باید توجه داشت که مؤلفه مقاومتی امپدانس لزوماً برابر مقاومت موجود در شبکه نیست. مثلاً یک مقاومت 10 Ω سری با یک القاگر 5 H در $\omega = 4$ rad/s دارای امپدانس معادل $Z = 10 + j20\ \Omega$ و یا در مختصات قطبی $22.4\ \angle 63.4°\ \Omega$ است. اما در این حالت، مؤلفه مقاومتی امپدانس با مقاومت برابر است زیرا شبکه یک شبکه سری ساده می‌باشد. با این وجود اگر این دو عنصر موازی با هم قرار گیرند، امپدانس معادل (10+j20) / (10(j20 یا 8 + j4 Ω 8 است. مؤلفه مقاومتی امپدانس اکنون 8 Ω است.

مثال ۶ـ۱۰

جریان $i(t)$ را در شکل ۱۹ـ۱۰ (الف) پیدا کنید.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

می‌خواهیم جریان حالت ماندگار سینوسی جاری در مقاومت 1.5 kΩ ناشی از منبع ولتاژ 3000 rad/s را به دست آوریم.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

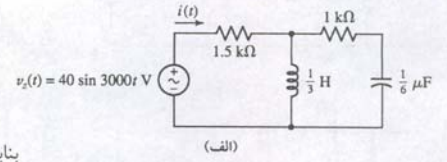
کار را با ترسیم مدار در حوزه فرکانس آغاز می‌کنیم. منبع به حوزه فرکانس انتقال یافته و با $40\ \angle -90°$ V نشان داده شده است. پاسخ حوزه فرکانس با I نمایش داده شده و امپدانس‌های القاگر و خازن در 3000 rad/s محاسبه شده‌اند و به‌ترتیب برابرند با jkΩ و -j2kΩ. مدار متناظر حوزه فرکانسی نیز در شکل ۱۹ـ۱۰(ب) دیده می‌شود.

- **ارائه طرح.**

ما شکل ۱۹ـ۱۰ (ب) را تحلیل خواهیم کرد تا I به دست آید؛ ترکیب امپدانس‌ها و استفاده از قانون اهم یک راه ممکن است. سپس این واقعیت را به کار می‌بریم که می‌دانیم $\omega = 300$ rad/s است و لذا از آن برای تبدیل I به عبارتی در حوزه زمان استفاده خواهیم کرد.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

$$Z_{eq} = 1.5 + \frac{(j)(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j}$$
$$= 1.5 + \frac{2+j}{1-j}\frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j3}{2}$$
$$= 2 + j1.5 = 2.5\angle 36.87°\ \text{k}\Omega$$



(الف)

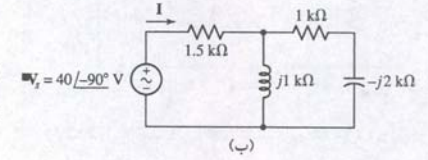
بنابراین جریان فیزوری به صورت زیر است:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{eq}}$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

با جایگزینی مقادیر معلوم، می‌بینیم که

$$\mathbf{I} = \frac{40\angle -90°}{2.5\angle 36.87°}\ \text{mA}$$



(ب)

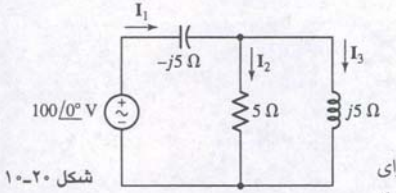
شکل ۱۹ـ۱۰ (الف) یک مدار RLC که پاسخ واداشته سینوسی آن مجهول است. (ب) معادل حوزهٔ فرکانس همان مدار در $\omega = 3000$ rad/s.

همراه با $\omega = 3000$ rad/s برای یافتن حل $i(t)$ کافی است.

- **اقدام به حل.**

این مقدار مختلط به راحتی قابل تبدیل به یک عدد مختلط در فرم قطبی است:

$$\mathbf{I} = \frac{40}{2.5}\angle -90° - 36.87°\ \text{mA} \quad = 16.00\angle -126.9°\ \text{mA}$$



شکل ۲۰ـ۱۰

با انتقال جریان به حوزه زمان، پاسخ مطلوب به دست می‌آید:

$$i(t) = 16 \cos (3000t - 126.9°)\ \text{mA}$$

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟**

امپدانس مؤثر متصل به منبع دارای زاویه $+36.87°$ است. و به این معنی است که دارای خاصیت القایی می‌باشد و بنابراین جریان نسبت به ولتاژ تأخیر دارد. چون منبع ولتاژ دارای زاویه فاز $-90°$ است، پس پاسخ معتبر است.

تمرین

۱۰ـ۱۰ در مدار حوزه فرکانس شکل ۲۰ـ۱۰، (الف) $\mathbf{I}_1$، (ب) $\mathbf{I}_2$ و (ج) $\mathbf{I}_3$ را پیدا کنید.

جواب: $28.3\ \angle 45°$ A، $20\ \angle 90°$ A و $20\ \angle 0°$ A

قبل از شروع به نوشتن تعداد قابل توجهی معادله در حوزه زمان یا در حوزه فرکانس، باید از نوشتن معادلاتی که بخشی از آن در حوزه زمان و بخشی دیگر در حوزه فرکانس است، اجتناب کنیم. سرنخی که نشان دهد اشتباهی از این نوع صورت گرفته است، وجود هر دو نوع عدد مختلط و t در معادله است، مگر این‌که عامل $e^{j\omega t}$ هم در آن باشد، چون عامل $e^{j\omega t}$ در کاربرد اهمیت ندارد می‌توان گفت دانشجویانی که معادله‌ای حاوی j و t و یا ∠ و t را می‌نویسند، هیولایی خلق می‌کنند که بدون آن اوضاع برای خودشان و دیگران بهتر خواهد بود. مثلاً در چند معادله قبل دیدیم:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{eq}} = \frac{40\angle -90°}{2.5\angle 36.9°} = 16\angle -126.9°\ \text{mA}$$

لطفاً چیزی به شکل زیر خلق نکنید:

$$i(t) = \frac{40 \sin 3000t}{2.5\angle 36.9°} \quad \text{یا} \quad i(t) = \frac{40 \sin 3000t}{2 + j1.5}$$

۱۰ـ۷ ادمیتانس

گاهی درمی‌یابیم که عکس امپدانس کمیتی مناسب‌تر است. با این طرز تفکر، **ادمیتانس** Y یک عنصر مدار به صورت نسبت فیزور جریان به فیزور ولتاژ تعریف می‌گردد.

$$Y = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

و بنابراین

$$Y = \frac{1}{Z}$$

بخش حقیقی ادمیتانس، **هدایت یا رسانایی** G و بخش موهومی آن **سوسپتانس** B نامیده می‌شود.

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \qquad (۲۲)$$

معادله (۲۲) باید به‌دقت موشکافی شود. این رابطه نمی‌گوید که بخش حقیقی ادمیتانس با عکس قسمت حقیقی امپدانس برابر است و یا این که بخش موهومی ادمیتانس همان معکوس بخش موهومی امپدانس است!

ادمیتانس، رسانایی (کانداکتانس)، سوسپتانس همگی به زیمنس اندازه‌گیری می‌شوند. یک امپدانس

$$Z = 1 - j2\ \Omega$$

که می‌توان آن را از یک مقاومت 1 Ω سری با خازن 0.1 μF در فرکانس $\omega = 5$ Mrad/s تصور کرد، ادمیتانسی برابر زیر دارد:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2}\frac{1 + j2}{1 + j2} = 0.2 + j0.4\ \text{S}$$

ادمیتانس معادل شبکه‌ای متشکل از چند شاخه موازی برابر است با حاصل‌جمع ادمیتانس‌های هر شاخه. پس مقدار عدد ادمیتانس فوق را می‌توان از جمع رسانایی‌ها به‌دست آورد. رسانایی می‌تواند یک مقاومت 5 Ω و سوسپتانس یک خازن 0.08 μF در فرکانس $\omega = 5$ Mrad/s باشد، زیرا ادمیتانس یک خازن $j\omega C$ است.

بگذارید برای امتحان تحلیل، امپدانس شبکه اخیر یعنی مقاومت 5 Ω موازی با خازن 0.08 μF را در $\omega = 5$ Mrad/s بیابیم. امپدانس معادل برابر است با:

$$Z = \frac{5(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2\ \Omega$$

که مثل قبل است. این دو شبکه تنها دو نمونه از بینهایت شبکه مختلفی هستند که در این فرکانس چنین امپدانس و ادمیتانسی دارند. با این وجود، این دو شبکه تنها شبکه دو عنصری دارای این خاصیت هستند و لذا می‌توان آن‌ها را ساده‌ترین شبکه‌ای دانست که دارای امپدانس 1 - j2 Ω و ادمیتانس 0.2 + j0.4 S در فرکانس $\omega = 5 \times 10^6$ rad/s می‌باشند.

کلمه **ایمیتانس**، به ترکیبی از امپدانس و ادمیتانس گفته می‌شود. گاهی هم برای بیان نام کلی امپدانس یا ادمیتانس از آن استفاده می‌گردد. برای مثال اگر ولتاژ فیزوری دو سر یک ایمیتانس معلوم باشد، می‌توان جریان عبوری از آن ایمیتانس را حساب کرد.

تمرین

۱۰ـ۱۱ ادمیتانس (در مختصات قائم)، (الف) یک امپدانس $Z = 1000 + j400\ \Omega$ (ب) یک شبکه متشکل از ترکیب موازی یک مقاومت 800 Ω، القاگر 1 mH و خازن 2 nF را به شرطی که $\omega = 1$ Mrad/s باشد، (ج) شبکه‌ای متشکل از ترکیبات سری مقاومت 800 Ω، یک القاگر 1 mH و یک خازن 2 nF را اگر $\omega = 1$ Mrad/s باشد، به دست آورید.

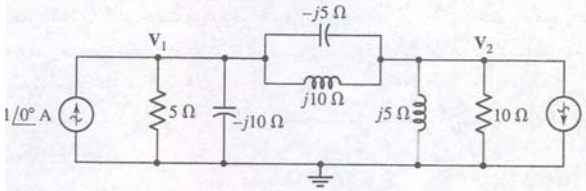
جواب: 0.899 - j0.562 mS؛ 1.25 + j1 mS؛ 0.862 - j0.345 mS.

۱۰ـ۸ تحلیل گرهی و مش

قبلاً با تکنیک گرهی و مش به اهداف بسیاری نایل شدیم و منطقی است که بپرسیم آیا روال مشابهی برای جملات فیزوری و امپدانس‌ها در حالت ماندگار سینوسی معتبر است. دیدیم که قوانین کیرشهف برای فیزورها معتبر بود، همچنین قانونی شبیه به اهم برای عناصر غیرفعال به صورت $V = ZI$ داشتیم. به بیان دیگر قوانینی که تحلیل گرهی بر آن‌ها متکی است برای فیزورها معتبرند، اگر پیش‌تر برویم، می‌توان گفت برای حالت ماندگار سینوسی می‌توان از تکنیک گرهی استفاده کرد. با بحثی مشابه روش‌های تحلیل مش یا همان تک‌حلقه و گرهی هم معتبرند.

مثال ۷ـ۱۰

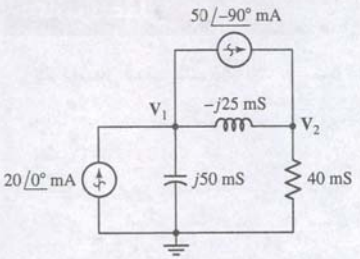
ولتاژ گره $v_1(t)$ و $v_2(t)$ حوزه زمان را در شکل ۲۱ـ۱۰ بیابید.



شکل ۲۱ـ۱۰ یک مدار در حوزهٔ فرکانس با دو ولتاژ گره‌ای V_1 و V_2.

دو منبع جریان به صورت فیزور داده شده و ولتاژهای فیزوری گرهی V_1 و V_2 مشخص شده‌اند. در سمت چپ گره KCL را اعمال می‌کنیم.

$$\frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-j10} + \frac{V_1 - V_2}{-j5} + \frac{V_1 - V_2}{j10} = 1\ \angle 0° = 1 + j0$$



شکل ۲۲ـ۱۰

و برای گره سمت راست

$$\frac{V_2 - V_1}{-j5} + \frac{V_2 - V_1}{j10} + \frac{V_2}{j5} + \frac{V_2}{10} = -(0.5\angle -90°) = j0.5$$

با ترکیب جملات داریم:

$$(0.2 + j0.2)V_1 - j0.1V_2 = 1$$

و

$$-j0.1V_1 + (0.1 - j0.1)V_2 = j0.5$$

این معادلات به راحتی، حتی با یک ماشین حساب حل می‌شوند و از آن نتیجه می‌شود $V_1 = 1 - j2$ V و $V_2 = -2 + j4$ V.

حل حوزه زمان با نوشتن V_1 و V_2 در مختصات قطبی حاصل می‌شود.

$$V_1 = 2.24\angle -63.4° \qquad V_2 = 4.47\angle 116.6°$$

و با انتقال به حوزه زمان داریم:

$$v_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4°)\ \text{V} \quad \text{و} \quad v_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 16.6°)\ \text{V}$$

توجه کنید که در محاسبه مقادیر امپدانس روی نمودار مدار باید ω معلوم باشد. همچنین هر دو منبع باید فرکانسی مساوی داشته باشند.

تمرین

۱۰ـ۱۲ با کمک تحلیل گرهی روی مدار شکل ۲۲ـ۱۰، V_1 و V_2 را بیابید.

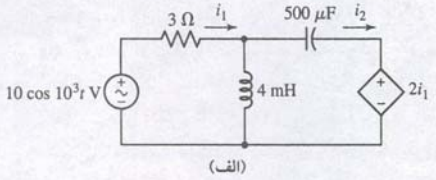
جواب: $1.062\ \angle 23.3°$ V و $1.593\ \angle -50.0°$ V.

اکنون بیایید به مثالی از تحلیل حلقه بپردازیم، ضمن این‌که به خاطر داریم که همه منابع در فرکانسی برابر کار می‌کنند. در غیر این صورت تعریف هر رآکتانسی در مدار ناممکن خواهد بود. در بخش بعد خواهیم دید تنها راه برخورد با این موارد استفاده از مدار تجمیع است.

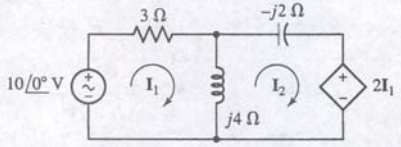
مثال ۸ـ۱۰

عباراتی برای جریان‌های حوزه زمان i_1 و i_2 در شکل ۲۳ـ۱۰ (الف) بیابید.

در منبع سمت چپ داریم $\omega = 10^3$ rad/s و بنابراین مدار حوزه فرکانس شکل ۲۳ـ۱۰(الف) را ترسیم می‌کنیم. جریان مش‌ها را هم I_1 و I_2 نام می‌گذاریم. حول مش 1:



(الف)



(ب)

شکل ۲۳ـ۱۰ (الف) یک مدار حوزهٔ زمان با یک منبع وابسته. (ب) مدار حوزهٔ فرکانس متناظر با مدار شکل ۲۳ـ۱۰ (الف).

$$3I_1 + j4(I_1 - I_2) = 10\ \angle 0°$$

یا

$$(3 + j4)\ I_1 - j4I_2 = 10$$

در حلقه 2

$$j4(I_2 - I_1) - j2I_2 + 2I_1 = 0$$

یا

$$(2 - j4)I_1 + j2I_2 = 0$$

و با حل آن‌ها

$$I_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24\angle 29.7°\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77\angle 56.3°\ \text{A}$$

بنابراین

$$i_1(t) = 1.24 \cos(10^3 t + 29.7°)\ \text{A}$$

$$i_2(t) = 2.77 \cos(10^3 t + 56.3°)\ \text{A}$$

کاربرد عملی

فرکانس قطع یک تقویت‌کننده ترانزیستوری

مدارهای تقویت کننده ترانزیستوری، بخش مهم وسایل الکترونیک مدرن را تشکیل می‌دهند. یکی از کاربردهای رایج، تلفن‌های همراه (شکل ۲۵ـ۱۰) است، که در آن سیگنال‌های صوتی روی امواج حامل فرکانس بالا سوار می‌شوند متأسفانه ترانزیستورها دارای خاصیت خازنی درونی هستند که موجب محدود شدن فرکانس کاری آن‌ها می‌شود و هنگام انتخاب آن‌ها برای کاربردهای خاص، باید مدّنظر باشد.

شکل ۲۵ـ۱۰ آمپلی‌فایرهای ترانزیستور در دستگاه‌های زیادی به کار می‌روند، از جمله تلفن‌های همراه. مدل‌های خطی برای تحلیل کارایی آن‌ها به عنوان تابعی از فرکانس به کار می‌روند.

شکل ۲۶ـ۱۰ (الف) آن‌چه را که مدل هیبرید π فرکانس بالا نام دارد، برای یک ترانزیستور دوقطبی پیوندی نشان می‌دهد. در عمل هر چند ترانزیستورها قطعاتی غیرخطی‌اند، ولی این مدار خطی ساده کار نسبتاً دقیقی از مدل‌سازی رفتار قطعه ارائه می‌کند. دو خازن C_π و C_μ برای نمایش ظرفیت داخلی ترانزیستور مورد استفاده به کار رفته‌اند. در صورت نیاز می‌توان خازن‌ها و مقاومت‌های دیگری را برای دقیق‌تر شدن مدل به آن اضافه کرد. شکل ۲۶ـ۱۰ (ب) مدل ترانزیستوری راکه در یک تقویت کننده با نام امیتر مشترک وارد شده است نشان می‌دهد.

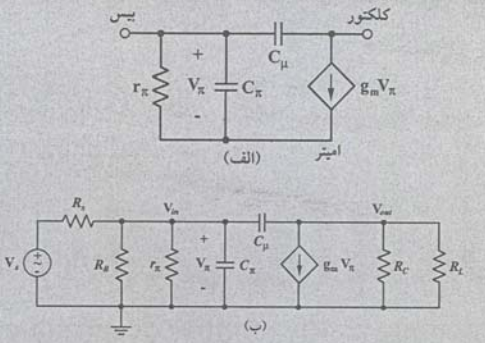
با فرض این که سیگنال حالت ماندگار سینوسی، با معادل تونن V_s و R_s نشان داده شده باشد، مایلیم نسبت V_{out} به V_{in} را بدانیم. وجود ظرفیت‌های درونی متعلق به ترانزیستور موجب کاهش تقویت در ازای افزایش فرکانس در V_s می‌گردد و نهایتاً عملکرد صحیح مدار را در فرکانس‌هایی محدود خواهد کرد. معادله‌گره را در خروجی می‌نویسیم.

$$g_{in}\, V_\pi = \frac{V_{out} - V_{in}}{(1/f\omega C_\mu)} + \frac{V_{out}}{(R_C \,||\, R_L)}$$

با حل V_{out} برحسب V_{in} و با توجه به $V_\pi = V_{in}$ عبارتی برای بهره تقویت کننده به دست می‌آید.

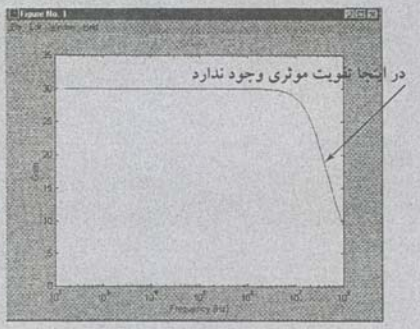
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-g_m\,(R_C \,||\, R_L)\,(1/j\omega C_\mu) + (R_C \,||\, R_L)}{(R_C \,||\, R_L) + (1\,/\,j\omega C_\mu)}$$

$$= \frac{-g_m\,(R_C \,||\, R_L) + j\omega\,(R_C \,||\, R_L)\,C_\mu}{1 + j\omega\,(R_C \,||\, R_L) + C_\mu}$$



شکل ۲۶ـ۱۰ (الف) مدل هیبرید π فرکانس بالا برای ترانزیستور. (ب) مدار تقویت‌کنندهٔ امیتر مشترک با مدل هیبرید π.

با فرض مقادیر نمونه‌ای چون $R_C = R_L = 2k\Omega$، $g_m = 30ms$ و خازن $C_\mu = 5$ PF می‌توان اندازه بهره را به صورت تابعی از فرکانس ($\omega = 2\pi f$) رسم کرد. نمودار نیمه لگاریتمی در شکل ۲۷ـ۱۰ (الف) و برنامه متلب به کار رفته در تولید شکل، در شکل ۲۷ـ۱۰ (ب) ملاحظه می‌شود. جالب است ولی تعجب‌آور نیست که ببینیم بهره تقویت کننده به فرکانس وابسته است. درواقع می‌توان تصور کرد که استفاده از چنین مداری می‌تواند فرکانس‌هایی راکه ما توجهی به آن‌ها نداریم، حذف کند. با این وجود، حداقل می‌بینیم که بهره برای فرکانس‌های نسبتاً پایین از فرکانس منبع ورودی مستقل است. هنگامی که مشخصه تقویت کننده را بیان می‌کنیم مرسوم است تا به فرکانسی که در آن بهره به $1/\sqrt{2}$ برابر حداکثرش کاهش می‌یابد، اشاره نماییم. در شکل ۲۷ـ۱۰ (الف) می‌بینیم که حداکثر میزان بهره برابر 30 است که در فرکانس 30 MHz به $30/\sqrt{2} = 21$ تقلیل یافته است. معمولاً به این فرکانس، فرکانس **قطع** یا **گوشه** تقویت کننده می‌گویند. اگر کار در فرکانس‌های بالاتر موردنظر باشد، یا ظرفیت درونی باید کاهش یابد (ترانزیستورهای متفاوتی باید به کار رود) و یا مدار به طریقی دیگر باید طراحی شود. در این جا باید توجه کرد که تعریف بهره وابسته به V_{in}، تصویر کاملی از رفتار وابستگی به فرکانس را برای تقویت کننده ارائه نمی‌کند. این مطالب با ملاحظه ظرفیت C_π کاملاً واضح است: با $\omega \to \infty$، V_{out} برحسب V_s است که در آن هر دو خازن در عبارت ظاهر می‌گردد. البته کمی عملیات جبری بیشتر لازم است.



