یک القاگر ایجاد کنیم. تحلیل گذرا جزئیات پاسخ وابسته به زمان مدارهای حاوی انواع عناصر را تهیه می‌کند.

۹-۷ خواندنی‌های کمکی

A detailed guide to characteristics and selection of various capacitor and inductor types can be found in:

H. B. Drexler, *Passive Electronic Component Handbook,* 2nd ed., C. A. Harper, ed. New York: McGraw-Hill, 2003, pp. 69–203.

C. J. Kaiser, *The Inductor Handbook,* 2nd ed. Olathe, Kans.: C.J. Publishing, 1996.

Two books that describe capacitor-based op amp circuits are:

R. Mancini, (ed.). *Op Amps Are For Everyone,* 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

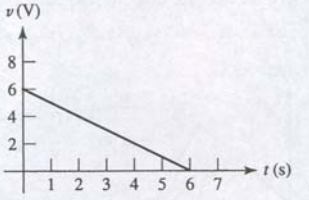
W. G. Jung, *Op Amp Cookbook,* 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997.

مسائل

۱-۷ خازن

۱. جریان درون خازن $10\,\mu F$ را در ازای ولتاژهای دو سر آن حساب کنید: (الف) 5 V، (ب) $\sqrt{2}\cos 120\pi t$ V و (ج) $115\,e^{-t}$ mV.

۲. جریان درون خازن $4.7\,\mu F$ را در پاسخ به موج شکل ۴۳-۷ رسم کنید. فرض کنید که جریان و ولتاژ طبق قرارداد علامت عناصر غیرفعال همخوانی دارد.



شکل ۴۳-۷

۳. جریان جاری درون خازن 1 mF را در پاسخ به v ولت در دو سر پایانه‌ها را حساب کنید، اگر v برابر باشد با: (الف) $30te^{-t}$ V و (ب) $4e^{-5t}\sin 100t$ V.

۴. حداکثر مقدار انرژی که در هر یک از خازن‌های الکترولیت شکل ۲-۷ (ب) و (ج) می‌توان ذخیره کرد چقدر است؟

۵. خازنی از دو قرص آلومینیومی نازک با قطر 1cm و فاصله $100\,\mu m$ از یکدیگر ساخته شده است. (الف) ظرفیت آن را حساب کنید با فرض این‌که فقط هوا بین صفحات وجود داشته باشد. (ب) ولتاژی را معین کنید که باید برای ذخیره 1mJ انرژی در خازن به کار ببریم. (ج) اگر بخواهیم خازن $2.5\,\mu J$ انرژی را در 100V ذخیره کند ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon/\varepsilon_0$ برای ناحیه بین صفحات را مشخص کنید.

۶. یک دیود پیوندی pn با ظرفیت پیوندی زیر تعریف شده است:

$$C_j = \frac{K_s\varepsilon_0 A}{W}$$

که برای سیلیکان $K_s = 11.8$ است، ε_0 ضریب گذردهی خلاء، A برابر سطح مقطع پیوند و W عرض ناحیه تهی پیوند است. W نه تنها به ساخت آن لکه به ولتاژ اعمال‌شده به دو پایانه نیز بستگی دارد:

$$W = \sqrt{\frac{2K_s\varepsilon_0}{qN}(V_{bi} - V_A)}$$

بنیرایـن دیـودها غـالباً در مدارهـای الکترونیک به‌عنوان خـازن‌های کنترل‌شده با ولتاژ به‌کار می‌روند. با این فرض که مقادیر پارامترها، $q = 1.6 \times 10^{-19}$C و $V_{bi} = 0.57$V، $N = 10^{18}$cm^{-3} باشند، ظرفیت خازن دیود با سطح مقطع $A = 1\mu m \times 1\mu m$ در ولتاژ 10V-، 5- و 1- V_A را به‌دست آورید.

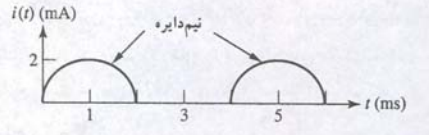
۷. خازنی طراحی کنید که ظرفیتش به‌صورت دستی با چرخش ولوم بین 10pF و 1nF تغییر کند. طرح خود را با برچسب‌های مناسب توضیح دهید.

۸. ولتاژ زیر به یک خازن $300\,\mu F$ وصل است:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 3e^{-t/5}\ \text{V} & t > 0 \end{cases}$$

(الف) انرژی ذخیره‌شده در خازن در $t = 2$ms چقدر است. (ب) در چه مدتی انرژی ذخیره‌شده در خازن به 37% مقدار حداکثرش افت می‌کند. (ج) جریان عبوری از خازن در $t = 1.2$s را معین نمایید. (د) توان انتقالی به وسیله خازن به مدار خاصی در $t = 2$s را حساب کنید.

۹. جرین درون خازن $47\,\mu F$ در شکل ۴۴-۷ دیده می‌شود. ولتاژ دو سر آن را در (الف) $t = 2$ms، (ب) $t = 4$ms و (ج) $t = 5$ms حساب کنید.

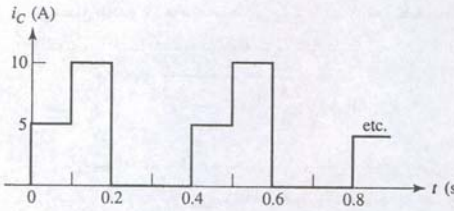


شکل ۷ـ۴۴

۱۰. جریان در یک خازن با رابطه $i(t) = 7 \sin \pi t$ mA داده شده است. اگر انرژی ذخیره‌شده در $t = 200ms$ برابر $3\mu J$ باشد، مقدار ظرفیت چقدر است؟

۱۱. (الف) اگر خازن شکل ۷ـ۱ دارای ظرفیت $0.2\mu F$ باشد، با $v_C = 5 + 3\cos^2 200t$ V مقدار $i_C(t)$ را به‌دست‌آورید. (ب) حداکثر انرژی ذخیره‌شده در خازن چیست؟ (ج) اگر در $t < 0$، $i_C = 0$ و در $t > 0$، برابر $i_C = 8e^{-100t}$mA باشد، برای $t > 0$ مقدار $v_C(t)$ را پیدا کنید. (د) اگر برای $t > 0$، $i_C = 8e^{-100t}$mA و $v_C(0) = 100V$ باشد، $v_C(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید.

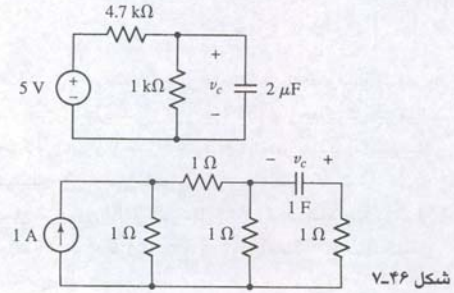
۱۲. شکل موج جریان برای $t > 0$ در شکل ۷ـ۴۵ به خازن 2mF اعمال شده است. با فرض $v_C(0) = 250V$ و فرض قرارداد علامت عناصر غیرفعال، در چه فاصله زمانی v_C بین 2000 و 2100V قرار می‌گیرد؟



شکل ۷ـ۴۵

۱۳. مقاومت R با خازن $1\mu F$ موازی است. برای هر $t \leq 0$ انرژی ذخیره‌شده در خازن برابر $20e^{-1000t}$mJ است. (الف) R را پیدا کنید. (ب) با انتگرال‌گیری، نشان دهید که انرژی تلف‌شده در فاصله $0 < t < \infty$ برابر 0.02J است.

۱۴. برای مدارهای شکل ۷ـ۴۶، (الف) ولتاژ دو سر هر خازن را محاسبه کنید. (ب) صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق نمایید.

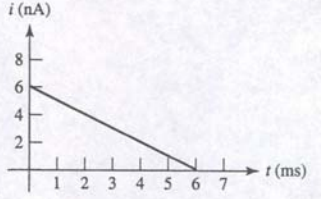


شکل ۷ـ۴۶

۷ـ۲ القاگر

۱۵. ولتاژ دو سر یک القاگر را حساب کنید، اگر جریان وارده به پایانه مرجع "+" برابر باشد با: (الف) 5 mA؛ (ب) $115\sqrt{2}\cos 120\pi t$ A و (ج) $4e^{-6t}$mA.

۱۶. ولتاژ ظاهرشده در دو سر القاگر 1 pH را در پاسخ به جریان شکل ۷ـ۴۷ رسم کنید. فرض کنید که تعریف جریان و ولتاژ با قرارداد قطعات غیرفعال همخوانی دارد.