(الف)

```
EDU» frequency = logspace(3,9,100);
EDU» numerator = -30e-3*1000 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU» denominator = 1 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU» for k = 1:100
gain(k) = abs(numerator(k)/denominator(k));
end
EDU» semilogx(frequency/2/pi,gain);
EDU» xlabel('Frequency (Hz)');
EDU» ylabel('Gain');
EDU» axis([100 1e8 0 35]);
```

(ب)

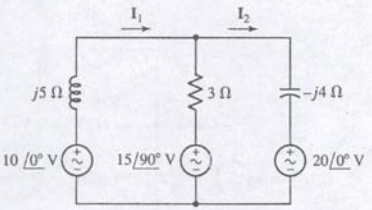
شکل ۲۷ـ۱۰ (الف) بهرهٔ تقویت‌کنندهٔ برحسب فرکانس، و (ب) برنامه متلب به‌کاررفته برای ایجاد نمودار.

$V_{in} \to 0$ پس $Z_{C\pi} \to 0$. این اثر خودش را در معادله‌ای که به دست آوردیم نشان نمی‌دهد. روش دقیق‌تر یافتن معادله‌ای برای

تمرین

۱۳ـ۱۰ با تحلیل مش روی مدار شکل ۲۴ـ۱۰، I_1 و I_2 را بیابید.

جواب: A $\angle$ -164° ، 4.87 و A $\angle$ -144.9° ، 7.17.



شکل ۲۴ـ۱۰

۹ـ۱۰ تجمیع، تبدیل منبع و قضیه تونن

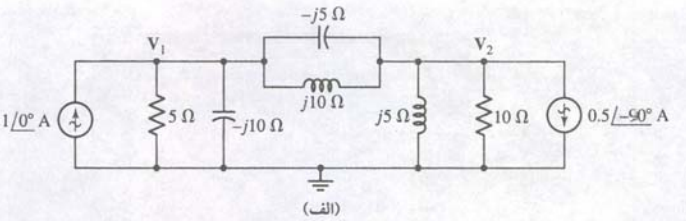
پس از معرفی القاگرها و خازن‌ها در فصل ۷، دیدیم که مدارهای حاوی آن‌ها همچنان خطی‌اند و مزایای این خطی بودن دوباره به کار گرفته شدند. از آن جمله اصل تجمیع، قضایای تونن و نورتن و تبدیل منابع بودند. می‌دانیم که این روش‌ها در مدارهایی که اکنون ملاحظه می‌کنیم به کار خواهند رفت. ما می‌خواهیم منابع سینوسی را به کار گرفته و روش‌های فوق را روی آن‌ها پیاده کنیم و یافتن تنها پاسخ واداشته چندان اهمیتی ندارد. این‌که بخواهیم مدار را برحسب فیزورها تحلیل کنیم، نیز بی‌اهمیت است. همچنین به یاد خواهیم سپرد که خطی بودن و تجمیع هنگام ترکیب منابع حقیقی و موهومی برای تهیه یک منبع مختلط به کار خواهد رفت.

مثال ۹ـ۱۰

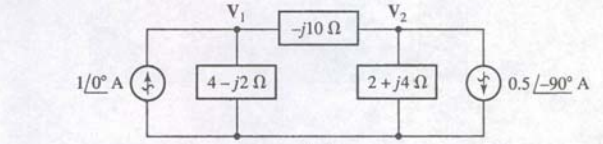
با تجمیع، V_1 را برای مدار شکل ۲۱ـ۱۰ به دست آورید، به خاطر سادگی این شکل در شکل ۲۸ـ۱۰ (الف) تکرار شده است.

ابتدا مدار را به شکل ۲۸ـ۱۰(ب) درمی‌آوریم که در آن هر جفت امپدانس موازی با یک امپدانس معادل جایگزین شده است. یعنی $-j10\ \Omega$ || 5 برابر با $4 - j2\ \Omega$؛ $-j5\ \Omega$ || $j10$ برابر $-j10\ \Omega$ و $j5$ || 10 برابر است با $2 + j4\ \Omega$. برای یافتن V_1، ابتدا منبع سمت چپ را فعال نگه می‌داریم و پاسخ جزئی V_{1L} را در قبال آن به دست می‌آوریم. منبع $1\angle 0°$ با امپدانس زیر موازی است:

$$(4 - j2) \,||\, (-j10 + 2 + j4)$$



(الف)



(ب)

شکل ۲۸ـ۱۰ (الف) مدار شکل ۲۱ـ۱۰ که در آن $\mathbf{V}_1$ خواسته شده است. (ب) $\mathbf{V}_1$ را می‌توان با استفاده از تجمیع پاسخ‌های فیزوری مجزا به‌دست آورد.

پس

$$\mathbf{V}_{1L} = 1\angle 0^\circ \frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4}$$

$$= \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2 \text{ V}$$

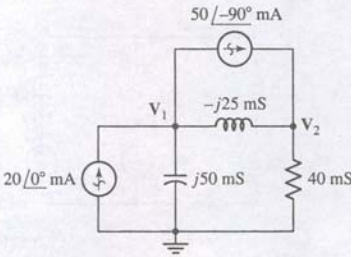
اگر فقط منبع سمت راست فعال باشد، با تقسیم جریان و قانون اهم داریم:

$$\mathbf{V}_{1R} = (-0.5\angle -90^\circ)\left(\frac{2 + j4}{4 - j2 - j10 + 2 + j4}\right)(4 - j2) = -1 \text{ V}$$

از جمع آن‌ها داریم:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1L} + \mathbf{V}_{1R} = 2 - j2 - 1 = 1 - j2 \text{ V}$$

که با نتیجهٔ قبلی ما در مثال ۷ـ۱۰ وفاق دارد.



شکل ۲۹ـ۱۰

بعداً خواهیم دید که تجمیع، هنگام برخورد با مدارهایی که با فرکانس یکسانی کار نمی‌کنند، به شدت مفید است.

تمرین

۱۴ـ۱۰ با فرض این‌که از تجمیع برای تحلیل مدار شکل ۲۹ـ۱۰ استفاده کرده باشیم، مطلوب است $\mathbf{V}_1$ اگر (الف) فقط با منبع $20\angle 0^\circ$ mA کار کند، (ب) فقط با منبع $50\angle -90^\circ$ mA کار کند.

جواب: $0.780 + j0.976$ V، $0.1951 - j0.556$ V

مثال ۱۰ـ۱۰

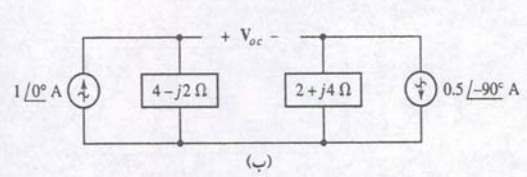
از دید امپدانس $-j10\ \Omega$ در شکل ۳۰ـ۱۰ (الف) معادل تونن را معین کرده از آن برای محاسبهٔ $\mathbf{V}_1$ استفاده کنید.

ولتاژ مدار باز تعریف شده در شکل ۳۰ـ۱۰ (ب) چنین است.

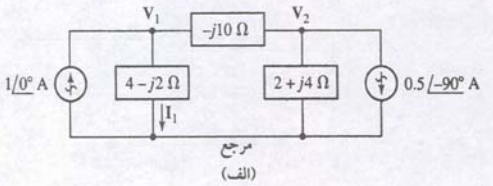
$$\mathbf{V}_{oc} = (1\angle 0^\circ)(4 - j2) - (-0.5\angle -90^\circ)(2 + j4)$$

$$= 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3 \text{ V}$$

امپدانس مدار غیرفعال شکل ۳۰ـ۱۰(ج) از دید پایانه‌های بار درواقع مجموع دو امپدانس باقیمانده است، یعنی $Z_{th} = 6 + j2\ \Omega$.



(ب)



(الف)

بنابراین وقتی مدار را به صورت شکل ۳۰ـ۱۰(د) می‌بندیم، جریان از گره 1 به گره 2 از طریق بار $-j10\ \Omega$ برابر است با

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3 \text{ A}$$

اکنون جریان جاری شده در امپدانس $-j10\ \Omega$ در شکل ۳۰ـ۱۰(الف) را می‌دانیم. **توجه کنید که نمی‌توانیم با مدار شکل ۳۰ـ۱۰(د)، مقدار $\mathbf{V}_1$ را محاسبه کنیم. زیرا گره مرجعی وجود ندارد.** با بازگشت به مدار اصلی و تفریق جریان $0.6 + j0.3$ از منبع جریان سمت چپ، جریان جاری شده از شاخه $(4 - j2)\ \Omega$ برابر است با:

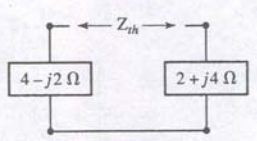
$$\mathbf{I}_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3 \text{ A}$$

و بنابراین

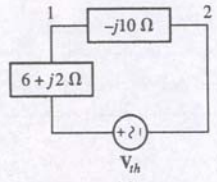
$$\mathbf{V}_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \text{ V}$$

که مثل قبل است.

ممکن است از قضیه نورتن روی سه عنصر سمت راست شکل ۳۰ـ۱۰ (الف) استفاده کنیم، با این فرض که به $\mathbf{V}_1$ علاقمندیم. می‌توان به دفعات تبدیل منبع را برای ساده‌سازی مدار به کار برد. بنابراین همه کارهای میان بُروشگردهای فصل ۴ و ۵ در حوزه فرکانس به کار خواهند رفت. مختصر پیچیدگی اضافی موجود به دلیل استفاده از اعداد مختلط است و نه از ملاحظات تئوریک مربوط به آن.



(ج)



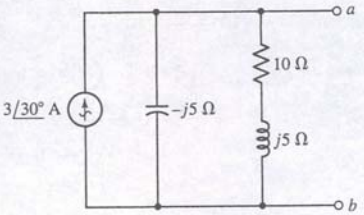
(د)

شکل ۳۰ـ۱۰ (الف) مدار شکل ۲۸ـ۱۰ (ب). معادل تونن از دید امپدانس $-j10\Omega$ خواسته شده است. (ب) تعریف $\mathbf{V}_{oc}$. (ج) تعریف Z_{th}. (د) رسم مجدد شکل به کمک معادل تونن.

تمرین

۱۵ـ۱۰ برای مدار شکل ۳۱ـ۱۰ (الف)، ولتاژ مدار باز $\mathbf{V}_{ab}$، (ب) جریان روبه‌پایین از a به b در صورت اتصال کوتاه، (ج) امپدانس معادل تونن Z_{ab} موازی با منبع جریان را بیابید.

جواب: $16.77\angle -33.4^\circ$ V، $2.60 + j1.500$ A، $2.5 - j5\ \Omega$



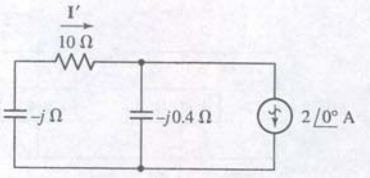
شکل ۳۱ـ۱۰

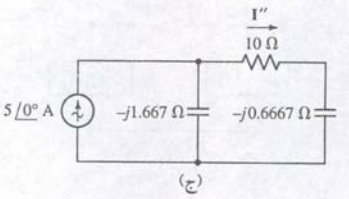
یک اظهار نظر دیگر باقی مانده است. تا این‌جا خودمان را به مدارهای تک منبع یا چند منبعی که فرکانس مشترکی دارند، محدود کردیم. این محدودیت به این علت لازم است که بتوانیم مقادیر امپدانس را برای عناصر القایی و خازنی محاسبه کنیم. با این وجود، مفهوم تحلیل فیزوری به‌راحتی قابل اعمال به مدارهای چندمنبعی با فرکانس‌های مختلف است. در این موارد از تجمیع برای تعیین ولتاژها و جریان‌های ناشی از هر منبع استفاده کرده و نتایج را در حوزه زمان با هم جمع می‌کنیم. اگر چندین منبع به طور همزمان کار کنند، اصل تجمیع اجازه می‌دهد تا منابع را در یک زمان بررسی کنیم و پاسخ نتیجه را با دیگر پاسخ‌ها در فرکانس مختلف جمع کنیم.

مثال ۱۱ـ۱۰

توان تلف شده به وسیلهٔ مقاومت $10\ \Omega$ را در مدار شکل ۳۲ـ۱۰(الف) معین کنید.

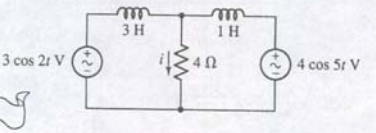
با نگاهی به مدار، ترغیب می‌شویم که سریعاً دو معادله گرهی را بنویسیم و یا با دو تبدیل منبع بلافاصله به دنبال یافتن ولتاژ در دو سر مقاومت $10\ \Omega$ باشیم.





شکل ۳۲ـ۱۰ (الف) مداری که منابع آن فرکانس‌های متفاوتی دارند. (ب) مدار با کشته‌شدن منبع چپ. (ج) مدار با کشته‌شدن منبع راست.

در مطالعات بعدی در مورد پردازش سیگنال با روش دانشمندی فرانسوی به‌نام فوریه آشنا می‌شویم که تکنیکی است برای تقریباً هر تابع متناوب و طی آن تابع با ترکیبی از توابع سینوسی نشان داده می‌شود. هنگام کار با مدارهای خطی وقتی پاسخ مداری خاصی را به تابع تحریک سینوسی بدانیم، می‌توان به راحتی پاسخ مدار به هر موج اختیاری که به وسیله تابع سری فوریه نشان داده شود را با تجمیع به‌دست‌آورد.

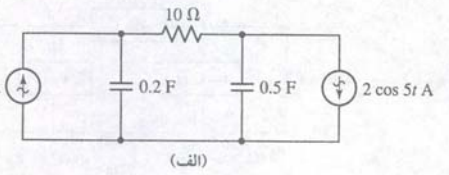


شکل ۳۳ـ۱۰

تحلیل کامپیوتری

در PSpice چندین انتخاب برای تحلیل مدارها در حالت ماندگار سینوسی وجود دارد. شاید سرراست‌ترین روال، روش استفاده از ساخت دو منبع طراحی شده خاص، یعنی VAC و IAC باشد. اندازه و فاز هر منبع با دوبار کلیک روی آن انتخاب می‌گردد.

اجازه بدهید تا مدار شکل ۱۹ـ۱۰ (الف)، که در شکل ۳۴ـ۱۰ رسم شده است را شبیه‌سازی کنیم.



متأسفانه این کار امکان‌پذیر نیست، زیرا دو منبع در فرکانس‌های مختلف کار می‌کنند. در این موارد راهی برای محاسبهٔ امپدانس یک خازن یا القاگر در مدار وجود ندارد زیرا نمی‌دانیم کدام ω را به کار ببریم؟

تنها راه خروج از این مخمصه استفاده از تجمیع و جمع‌آوری همه منابع هم فرکانس در یک زیرمدار طبق شکل ۳۲ـ۱۰(ب) و (ج) است. در زیر مدار شکل ۳۲ـ۱۰(ب) با روش تقسیم جریان، سریعاً جریان $\mathbf{I}'$ را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{I}' = 2\angle 0^\circ \left[\frac{-j0.4}{10 - j - j0.4}\right] = 79.23\angle -82.03^\circ \text{ mA}$$

به این ترتیب

$$i' = 79.23 \cos (5t - 82.03^\circ) \text{ mA}$$

به همین طریق

$$\mathbf{I}'' = 5\angle 0^\circ \left[\frac{-j1.667}{10 - j0.6667 - j1.667}\right] = 811.7\angle -76.86^\circ \text{ mA}$$

و به طور مشابه

$$i'' = 811.7 \cos (3t - 76.86^\circ) \text{ mA}$$

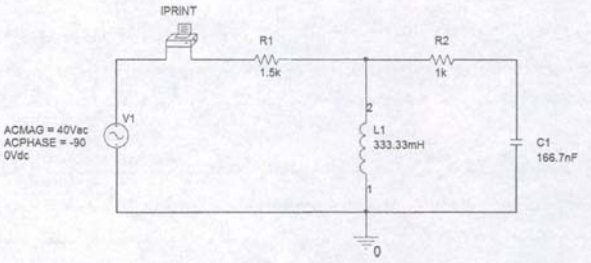
در این جا باید توجه داشت که سعی در جمع جریان‌های فیزوری $\mathbf{I}'$ و $\mathbf{I}''$ در شکل ۳۲ـ۱۰(ب) و (ج) اهمیت ندارد. قدم بعدی جمع دو جریان در حوزه زمان، مربع کردن نتیجه و ضرب آن در 10 است تا توان تلف شده در مقاومت 10 Ω شکل ۳۲ـ۱۰(الف) به دست آید.

$$p_{10} = (i' + i'')^2 \times 10$$
$$= 10[79.23 \cos (5t - 82.03^\circ) + 811.7 \cos (3t - 76.86^\circ)]^2 \text{ mW}$$

تمرین

۱۶ـ۱۰ جریان i جاری شده در مقاومت 4 Ω شکل ۳۳ـ۱۰ را پیدا کنید.

جواب: $i = 175.6 \cos (2t - 20.55^\circ) + 547.1 \cos (5t - 43.16^\circ)$ mA

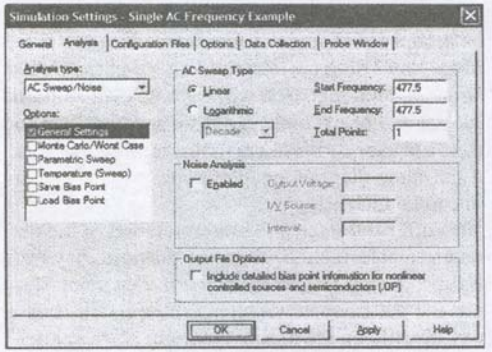


شکل ۳۴ـ۱۰ مدار ساده سینوسی که در $\omega = 3000$ rad/s کار می‌کند و در آن جریان داخل مقاومت 1.5 kΩ است.

فرکانس منبع از طریق Property Editor انتخاب نمی‌گردد، بلکه از طریق مد تحلیل ACSweep صورت می‌پذیرد.

فرکانس منبع با تنظیم Total Points با 1 و Start Freq و End Freq در مقادیر مناسب، انتخاب می‌گردد. چون منبع در 3000 rad/s کار می‌کند، هر دو پارامتر را با (2π) / 3000 = 477.5 Hz مقداردهی می‌کنیم.

توجه کنید که در مدار یک قطعه اضافی ظاهر شده است. این قطعه IPRINT نامگذاری شده است و اجازه می‌دهد تا انواع پارامترهای جریان چاپ شود. در این شبیه‌سازی ما به خصیصه‌های AC، MAG و PHASE علاقمندیم. برای این‌که PSpice این کمیت‌ها را چاپ کند، هر یک از خصیصه‌های موردنظر را در شکل ۳۵ـ۱۰ با yes تنظیم کنید.



شکل ۳۵ـ۱۰ کادر محاوره برای انتخاب فرکانس.

نتایج شبیه‌سازی با انتخاب Examine Output زیر File در پنجره PSpice AD به دست می‌آید. در انتهای فایل اطلاعات زیر ظاهر می‌گردد.

FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
4.775E + 02	1.600E - 02	-1.269E + 02

بنابراین اندازه جریان 16 mA، زاویه فاز -126.9° است و به این ترتیب جریان داخل مقاومت 1.5 kΩ برابر زیر است.

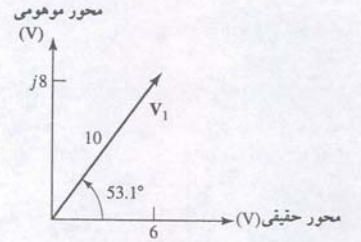
$$i = 16 \cos (3000t - 126.9^\circ) \text{ mA}$$
$$= 16 \sin (3000t - 36.9^\circ) \text{ mA}$$

۱۰ـ۱۰ نمودارهای فیزوری

نمودار فیزوری نامی است که به یک ترسیم در صفحه مختلط اطلاق می‌گردد تا رابطه بین

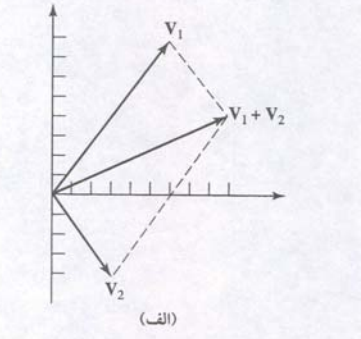
ولتاژ‌های فیزوری و جریان‌های فیزوری یک مدار خاص را نشان دهد. این نمودار روشی گرافیکی برای حل مسائل معینی است که ممکن است برای تست روش‌های تحلیلی به‌کار رفته باشد. در فصل بعد با نمودارهای مشابهی مواجه خواهیم شد که روابط توان مختلط در حالت ماندگار سینوسی را به نمایش می‌گذارند.

قبلاً با صفحه مختلط، هنگام مطالعه با اعداد مختلط و جمع و تفریق‌شان آشنا شدیم. چون ولتاژ‌ها و جریان‌های فیزوری اعداد مختلط‌اند، می‌توان آن‌ها را به‌عنوان نقطه‌ای در صفحه مختلط در نظر گرفت. مثلاً فیزور ولتاژ $V_1 = 6 + j8 = 10\ \angle 53.1°\ V$ در صفحه مختلط شکل ۳۶-۱۰ نشان داده شده است. محور x محور ولتاژ حقیقی است و محور y، محور موهومی است. ولتاژ V_1 با پیکانی که از مبدأ کشیده می‌شود، مستقر می‌گردد. چون اجزای نمایش روی صفحه مختلط برای جمع و تفریق بخصوص ساده است، فیزورها به‌راحتی روی نمودار فیزوری جمع و تفریق می‌شوند. ضرب و تقسیم از جمع و تفریق زوایا و تغییر دامنه به دست می‌آیند. شکل ۳۷-۱۰(الف) جمع V_1 و فیزور دیگر $V_2 = 3 - j4 = 5\ \angle -53.1°\ V$ و شکل ۳۷-۱۰(ب) جریان I_1 که حاصل‌ضرب V_1 و ادمیتانس $Y = 1 + j1\ S$ است را نشان می‌دهد.