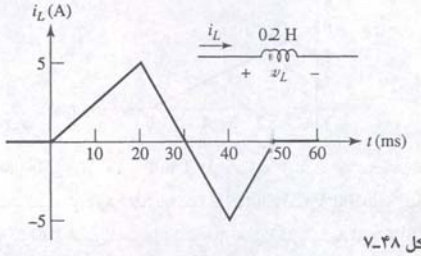


شکل ۷ـ۴۷

۱۷. ولتاژی را که در دو سر القاگر 5 μH در پاسخ به جریان پایانه مرجع "+" ایجاد می‌شود را محاسبه نمایید، اگر i برابر باشد با: (الف) $30te^{-t}$nA و (ب) $4e^{-5t}\sin 100t$ mA.

۱۸. حداکثر انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر 5 mH چقدر است اگر سیم برای حداکثر جریان 1.5 A در نظر گرفته شده باشد؟ جواب خود را تشریح کنید.

۱۹. با مراجعه به شکل ۷ـ۴۸: (الف) v_L را به‌عنوان تابعی از زمان بین $0 < t < 60ms$ رسم کنید. (ب) زمانی که در آن القاگر حداکثر توان را جذب کند، پیدا کنید. (ج) زمان تولید توان حداکثر را به‌دست‌آورید و (د) انرژی ذخیره‌شده در القاگر در $t = 40ms$ چقدر است.

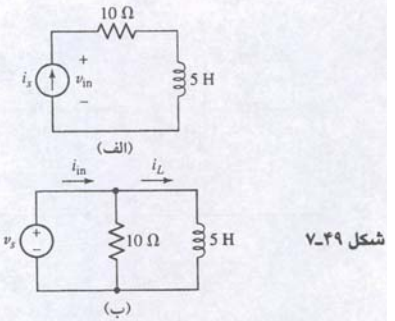


شکل ۷ـ۴۸

۲۰. در شکل ۷ـ۱۳، فرض کنید $L = 50$ mH باشد. با فرض $i_L = 0$ در $t < 0$، و $80te^{-100t}$mA در $t > 0$، حداکثر مقدار $|i_L|$ و $|v|$ و زمانی که این حداکثرها رخ می‌دهند را تعیین نمایید.

۲۱. (الف) اگر در مدار شکل ۷ـ۴۹ (الف) در $t > 0$، $i_s = 0.4t^2$ باشد، $v_{in}(t)$ را برای $t > 0$ در شکل ۷ـ۴۹ (ب) رسم کنید.

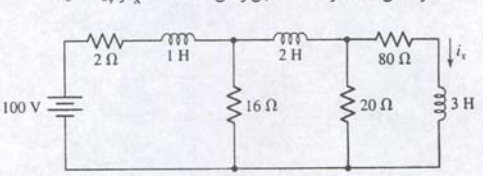
۲۲. ولتاژ $20\cos 1000t$ V به القاگر 25mH اعمال شده است. اگر در $t = 0$ جریان القاگر صفر باشد، در $0 < t < 2\pi ms$، (الف) توان جذب‌شده به وسیله القاگر را رسم کنید. (ب) انرژی ذخیره‌شده در آن را بیابید.



شکل ۷ـ۴۹

۲۳. ولتاژ v_L در دو سر القاگر 0.2H در $0 > t \leq 10ms$ برابر 100V است. در فاصله زمانی $10 < t < 20ms$ به‌طور خطی به صفر می‌رود، در $20 < t < 30ms$ برابر 0 و در $30 < t < 40ms$ برابر 100V و پس از آن صفر است. با فرض قرارداد علامت عنصر غیرفعال برای v_L و i_L (الف) i_L را در $t = 8ms$ به‌دست‌آورید، به‌شرطی‌که $i_L(0) = -2A$. (ب) انرژی ذخیره‌شده در $t = 22ms$ را معین کنید، به‌شرطی‌که $i_L(0) = 0$ فرض شود.

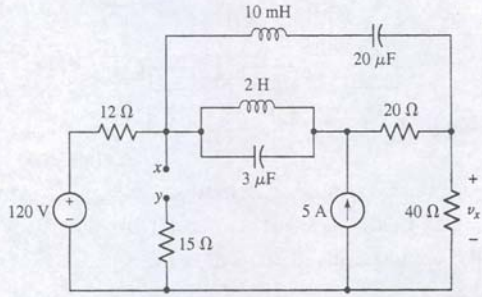
۲۴. مدار شکل ۷ـ۵۰ از مدت‌ها قبل وصل شده است، i_x را پیدا کنید.



شکل ۷ـ۵۰

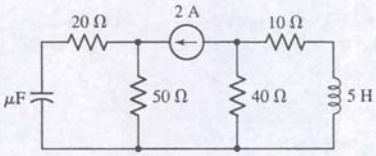
۲۵. ولتاژ دو سر یک القاگر 5H برابر $v_L = 10(e^{-t} - e^{-2t})$ است. اگر $i_L(0) = 80mA$ باشد و v_L و i_L طبق قرارداد عناصر غیرفعال تعریف شده باشند (الف) $v_L(1\ s)$، (ب) $i_L(1\ s)$ و (ج) $i_L(\infty)$ را به‌دست‌آورید.

۲۶. پس از مدت زمان طولانی از وصل مدار شکل ۷ـ۵۱، v_x را بیابید، به‌شرطی‌که (الف) خازن بین x و y باشد و (ب) یک القاگر بین x و y باشد.



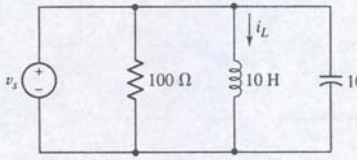
شکل ۷ـ۵۱

۲۷. با مراجعه به شکل ۷ـ۵۲ (الف) w_L، (ب) w_C، (ج) ولتاژ دو سر هر عنصر مدار و (د) جریان در هر عنصر را بیابید.



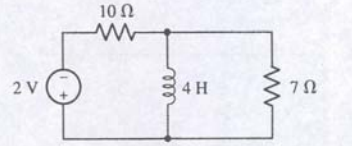
شکل ۷ـ۵۲

۲۸. اجازه بدهید $v_s = 400t^2$ V، $t > 0$ و $i_L(0) = 0.5A$ را در مدار شکل ۷ـ۵۳ داشته باشیم. در $t = 0.4s$، مقادیر انرژی (الف) ذخیره شده در خازن، (ب) ذخیره‌شده در القاگر و (ج) تلف‌شده در مقاومت را از $t = 0$ تا $t = 0.4s$ حساب کنید.



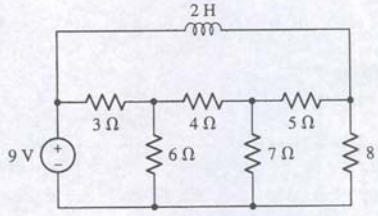
شکل ۷ـ۵۳

۲۹. برای مدار شکل ۷ـ۵۴، (الف) توان تلف‌شده با مقاومت‌های 7Ω و 10Ω را محاسبه کنید. صحت جواب را با PSpice تحقیق نمایید.



شکل ۷ـ۵۴

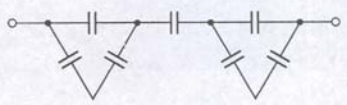
۳۰. (الف) معادل تونن شبکه متصل القاگر شکل ۷ـ۵۵ را به دست آورید. (ب) جریان داخل القاگر را به‌دست آورید. (ج) صحت جواب خود را با PSpice تحقیق نمایید. به نتایج خود نام مناسبی بدهید.



شکل ۷ـ۵۵

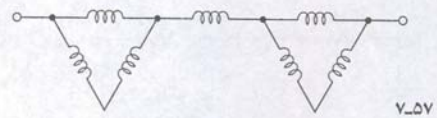
۷ـ۳ ترکیب القاگرها و خازن‌ها

۳۱. ظرفیت معادل شبکه شکل ۷ـ۵۶ را اگر همه خازن‌ها $10\mu F$ باشند، معین کنید.



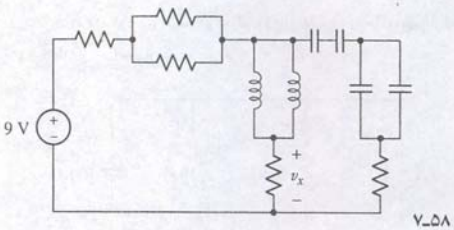
شکل ۷ـ۵۶

۳۲. القاء معادل شبکه شکل ۷.۵۷ را اگر همه القاگرها 77pH باشند، معین نمایید.



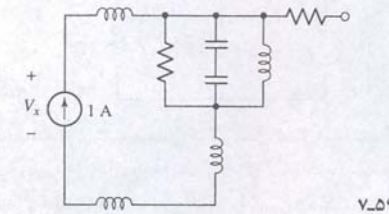
شکل ۷.۵۷

۳۳. برای مدار شکل ۷.۵۸، (الف) مدار را با استفاده از ترکیب سری/موازی تا حداقل اجزاکاهش دهید.