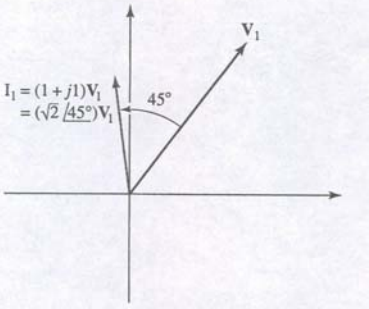


شکل ۳۶-۱۰ یک نمودار ساده فیزوری ولتاژ $V_1 = 6 + j8 = 10\angle 53.1°\ V$ را نشان می‌دهد.

آخرین نمودار فیزوری هر دو فیزور جریان و ولتاژ را روی یک صفحه مختلط نمایش می‌دهد. به نظر می‌رسد که هر کدام مقیاس خاص خود را دارند ولی مقیاس زاویه مشترک است. مثلاً فیزور ولتاژ یک سانتیمتری ممکن است 100 V را نشان دهد، ولی فیزور جریان با طول یک سانتیمتر برابر 3 mA جریان است. با ترسیم هر دو فیزور روی یک نمودار به راحتی می‌توان تشخیص داد که کدام فیزور پیشفاز و یا پسفاز می‌باشد.



(الف)

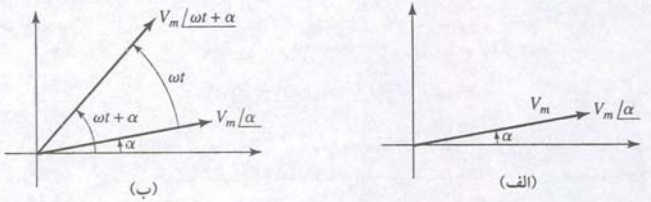


(ب)

شکل ۳۷-۱۰ (الف) نمودار فیزوری که جمع $V_1 = 6+j8V$ و $V_2 = 3-j4V$ را نشان می‌دهد، یعنی:

$$V_1 + V_2 = 9 + j4V = 9.85\ \angle 24.0°\ V$$

(ب) نمودار فیزوری، V_1 و I_1 را نشان می‌دهد که $I_1 = YV_1$ و $Y = 1 + js = \sqrt{2}\ \angle 45°\ s$ است. مقیاس دامنه‌های جریان و ولتاژ متفاوت است.



(ب)

(الف)

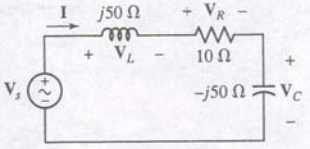
شکل ۳۸-۱۰ (الف) فیزور ولتاژ $V_m\ \angle \alpha$. (ب) ولتاژ مختلط $V_m\ \angle \omega t + \alpha$ به صورت فیزور در لحظه معینی از زمان نشان داده شده است. این فیزور از $V_m\ \angle \alpha$ به اندازه ωt رادیان جلو است.

فاز 90° به خوبی روی نمودار دیده می‌شود. مجموع این سه ولتاژ برابر با ولتاژ منبع در این مدار است. ما در فصل بعد تحت شرایط تشدید خواهیم دید که اگر $Z_C = -Z_L$ باشد، ولتاژ منبع و ولتاژ مقاومت با یکدیگر برابرند. ولتاژ کل دو سر مقاومت و القاگر، یا مقاومت و خازن در نمودار از جمع فیزورهای مناسب طبق شکل حاصل می‌گردد.

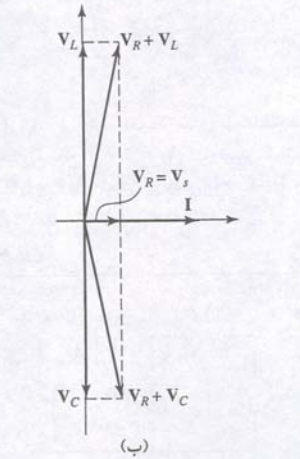
شکل ۴۰-۱۰(الف) یک مدار ساده موازی است و منطقی است که ولتاژ بین دو گره را به‌عنوان فیزور مرجع اختیار نماییم. فرض کنید $V = 1\ \angle 0°\ V$ باشد. جریان مقاومت $I_R = 0.2\ \angle 0°\ A$ هم‌فاز با این ولتاژ می‌باشد، ولی جریان خازن $I_C = j0.1\ A$ از ولتاژ مرجع به اندازه 90° پیش است. پس از تبدیل این دو جریان به نمودار فیزور، شکل ۴۰-۱۰(ب)، می‌توان آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد تا جریان منبع به دست آید. نتیجه این کار $I_s = 0.2 + j0.1\ A$ است.

اگر منبع جریان به‌صورت مقدار اولیه $1\ \angle 0°$ داده شده باشد و ولتاژ گره در آغاز معلوم نباشد، بهتر است باز هم نمودار فیزوری را با فرض ولتاژ گره (مثلاً $V = 1\ \angle 0°\ V$) بسازیم و آن را به‌عنوان فیزور ولتاژ به کار ببریم. نمودار را چون گذشته تکمیل می‌کنیم و منبع جریان که به دلیل ولتاژ گره فرضی جاری می‌گردد، $0.2 + j0.1\ A$ خواهد بود. با این وجود، جریان منبع واقعی $1\ \angle 0°\ A$ است و ولتاژ گره واقعی با ضرب ولتاژ گره مفروضی در $1\ \angle 0° / (0.2 + j0.1)$ به دست می‌آید. بنابراین ولتاژ گره واقعی برابر $\sqrt{20}\ \angle -26.8°\ V = 4 - j2\ V$ است. ولتاژ مفروض نموداری می‌دهد که با نمودار واقعی مدار فرق می‌کند، باید مقیاس این نمودار در $1/\sqrt{20}$ ضرب شود و نمودار حاصل به اندازه 26.6° در جهت عکس ساعت‌گرد بچرخد تا نمودار واقعی به دست آید.

نمودارهای فیزوری معمولاً به سادگی ساخته می‌شوند و در بسیاری از تحلیل‌های حالت ماندگار سینوسی، اگر این نمودارها لحاظ شوند، مفهوم‌ترند. مثال‌های دیگری از کاربرد نمودارهای فیزوری در ادامه مطالعاتمان ملاحظه خواهد شد.

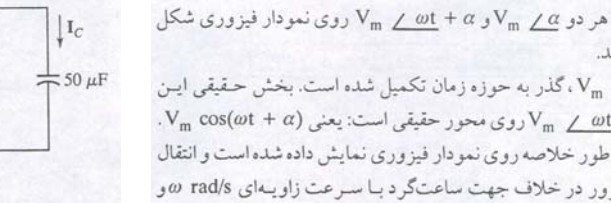


(الف)

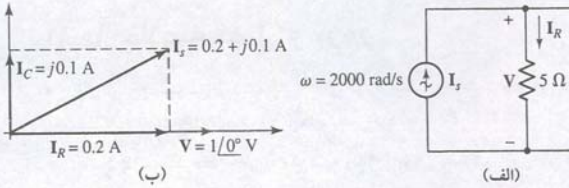


(ب)

شکل ۳۹-۱۰ (الف) یک مدار RLC سری. (ب) نمودار فیزوری برای این مدار، جریان I به‌عنوان فیزور مرجع به‌کاررفته است.



(الف)



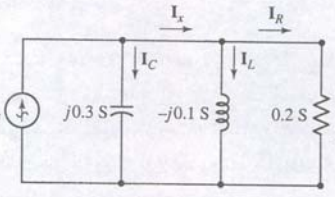
(ب)

شکل ۴۰-۱۰ (الف) یک مدار RC موازی. (ب) نمودار فیزوری برای این مدار. ولتاژ گره V به‌عنوان یک فیزور مرجع.

مثال ۱۲-۱۰

برای مدار شکل ۴۱-۱۰، نمودار فیزوری I_R، I_L و I_C را ترسیم کنید. با ترکیب این جریان‌ها، زاویه پیشفاز I_s را نسبت به I_R، I_C و I_x مشخص نمایید.

با انتخاب فیزور مرجع آغاز می‌کنیم. با بررسی مدار و متغیرهای موردنظری که باید معین شوند، می‌بینیم که اگر V معلوم باشد، I_R، I_L و I_C با به‌کارگیری قانون اهم محاسبه می‌شوند.



شکل ۴۱-۱۰ مدار ساده‌ای که در آن چند جریان مجهول است.

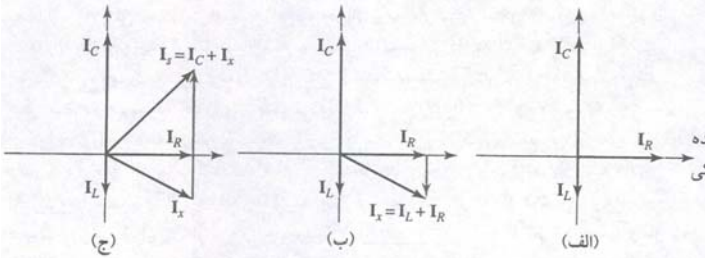
بنابراین $\mathbf{V} = 1 \angle 0°$ V را به خاطر سادگی برمی‌گزینیم و متعاقباً روابط زیر را محاسبه می‌نماییم.

$$\mathbf{I}_R = (0.2)1\angle 0° = 0.2\angle 0° \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_L = (-j0.1)1\angle 0° = 0.1\angle -90° \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_C = (j0.3)1\angle 0° = 0.3\angle 90° \text{ A}$$

نمودار فیزوری مربوطه در شکل ۴۲-۱۰(الف) دیده می‌شود. همچنین لازم است فیزور جریان‌های $\mathbf{I}_s$ و $\mathbf{I}_x$ را بیابیم. شکل ۴۲-۱۰(ب) تعیین

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R = 0.2 - j0.1 = 0.224 \angle -26.6° \text{ A}$$

و شکل ۴۲-۱۰(ج) تعیین $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_x = 0.283 \angle 45° \text{ A}$ را نشان می‌دهد. از شکل ۴۲-۱۰(ج) می‌بینیم که $\mathbf{I}_s$ از $\mathbf{I}_R$ به اندازه 45° از $\mathbf{I}_C$ به اندازه 45°- و $\mathbf{I}_x$ به اندازه $71.6° = 26.6° + 45°$ پیش است. این زوایا فقط نسبی‌اند و مقدار عددی آن‌ها به $\mathbf{I}_s$ وابسته است. مقدار واقعی V نیز به آن وابسته می‌باشد.

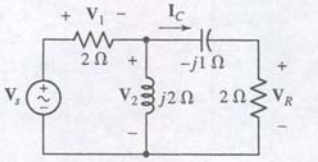


شکل ۴۲-۱۰ (الف) نمودار فیزوری ساخته‌شده با مقدار مرجع $\mathbf{V} = 1 \angle 0°$ V. (ب) تعیین گرافیکی $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R$. (ج) تعیین گرافیکی $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_x$.

تمرین

۱۰-۱۷ مقدار مرجع مناسبی برای $\mathbf{I}_C$ در مدار شکل ۴۳-۱۰ انتخاب کنید. نمودار فیزوری بکشید که $\mathbf{V}_s$، $\mathbf{V}_1$، $\mathbf{V}_2$، $\mathbf{V}_R$ و $\mathbf{V}_s$ را نشان دهد و نسبت طول‌های (الف) $\mathbf{V}_s$ به $\mathbf{V}_1$ (ب) $\mathbf{V}_1$ به $\mathbf{V}_2$ (ج) $\mathbf{V}_s$ به $\mathbf{V}_R$ را به دست آورید.

جواب: 1.90 ؛ 1.00 ؛ 2.12



شکل ۴۳-۱۰

۱۱-۱۰ خلاصه فصل و مرور

- اگر دو موج سینوسی (یا کسینوسی) دارای اندازه مثبت و فرکانس یکسانی باشند، می‌توان موج پیشفاز یا پسفاز را با مقایسه زاویه آن‌ها مشخص کرد.
- پاسخ واداشته یک مدار خطی به یک منبع ولتاژ یا جریان سینوسی را می‌توان همواره به صورت یک تابع سینوسی نوشت که فرکانس آن همان فرکانس منبع سینوسی است.
- تبدیل فیزوری را می‌توان روی هر تابع سینوسی پیاده کرد و برعکس:

$$V_m \cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow V_m \angle \phi$$

- یک فیزور دارای اندازه و زاویه فاز است، فرکانس آن همان فرکانس منبع تحریک در مدار می‌باشد.
- هنگام تبدیل یک مدار حوزه زمان به مدار متناظر حوزه فرکانس، مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها با امپدانس (یا گاهی ادمیتانس) جایگزین می‌شوند.
- امپدانس یک مقاومت، همان مقاومت است.
- امپدانس خازن $1 / j\omega C\ \Omega$ می‌باشد.

- امپدانس یک القاگر $j\omega L\ \Omega$ است.
- امپدانس‌ها در ترکیبات سری و موازی مثل مقاومت‌ها ترکیب می‌شوند.
- همه تکنیک‌های تحلیلی که قبلاً روی مدارهای مقاومتی به کار رفتند، روی خازن‌ها و القاگرهایی که به معادل حوزه فرکانس تبدیل شده‌اند، قابل اعمالند.
- تبدیل فیزوری فقط روی مدارهای تک فرکانس اجرا می‌شود. در غیر این صورت، از تجمیع باید استفاده کرد و پاسخ‌های جزئی حوزه زمان را با هم جمع می‌کنیم تا پاسخ کامل به دست آید.
- توانمندی مربوط به نمودارهای فیزوری وقتی که تابع وادارکننده مناسبی از آغاز به کار رود کاملاً آشکار است، و نیز باید نتیجه نهایی به طور مناسبی مقیاس‌بندی شده باشد.

۱۲-۱۰ خواندنی‌های کمکی

A good reference to phasor-based analysis techniques can be found in:

R.A. DeCarlo and P.M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

Frequency-dependent transistor models are discussed from a phasor perspective in Chap. 7 of

W.H. Hayt, Jr. and G.W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design,* 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

مسائل

۱-۱۰ ویژگی‌های توابع سینوسی

۱. یک موج سینوسی $f(t)$ در $t = 2.1$ ms صفر بوده و در $t = 7.5$ ms به حداکثر 8.5 می‌رسد. موج را به شکل $C_1 \sin(\omega t + \phi)$ (الف) نشان دهید که در آن ϕ مثبت و کوچکترین مقدار خود را به درجه داشته باشد، (ب) $C_2 \cos(\omega t + \beta)$. نشان دهید که β کوچکترین اندازه ممکن و بر حسب درجه باشد. (ج) به‌فرم $C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t$ باشد.

۲. (الف) اگر $-10 \cos \omega t + 4 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \phi)$ و $A > 0$، $-180° < \phi < 180°$ باشد، A و ϕ را پیدا کنید. (ب) اگر $200 \cos(5t + 130°) = F\cos 5t + G \sin 5t$ باشد، F و G را به دست آورید. (ج) سه مقدار t را برای $0 \le t \le 1$ پیدا کنید که در آن‌ها $i(t) = 5\cos 10t - 3\sin 10t = 0$ باشد. (د) در چه فاصله زمانی بین $t = 0$ و $t = 10$ ms، $12 \sin 100\pi t \ge 10 \cos 100\pi t$ است؟

۳. با فرض دو تابع سینوسی $f(t) = -50 \cos \omega t - 30 \sin \omega t$ و $g(t) = 55 \cos \omega t - 15 \sin \omega t$ مطلوب است (الف) دامنه هر کدام و (ب) زاویه فازی که $f(t)$ از $g(t)$ پیش است.

۴. پاسخ جریان مفروض معادلهٔ (۳) با $i(t) = A \cos(\omega t - \phi)$ را در معادله دیفرانسیل $L(di/dt) + Ri = V_m \cos \omega t$ بگذارید و نشان دهید که A و ϕ حاصل با معادله (۴) یکی است.

۵. یک منبع ولتاژ، موجی به صورت $V_m \cos(\omega t + \phi)$ تولید می‌کند که فرکانس آن 13.56 MHz است. اگر مولد 300 W توان را به بار 5 Ω منتقل کند و ولتاژ به حداقل خود در $t = 21.15$ ms برسد، V_m، ω و γ چقدر است؟

۶. امواج زیر را با هم مقایسه کنید و بگویید کدام پیشفاز است:
(الف) $-33 \sin(8t - 9°)$ و $12 \cos(8t - 1°)$.
(ب) $15 \cos(1000t + 66°)$ و $-2 \cos(1000t + 450°)$.
(ج) $\sin(t - 13°)$ و $\cos(t - 90°)$.
(د) $\sin t$ و $\cos(t - 90°)$.

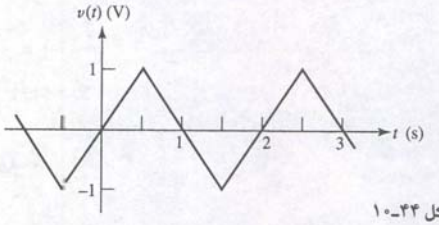
۷. بگویید در امواج زیر کدام پسفاز است: (الف) $6 \cos(2\pi 60t - 9°)$ و $-6 \cos(2\pi 60t + 9°)$، (ب) $\cos(t - 100°)$ و $-\cos(t - 100°)$، (ج) $-\sin t$ و $\sin(t - \pi)$. (د) $7000 \cos(t - 3.14°)$ و $9 \cos(t - 3.14°)$.

۸. نشان دهید که ولتاژ $v(t) = V_1 \cos \omega t - V_2 \sin \omega t$ را می‌توان به صورت $V_m \cos(\omega t + \gamma)$ نوشت. V_m و ϕ را به دست آورید.

۹. تئوری فوریه ابزار رایجی در علوم و مهندسی است. این تئوری می‌گوید که امواج پریودیک مثل شکل ۴۴-۱۰ برابر با جمع بینهایت جمله مطابق زیر است.

$$v(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin \pi t - \frac{1}{3^2} \sin 3\pi t + \frac{1}{5^2} \sin 5\pi t - \frac{1}{7^2} \sin 7\pi t + \ldots\right)$$

(الف) مقدار واقعی را در $t = 0.4$ s حساب کنید. مقدار تقریبی $v(t)$ را با سری فوریه فوق برای، (ب) فقط جمله اول، (ج) فقط چهار جمله اول و (د) فقط پنج جمله اول محاسبه کنید.



شکل ۱۰ـ۴۴

۱۰. برق خانگی معمولاً 110 V، 115 V یا 120 V است. با این وجود این مقادیر ولتاژ دامنه را نشان نمی‌دهند. در واقع این مقادیر بیانگر جذر مربع ولتاژ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t)\, dt}$$

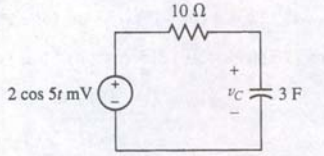
که T پریود موج، V_m دامنه ولتاژ و ω فرکانس یا سرعت زاویه‌ای است. (الف) انتگرال فوق را اجرا نموده و نشان دهید که برای ولتاژ سینوسی داریم:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

(ب) ولتاژهای دامنه مربوطه V_{rms} برای 110، 115 و 120 V چقدراست؟

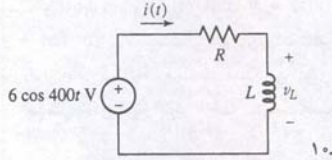
۱۰ـ۲ پاسخ واداشته به توابع سینوسی

۱۱. پاسخ حالت ساکن $v_C(t)$ را در شکل ۱۰ـ۴۵ پیدا کنید.



شکل ۱۰ـ۴۵

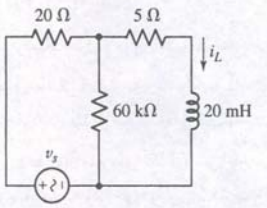
۱۲. ولتاژ القاگر $v_C(t)$ را برای مدار شکل ۱۰ـ۴۶ با فرض $R = 100\ \Omega$ و $L = 2$ H پیدا کنید. همه پاسخ‌های گذرا مدت‌ها قبل از بین رفته‌اند.



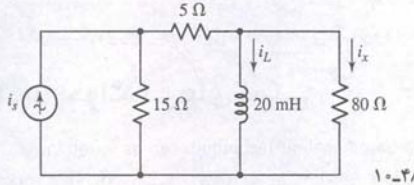
شکل ۱۰ـ۴۶

۱۳. در مدار شکل ۱۰ـ۴۷ فرض کنید $v_s = 20 \cos 500t$ V است. پس از ساده‌سازی آن $i_L(t)$ را بیابید.

۱۴. اگر در شکل ۱۰ـ۴۸، $i_s = 0.4 \cos 500t$ A باشد، مدار را آن قدر ساده کنید تا به فرم شکل ۱۰ـ۴ درآید و سپس (الف) $i_L(t)$ و (ب) $i_x(t)$ را بیابید.



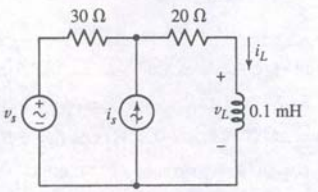
شکل ۱۰ـ۴۷



شکل ۱۰ـ۴۸

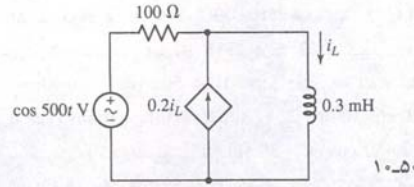
۱۵. یک منبع ولتاژ سینوسی $v_s = 100 \cos 10^5 t$ V، یک مقاومت 500 Ω و یک القاگر 8 mH با یکدیگر سری‌اند. لحظاتی بین $0 < t < \frac{1}{2}T$ را پیدا کنید که در آن توان صفر (الف) به مقاومت منتقل شده است، (ب) به القاگر رفته است و (ج) به وسیله منبع تولید شده است.

۱۶. در مدار شکل ۱۰ـ۴۹، $v_s = 3 \cos 10^5 t$ V و $i_s = 0.1 \cos 10^5 t$ می‌باشد. پس از اجرای تجمیع و قضیه تونن مقادیر لحظه‌ای i_L و v_L را در $t = 10\ \mu s$ به دست آورید.



شکل ۱۰ـ۴۹

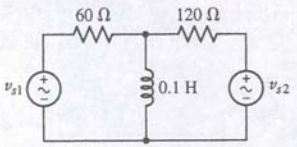
۱۷. در مدار شکل ۱۰ـ۵۰، $i_L(t)$ را به دست آورید.



شکل ۱۰ـ۵۰

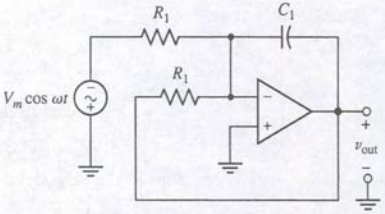
۱۸. هر دو منبع ولتاژ در شکل ۱۰ـ۵۱ با تابع 120 cos 120 πt V داده شده‌اند. (الف) عبارتی برای انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در القاگر را بیابید. (ب) آن را برای یافتن مقدار متوسط انرژی ذخیره شده به کار ببرید.

۱۹. در مدار شکل ۱۰ـ۵۱، منابع ولتاژ عبارتند از $v_{s1} = 120 \cos 200t$ V و $v_{s2} = 180 \cos 200t$ V جریان روبه‌پایین در القاگر را به دست آورید.



شکل ۱۰ـ۵۱

۲۰. فرض کنید که op-amp در شکل ۱۰ـ۵۲ ایده‌آل است ($R_i = \infty$، $R_0 = 0$ و $A = \infty$) و نیز دو سیگنال به ورودی انتگرال‌گیر متصل است، $-V_m \cos \omega t$ و v_{out}. اگر حاصلضرب R_1C_1 برابر L / R در شکل ۱۰ـ۴ تنظیم شده باشد، نشان دهید که v_{out} برابر ولتاژ دوسر R (مرجع سمت چپ) در شکل ۱۰ـ۴ است.



شکل ۱۰ـ۵۲

۲۱. یک منبع ولتاژ $V_m \cos \omega t$ یک مقاومت R و یک خازن به طور سری بسته شده‌اند. (الف) یک معادله انتگرالی ـ دیفرانسیلی برحسب جریان حلقه i بنویسید و پس از آن مشتق بگیرید، تا معادله دیفرانسیل مدار به دست آید و (ب) یک فرم عمومی مناسب برای پاسخ واداشته $i(t)$ فرض کنید و سپس آن را در معادله دیفرانسیل جایگزین نمایید و سپس فرم دقیق پاسخ واداشته را معین کنید.

۱۰ـ۳ تابع تحریک مختلط

۲۲. فرم‌های مقابل را به مختصات قائم ببرید. (الف) $7 \angle -90°$، (ب) $3 + j + 7 \angle -17°$، (ج) $14e^{j15°}$، (د) $1 \angle 0°$. فرم‌های زیر را به فرم قطبی تبدیل نمایید. (ه) $(1 + j9)^2$ و (و) 3.

۲۳. عملیات زیر را انجام دهید و پاسخ را به صورت یک عدد مختلط در مختصات قائم نشان دهید. (الف) $15 + 3 \angle -23°$، (ب) $12j(17 \angle 180°)$ و (ج) $\frac{(1 + j)(2 - j7)}{33 \angle -90°} - 16 .5$.

۲۴. عملیات لازم برای تبدیل عبارات زیر به یک عدد مختلط به‌فرم قطبی را انجام دهید. (الف) $5 \angle -17° - 9 \angle 9°$، (ب) $(8 - j15)(4 + j16)^{-j}$، (ج) $\frac{(14 - j9)}{(2 - j8)} + 5 \angle 30°$ و (د) $j3 + 6 \angle -21° + 17 \angle -33°$.

۲۵. عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط به فرم قطبی نشان دهید.

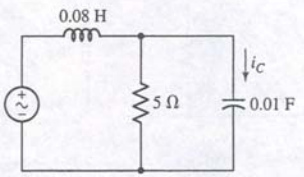
(الف) $\frac{8-j6}{j^2} - 3 \angle 3°$ و (ب) $e^{j14°} + \frac{2e^{j5°}}{2 - j2} + \frac{5 \angle 30°}{2 \angle 15°}$.

۲۶. اعداد مختلط زیر را به فرم مختصات قائم درآورید.

(الف) $5 \angle -110°$، (ب) $6e^{j160°}$، (ج) $(3 + j6)(2 \angle 50°)$. به فرم قطبی درآورید: (د) $-100 - j40$ و (ه) $2 \angle -120° + 3 \angle 50°$.

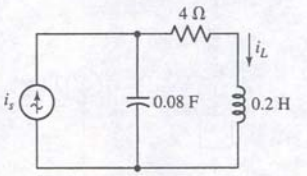
۲۷. محاسبات زیر را انجام دهید ونتیجه را به فرم قطبی درآورید. (الف) $25 \angle -50° - 18 \angle 25°$، (ب) $\frac{2}{j} + \frac{2-j5}{1+j2} + 3$. به فرم قائم درآورید. (ج) $(2.1 \angle 25°)^3$ و (د) $0.7e^{j0.3}$.

۲۸. در مدار شکل ۱۰ـ۵۳ فرض کنید i_C به صورت پاسخ مختلط، $20e^{j(40t + 30°)}$ A باشد، v_s را به صورت تابع تحریک مختلط درآورید.



شکل ۱۰ـ۵۳

۲۹. در مدار شکل ۱۰ـ۵۴ فرض کنید که جریان i به صورت مختلط $20e^{j(10t + 25°)}$ باشد، $i_s(t)$ را به صورت تابع تحریک مختلط درآورید.



شکل ۱۰ـ۵۴

۳۰. در یک شبکه خطی مانند شکل ۱۰ـ۸، یک منبع ولتاژ سینوسی $v_s = 80 \cos (500t - 20°)$ V یک جریان خروجی $i_{out} = 5 \cos (500t + 12°)$ تولید می‌کند. مطلوب است i_{out} به شرطی که v_s برابر (الف) $40 \cos (500t + 10°)$ V، (ب) $40 \sin (500t + 10°)$ V (ج) و (د) $40e^{j(500t + 10°)}$ V باشد.

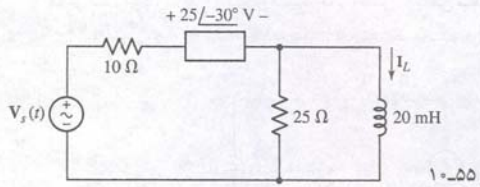
۱۰ـ۴ فیزور

۳۱. هر یک از جریان‌های زیر را به صورت فیزور بنویسید: (الف) $12 \sin (400t + 110°)$ A، (ب) $-7 \sin 800t - 3 \cos 800t$ A، (ج) $4 \cos (200t - 30°) - 5 \cos (200t + 20°)$ A. اگر $\omega = 600$ rad/s باشد، مقدار لحظه‌ای هر یک از ولتاژها را در $t = 5$ ms به دست آورید. (د) $70 \angle 30°$ V (ه) $-60 + j40$ V.

۳۲. بگذارید $\omega = 4$ krad/s باشد و سپس مقدار لحظه i_x را در $t = 1$ ms به دست آورید. به شرطی که I_x برابر باشد با (الف) $5 \angle -80°$ A، (ب) $-4 + j1.5$ A. فیزور ولتاژ V_x را به فرم قطبی نشان دهید به شرطی که $v_x(t)$ برابر باشد با (ج) $50 \sin (250t - 40°)$ V، (د) $20 \cos 108t - 30 \sin 108t$ V و (ه) $33 \cos (80t - 50°) + 41 \cos (80t - 75°)$ V.

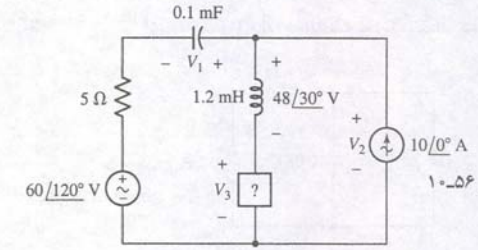
۳۳. ولتاژ فیزوری $V_1 = 10 \angle 90°$ mV در $\omega = 500$ rad/s و $V_2 = 8 \angle 90°$ mV در $\omega = 1200$ rad/s با هم در یک op amp جمع شده‌اند. اگر op amp این ورودی را در ضریب 5- ضرب کند، خروجی را در $t = 0.5$ ms بیابید.

۳۴. اگر در شکل ۱۰ـ۵۵، $I_L = 2.5 \angle 40°$ A و $\omega = 500$ rad/s باشد، $v_s(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۰ـ۵۵

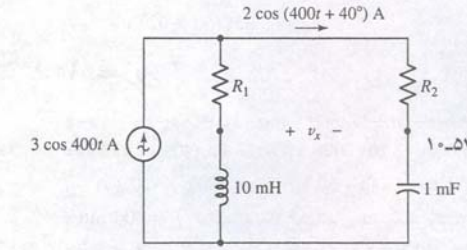
۳۵. اجازه دهید در شکل ۱۰ـ۵۶، $\omega = 5$ krad/s باشد، (الف) $v_1(t)$، (ب) $v_2(t)$ (ج) $v_3(t)$ را معین کنید.



شکل ۱۰ـ۵۶

۳۶. جریان فیزور $1\angle 0°$ A در ترکیب سری 1 Ω، 1 H و 1 F جاری است. در چه فرکانسی دامنه ولتاژ دوسر شبکه دوبرابر دامنه ولتاژ دو سر مقاومت است؟

۳۷. در شکل ۱۰ـ۵۷، v_x را در مدار به دست آورید.



شکل ۱۰ـ۵۷

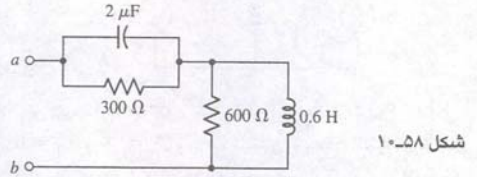
۳۸. یک جعبه سیاه با دو سیم زرد حاوی دو منبع جریان I_{s1} و I_{s2} است. ولتاژ خروجی V_{out} است. اگر $I_{s1} = 2\angle 20°$ A و $I_{s2} = 3\angle -30°$ A باشد، آنگاه $V_{out} = 80\angle 10°$ V است. با این وجود اگر $I_{s1} = I_{s2} = 4\angle 40°$ A باشد، آنگاه $V_{out} = 90 - j\,30$ V می‌باشد اگر $I_{s1} = 2.5\angle -60°$ A و $I_{s2} = 2.5\angle 60°$ A باشد، V_{out} چقدر است؟

۱۰ـ۶ امپدانس

۳۹. امپدانس یک ترکیب سری متشکل از خازن‌های 1 mF، 2 mF و 3 mF را در فرکانس‌های (الف) 1 Hz، (ب) 100 Hz، (ج) 1 kHz و (د) 1 GHz پیدا کنید.

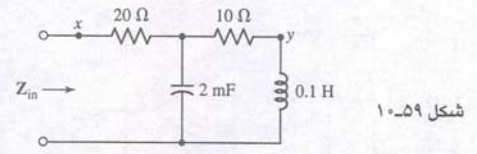
۴۰. امپدانس یک مقاومت موازی با القاگر 1 nH و القاگر 5 nH را در فرکانس‌های (الف) 1 Hz، (ب) 1 kHz، (ج) 1 MHz، (د) 1 GHz و (ه) 1 THz پیدا کنید

۴۱. در پایانه‌های a و b از شکل ۱۰ـ۵۸، Z_{in} را پیدا کنید، اگر ω برابر باشد با (الف) 800 rad/s (ب) 1600 rad/s.



شکل ۱۰ـ۵۸

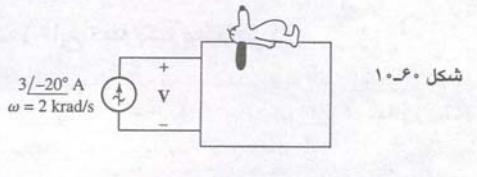
۴۲. بگذارید در شکل ۱۰ـ۵۹، $\omega = 100$ rad/s باشد، (الف) Z_{in} را پیدا کنید. (ب) اگر x به y اتصال کوتاه شده باشد، Z_{in} را به دست آورید.



شکل ۱۰ـ۵۹

۴۳. اگر ولتاژ منبع $v_s = 120\cos 800t$ V به دو سر پایانه‌های a و b در شکل ۱۰ـ۵۸ وصل باشد. (و مرجع + در بالا است) جریان جاری شده به راست در مقاومت 300 Ω چقدر است؟

۴۴. در شکل ۱۰ـ۶۰، V را اگر در جعبه (الف) مقاومت 3 Ω با القاگر 2 mH سری باشد، (ب) 3 Ω در 125 μF سری باشد، (ج) 3 Ω و 2 mH و 125 μF سری باشند و (د) 3 Ω و 2 mH و 125 μF سری باشند، ولی $\omega = 4$ krad/s باشد.



شکل ۱۰ـ۶۰

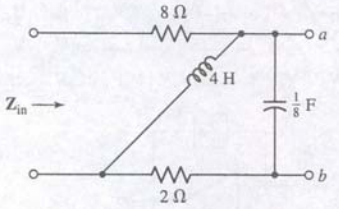
۴۵. یک القاگر H - 10 یک مقاومت 200 Ω و یک خازن C با هم موازی‌اند. (الف) امپدانس ترکیب موازی را در $\omega = 100$ rad/s با $C = 20$ μF به دست آورید. (ب) اگر اندازه امپدانس در $\omega = 100$ rad/s برابر 125 Ω باشد، C را معین کنید. (ج) در چه مقداری از ω با $C = 20$ μF اندازه امپدانس برابر 100 Ω می‌باشد.

۴۶. یک القاگر 20 mH و یک مقاومت 30 Ω با هم موازی‌اند. فرکانس ω: (الف) در $|Z_{in}| = 25\Omega$ چقدر است؟ (ب) در زاویه $\text{ang}(Z_{in}) = 25°$ چقدر؟ (ج) در $\text{Re}(Z_{in}) = 25\ \Omega$ چقدر؟ (د) در $\text{Im}(Z_{in}) = 10\ \Omega$ چقدر می‌باشد؟

۴۷. در شکل ۱۰ـ۵۷ مقدار R_1 و R_2 را پیدا کنید.

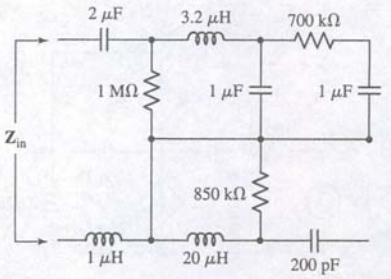
۴۸. یک شبکه دو عنصری دارای امپدانس ورودی $200 + j80\ \Omega$ در فرکانس $\omega = 1200$ rad/s است. چه خازنی را با شبکه موازی کنیم تا ورودی دارای (الف) راکتانس صفر باشد؟ (ب) امپدانس 100 Ω باشد؟

۴۹. برای شبکه شکل ۱۰ـ۶۱، Z_{in} را در $\omega = 4$ rad/s به دست آورید به شرطی که پایانه‌های a و b (الف) مدار باز است و (ب) اتصال کوتاه است.



شکل ۱۰ـ۶۱

۵۰. امپدانس معادل شبکه در شکل ۱۰ـ۶۲ را پیدا کنید. فرکانس f = 1 MHz است.



شکل ۱۰ـ۶۲

۵۱. مداری مرکب از چند القاگر، خازن و مقاومت طراحی کنید که دارای امپدانس $4j + 1\ \Omega$ در $\omega = 1$ rad/s باشد، (ب) امپدانس 5 Ω در $\omega = 1$ rad/s باشد و حداقل یک القاگر دارد، (ج) امپدانس $7\angle 80°\ \Omega$ در $\omega = 100$ rad/s باشد و (د) با حداقل قطعات دارای امپدانس 5 Ω در $f = 3$ THz باشد.

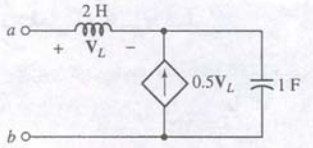
۵۲. مداری مرکب از خازن‌ها، القاگرها و مقاومت‌ها طراحی کنید که دارای امپدانس $j4 + 1$ kΩ در $\omega = 230$ rad/s باشد، (ب) امپدانس 5 MΩ در $\omega = 10$ rad/s ساخته شده که حداقل یک خازن دارد، (ج) دارای امپدانس $8\angle -22°\ \Omega$ در $\omega = 50$ rad/s باشد و (د) با حداقل قطعات امپدانس 300 Ω در $\omega = 3$ krad/s باشد.

۱۰ـ۷ ادمیتانس

۵۳. ادمیتانس ترکیب موازی خازن‌های 1 mF، 2 mF و 4 mF را اگر در فرکانس (الف) 2 Hz، (ب) 200 Hz، (ج) 20 kHz و (د) 200 GHz کار کند را محاسبه کنید.

۵۴. سوسپتانس ترکیب موازی (الف) دو مقاومت 100 Ω، (ب) یک مقاومت 1 Ω موازی با خازن 1 F را اگر در فرکانس 100 rad/s کار کند، (ج) یک مقاومت 1 Ω سری با القاگر 2 H اگر در فرکانس 50 rad/s کار کند را به دست آورید.

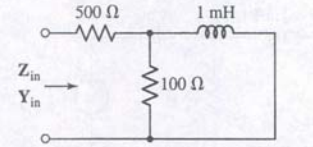
۵۵. ادمیتانس Y_{ab} شبکه شکل ۱۰ـ۶۳ را پیدا کرده و آن را به صورت ترکیبی از مقاومت R و القاگر L رسم نمایید. مقدار R و L را در $\omega = 1$ rad/s فرض کنید.



شکل ۱۰ـ۶۳

۵۶. یک مقاومت 5 Ω، یک القاگر 20 mH و یک ظرفیت 2 mF یک شبکه سری با پایانه‌های a و b را تشکیل می‌دهند. ضمن کار با ادمیتانس ببینید چه خازنی بین a و b قرار گیرد تا در $\omega = 500$ rad/s مقدار $Z_{in,ab} = R_{in,ab} + j0$ شود، (ب) $R_{in,ab}$ چقدر است؟ (ج) با خازن فوق در $\omega = 100$ rad/s، Y_{ab} چقدر است؟

۵۷. در شبکه شکل ۱۰ـ۶۴، فرکانسی را که در آن، (الف) 550 Ω، (ب) $X_{in} = 50\ \Omega$، (ج) $G_{in} = 1.8$ ms و (د) $B_{in} = -150$ μs باشد، به دست آورید.



شکل ۱۰ـ۶۴

۵۸. دو ادمیتانس $Y_1 = 3 + J4$ ms و $Y_2 = 5 + J2$ ms با هم موازی‌اند و سومین ادمیتانس $Y_3 = 2 - J4$ ms با ترکیب موازی سری است. اگر جریان $I_1 = 0.1\angle 30°$ A از Y_1 عبور کند، اندازه ولتاژ دو سر، (الف) Y_1، (ب) Y_2، (ج) Y_3 و (د) کل شبکه را پیدا کنید.

۵۹. ادمیتانس ترکیب موازی مقاومت 10 Ω و خازن 50 μF در فرکانس $\omega = 1$ krad/s برابر با ادمیتانس R_1 و C_1 سری در همان فرکانس است. (الف) R_1 و C_1 را پیدا کنید. (ب) بند قبل را برای $\omega = 2$ krad/s تکرار کنید.

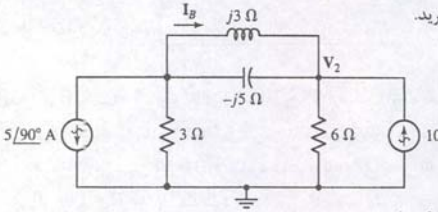
۶۰. صفحه مختصات کارتزین (قائم) دارای محور افقی با G_{in} برحسب زیمنس است، و محور عمودی B_{in} نیز بر حسب زیمنس می‌باشد. اگر Y_{in} ترکیب سری مقاومت 1 Ω و خازن 0.1 F باشد، (الف) Y_{in}، G_{in} و B_{in} را برحسب ω به دست آورید. (ب) جفت محورها (G_{in} و B_{in}) را روی صفحه در فرکانس‌های $\omega = 0, 1, 2, 10, 20, 10^6$ rad/s مشخص کنید.

۶۱. ترکیبی از القاگرها، مقاومت‌ها و خازن‌ها طراحی کنید که دارای ادمیتانس $j4 - 1$ S در $\omega = 1$ rad/s، (ب) ادمیتانس 200 ms در $\omega = 1$ rad/s با حداقل یک القاگر، (ج) ادمیتانس $7\angle 80°$ μs در $\omega = 100$ rad/s و (د) یک ادمیتانس 200 mΩ در $\omega = 3$ THz با حداقل قطعات ممکن باشد.

۶۲. مداری مرکب از القاگرها، مقاومت‌ها و خازن‌ها طراحی کنید که دارای (الف) یک ادمیتانس $j4 - 1$ pS در $\omega = 30$ rad/s، (ب) ادمیتانس 5 μs در $\omega = 560$ rad/s باشد و در آن حداقل یک خازن باشد، (ج) یک ادمیتانس $4\angle -10°$ ns در $\omega = 50$ rad/s و (د) یک ادمیتانس 60 ns در $\omega = 300$ rad/s با حداقل قطعات باشد.

۱۰-۸ تحلیل گرهی و مش

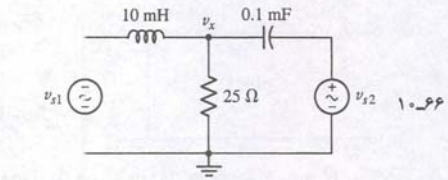
۶۳. تحلیل فیزوری گرهی را روی مدار شکل ۱۰-۶۵ برای یافتن V_2 به کار ببرید.



شکل ۱۰-۶۵

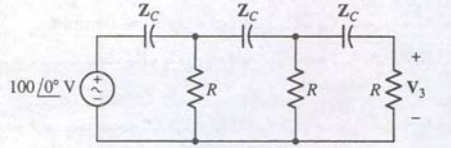
۶۴. تحلیل فیزوری مش را روی مدار شکل ۱۰-۶۵ برای یافتن I_B به کار ببرید.

۶۵. در مدار شکل ۱۰-۶۶، اگر $v_{s1} = 20\cos 1000t$ V و $v_{s2} = 20\sin 1000t$ V باشند، $v_x(t)$ را پیدا کنید.