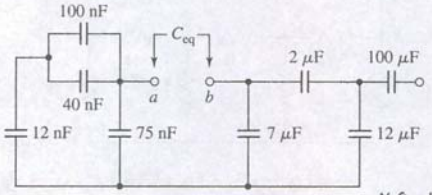
شکل ۷.۵۸

۳۴. برای مدار شکل ۷.۵۹، (الف) مدار را با حداقل استفاده از ترکیب سری/موازی تا حداقل اجزاکاهش دهید. (ب) اگر همه مقاومت‌ها 1Ω باشند، همه خازن‌ها 50μF و همه القاگرها 10nH باشند، v_x را تعیین نمایید.



شکل ۷.۵۹

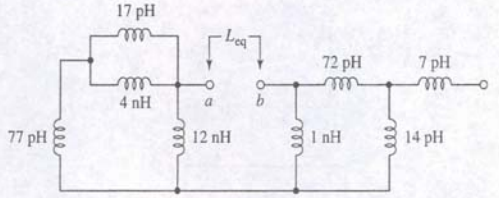
۳۵. شبکه شکل ۷.۶۰ را با نظاره از پایانه‌های a و b به یک خازن تقلیل دهید.



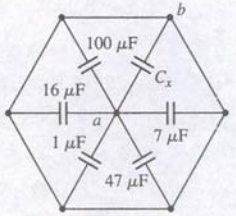
شکل ۷.۶۰

۳۶. با نظاره از پایانه‌های a و b در شکل ۷.۶۱، شبکه را به یک القاگر کاهش دهید.

۳۷. اگر شبکه شکل ۷.۶۲ در a و b به ولتاژ 2.5V وصل شود، انرژی ذخیره‌شده 534.8 μJ خواهد بود، مقدار C_x چقدر است؟

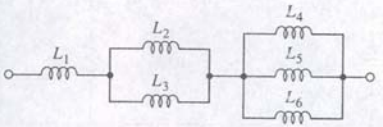


شکل ۷.۶۱



شکل ۷.۶۲

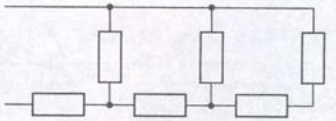
۳۸. شبکه شکل ۷.۶۳ از سه طبقه سری تشکیل شده است که هر کدام تعدادی القاگر موازی دارد. (الف) اگر همه القاگرها 1.5H باشند، القاگر معادل را پیدا کنید. (ب) عبارتی کلی برای شبکه از این نوع با N طبقه به‌دست‌آورید.



شکل ۷.۶۳

۳۹. برای شبکه شکل ۷.۶۳، $L_1 = 1H$، $L_2 = L_3 = 2H$، $L_4 = L_5 = L_6 = 3H$ است. (الف) القاگر معادل را بیابید. (ب) عبارتی برای این نوع شبکه با N طبقه به‌دست‌آورید، با این فرض که طبقه N از N القاگر و هر القاگر دارای القاکنایی N است.

۴۰. اگر در شکل ۷.۶۴ هر عنصر یک خازن 2pF باشد، باگسترش تبدیل Δ-Y آن را ساده کنید.

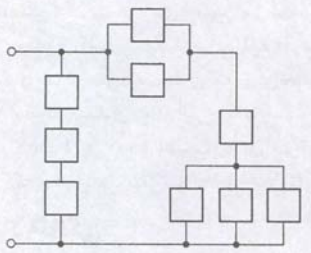


شکل ۷.۶۴

۴۱. از بسط مفهوم تبدیل Δ-Y شبکه شکل ۷.۶۴ را ساده کنید. هر عنصر یک القاگر 1nH است.

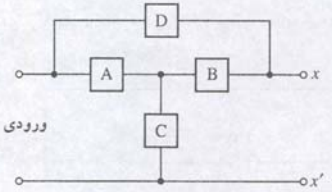
۴۲. با جعبه‌ای پر از القاگرهای 1μH بگویید با حداقل اجزا چگونه می‌توان القاگر معادل (الف) 2.25μH، (ب) 750nH و (ج) 450nH داشت.

۴۳. با توجه به شکل ۷.۶۵، (الف) اگر هر عنصر یک مقاومت 10Ω باشد، R_{eq} را به‌دست‌آورید. (ب) اگر هر عنصر یک القاگر 10H باشد، L_{eq} را تعیین کنید و (ج) اگر هر عنصر یک خازن 10F باشد C_{eq} چقدر است؟



شکل ۷.۶۵

۴۴. در شکل ۷.۶۶، اجازه بدهید تا A، B، C و D (الف) به ترتیب القاگرهایی با 1H، 2H، 3H و 4H باشند، القاکنایی ورودی را با x - x′ باز و سپس اتصال کوتاه پیدا کنید. (ب) به ترتیب خازن‌های 1F، 2F، 3F و 4F باشند و آن‌گاه ظرفیت ورودی را با x - x′ باز و سپس بسته به‌دست‌آورید.

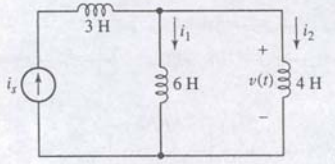


شکل ۷.۶۶

۴۵. با جعبه‌ای پر از خازن‌های 1nF و استفاده از حداقل خازن‌ها، نشان دهید چگونه می‌توان ظرفیت معادل (الف) 2.25nF، (ب) 0.75nF و (ج) 0.45nF را به‌دست‌آورد.

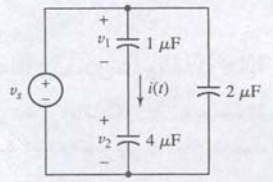
۷.۴ نتایج خطی‌بودن

۴۶. در مدار شکل ۷.۶۷، اگر $i_s = 60e^{-200t}$ mA و $i_1(0) = 20mA$ باشد، (الف) $v(t)$ را در ازای همه مقادیر t بیابید. (ب) $i_1(t)$ را برای $t \geq 0$ به‌دست‌آورید. (ج) $i_2(t)$ را برای $t \geq 0$ معین کنید.



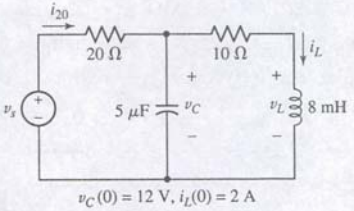
شکل ۷.۶۷

۴۷. اگر در مدار شکل ۷.۶۸، $v_s = 100e^{-80t}$ V و $v_1(0) = 20V$ باشد. (الف) $i(t)$ را برای همه مقادیر t به‌دست‌آورید. (ب) $v_1(t)$ را در $t \geq 0$ پیدا کنید و (ج) $v_2(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



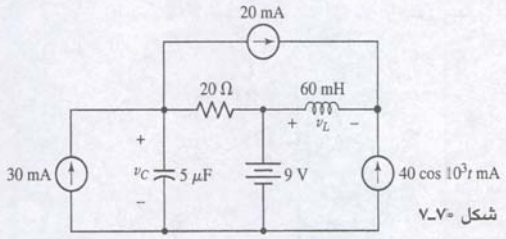
شکل ۷.۶۸

۴۸. (الف) معادلات گرهی را برای شکل ۷.۶۹ بنویسید. (ب) معادلات مش را برای آن بنویسید.



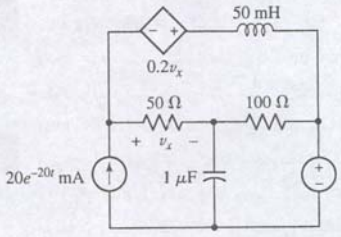
شکل ۷.۶۹

۴۹. اگر فرض شود که همه منابع در شکل ۷.۷۰ برای مدت مدیدی وصل و کار کرده باشند، از اصل تجمیع برای یافتن $v_C(t)$، $v_L(t)$ استفاده کنید.



شکل ۷.۷۰

۵۰. برای مدار شکل ۷.۷۱، فرض کنید در $t = 0$ هیچ انرژی ذخیره نشده است. مجموعه معادلات گرهی را بنویسید.



شکل ۷.۷۱

۷.۵ مدارهای op amp ساده با خازن

۵۱. جای مقاومت R و C را در مدار شکل ۷.۳۰ تعویض کرده و فرض کنید $R_i = \infty$ و $A = \infty$ است. (الف) $v_0(t)$ را به صورت تابعی از $v_s(t)$ رسم کنید. (ب) معادله‌ای به‌دست‌آورید که $v_0(t)$ و $v_s(t)$ را به هم مربوط سازد. به‌شرطی‌که A بی‌نهایت نباشد.

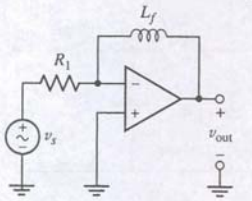
۵۲. کشت‌دهنده یونی دستگاهی است که برای تزریق اتم‌های یونیزه در سیلیکان به‌کارمی‌رود، تا مشخصه‌های الکتریکی ساخت دیودها و ترانزیستورها را اصلاح نماید. یون‌هایی که به سیلیکان برخورد می‌کنند، به جریانی تبدیل می‌شوند و نهایتاً به مقاومت معلومی هدایت می‌گردند. جریان مستقیماً با شدت یون (یعنی تعداد برخورد یون‌ها در ثانیه $(i = 1.602 \times 10^{-19})$ متناسب است. اگر برای تشخیص جریان از مقاومت 1.000MΩ استفاده شده باشد، مداری طراحی کنید که

خروجی‌اش مستقیماً متناسب با کل یون‌های برخوردی با سیلیکان باشد (به آن dose می‌گویند).