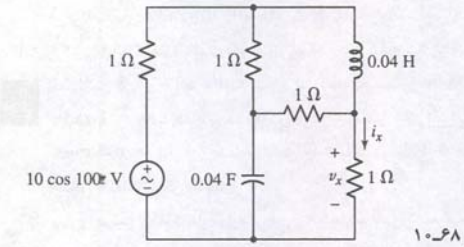
شکل ۱۰-۶۶

۶۶. (الف) V_3 را در مدار شکل ۱۰-۶۷ بیابید. (ب) تا چه مقدار یکسانی، امپدانس خازن‌ها باید تغییر کند به نحوی که V_3 به اندازه $180°$ با ولتاژ منبع اختلاف فاز داشته باشد؟



شکل ۱۰-۶۷

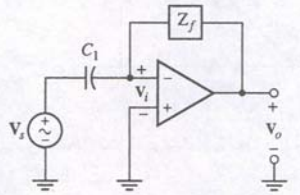
۶۷. برای یافتن $i_x(t)$ در شکل ۱۰-۶۸ از تحلیل مش استفاده کنید.



شکل ۱۰-۶۸

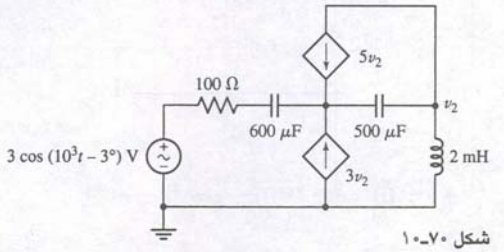
۶۸. به کمک فیزورها و تحلیل گرهی، $v_x(t)$ را در شکل ۱۰-۶۸ به دست آورید.

۶۹. op amp شکل ۱۰-۶۹ دارای امپدانس ورودی بینهایت، امپدانس خروجی صفر و بهره بزرگ ولی معین (مثبت، حقیقی) $A = -V_o / V_i$ است. (الف) یک مشتق‌گیر ساده با $Z_f = R_f$ بسازید. V_o / V_s را پیدا کنید و سپس نشان دهید که با $A \to \infty$، نسبت $V_o / V_s \to -j\omega C_1 R_f$ خواهد بود. (ب) اگر Z_f موازی C_f و R_f باشد، V_o / V_s را به دست آورید و سپس نشان دهید که اگر $A \to \infty$ میل کند، $V_o / V_s \to -j\omega C_1 R_f / (1 + j\omega C_f R_f)$ میل خواهد کرد.



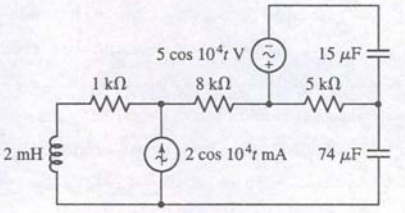
شکل ۱۰-۶۹

۷۰. برای مدار شکل ۱۰-۷۰، ولتاژ v_2 را معین کنید.



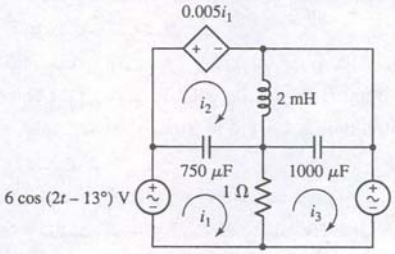
شکل ۱۰-۷۰

۷۱. توان تلف شده به وسیله مقاومت 1 kΩ در شکل ۱۰-۷۱ در زمان $t = 1$ ms چقدر است؟



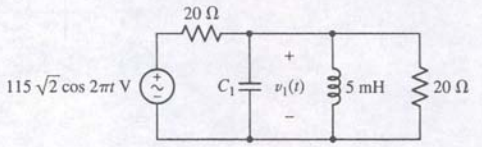
شکل ۱۰-۷۱

۷۲. تحلیل فیزوری برای تعیین سه جریان مش $i_1(t)$، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ در مدار شکل ۱۰-۷۲ به کار ببرید.



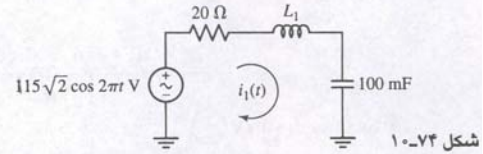
شکل ۱۰-۷۲

۷۳. در مدار شکل ۱۰-۷۳ ولتاژ $v_1(t) = 6.014\cos(2\pi t + 85.76°)$ V است. ظرفیت C_1 چقدر است؟



شکل ۱۰-۷۳

۷۴. در مدار شکل ۱۰-۷۴ جریان $i_1(t) = 8.132\cos 2\pi t$ A است. مطلوب است القاکنایی L؟

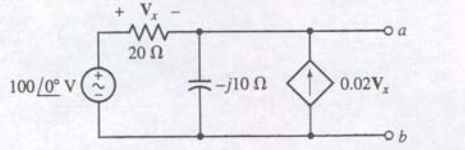


شکل ۱۰-۷۴

۷۵. با مراجعه به تقویت کننده شکل ۱۰-۲۶ (ب)؛ (الف) برای زاویه فاز خروجی معادله‌ای برحسب فرکانس به دست آورید. ورودی را $V_s = 1\ \angle 0°$ V فرض کنید. (ب) معادله خود را روی کاغذ نیمه لگاریتمی برای فرکانس‌های 100 Hz تا 10 GHz رسم کنید. از $C_\pi = 5$ PF، $R_\pi = 2.2$ kΩ، $R_B = 5$ kΩ، $R_s = 300\ \Omega$، $C_\mu = 2$PF، $g_m = 38$ ms، $R_C = 4.7$ kΩ، $R_L = 1.2$ kΩ استفاده کنید. (ج) در چه محدوده فرکانسی، خروجی دقیقاً $180°$ نسبت به ورودی اختلاف فاز دارد. حدوداً در چه فرکانسی این رابطه فازی شروع به تغییر می‌نماید.

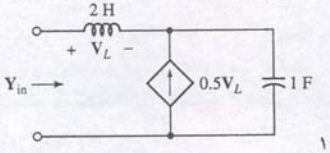
۱۰-۹ تجمیع، تبدیل منابع و قضیه تونن

۷۶. معادله تونن حوزه فرکانس شبکه شکل ۱۰-۷۵ را بیابید. نتیجه را به صورت V_{th} سری با Z_{th} نشان دهید.



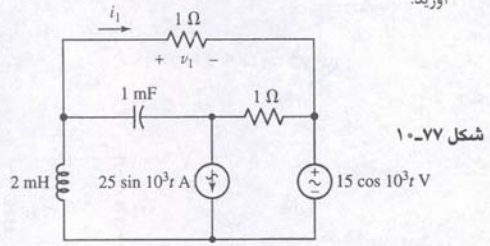
شکل ۱۰-۷۵

۷۷. امپدانس ورودی مدار شکل ۱۰-۷۶ را به دست آورید و آن را به صورت ترکیب موازی یک مقاومت و یک القاگر L نشان دهید، در $\omega = 1$ rad مقادیر R و L فرض شده‌اند.



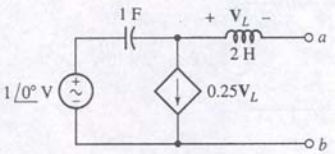
شکل ۱۰-۷۶

۷۸. با مراجعه به شکل ۱۰-۷۷، با روش تجمیع، بخشی از $v_1(t)$ را که در آن، (الف) فقط منبع ولتاژ (ب) فقط منبع جریان عمل می‌کنند، به دست آورید.



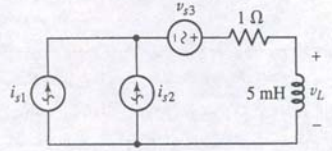
شکل ۱۰-۷۷

۷۹. با $\omega = 1$ rad/s، معادله نورتن شبکه ۱۰-۷۸ را پیدا کنید. معادل نورتن را به صورت I_N موازی با R_N و یکی از دو عنصر L_N و C_N بسازید.



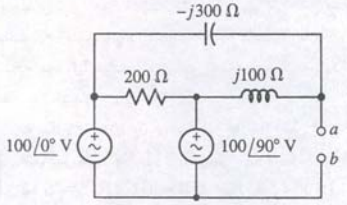
شکل ۱۰-۷۸

۸۰. در مدار شکل ۱۰-۷۹، فرض کنید $i_{s1} = 2\cos 200t$ A، $i_{s2} = 1\cos 100t$ A و $v_{s3} = 2\sin 200t$ V باشد، $v_L(t)$ را بیابید.



شکل ۱۰-۷۹

۸۱. مدار معادل تونن را برای شکل ۱۰-۸۰ به دست آورید.

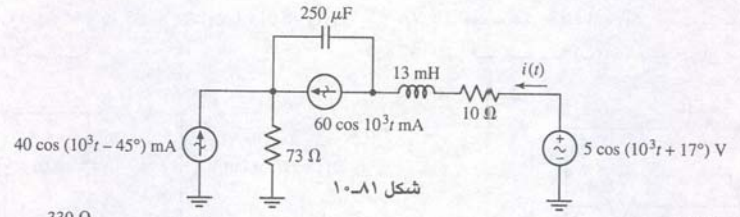


شکل ۱۰-۸۰

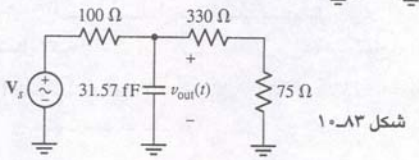
۸۲. جریان $i(t)$ جاری شده از منبع ولتاژ شکل ۱۰-۸۱ چقدر است؟

۸۳. (الف) ولتاژ دو سر خازن 3F شکل ۱۰-۸۲ را به دست آورید. (ب) صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق نمایید.

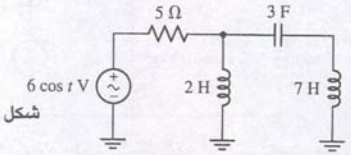
۸۴. (الف) معادل تونن از دید القاگر Ω J5 در شکل ۱۰-۲۱ را به دست آورید. (ب) با فرض فرکانس 100 rad/s، صحت نتیجه خود را با PSpice تحقیق کنید.



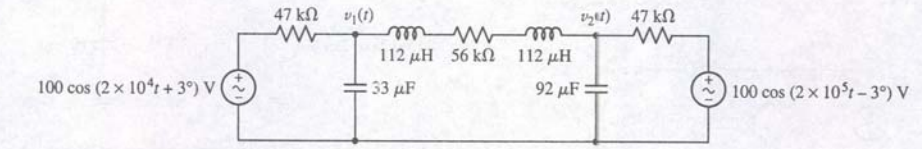
شکل ۱۰ـ۸۱



شکل ۱۰ـ۸۳



شکل ۱۰ـ۸۲



شکل ۱۰ـ۸۴

۸۵. با استفاده از یک مقاومت، یک خازن، یک منبع ولتاژ سینوسی و اصل تقسیم ولتاژ مداری طراحی کنید که فرکانس‌های بالا را حذف نماید.

(راهنمایی: ولتاژ خروجی دو سر یکی از دو عنصر غیرفعال را تعریف کنید و منبع سینوسی را ورودی بگیرید. منظور از حذف کاهش ولتاژ خروجی است).

۸۶. با یک مقاومت، یک خازن و یک منبع ولتاژ سینوسی و اصل تقسیم ولتاژ مداری طراحی کنید که فرکانس‌های پایین را حذف کند.

(راهنمایی: ولتاژ خروجی دو سر یکی از عناصر غیرفعال را تعریف کنید، و منبع سینوسی را ورودی بگیرید. منظور از حذف، کاهش ولتاژ خروجی است).

۸۷. (الف) مدار شکل ۱۰ـ۸۳ را به مدار ساده‌تر RC سری کاهش دهید. (ب) معادله‌ای برای اندازه نسبت ولتاژ V_{out} / V_s به صورت تبعی از فرکانس بیابید. (ج) معادله را در محدوده 100 Hz تا 1 MHz رسم کنید و نتیجه خود را با جواب شبیه‌سازی شده حاصل از PSpice در مدار اصلی، مقایسه نمایید.

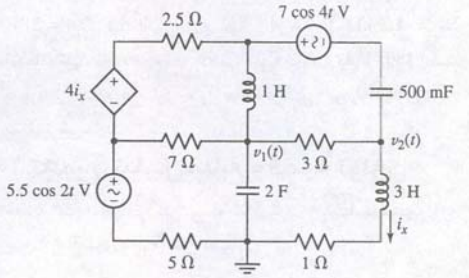
۸۸. به شکل ۱۰ـ۲۶ (ب) مراجعه کنید. (الف) نشان دهید که حداکثر ولتاژ ماکزیمم $g_m(R_C \parallel R_L)$ است. (ب) اگر $R_s = 100\ \Omega$، $R_L = 8\ \Omega$، مقدار حداکثر R_C برابر 10 kΩ، $r_\pi g_\mu = 300$ باشد و دیگر پارامترها بتوانند تغییر کنند، برای افزایش حداکثر بهره، مدار را چگونه اصلاح می‌نمایید. (ج) این اصلاح طراحی روی فرکانس قطع تقویت کننده چه تأثیری دارد؟

۸۹. از تجمیع برای یافتن ولتاژ $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در شکل ۱۰ـ۸۴ استفاده کنید.

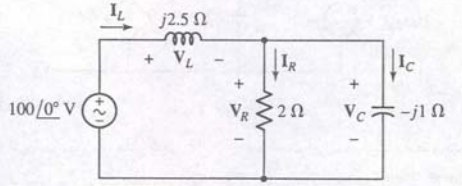
۹۰. از تجمیع برای یافتن ولتاژ $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در شکل ۱۰ـ۸۵ استفاده نمایید.

۱۰ـ۱۰ نمودارهای فیزوری

۹۱. (الف) مقادیر I_L، I_R، I_C، V_L، V_R، V_C و V_s را برای مدار شکل ۱۰ـ۸۶ محاسبه کنید. (ب) با مقیاس هر 50 V در یک اینچ و 25 A در هر اینچ هر جفت کمیت را روی نمودار فیزوری نشان دهید و روابط $I_L = I_R + I_C$ و $V_s = V_L + V_R$ را روی آن مشخص نمایید.



شکل ۱۰ـ۸۵

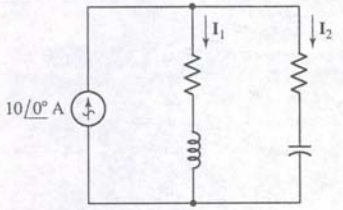


شکل ۱۰ـ۸۶

۹۲. در مدار شکل ۱۰ـ۸۷، مقادیر (الف) I_1، I_2 و I_3 را پیدا کنید. (ب) V_s، I_1، I_2 و I_3 را روی نمودار فیزوری نشان دهید (مقیاس 50 V/in و 2 A/in مناسب است) (ج) I_s را به صورت گرافیکی به دست آورید و دامنه و زاویه فاز آن را مشخص کنید.

۹۴. فرض کنید $V_1 = 100\ \angle 0°\ V$، $|V_2| = 140\ V$ و $|V_1 + V_2| = 120\ V$ باشد. با روش‌های گرافیکی دو مقدار ممکن برای زاویه V_2 به دست آورید.

شکل ۱۰ـ۸۷



شکل ۱۰ـ۸۸

۹۳. در مدار شکل ۱۰ـ۸۸ می‌دانیم که $|I_1| = 5\ A$ و $|I_2| = 7\ A$ است. I_1 و I_2 را با پرگار، خط‌کش یا ابزاری از این قبیل پیدا کنید.

فصل یازدهم

تحلیل منابع انرژی AC

مفاهیم کلیدی

- توان لحظه‌ای
- توان متوسط
- مقادیر ولتاژ و جریان موثر
- توان ظاهری و ضریب توان
- توان مختلط
- مقایسه واژه‌های توان

مقدمه

اغلب بخش عمده‌ای از تحلیل مدار، تعیین توان تولیدشده یا مصرف‌شده و یا هر دوی آن‌ها است. در رابطه با موضوع توان ac که ما روش ساده‌ای برگزیدیم تصویر مناسبی از این‌که یک سیستم خاص چگونه کار می‌کند را ارائه نکرده است، لذا ما در این فصل چندین کمیت مرتبط با توان را معرفی می‌کنیم.

با توان **لحظه‌ای** آغاز می‌کنیم، که حاصل‌ضرب ولتاژ حوزه زمان و جریان حوزه زمان در یک عنصر یا شبکه موردنظر است. توان لحظه‌ای به نوبه خود گاهی بسیار مفید است، زیرا حداکثر مقدار آن می‌باید محدود شود تا از محدوده مجاز برای یک وسیله فیزیکی خارج نگردد. مثلاً تقویت‌کننده‌های ترانزیستوری و لامپی هر دو در هنگام تجاوز توان اوج از حد معینی در خروجی تولید اعوجاج می‌نمایند و لذا بلندگوها صدای ناهنجاری را تولید می‌کنند. در هر صورت ما عمدتاً به توان لحظه‌ای به این دلیل علاقمندیم که می‌توان از آن **توان متوسط** را محاسبه کرد. مشابه با این مطلب مسافرت در بیرون شهر است که در آن حرکت با سرعت متوسط بهتر قابل تعریف است، ولی سرعت لحظه‌ای به ما پرهیز از سرعت‌های ماکزیممی که موجب خطر می‌شود را یادآوری می‌نماید.

در مسائل عملی توان متوسط را مورد توجه قرار می‌دهیم که حدود آن، کسری از میکووات در ارسال سیگنال راه دور از فضای بالای جو، تا چند وات توان تولیدی برای بلندگوها در سیستم‌های صوتی استریو، چند وات برای قهوه‌جوش، یا 10 میلیون وات تولیدی در یک نیروگاه می‌باشد. هنوز خواهیم دید که حتی مفهوم توان متوسط هم محدودیت خود را دارد، خصوصاً هنگامی که ما با مبادله انرژی بین بارهای رآکتیو و منابع انرژی مواجه می‌شویم. این موضوع به راحتی با معرفی مفاهیم توان رآکتیو، توان مختلط و ضریب توان ـ که همگی واژه‌هایی آشنا در صنعت انرژی هستند ـ قابل برخورد و مدیریت است.

۱۱ـ۱ توان لحظه‌ای

توان لحظه‌ای انتقالی به هر وسیله با حاصل‌ضرب ولتاژ لحظه‌ای دو سر وسیله در جریان لحظه‌ای درون آن تعریف می‌گردد. بنابراین:

$$p(t) = v(t)i(t) \qquad (۱$$

اگر وسیله موردنظر یک مقاومت R باشد، آنگاه توان را برحسب فقط جریان یا فقط ولتاژ بیان می‌کنیم:

$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R} \qquad (۲$$

اگر ولتاژ و جریان، مربوط به وسیله یا دستگاهی کاملاً القایی باشد، آنگاه:

$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}\,v(t)\int_{-\infty}^{t} v(t')dt' \qquad (۳$$

که در آن فرض خواهیم کرد که در $t = -\infty$ ولتاژ صفر باشد. در حالت خازن:

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t)\int_{-\infty}^{t} i(t')dt' \qquad (۴)$$

که فرض مشابهی برای جریان صورت گرفته است. با این وجود معادلات توان برحسب فقط ولتاژ یا فقط جریان بزودی با مطالعه شبکه‌های کلی‌تر، بد وجهه خواهد شد. نمایش فوق به دلیل دیگری هم الزامی نیست زیرا می‌توانیم در پایانه‌های شبکه هم ولتاژ و هم جریان را بیابیم. به عنوان مثال، مدار RL شکل ۱ـ۱۱ را که با یک منبع ولتاژ پله‌ای تحریک شده مورد بررسی قرار می‌دهیم، پاسخ جریان به صورت زیر است:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})\,u(t)$$

و بنابراین توان کل انتقالی به وسیله منبع یا جذب‌شده به وسیله شبکه غیرفعال برابر است با:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})\,u(t)$$

که در آن مربع تابع پله واحد برابر با همان تابع پله واحد است.

توان انتقالی به مقاومت برابر است با:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})^2\,u(t)$$

برای تعیین توان جذب‌شده به وسیله القاگر، ابتدا ولتاژ القاگر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L\frac{di(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L}\,u(t) + \frac{LV_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})\frac{du(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L}\,u(t) \end{aligned}$$

زیرا $\frac{du(t)}{dt}$ در $t > 0$ مساوی صفر و $(1 - e^{-Rt/L}) = 0$ در $t = 0$ صفر می‌باشد. بنابراین توان جذب‌شده به وسیله القاگر برابر زیر است:

$$p_L(t) = v_L(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R}e^{-Rt/L}(1 - e^{-Rt/L})\,u(t)$$

با چند دستکاری جبری خواهیم داشت:

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t)$$

که محکی برای درستی کار است. نتایج در شکل ۲ـ۱۱ رسم شده است.

توابع ناشی از تحریک سینوسی

بیایید منبع ولتاژ در شکل ۱ـ۱۱ را با منبع سینوسی $v_m\cos\omega t$ عوض کنیم. پاسخ حالت ماندگار حوزه زمان به صورت زیر بود:

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

که

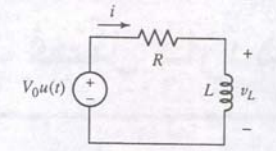
$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}} \quad \text{و} \quad \phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

پس توان لحظه‌ای انتقالی به کل مدار در حالت ماندگار سینوسی چنین است:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_mI_m\cos(\omega t + \phi)\cos\omega t$$

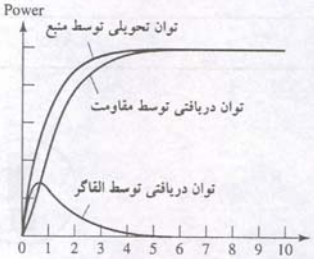
بهتر است رابطه فوق را با استفاده از روابط مثلثاتی دوباره بنویسیم:

$$p(t) = \frac{V_mI_m}{2}[\cos(2\omega t + \phi) + \cos\phi] = \frac{V_mI_m}{2}\cos\phi + \frac{V_mI_m}{2}\cos(2\omega t + \phi)$$



شکل ۱ـ۱۱ توان لحظه‌ای انتقالی به R عبارت‌است‌از:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})^2\,u(t)$$



شکل ۲ـ۱۱ نمودارهای $p(t)$، $p_L(t)$ و $p_R(t)$. با میراشدن حالت گذرا مدار به حالت ماندگار می‌رود. چون تنها منبع مدار dc است، القاگر در نهایت به صورت اتصال کوتاه عمل می‌نماید و توان جذب‌شده به وسیله آن صفر می‌شود.

آخرین معادله چند ویژگی دارد که به طور کلی برای وضعیت حالت ماندگار مدارها معتبر است. اولین جمله تابعی از زمان نیست و دومی دارای فرکانسی دوبرابر فرکانس اعمال شده است. چون جمله اخیر موجی کسینوسی است و چون امواج سینوسی و کسینوسی دارای متوسط صفراند (وقتی‌که متوسط در فاصله مضارب صحیح پریود باشد)، بنابراین توان متوسط برابر با $\frac{1}{2}V_mI_m\cos\phi$ است. به زودی خواهیم دید که واقعاً چنین است.

مثال ۱ـ۱۱

یک منبع ولتاژ $40 + 60u(t)$ V، یک خازن 5μF و یک مقاومت 200Ω با یکدیگر به طور سری بسته شده‌اند. توان جذب‌شده به‌وسیله خازن و مقاومت را در $t = 1.2$ms پیدا کنید.

در $t = 0^-$، جریانی وجود ندارد و لذا 40 V در دو سر خازن و مقاومت سری با آن به 100 V پرش می‌کند. چون v_C نمی‌تواند در زمان صفر تغییر یابد، ولتاژ مقاومت در $t = 0^+$ برابر 60 V خواهد بود.

پس جریان در هر سه عنصر در $t = 0^+$ برابراست با $60/200 = 300$ mA و برای $t > 0$ داریم:

$$i(t) = 300e^{-t/\tau}\ \text{mA}$$

که در آن $\tau = RC = 1$ms است. بنابراین جریان در $t = 1.2$ms برابر 90.36 mA و توان جذب‌شده به وسیله مقاومت در این لحظه $i^2(t)R = 1.633$ W می‌باشد.

توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله خازن $i(t)v_C(t)$ است و به چند روش می‌توان رابطه ولتاژ خازن را به‌دست‌آورد. با توجه به این‌که در $t > 0$ مجموع ولتاژ کل در دو سر هر دو عنصر همیشه 100V است و این‌که ولتاژ دو سر مقاومت $60e^{-t/\tau}$ می‌باشد، داریم:

$$v_C(t) = 100 - 60e^{-t/\tau}$$

و بنابراین $v_C(1.2\text{ms}) = 100 - 60e^{-1/2} = 81.93$ V خواهد شد. توان جذب‌شده به وسیله خازن در $t = 1.2$ms برابر است با $(90.36\text{mA})(81.93\text{V}) = 7.403$W.

تمرین

۱ـ۱۱ یک منبع جریان $12\cos2000t$ A، یک مقاومت 200Ω و یک القاگر 0.2H با هم موازیند. فرض کنید شرایط حالت ماندگار حاکم است. در $t = 1$ms، توان جذب‌شده به وسیله (الف) مقاومت، (ب) القاگر و (ج) منبع سینوسی را به‌دست‌آورید.

جواب: 13.98 kW، -5.63 kW و -8.35 kW.

۱۱ـ۲ توان متوسط

وقتی از مقدار متوسط برای توان لحظه‌ای صحبت می‌کنیم، فاصله زمانی که درآن فرآیند متوسط‌گیری انجام می‌شود، باید کاملاً مشخص باشد. بگذارید ابتدا فاصله زمانی کلی t_1 تا t_2 را درنظربگیریم. آنگاه می‌توان با انتگرال‌گیری $p(t)$ از t_1 تا t_2 و تقسیم نتیجه آن بر فاصله زمانی $t_2 - t_1$، مقدار متوسط را به‌دست‌آورد:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt \qquad (۵)$$

مقدار متوسط با حرف بزرگ P مشخص می‌گردد زیرا تابعی از زمان نیست و معمولاً بدون هر زیرنویسی که بیانگر متوسط باشد، نوشته می‌شود. هرچند P تابعی از زمان نیست ولی تابعی از t_1 و t_2 است که این دو نیز فاصله انتگرال‌گیری را تعریف می‌کنند. این وابستگی فاصله زمانی را می‌توان به صورت ساده‌تر بیان کرد مشروط بر این‌که تابع $p(t)$ متناوب باشد. ما ابتدا این حالت مهم را بررسی می‌کنیم.

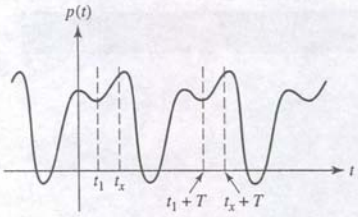
توان متوسط برای امواج پریودیک

اجازه بدهید فرض کنیم که تابع تحریک و پاسخ‌های مدار همگی پریودیک (دوره‌ای)اند و به حالت ماندگار رسیده‌ایم، هرچند که لزوماً سینوسی هم نباشد. می‌توان تابع پریودیک f(t) را به صورت ریاضی تعریف کرد:

$$f(t) = f(t + T) \qquad (۶)$$

که T پریود یا دوره تناوب است. اکنون نشان می‌دهیم که مقدار متوسط توان لحظه‌ای که با معادله (۵) بیان شده است، می‌تواند در فاصله یک پریود محاسبه شود و شروع آن نیز اختیاری است.

موج پریودیک کلی در شکل ۳ـ۱۱ نمایش و با p(t) مشخص شده است. ما ابتدا توان متوسط را با انتگرال‌گیری از t_1 تا زمان t_2 که یک پریود فاصله دارد، یعنی $t_2 = t_1 + T$، محاسبه می‌کنیم:



شکل ۳ـ۱۱ مقدار متوسط توان P از تابع پریودیک p(t) که در هر دوره تناوبی یکسان است.

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p(t)\,dt$$

سپس با انتگرال‌گیری از t_x تا $t_x + T$ خواهیم داشت:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt$$

برابری P_1 و P_x از تفسیر انتگرال‌ها قابل تفسیر است. سطحی که برای نمایش انتگرال مورد استفاده در تعیین P_x وجود دارد به اندازه سطح t_1 تا t_x از P_1 کوچک‌تر و به اندازه سطح بین $t_1 + T$ تا $t_x + T$ از آن بزرگ‌تر است. طبیعت پریودیک منحنی لازم می‌دارد که این دو سطح برابر باشند. بنابراین **توان متوسط** با انتگرال توان لحظه‌ای در هر پریود دلخواه صورت گرفته و سپس به پریود تقسیم می‌گردد:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p\,dt \qquad (۷)$$

لازم به تذکر است که می‌توان انتگرال را در طول هر تعداد پریود صحیح انجام داد، به شرطی که تقسیم نیز بر همان تعداد پریود گردد. بنابراین:

$$P = \frac{1}{nT}\int_{t_x}^{t_x+nT} p\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (۸)$$

اگر به این مطلب عمومیت ببخشیم و انتگرال را در تمام فاصله زمانی بگیریم، نتیجه مفید دیگری حاصل می‌گردد. ابتدا حدود انتگرال را متقارن اختیار می‌کنیم:

$$P = \frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

سپس با بی‌نهایت‌شدن n، حدگیری می‌کنیم:

$$P = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

مادامی که P(t) تابعی با رفتاری منطقی باشد، مثل همه توابع تحریک فیزیکی و پاسخ‌ها، می‌توان عدد بزرگ n را با عدد کمی بزرگ‌تر که صحیح نیست جایگزین کرد، بدون این‌که P تغییر چندانی کند، به علاوه خطا با افزایش n، کاهش می‌یابد. بدون بحثی بیشتر در این باره، مقدار گسسته nT را با متغیر پیوسته τ جایگزین می‌کنیم:

$$P = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)\,dt \qquad (۹)$$

در چند مورد خواهیم دید که بهتر است انتگرال‌گیری از توابع متناوب در بی‌نهایت پریود انجام شود. مثال‌هایی از کاربرد معادلات (۷)، (۸) و (۹) در ادامه آمده است.

بیایید محاسبه توان متوسط یک موج پریودیک را با یافتن توان متوسط حمل‌شده به یک مقاومت R از یک موج جریان دندان‌اره‌ای شکل ۴ـ۱۱ (الف) دنبال کنیم. داریم:

$$i(t) = \frac{I_m}{T}t \qquad 0 < t \le T$$

$$i(t) = \frac{I_m}{T}(t - T) \qquad T < t \le 2T$$

و به همین ترتیب. و نیز:

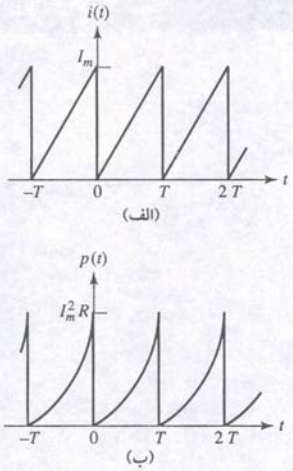
$$p(t) = \frac{1}{T^2}I_m^2\,Rt^2 \qquad 0 < t \le T$$

$$p(t) = \frac{1}{T^2}I_m^2\,R(t - T)^2 \qquad T < t \le 2T$$

و به همین ترتیب که در شکل ۴ـ۱۱ (ب) نیز رسم شده است، با انتگرال‌گیری حول یک پریود، یعنی از $t = 0$ تا $t = T$ داریم:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2}t^2 dt = \frac{1}{3}I_m^2 R$$

انتخاب یک پریود در محدوده‌ای دیگر، مانند از $t = 0.1T$ تا $t = 1.1T$، جواب یکسانی تولید می‌نماید. با انتگرال‌گیری از 0 تا 2T و تقسیم بر 2T یعنی کاربرد معادله (۸) با $n = 2$ و $t_x = 0$ نیز همان جواب فراهم می‌شود.



شکل ۴ـ۱۱ (الف) شکل موج دندان‌اره‌ای. (ب) توان لحظه‌ای حاصل از عبور جریان از مقاومت R.

توان متوسط در حالت ماندگار سینوسی

اکنون بیایید جوابی کلی را برای حالت ماندگار سینوسی به‌دست‌آوریم. فرض می‌کنیم:

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)$$

و جریان

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

که از وسیله موردنظر عبور می‌کند. توان لحظه‌ای برابر است با:

$$p(t) = V_m I_m\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$$

دوباره با بیان ضرب دو جمله کسینوسی به صورت نصف حاصل‌جمع کسینوس اختلاف زاویه‌ها و کسینوس جمع زاویه‌ها داریم:

$$p(t) = \frac{1}{2}V_m I_m\cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2}V_m I_m\cos(2\omega t + \theta + \phi) \qquad (۱۰)$$

می‌توانیم با کمی بررسی در انتگرال‌گیری صرفه‌جویی کنیم. اولین جمله یک مقدار ثابت و مستقل از t است. جمله باقیمانده یک تابع کسینوسی است. بنابراین p(t) پریودیک است و پریود آن T می‌باشد. دقت کنید که پریود متعلق به جریان یا ولتاژ است و نه متعلق به توان. تابع توان پریود $\frac{1}{2}$T دارد. در هر صورت می‌توانیم در صورت تمایل انتگرال را در فاصله T بگیریم تا مقدار متوسط توان به‌دست‌آید. با این وجود باید آن را به T تقسیم کنیم. می‌دانیم که مقدار متوسط امواج سینوسی و کسینوسی در یک پریود صفر است. بنابراین نیازی نیست که از معادله (۱۰) انتگرال بگیریم. متوسط جمله دوم در یک پریود T (یا $\frac{1}{2}$T) برابر صفر و متوسط اولین جمله، یک ثابت است. بنابراین:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}V_m I_m\cos(\theta - \phi)} \qquad (۱۱)$$

به‌خاطرداشته باشید که $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

بنابراین، این نتیجه مهم که در بخش قبل برای یک مدار خاص معرفی شد، برای همه حالات ماندگار سینوسی حالت معتبری است. توان متوسط برابر با نصف حاصل‌ضرب حداکثر دامنه ولتاژ در حداکثر دامنه جریان در کسینوس اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ می‌باشد. علامت این زاویه در معادله نقشی ندارد.

مثال ۲ـ۱۱

با ولتاژ حوزه زمان $v = 4\cos(\pi t/6)$ V، توان متوسط و عبارت توان لحظه‌ای حاصل از ولتاژ $\mathbf{V} = 4\angle 0°$ V در دو سر امپدانس $\mathbf{Z} = 2\angle 60°\ \Omega$ را پیدا کنید.

فیزور جریان $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = 2\angle -60°$ A و متوسط توان برابر است با:

$$P = \frac{1}{2}(4)(2)\cos 60° = 2\text{W}$$

ولتاژ حوزه زمان برابر است با:

$$v(t) = 4\cos\frac{\pi t}{6}\ \text{V}$$

جریان حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60°\right)\ \text{A}$$

و توان لحظه‌ای چنین است:

$$p(t) = 8\cos\frac{\pi t}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60°\right) = 2 + 4\cos\left(\frac{\pi t}{3} - 60°\right)\ \text{W}$$

که همگی در شکل ۵ـ۱۱ ترسیم شده‌اند. مقدار متوسط توان 2W و پریود آن، 6s، یعنی نیم پریود از جریان یا ولتاژ به وضوح دیده می‌شوند. در هر لحظه که جریان یا ولتاژ صفر باشد توان لحظه‌ای هم صفر است.

تمرین

۱۱ـ۲ با فرض فیزور ولتاژ $\mathbf{V} = 115\sqrt{2}\angle 45°$ V در دو سر امپدانس $\mathbf{Z} = 16.26\angle 19.3°\ \Omega$، عبارتی برای توان لحظه‌ای بنویسید و اگر $\omega = 50$ rad/s باشد توان متوسط را حساب کنید.
جواب: $767.5 + 813.2\cos(100t + 70.7°)$ W و 767.5 W.

بد نیست برای بررسی، دو حالت خاص را از هم جدا کنیم، یکی توان متوسط انتقالی به مقاومت ایده‌آل و دیگری به راکتور (ترکیبی فقط از خازن‌ها و القاگرها) ایده‌آل.

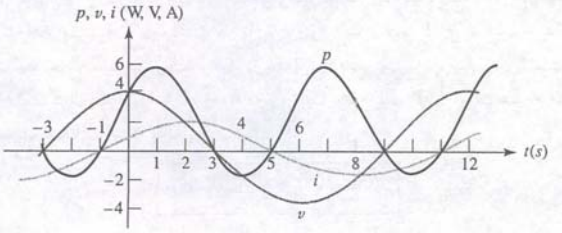
توان متوسط جذب‌شده توسط یک مقاومت ایده‌آل

اختلاف فاز زاویه‌ای بین جریان عبوری و ولتاژ دو سر یک مقاومت خالص صفر است. بنابراین:

$$P_R = \frac{1}{2}V_m I_m\cos 0 = \frac{1}{2}V_m I_m$$

یا

$$P_R = \frac{1}{2}I_m^2 R \qquad (۱۲)$$



شکل ۵ـ۱۱ منحنی‌های $v(t)$، $i(t)$ و $p(t)$ به‌صورت تابعی از زمان برای مداری که در آن ولتاژ فیزوری $\mathbf{V} = 40\angle 0°$ V به امپدانس $\mathbf{Z} = 2\angle 60°\ \Omega$ در $\omega = \frac{\pi}{6}$ rad/s اعمال شده است.

یا

$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \qquad (۱۳)$$

با دو فرمول آخر می‌توانیم توان متوسط حمل‌شده به یک مقاومت خالص را با آگاهی از جریان یا ولتاژ معین کنیم، این دو معادله ساده و مهم‌اند. متأسفانه گاهی از آن‌ها سوء استفاده می‌شود. بزرگ‌ترین اشتباه در به‌کارگیری آن‌ها هنگامی است که V_m، ولتاژ دو سر مقاومت نیست. اگر در به‌کارگیری جریان در مقاومت، معادله (۱۲)، و ولتاژ دو سر مقاومت، معادله (۱۳)، دقت کافی به عمل آید صحت عملکرد تضمین شده است. البته $\frac{1}{2}$ یادتان نرود.

توان متوسط جذب‌شده به وسیله عناصر رآکتیو خالص

توان متوسط تحویلی به هر وسیله رآکتیو خالص (بدون مقاومت) باید صفر باشد. این مطلب نتیجه وجود اختلاف فاز $90°$ بین جریان و ولتاژ است، زیرا $\cos(\theta - \phi) = \cos \pm 90° = 0$ و $P_x = 0$.

توان **متوسط** تحویل‌شده به هر شبکه متشکل از فقط القاگر و خازن نیز صفر است. توان **لحظه‌ای** فقط در لحظات مشخصی صفر است. بنابراین توان در بخشی از تناوب یا سیکل به شبکه داده شده و در قسمت دیگر از شبکه گرفته می‌شود، ولی هیچ توانی تلف نمی‌شود.

به یاد داشته باشید که ما متوسط توان انتقالی به یک مقاومت را که به وسیله یک منبع سینوسی حمل می‌گردد محاسبه می‌کنیم، ضمناً این کمیت را با توان لحظه‌ای که فرمی مشابه دارد اشتباه نگیرید.

مثال ۳ـ۱۱

توان متوسط انتقالی به امپدانس $\mathbf{Z}_L = 8 - j11\ \Omega$ را از جریان $\mathbf{I} = 5\angle 20°$ A به‌دست آورید.

می‌توان با استفاده از معادله (۱۲) حل را به سرعت به‌دست آورد. در محاسبه توان متوسط، تنها مقاومت 8Ω نقش دارد زیرا مولفه $j11\Omega$ هیچ توان متوسطی را جذب نمی‌کند. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2}(5^2)\,8 = 100\text{ W}$$

تمرین

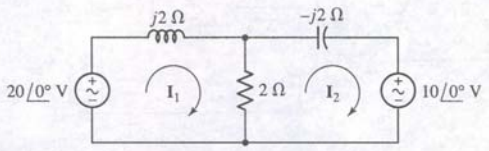
۱۱ـ۳ توان متوسط داده‌شده به امپدانس $6\angle 25°\ \Omega$ به وسیله جریان $\mathbf{I} = 2 + j5$ A چقدر است.
جواب: 78.85 W

مثال ۴ـ۱۱

توان جذب‌شده به وسیله هر سه عنصر غیرفعال شکل ۶ـ۱۱ و توان تولیدشده به وسیله هر منبع را مشخص کنید.

بدون هر تحلیلی می‌دانیم که توان متوسط جذب‌شده به وسیله دو عنصر رآکتیو برابر صفر است.

هر یک از مقادیر $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ با یکی از روش‌های آشنا، مثل روش حلقه، گره یا تجمیع قابل محاسبه است. این جریان‌ها عبارتند از:



شکل ۶ـ۱۱ توان متوسط داده‌شده به هر عنصر رآکتیو در حالت ماندگار سینوسی صفر.

$$\mathbf{I}_1 = 5 - j10 = 11.18\angle -63.43°\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = 5 - j5 = 7.071\angle -45°\text{ A}$$

جریان رو به پایین در مقاومت 2Ω برابر است با:

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = -j5 = 5\angle -90°\text{ A}$$

پس $I_m = 5A$ و توان متوسط جذب‌شده به وسیله مقاومت به راحتی از معادله (۱۲) حاصل می‌گردد:

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} (5^2)2 = 25W$$

این نتیجه می‌تواند با استفاده از معادله (۱۱) یا (۱۳) تست شود. توان متوسط جذب‌شده به وسیله هر عنصر رآکتیو صفر است. اکنون به سراغ منبع سمت چپ می‌رویم. ولتاژ $20\angle 0°$ V و جریان مربوطه‌اش، $\mathbf{I}_1 = 11.18\angle -63.43°$ قرارداد علامت عنصر فعال را تأیید می‌کنند. به این ترتیب توان تولیدشده به وسیله این منبع برابر است با:

$$P_{\text{چپ}} = \frac{1}{2} (20)\ (11.18) \cos[0° - (-63.43°)] = 50\ \text{W}$$

به طریقی مشابه، توان جذب‌شده توسط منبع سمت راست با توجه به قرارداد علامت عناصر غیرفعال عبارت‌است‌از:

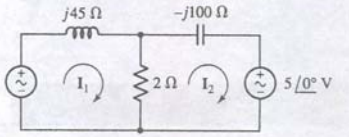
$$P_{\text{راست}} = \frac{1}{2} (10)\ (7.071) \cos(0° + 40°) = 25\ \text{W}$$

چون $25 + 25 = 50$ است، بنابراین رابطه توان صحیح است.

تمرین

۴ـ۱۱ برای مدار شکل ۷ـ۱۱ توان متوسط حمل‌شده به هر یک از عناصر غیرفعال را معین کنید. صحت پاسخ خود را با محاسبه توان تولیدی به وسیله هر یک از دو منبع تحقیق نمایید.

جواب: 37.6 mW.



شکل ۷ـ۱۱

انتقال حداکثر توان

قبلاً قضیه انتقال حداکثر توان به بار مقاومتی و منابع دارای امپدانس مقاومتی را بیان کردیم. اگر منبع تونن $\mathbf{V}_{th}$ با امپدانس تونن $\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$ به بار $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$ وصل شود، می‌توان به سادگی نشان داد که توان متوسط داده‌شده به بار هنگامی حداکثر می‌شود که داشته باشیم $R_L = R_{th}$ و $X_L = -X_{th}$، یعنی وقتی که $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$ باشد. این نتیجه را معمولاً **قضیه انتقال حداکثر توان برای حالت ماندگار سینوسی** می‌نامند.

علامت * $\mathbf{Z}^*$ مزدوج مختلط $\mathbf{Z}$ است، که از تبدیل j به $-j$ به دست می‌آید. برای توضیح بیشتر نیز به پیوست ۵ مراجعه کنید.

> یک منبع مستقل ولتاژ سری با یک امپدانس $\mathbf{Z}_{th}$، یا یک منبع جریان موازی با یک امپدانس $\mathbf{Z}_{th}$ به شرطی **حداکثر توان متوسط** را به امپدانس $\mathbf{Z}_L$ انتقال می‌دهد که $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$ باشد.