۵۳. در مدار شکل ۷.۳۰، $R = 0.5M\Omega$ ، $C = 2\mu F$ ، $R_i = \infty$ و $R_0 = 0$ می‌باشد. فرض کنید که می‌خواهیم خروجی $v_{out} = \cos 10t - 1$ V باشد. $v_s(t)$ را به‌دست‌آورید. (الف) اگر $A = 2000$ و (ب) A بی‌نهایت باشد.

۵۴. یک سنسور سرعت به یک چرخ دوّار وصل است. مداری طراحی کنید که ولتاژ مثبتی تولید کند که اندازه‌اش با شتاب چرخ متناسب باشد (دور بر دقیقه بر دقیقه). فرض کنید خروجی سنسور سرعت $1 \frac{mV}{rpm}$ و چرخ در کمتر از 3500rpm دور می‌زند.

۵۵. (الف) در مدار شکل ۷.۷۲، مقاومت و القاگر را عوض می‌کنیم. عبارتی برای v_{out} برحسب v_s به‌دست‌آورید. (ب) بگویید چرا چنین مداری در عمل به کار نمی‌رود.



شکل ۷.۷۲

۵۶. یک نورسنج که به یک دوربین وصل است یک خروجی را متناسب با سرعت نور تهیه می‌کند به طوری که 1 mV = 1 mcd است. مداری طراحی کنید که یک خروجی ولتاژ متناسب با انتگرال (مجموع) شدت نور باشد به طوری که 1 mV = 1 mcd شود.

۵۷. یک فرآیند شیشه‌گری لازم می‌دارد که میزان خنک‌کنندگی از 100°C/min تجاوز نکند. ولتاژی متناسب با دمای شبیه مذاب موجود است به طوری که در محدوده 500 الی 2000°C داریم 1 mV = 1°C. مداری طراحی کنید که ولتاژ خروجی‌اش نمایش‌دهنده سرعت خنک‌شدن باشد به طوری که 1 V = 100°C/min.

۵۸. یک سنسور شناور در یک تانک سوخت برای اندازه‌گیری سوخت باقیمانده نصب شده است. سنسور طوری کالیبره شده است که 1 volt = 10 liters می‌باشد. مداری طراحی کنید که ولتاژ خروجی‌اش مصرف سوخت را به لیتر بر ثانیه فراهم کند به نحوی که 1 V = 1 l/s.

۵۹. قرار است یک باتری برای انرژی که می‌تواند به یک بار مقاومتی 1Ω حمل کند، مورد تست قرار گیرد. دو سیگنال در اختیار است: یکی سیگنال ولتاژ برای مربع ولتاژ باتری ($1 mV = 1 V^2$) و یک سیگنال ولتاژ برای نشان‌دادن مربع جریان خروجی باتری ($1 mV = 1 A^2$). مداری طراحی کنید که در آن ولتاژ خروجی متناسب با کل انرژی حمله شده باشد به طوری که 1 mV = 1 J انرژی تحویل‌شده به بار باشد.

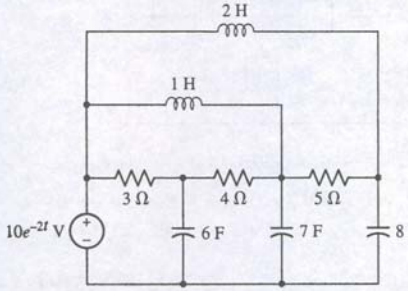
۶۰. مهندسین تست یک هواپیمای آزمایشی می‌خواهند شتاب منفی را در هنگام فرودآمدن اندازه بگیرند، زیرا آن‌ها در مورد سیستم تعلیق چرخ‌ها در ضمن فرود و میزان فشار بر آن تحقیق می‌کنند. اگر آن‌ها برای شما سیگنال ولتاژ از چرخ‌دنده‌ها را تهیه کنند به طوری که 1 mV = 1 mph باشد، مداری طراحی کنید که خروجی‌اش متناسب با شتاب منفی ($1 V = 1 km/s^2$) باشد.