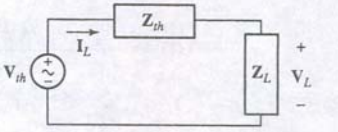
جزئیات اثبات مطلب فوق به تمرین ۱۱ محول شده است، ولی می‌توان با روشی ساده موضوع را در شکل ۸ـ۱۱ پیگیری و مشاهده کرد. امپدانس معادل تونن $\mathbf{Z}_{th}$ را می‌توان به صورت مجموع دو مولفه نوشت، یعنی $R_{th} + jX_{th}$ و به همین ترتیب $\mathbf{Z}_L$ به صورت $R_L + jX_L$ نوشته می‌شود. جریان در حلقه برابر است با:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L} = \frac{V_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

و

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_{th} \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L} = \mathbf{V}_{th} \frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L}$$

$$= \mathbf{V}_{th} \frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$



شکل ۸ـ۱۱ یک مدار تک‌حلقه‌ای برای یافتن قضیهٔ انتقال حداکثر توان در حالت ماندگار سینوسی.

اندازه $\mathbf{I}_L$ برابر است با:

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

و زاویه فاز برابر است با:

$$\angle \mathbf{V}_{th} - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

به‌طور مشابه اندازه $\mathbf{V}_L$ برابر است با:

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

و زاویه فاز آن برابر است با:

$$\angle \mathbf{V}_{th} + \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

با توجه به معادله (۱۱) عبارتی برای توان متوسط حمل‌شده به بار امپدانسی $\mathbf{Z}_L$ عبارت‌است‌از:

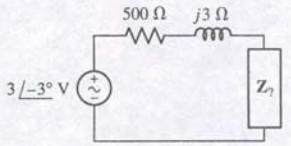
$$P = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{V}_{th}|^2\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2} \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right)\right) \qquad (۱۴)$$

برای این‌که ثابت کنیم شرط انتقال حداکثر توان متوسط به بار، $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$ است، باید دو گام دیگر برداریم. ابتدا باید مشتق معادله (۱۴) را نسبت به R_L به دست آورده و برابر صفر کنیم. دوم این‌که مشتق معادله (۱۴) نسبت به X_L هم باید برابر صفر گردد. جزئیات بیشتر را برای خواننده باقی می‌گذاریم.

مثال ۵ـ۱۱

مدار خاصی متشکل از ترکیب سری یک منبع ولتاژ سینوسی $3\cos(100t - 3°)$ V، یک مقاومت 500Ω، یک القاگر 30mH و یک امپدانس مجهول تشکیل شده است. اگر مطمئن باشیم که منبع ولتاژ حداکثر توان متوسط را به امپدانس مجهول می‌دهد، مقدار آن چقدر است؟

نمایش فیزوری مدار در شکل ۹ـ۱۱ ترسیم شده است. به خوبی دیده می‌شود که در مدار مذکور امپدانس مجهول $\mathbf{Z}_?$ با یک معادل تونن که متشکل از منبع $3\angle -3°$ V و امپدانس $500 + j3\Omega$ می‌باشد، سری است.



شکل ۹ـ۱۱ نمایش فیزوری یک مدار سری ساده متشکل از یک منبع ولتاژ سینوسی، یک مقاومت، یک القاگر و یک امپدانس مجهول.

چون ظاهر مدار شکل ۹ـ۱۱ از قبل به فرمی است تا قضیه توان متوسط حداکثر به کارگرفته شود، می‌دانیم که توان متوسط حداکثر به امپدانسی برابر با مزدوج مختلط $\mathbf{Z}_{th}$ منتقل می‌گردد، یا:

$$\mathbf{Z}_? = \mathbf{Z}_{th}^* = 500 - j3\ \Omega$$

این امپدانس را به چند طریق می‌توان به‌دست‌آورد، که ساده‌ترین آن از سری‌کردن یک مقاومت 500Ω با یک خازن $-j3\ \Omega$ حاصل می‌گردد. چون فرکانس مدار 100 rad/s است این میزان امپدانس متعلق به خازنی با ظرفیت 3.333 mF است.

تمرین

۵ـ۱۱ اگر القاگر 30mH مثال ۵ـ۱۱ با خازن $10\mu F$ تعویض شود، مقدار مولفه القاکنایی امپدانس $\mathbf{Z}_?$ چیست؟ با این فرض که $\mathbf{Z}_?$ حداکثر توان متوسط را جذب کند.

جواب: 10H.

توان متوسط برای توابع نامتناوب

حال توجه خود را به توابع نامتناوب معطوف می‌داریم. مثال عملی از یک تابع توان نامتناوب (یـا غـیر پـریودیک) کـه در آن مقدار تـوان متـوسط مـوردنظر است، تـوان خـروجی یک رادیوتلسکوپ است که به سمت یک ستاره می‌فرستد. مثال دیگر مجموع تعدادی توابع متناوب است، که هر یک پریود متفاوتی دارد، به نحوی که نمی‌توان در بین آن‌ها تابعی با پریود یا دوره متناوب مشترک پیدا کرد. مثلاً جریان:

$$i(t) = \sin t + \sin \pi t \qquad (۱۵)$$

نامتناوب است زیرا نسبت تناوب دو موج سینوسی عدد غیر گویا است. در $t = 0$، هر دو تابع صفر و صعودی‌اند. ولی جمله اول تنها در $t = 2\pi n$ صفر و صعودی است که در آن n عددی صحیح است و بنابراین تابع فوق هنگامی متناوب است که πt یا $\pi(2\pi n)$، برابر $2\pi m$ باشد، که m نیز عددی صحیح است. هیچ حل یا n و m صحیحی نمی‌توان یافت کـه در رابطه فـوق صدق کند. مقایسه تابع نامتناوب بیان‌شده در معادله (۱۵) و تابع متناوب زیر آموزنده است:

$$i(t) = \sin t + \sin 3.14t \qquad (۱۶)$$

که در آن 3.14 یک عدد اعشاری کامل است نه تقریبی از ...3.141592. با کمی کوشش می‌توان نشان داد که تناوب موج جریان فوق 100π ثانیه می‌باشد*.

مقدار متوسط توان انتقالی به یک مقاومت 1Ω با جریان متناوب معادله (۱۶) یـا مـعادله متناوب (۱۵) را می‌توان با گرفتن انتگرال روی یک فاصله نامحدود به‌دست‌آورد. البته چـون مقدار متوسط توابع ساده را غالباً می‌دانیم، می‌توان از انتگرال‌گیری‌های بسیاری اجتناب کرد. بنابراین توان متوسط ناشی از جریان معادله (۱۵) با اعمال معادله (۹) حاصل می‌گردد:

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2 \sin t \sin \pi t)\, dt$$

در این‌جا P را به صورت مجموع سه مقدار متوسط نـوشته‌ایـم. مـقدار مـتوسط $\sin^2 t$ در بی‌نهایت دوره زمانی محدود را می‌توان با تبدیل آن به $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t)$ به دست آورد که برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود. به‌طورمشابه مقدار متوسط $\sin^2 \pi t$ نیز $\frac{1}{2}$ است و جمله آخر را می‌توان به صورت دو تابع کسینوسی نوشت که هر یک مطمئناً مقدار متوسط صفر را دارند. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ W$$

برای جریان متناوب معادله (۱۶) نیز جواب مشابهی به‌دست‌می‌آید. این روش را می‌توان بـه هر تابع جریانی که مجموعی از چند تابع سینوسی با تناوب‌های مختلف است اعمال کرد، یعنی:

$$i(t) = I_{m1}\cos\omega_1 t + I_{m2}\cos\omega_2 t + \ldots + I_{mN}\cos\omega_N t \qquad (۱۷)$$

توان متوسط انتقالی به R برابر است با:

$$P = \frac{1}{2}(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \ldots + I_{mN}^2)R \qquad (۱۸)$$

اگر هر مولفه جریان فوق زاویه فاز خاصی هم داشته باشد نتیجه تغییری نخواهد کرد. این نتیجه مهم به میزان قابل توجهی به هنگام به دست‌آوردن آن، ساده است. گام‌های لازم در ایـن راستا عبارتنداز: مربع‌کردن تابع جریان، انتگرال‌گیری و حدگیری آن. نتیجه شگفت‌انگیز نیز هست، زیرا برای جریان‌هایی شبیه به معادله (۱۷) اصل تجمیع را می‌توان در مـورد تـوان هـم اعمال کرد. اگر جریان مجموع دو جریان dc یا دو جریان سینوسی هم فرکانس بـاشد، اصـل تجمیع معتبر نخواهد بود.

* $T_1 = 2\pi$ و $T_2 = 2\pi/3.14$. بـنابرایـن بـه‌دنبال مـقادیر صـحیحی مـی‌گردیم کـه در رابطه $2\pi n = 2\pi m/(3.14)$ صدق کند. پس $m = 3.14n$ یـا $(m = 314/100n)$ یـا $157n = 50m$. کوچکترین m و n ممکن عبارت‌است از $n = 50$ و $m = 157$. بـنابرایـن زمـان تـناوب بـرابـر $T = 2\pi n = 100\pi s$ یا $T = 2\pi(157/3.14) = 100\pi s$.

مثال ۶ـ۱۱

توان متوسط داده‌شده به یک مقاومت 4Ω به وسیله جریان $i_1(t) = 2\cos 10t - 3\cos 20t$ A چقدر است؟

چون دو جمله کسینوسی فرکانس‌های متفاوتی دارند، دو توان‌متوسط به‌طورجداگانه محاسبه شده و سپس با هم جمع می‌شوند. بنابراین جریان توانی برابر $\frac{1}{2}(2^2)4 + \frac{1}{2}(3^2)4 = 8 + 18 = 26$W را به مقاومت 4Ω حمل می‌کند.

مثال ۷ـ۱۱

توان متوسط داده‌شده به مقاومت 4Ω به وسیله جریان $i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t$ A چقدر است؟

در این‌جا هر دو جزء جریان فرکانسی برابر دارند، و بنابراین باید در آن فرکانس به یک جمله سینوسی ادغام شوند. پس $i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t - \cos 10t$ تنها $\frac{1}{2}(1^2) = 2$W متوسط توان به مقاومت 4Ω حمل خواهد کرد.

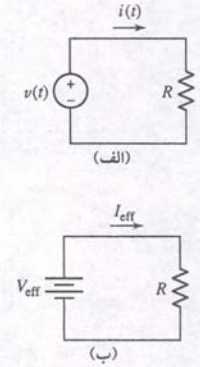
تمرین

۱۱ـ۶ یک منبع ولتاژ v_s به دو سر مقاومت 4Ω وصل است. توان متوسط جذب‌شده به وسیله مقاومت را بـــرای v_s (الف) $8\sin 200t$ V، (ب) $8\sin 200t - 6\cos(200t - 45°)$، (ج) $8\sin 200t - 4\sin 100t$V، (د) $8\sin 200t - 6\cos(200t - 45°) - 5\sin 100t + 4$V، به‌دست‌آورید.

جواب: 8.00W، 4.01W، 10.00W و 11.14W.

۱۱ـ۳ مقادیر ولتاژ و جریان موثر

همه می‌دانیم که ولتاژ پریزهای برق منزلمان یک ولتاژ سینوسی 220V با فرکانس 50Hz است. ولی 220V چه معنی می‌دهد؟ مطمئناً این یک ولتاژ لحظه‌ای نیست، چون ولتاژ لحظه‌ای ثابت نیست، این ولتاژ، دامنه هم نیست چرا که ما آن را با V_m نشان می‌دهیم، اگر آن را روی صـفحه اسیلوسکوپ کالیبره‌شده نمایش دهیم، خواهیم دید که دامنه این ولتاژ در هر یک از پریزهای منزل $220\sqrt{2}$ یا 311.12V است. مسلماً مقدار متوسط ولتاژ هم نمی‌باشد، زیرا مقدار متوسط ولتاژ سینوسی صفر است. می‌توانیم کمی به مفهوم آن، با تعریف انـدازه مـتوسط در یک نـیم سیکل مثبت یا منفی نزدیک‌تر شویم. اگر از یک ولتمتر نوع یکسوکننده برای این کار استفاده کنیم، مقدار 198V را اندازه‌گیری خواهیم کرد. 220V، **مقدار موثر** این ولتاژ سینوسی است. این مقدار نقش یک منبع در تحویل توان به بار مقاومتی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰ـ۱۱ اگر توانی که مقاومت در دو حالت (الف) و (ب) جذب مـی‌کند یکسـان بـاشد، مـقدار موثر $i(t)$ برابر با I_{eff} و مقدار موثر $v(t)$ برابر با V_{eff} است.

مقدار موثر یک موج متناوب

بگذارید مقدار موثر را برحسب جریان تعریف کنیم، هرچند که می‌توان ولتاژ را هم برای ایـن‌کار انتخاب کرد. مقدار موثر هر جریان متناوب برابر با مقدار جریان مستقیمی است که در یک مقاومت R جاری است و توان متوسط حمل‌شده به وسیله آن با توان جریان مستقیم برابر است.

به بیان دیگر، اجازه می‌دهیم تا جریان متناوب مفروضی از مقاومتی بگذرد، توان لحظه‌ای i^2R را مـعین مـی‌کنیم و سـپس مـقدار مـتوسط i^2R را در طـول یک دوره تـناوب یـا پـریود به‌دست‌می‌آوریم، که این همان توان متوسط است. آن‌گاه یک جریان dc در مدار جاری می‌کنیم و مقدار جریان مستقیم را آنقدر تنظیم می‌کنیم تا توانی به همان اندازه تولید شود. مقدار جریان مستقیم حاصل برابر با مقدار موثر جریان متناوب است. این ایده در شکل ۱۰ـ۱۱ دیده می‌شود.

اکنون می‌توان یک عبارت ریاضی کلی برای مقدار موثر $i(t)$ به سادگی به‌دست‌آورد. توان متوسط حمل‌شده به مقاومت به وسیله جریان متناوب $i(t)$ برابر است با:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

که T زمان تناوب $i(t)$ است. توان انتقالی به وسیله جریان مستقیم عبارت‌است‌از:

$$P = I_{eff}^2\ R$$

از برابری عبارات فوق و حل I_{eff} داریم:

$$\boxed{I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}} \qquad (۱۹)$$

نتیجه از مقاومت R، مستقل است و درواقع باید هم باشد. عبارت مشابهی را می‌توان برای ولتاژ متناوب به‌دست‌آورد و این کار به ترتیب با تعویض i، I_{eff} با v و v_{eff} صورت می‌گیرد.

توجه کنید که مقدار موثر به این ترتیب حاصل می‌شود که ابتدا تابع زمانی را مربع می‌کنیم، سپس متوسط تابع مربع شده در یک دوره تناوب را به‌دست‌می‌آوریم و بالاخره جذر متوسط توابع مربع‌شده را می‌گیریم. به زبان خلاصه‌تر عملیات یافتن مقدار موثر را جذر **متوسط مربع** می‌گویند، و با **rms** نشان می‌دهند.

مقدار موثر (rms) یک موج سینوسی

مهم‌ترین حالت خاص، موج سینوسی است. بیایید جریان سینوسی زیر را انتخاب کنیم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

که دارای زمان تناوب زیر است:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

و برای یافتن مقدار موثر آن رادر معادله (۱۹) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} I_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)\,dt} \\ &= I_m\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + 2\phi)\right]dt} \\ &= I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

بنابراین مقدار موثر جریان سینوسی کمیتی حقیقی و مستقل از زاویه فاز است و $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ برابر دامنه جریان می‌باشد. بنابراین جریانی مثل $\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$ A مقدار موثر 1A دارد و به همان میزان توان متوسط را به هر مقاومتی حمل خواهد کرد که جریان مستقیم 1A به آن حمل می‌نمود.

باید توجه کرد که فاکتور $\sqrt{2}$ یعنی ضریب دامنه جریان متناوب به مقدار موثر برای امواج سینوسی معتبر است. مثلاً برای موج دندان ارّه‌ای شکل ۴-۱۱، مقدار موثر برابر با مقدار حداکثر تقسیم بر $\sqrt{3}$ می‌باشد. فاکتوری که باید مقدار حداکثر بر آن تقسیم شود تا مقدار موثر به‌دست‌آید، به فرم ریاضی تابع متناوب بستگی دارد و بسته به طبیعت تابع می‌تواند گنگ یا گویا باشد.

استفاده از مقادیر موثر در محاسبه توان متوسط

استفاده از تعریف مقدار موثر rms، عبارات مربوط به توان متوسط را برای جریان و ولتاژ سینوسی با حذف فاکتور $\frac{1}{2}$ کمی ساده می‌کند. مثلاً توان متوسط داده‌شده به مقاومت R به وسیله جریان سینوسی برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

چون $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ است مقدار توان را چنین می‌توان نوشت:

$$P = I_{eff}^2\ R \qquad (۲۰)$$

عبارات آشنای دیگر توان نیز ممکن‌است به صورت تابعی از I_{eff} نوشته شوند:

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi) \qquad (۲۱)$$

$$P = \frac{V_{eff}^2}{R} \qquad (۲۲)$$

گرچه موفق شدیم فاکتور $\frac{1}{2}$ را حذف کنیم ولی اکنون باید ببینیم که یک کمیت سینوسی برحسب دامنه‌اش مشخص شده است یا برحسب مقدار موثرش. در زمینه‌های انتقال انرژی و توزیع آن و ماشین‌های دورانی غالباً مقدار موثر و در زمینه‌های الکترونیک و مخابرات غالباً دامنه و فاز به کارمی‌رود. در این کتاب فرض بر این‌است‌که مقادیر برحسب دامنه بیان شوند مگر در مواردی که عبارت rms صریحاً به کاررفته باشد.

در حالت ماندگار سینوسی فیزورهای ولتاژ و جریان ممکن‌است برحسب مقادیر موثر یا دامنه‌ها باشند. دو نوع عبارت فقط در ضریب $\sqrt{2}$ با یکدیگر اختلاف دارند. ولتاژ $50\angle 30^\circ$ V برحسب دامنه بیان شده است، ما می‌توانیم مقدار موثر آن را به صورت $35.4\angle 30^\circ$ V هم بیان کنیم.

مقدار موثر در مدارهای چندفرکانسی

برای تعیین مقدار موثر یک موج متناوب یا نامتناوب که از مجموع تعدادی موج سینوسی با فرکانس‌های متفاوت تشکیل شده، می‌توان از رابطه توان متوسط در معادله (۱۸) استفاده کرد. ما آن را برحسب مقادیر موثر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P = (I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + \ldots + I_{Neff}^2)R \qquad (۲۳)$$

در این رابطه دیده می‌شود که مقدار موثر یک جریان متشکل از هر تعداد جریان سینوسی با فرکانس‌های مختلف را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$I_{eff} = \sqrt{I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + \ldots + I_{Neff}^2} \qquad (۲۴)$$

نتایج نشان می‌دهد که اگر یک موج سینوسی 5A rms با فرکانس 60Hz از مقاومتی عبور کند، توان متوسط $5^2(2) = 50$W به وسیله مقاومت جذب می‌گردد. اگر جریان دیگری مثلاً 3A rms در 120Hz وجود داشته باشد، توان جذب‌شده $3^2(2) + 50 = 68$W خواهد بود. اما با به کارگیری معادله (۲۴) می‌بینیم که مقدار موثر مجموع جریان‌های 60 و 120Hz برابر 5.831A است. بنابراین $P = 5.831^2(4) = 68$W بوده که مثل قبل می‌باشد. با این وجود اگر جریان دوم هم در 60Hz باشد، مقدار موثر مجموع دو جریان 60Hz، بسته به فاز نسبی دو مولفه جریان چیزی بین 8 W و 128 W است.

این حقیقت که مقدار موثر برحسب یک کمیت dc معادل تعریف می‌شود، موجب می‌شود که معادلات توان مدارهای مقاومتی شبیه معادلات توان به‌کاررفته در تحلیل dc گردد.

توجه کنید که مقدار موثر کمیت dc به نام K، برابر است با K، نه $\frac{K}{2}$

تمرین

۱۱ـ۷ مقدار موثر هر یک از ولتاژهای متناوب زیر را محاسبه کنید:

(الف) $6\cos 25t$، (ب) $6\cos 25t + 4\sin(25t + 30^\circ)$، (ج) $6\cos(25t) + 5\cos^2(25t)$

و (د) $6\cos 25t + 5\sin 30t + 4$ V.

جواب: 4.24V، 6.16V، 5.23V و 6.82V.

تحلیل کامپیوتری

برای محاسبه کمیت‌ها چند تکنیک مفید در PSpice وجود دارد. خصوصاً توابع موجود در probe امکان ترسیم توان لحظه و محاسبه توان متوسط را فراهم می‌سازد. مثلاً مدار ساده تقسیم ولتاژ شکل ۱۱ـ۱۱ را ملاحظه کنید که با یک موج سینوسی 60Hz با دامنه $115\sqrt{2}$ راه‌اندازی شده است. ما با اجرای شبیه‌سازی پاسخ گذرا در یک دوره تناوب موج ولتاژ، یعنی $\frac{1}{60}$s، آغاز می‌کنیم.