۷.۶ دوگانگی

۶۱. (الف) دوگان دقیق مدار شکل ۷.۶۹ را بکشید. متغیرهای دوگان و مقادیر اولیه دوگان را مشخص نمایید. (ب) معادلات گرهی را برای مدار دوگان بنویسید. (ج) معادلات مش را برای مدار دوگان بنویسید.

۶۲. دوگان دقیق مدار شکل ۷.۵۱ را رسم کنید. مدار را به فرم مرتب و تمیز با گونیا برای مدار دوگان رسم نمایید.

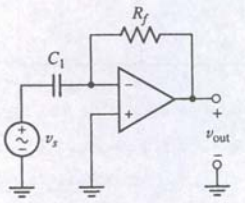
۶۳. دوگان دقیق در مدار شکل ۷.۷۳ را ترسیم نمایید. سعی کنید منظم باشد.



شکل ۷.۷۳

۶۴. (الف) دوگان دقیق مدار تمرین ۴۷ را رسم نمایید و در آن متغیرها را نشان دهید. (ب) دوگان مسئله را برای تمرین ۴۷ بنویسید. (ج) تمرین ۴۷ جدید را حل کنید.

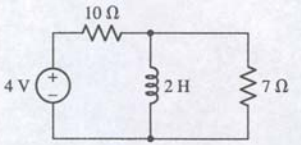
۶۵. دوگان مدار ۷.۷۴ را ترسیم کنید و عبارتی برای v_{out} برحسب v_s به‌دست‌آورید (راهنمایی: برای op amp از مدل مشروح استفاده کنید).



شکل ۷.۷۴

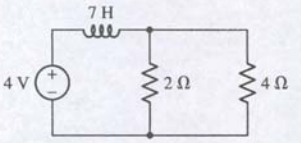
۷.۷ مدل‌سازی خازن‌ها و القاگرها با PSpice

۶۶. انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۷.۷۵ را محاسبه کنید. نتیجه خود را با PSpice چک کنید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب نمایید.



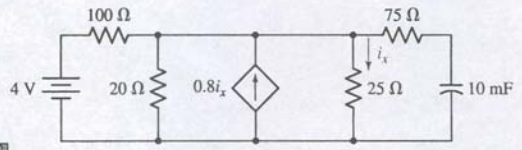
شکل ۷.۷۵

۶۷. انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۷.۷۶ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice مقایسه نمایید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



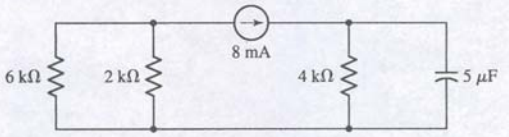
شکل ۷.۷۶

۶۸. انرژی ذخیره‌شده در خازن شکل ۷.۷۷ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice چک نمایید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



شکل ۷.۷۷

۶۹. انرژی ذخیره‌شده در خازن شکل ۷.۷۸ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice چک نمایید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



شکل ۷.۷۸

۷۰. برای op amp تفاضلی شکل ۷.۳۱، $C_1 = 5$ nF و $R_f = 100$ MΩ را اختیار کنید. (الف) اگر $v_s = 3 \sin 10t$ V باشد، خروجی را پیش‌بینی کنید. (ب) حل خود را با PSpice چک کنید. نام مناسبی برای حل انتخاب نمایید.

۷۱. با استفاده از PSpice نشان دهید که انرژی ذخیره‌شده در یک خازن $33\mu F$ در $t = 10^{-2}$s وقتی به منبع ولتاژ $v(t) = 5 \cos 75t$ V وصل است $221\mu J$ می‌باشد (راهنمایی: از قطعه VSIN استفاده کنید).

۷۲. با PSpice نشان دهید که انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر 100pH در $t = 0.01$s وقتی که منبع جریان $i(t) = 5 \cos 75t$ A باشد برابر 669pJ است (راهنمایی: از قطعه ISIN استفاده نمایید).

۷۳. برای مدار شکل ۷.۷۲، R_1 و L_f را طوری انتخاب کنید که خروجی دو برابر مشتق ولتاژ ورودی باشد که ولتاژ ورودی هم $v_s = A \cos 2M10^3 t$ V است. صحت طراحی را با PSpice مشخص کنید.

۷۴. مسئله ۷.۷۱ را با $v(t) = 5 \cos 75t - 7$ V تکرار کنید.

۷۵. مسئله ۷.۷۲ را با $i(t) = 5 \cos 75t - 7$ تکرار کنید.