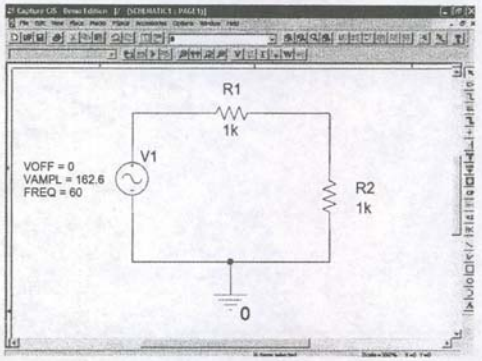
در شکل ۱۲ـ۱۱ جریان همراه با توان لحظه‌ای تلف‌شده در مقاومت R_1 با به‌کارگیری فرمان Add plot to window تحت plot ترسیم شده است. توان لحظه‌ای متناوب است. مقدار متوسط آن غیرصفر و اوج 6.61W می‌باشد. ساده‌ترین راه به‌کارگیری probe در تهیه توان متوسط $3.305\text{ W} = (81.3\times 10^{-3})\,(162.6\,\frac{1000}{1000+1000})\,\frac{1}{2}$ استفاده از تابع "متوسط جاری" است. با ظاهر شدن جعبه محاوره Add Trace (Add و Trace)، عبارت زیر را در پنجره Trace Expression، تایپ کنید:

```
AVG(I(R1) * I(R1) * 1000)
```

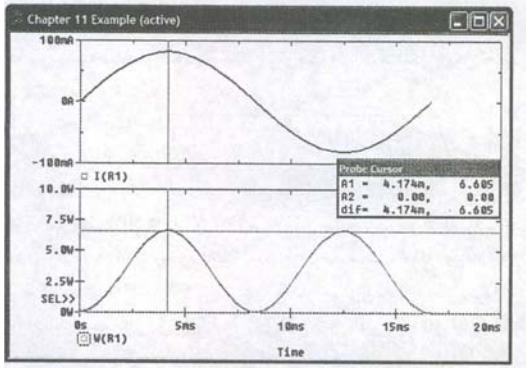
طبق شکل ۱۳ـ۱۱، توان متوسط در یک یا دو دورهٔ تناوب 3.305 W است که با محاسبات دستی نیز همخوانی دارد. probe امکان محاسبه متوسط روی یک فاصلهٔ زمانی دلخواه را نیز با تابع داخلی AVGX فراهم می‌سازد. مثلاً برای استفاده از این تابع در محاسبهٔ متوسط توان در یک دورهٔ تناوب که در این‌جا $\frac{1}{120} = 8.33$ msec است، عبارت زیر را وارد کنید:

```
AVGX(I(R1) * I(R1) * 1000, 8.33m)
```

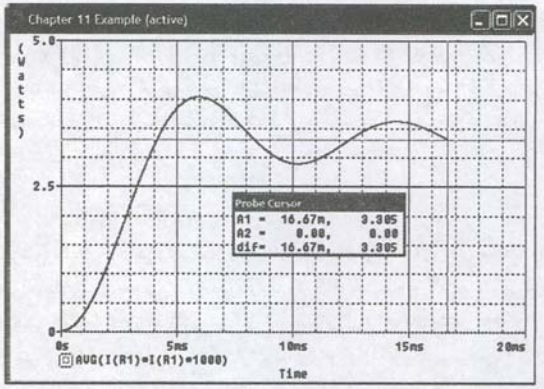
هر یک از دو روش در انتهای نمودار به مقدار 3.305W ختم می‌شوند.



شکل ۱۱ـ۱۱ یک مدار ساده تقسیم ولتاژ.



شکل ۱۲ـ۱۱ جریان و توان لحظه‌ای مربوط به مقاومت R_1.



شکل ۱۳ـ۱۱ توان متوسط جاری مصرفی به‌وسیله مقاومت R_1.

۱۱ـ۴ توان ظاهری و ضریب توان

به لحاظ تاریخی، معرفی مفاهیم توان ظاهری و ضریب توان در صنعت تولید برق ریشه دارند، زیرا در آن‌جا مقدار متناوبی انرژی از یک نقطه به نقطه دیگر انتقال می‌یابد، و راندمان این انتقال مستقیماً با هزینه تولید نسبت مستقیم دارد: هزینه‌ای که نهایتاً بر دوش مصرف‌کننده است. اگر مصرف‌کننده بار ناجوری داشته باشد که موجب کاهش بازده انتقال شود، باید به ازای هر کیلووات‌ساعت مصرف واقعی پول بیشتری بپردازد. به‌طورمشابه اگر مشتری از نیروگاه بخواهد در تجهیزات انتقال انرژی سرمایه‌گذاری بیشتری نماید باز هم باید پول بیشتری بپردازد. مگر این‌که شرکت دست‌ودل باز باشد و بخواهد ضرر کند.

توان ظاهری تنها به توابع تحریک و پاسخ سینوسی محدود نیست. می‌توان برای هر جریان و ولتاژی، با تعیین حاصل‌ضرب مقادیر موثر آن‌ها مقدار توان ظاهری را معین کرد.

در آغاز اجازه بدهید **توان ظاهری** و **ضریب توان** را تعریف کرده و سپس به‌صورخلاصه نشان دهیم که چگونه این جملات به وضعیت اقتصادی مرتبط می‌گردد. فرض می‌کنیم ولتاژ سینوسی زیر:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

به شبکه‌ای اعمال شده باشد و جریان سینوسی حاصل برابر باشد با:

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

بنابراین زاویه فازی که ولتاژ از جریان پیش است برابر با $(\theta - \phi)$ می‌باشد. توان متوسط داده‌شده به شبکه با فرض قرارداد علامت عناصر غیرفعال در پایانه‌های ورودی را می‌توان برحسب مقادیر حداکثر چنین نوشت:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

یا برحسب مقادیر موثر چنین است:

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi)$$

اگر ولتاژ اعمال شده و پاسخ جریان مربوطه کمیاتی dc باشند، توان متوسط حمل‌شده به شبکه به سادگی با ضرب ولتاژ در جریان به‌دست‌می‌آید. با اعمال این تکنیک dc به مسائل سینوسی، مقداری برای توانِ جذب‌شده به‌دست‌می‌آید که "ظاهراً" باید از ضرب $V_{eff}I_{eff}$ حاصل گردد. در هر صورت این ضرب مقادیر موثر ولتاژ و جریان توان متوسط را نمی‌دهد و بنابراین ما آن را **توان ظاهری** می‌نامیم. به لحاظ ابعادی، توان ظاهری باید برحسب همان واحد توان

حقیقی اندازه‌گیری شود زیرا $\cos(\theta - \phi)$ بُعدی ندارد، ولی به خاطر پرهیز از اشتباه، از عبارت ولت ـ آمپر یا VA برای توان ظاهری استفاده می‌شود. چون $\cos(\theta - \phi)$ کوچک‌تر از 1 است، بنابراین اندازه توان حقیقی هرگز بزرگ‌تر از توان ظاهری نخواهد بود.

نسبت توان حقیقی (یا متوسط) به توان ظاهری را **ضریب توان** می‌گویند و به‌طور اختصار با PF نشان می‌دهند. به این ترتیب:

$$\text{PF} = \frac{\text{توان متوسط}}{\text{توان ظاهری}} = \frac{\text{P}}{V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}$$

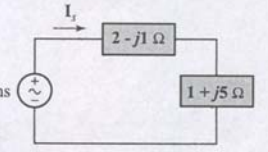
در حالت سینوسی، ضریب توان در واقع همان $\cos(\theta - \phi)$ بوده و $(\theta - \phi)$ زاویه‌ای است که ولتاژ به آن میزان از جریان پیش است. به همین دلیل معمولاً زاویه $(\theta - \phi)$ اغلب زاویه PF خوانده می‌شود.

در مدارهایی که فقط از بار مقاومتی تشکیل شده‌اند، ولتاژ و جریان همفاز، $(\theta - \phi)$ برابر صفر، و PF مساوی با 1 است. به بیان دیگر توان ظاهری و توان متوسط برابرند. با این وجود PF واحد برای مدارهای القایی و خازنی نیز امکان‌پذیر است و این در حالتی است که مقادیر عناصر مذکور و فرکانس کاری به دقت انتخاب شوند تا یک امپدانس ورودی با زاویه فاز صفر تولید گردد. بار خالص راکتیو، یعنی باری که هیچ مقاومتی ندارد، اختلاف فاز $\pm 90°$ را بین ولتاژ و جریان به‌وجود می‌آورد و بنابراین PF برابر صفر خواهد بود.

شبکه‌ها کلاً بین دو حد قرار دارند یعنی PF آن‌ها می‌تواند بین صفر و یک باشد. یک PF برابر با مثلاً 0.5، باری را نشان می‌دهد که دارای زاویه فاز امپدانس ورودی $60°$ یا $-60°$ است که اولی بیانگر بار القایی است، زیرا ولتاژ به اندازه $60°$ از جریان پیش است، درحالی‌که دومی به بار خازن متعلق است. رفع شبهه در تعیین دقیق نوع بار با مراجعه به پیش‌بودن PF یا پس‌بودن آن قابل حل است. جملات پیشفاز و پسفاز، فاز جریان نسبت به ولتاژ را بیان می‌کنند. بنابراین یک بار القایی دارای PF پسفاز و یک بار خازنی هم PF پیشفاز دارد.

مثال ۸ـ۱۱

مقادیر توان متوسط داده‌شده به هر یک از دو بار در شکل ۱۴ـ۱۱ را محاسبه کنید. توان ظاهری تولیدشده به وسیله منبع و ضریب توان بار کل را به‌دست آورید.



شکل ۱۴ـ۱۱ مداری که ما در آن به جست‌وجوی توان متوسط انتقالی به هر عنصر، توان ظاهری تولیدی به‌وسیله منبع و ضریب توان بار ترکیبی هستیم.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

توان متوسط به توانی گفته می‌شود که به وسیله اجزای مقاومتی بار کشیده می‌شود. توان ظاهری حاصل‌ضرب ولتاژ موثر در جریان موثر ترکیب بار است.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

ولتاژ موثر 60 V rms است و در دو سر بار ترکیبی برابر است با $2\text{-j}+1+\text{j}5=3+\text{j}4\ \Omega$.

- **ارائه طرح.**

تحلیل ساده فیزوری جریان را مشخص می‌کند. با دانستن جریان و ولتاژ ما خواهیم توانست توان را محاسبه کنیم. این دو کمیت برای یافتن ضریب توان می‌توانند استفاده شوند.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

توان متوسط با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\text{P} = V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(\text{ang V} - \text{ang I})$$

توان ظاهری در واقع $V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}$ است. ضریب توان از تقسیم این دو کمیت به‌دست می‌آید:

$$\text{PF} = \frac{\text{توان متوسط}}{\text{توان ظاهری}} = \frac{\text{P}}{V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است؟**

ما I_{eff} را لازم داریم:

$$\mathbf{I}_s = \frac{60\angle 0°}{3 + \text{j}4} = 12\angle -53.13°\ \text{Arms}$$

به این ترتیب $I_{\text{eff}} = 12\text{A rms}$ و $\text{ang } \mathbf{I}_s = -53.13°$ خواهد بود.

- **اقدام به حل**

توان انتقال‌یافته به بار بالایی برابر است با:

$$P_{\text{upper}} = I_{\text{eff}}^2 R_{\text{top}} = (12)^2(2) = 288\ \text{W}$$

توان انتقال‌یافته به بار سمت راست برابر است با:

$$P_{\text{lower}} = I_{\text{eff}}^2 R_{\text{right}} = (12)^2(1) = 144\ \text{W}$$

خود منبع یک توان ظاهری $V_{\text{eff}}I_{\text{eff}} = (60)(12) = 720\ \text{VA}$ را تحویل می‌دهد.

بالاخره ضریب توان ترکیب بارها با لحاظ ولتاژ و جریان مربوط به بارهای ترکیبی حاصل می‌شود. البته این ضریب توان با ضریب توان منبع یکی است:

$$\text{PF} = \frac{P}{V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6 \text{ پسفاز}$$

چون بار ترکیبی القایی است.

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟**

توان کل حمل‌شده به منبع $432\ \text{W} = 144 + 288$ است. توان تولیدشده به وسیله منبع برابر است با:

$$P = V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(ang\ \text{V} - ang\ \text{I}) = (60)(12)\cos(0 + 53.13°) = 432\ \text{W}$$

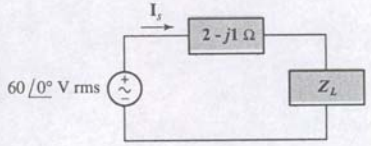
می‌بینیم بالانس توان برقرار است.

می‌توانید ترکیب بار امپدانسی را به صورت $5\angle 53.1°\ \Omega$ بنویسید، ضریب PF را $53.1°$ به‌دست آورید، و بنابراین داریم $\text{PF} = \cos 53.1° = 0.6$. ضمناً بار ترکیبی نیز القایی است و بنابراین PF به اندازه 0.6 پسفاز است.

تمرین

۸ـ۱۱ برای مدار شکل ۱۵ـ۱۱ ضریب توان بارهای ترکیبی را اگر $Z_L = 10\Omega$ باشد، به‌دست آورید.

جواب: 0.9966 پیشفاز



شکل ۱۵ـ۱۱

۵ـ۱۱ توان مختلط

گر توان را کمیتی مختلط تصور کنیم، محاسبه مربوط به توان تا حدی ساده‌تر می‌شود. خواهیم ید که اندازه توان مختلط همان توان ظاهری و قسمت حقیقی آن توان متوسط را می‌دهد. میت جدید یعنی بخش موهومی توان مختلط را **توان راکتیو** می‌خوانیم.

توان مختلط را بر حسب ولتاژ کلی سینوسی $V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}/\theta$ در دو سر پایانه‌ها و جریان ینوسی کلی $I_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}/\phi$ که در یکی از پایانه‌ها جاری است و قرارداد علامت عنصر یرفعال را تأیید می‌کند، تعریف می‌نماییم. توان متوسط جذب‌شده به وسیله این شبکه دو ایانه برابر است با:

$$\text{P} = V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(\theta - \phi)$$

شابه با روشی که در تعریف فیزورها داشتیم برای کمیت مختلط از فرمول اولر استفاده ی‌کنیم. P به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{P} = V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\text{Re}\{e^{j(\theta - \phi)}\}$$

$$\text{P} = \text{Re}\{V_{\text{eff}}e^{j\theta}I_{\text{eff}}e^{-j\phi}\}$$

دو فاکتور اول در کروشه معادله فوق فیزور ولتاژ، ولی دو فاکتور دوم به دلیل وجود علامت منفی در زاویه به فیزور جریان تعلق ندارد. این علامت در فیزور جریان وجود ندارد. یعنی فیزور جریان عبارت‌است‌از:

$$\mathbf{I}_{eff} = I_{eff}e^{j\phi}$$

بنابراین از مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\dot{\mathbf{I}}_{eff} = I_{eff}e^{-j\phi}$$

به این ترتیب:

$$P = Re\{\mathbf{V}_{eff}\dot{\mathbf{I}}_{eff}\}$$

اکنون توان مختلط S را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\dot{\mathbf{I}}_{eff} \qquad (۲۵)$$

اگر ابتدا فرم قطبی یا نمایی توان مختلط را بررسی کنیم:

$$\mathbf{S} = V_{eff}I_{eff}e^{j(\theta - \phi)}$$

واضح است که اندازه S، یعنی $V_{eff}I_{eff}$ همان توان ظاهری و زاویه S، یعنی $(\theta - \phi)$ نیز زاویه PF است (زاویه‌ای که ولتاژ از جریان پیش است).

در فرم قائم یا دکارتی داریم:

$$\mathbf{S} = P + jQ \qquad (۲۶)$$

که P مثل قبل توان متوسط است. بخش موهومی توان با Q نشان داده شده است و به آن توان رآکتیو می‌گویند. ابعاد Q مثل توان حقیقی P، توان مختلط S، و توان ظاهری $|S|$ است. برای پرهیز از هر گونه اشتباه با دیگر کمیت‌ها واحد Q را به صورت ولت آمپر رآکتیو (VAR) تعریف می‌کنیم. از معادلات (۲۵) و (۲۶) دیده می‌شود که:

$$Q = V_{eff}I_{eff}\sin(\theta - \phi) \qquad (۲۷)$$

تفسیر فیزیکی توان رآکتیو، تغییر زمانی مبادله انرژی بین منبع (مثل شرکت برق) و عناصر بار رآکتیو است (یعنی خازن‌ها و القاگرها). این عناصر به تناوب شارژ و دشارژ می‌شوند و باعث می‌شود به ترتیب جریان از منبع و به منبع جاری شود.

کمیت‌های فوق در جدول ۱ـ۱۱ برای سهولت کار جمع‌آوری شده‌اند.

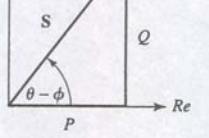
جدول ۱ـ۱۱ خلاصه کمیت‌های مرتبط با توان مختلط.

کمیت	نماد	فرمول	واحدها
توان متوسط	P	$V_{eff}I_{eff}\cos(\theta - \phi)$	وات (W)
توان رآکتیو	Q	$V_{eff}I_{eff}\sin(\theta - \phi)$	ولت ـ آمپر ـ رآکتیو (VAR)
توان مختلط	$\mathbf{S}$	$P + jQ$	
		$V_{eff}I_{eff}/\theta - \phi$	ولت ـ آمپر (VA)
		$\mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff}$	
توان ظاهری	$\|S\|$	$V_{eff}I_{eff}$	ولت ـ آمپر (VA)

مثلث توان

نمایش گرافیکی به‌کاررفته برای توان مختلط را **مثلث توان** می‌گویند و در شکل ۱۶ـ۱۱ دیده می‌شود. نمودار نشان می‌دهد که فقط دو توان از سه توان همیشه مورد نیاز است و سومی را می‌توان با روابط مثلثاتی معین کرد. اگر مثلث توان در نیمه اول محورها $(0 < \theta - \phi)$ باشد،

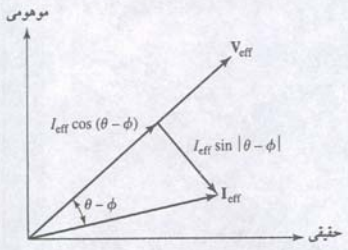
علامت توان رآکتیو طبیعت بار غیرفعال مربوط به $\mathbf{V}_{eff}$ و $\mathbf{I}_{eff}$ را نشان می‌دهد. اگر بار القایی باشد آن‌گاه $(\theta - \phi)$ زاویه‌ای بین 0 و 90° است. سینوس این زاویه مثبت و توان رآکتیو نیز مثبت می‌باشد. توان رآکتیو بار خازن منفی است.



شکل ۱۶ـ۱۱ نمایش مثلث توان مختلط.

ضریب توان پسفاز است (مربوط به بار القایی خواهد بود) و اگر مثلث توان در ربع چهارم باشد $(0 < \theta - \phi)$، ضریب توان پیشفاز خواهد بود (مربوط به خازن). بنابراین مقدار قابل توجهی اطلاعات کیفی مربوط به بار با یک نظر در دسترس می‌باشد.

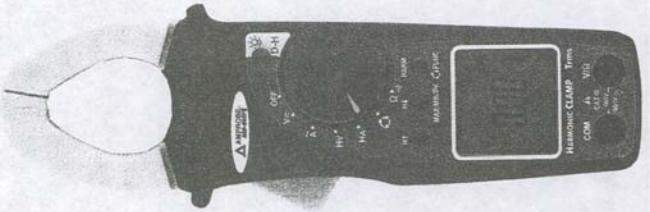
تفسیر دیگری از توان رآکتیو را با ساخت نمودار فیزوری $\mathbf{V}_{eff}$ و $\mathbf{I}_{eff}$ مطابق شکل ۱۷ـ۱۱ می‌توان ارائه نمود. اگر فیزور جریان به دو مولفه تجزیه شود، که یکی همفاز با ولتاژ و اندازه $\mathbf{I}_{eff}\cos(\theta-\phi)$ و دیگری با اختلاف 90° نسبت به ولتاژ و اندازه $\mathbf{I}_{eff}\sin|\theta-\phi|$، آن‌گاه واضح است که توان حقیقی حاصل‌ضرب دامنه فیزور ولتاژ در مولفه جریان همفاز با ولتاژاست. حاصل‌ضرب دامنه ولتاژ در مولفه‌ای از جریان که با ولتاژ 90° اختلاف‌فاز دارد توان رآکتیو نامیده‌می‌شود. مولفه‌ای از یک فیزور که با فیزور دیگر 90°اختلاف فاز دارد را مولفه عمودی گویند. بنابراین Q در واقع حاصل‌ضرب $\mathbf{V}_{eff}$ و مولفه عمودی $\mathbf{I}_{eff}$ است. Q را **توان عمودی** یا **ربعی** هم می‌خوانند.



شکل ۱۷ـ۱۱ فیزور جریان $\mathbf{I}_{eff}$ به دو مولفه تفکیک شده است. یکی همفاز با فیزور ولتاژ $\mathbf{V}_{eff}$ و دیگری با اختلاف فاز 90° با فیزور ولتاژ. این مولفه را مولفه عمودی می‌گویند.

اندازه گیری توان

یک وات‌متر توان حقیقی متوسط مصرفی بار P را می‌خواند، و وارمتر هم توان رآکتیو متوسط Q را که بار می‌کشد، نشان می‌دهد. می‌توان هر دو کمیت را به روشی مشابه پیدا کرد و می‌توان توان ظاهری و ضریب توان را هم اندازه گیری نمود (شکل ۱۸ـ۱۱).



شکل ۱۸ـ۱۱ یک توان‌سنج دیجیتال چنگکی ساخت Amprobe برای اندازه‌گیری جریان AC تا 400 A و ولتاژ تا 600 V.

کاربرد عملی

اصلاح ضریب توان

وقتی صورت‌حساب برق به وسیله کمپانی مولد برق به مشترکین بزرگ صنعتی داده می‌شود، کمپانی معمولاً ضریب PF را در صورت‌حساب مشتری قید می‌کند. تحت این وارده در مواردی که ضریب کمتر از مقدار معین باشد، که معمولاً پسفاز 0.85 است، جریمه‌ای به مشترک تعلق می‌گیرد. به دلیل طبیعت بارهای صنعتی، توان صنعتی مصرفی به ندرت PF پیشفاز است. دلایل متعددی برای جریمه فوق توسط کمپانی‌های تولیدکننده وجود دارد. اول این‌که قابلیت حمل جریان بیشتر در داخل ژنراتورها باید تعبیه شود تا جریان بیشتری را که مشتریان در PFهای پایین با ولتاژ و توان ثابت نیاز دارند تهیه نمایند. دلیل دیگر اتلاف بیشتر توان در سیستم انتقال و توزیع برق است.

در تلاشی برای کاهش اتلاف و تشویق مشتریان در کار با PFهای بالاتر، معمولاً جریمه‌هایی در حد \$0.22/kVAR برای هر kVAR علاوه بر مقدار محاسبه‌شده درنظرگرفته می‌شود که 0.62 برابر متوسط توان مورد تقاضا (دیماند) است:

$$\mathbf{S} = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62)$$

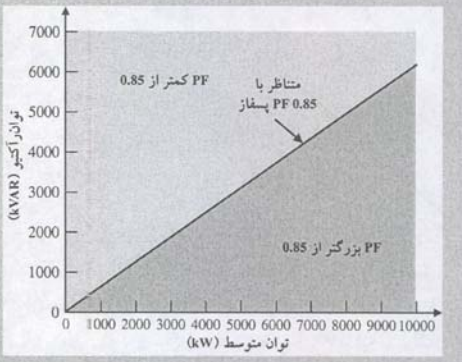
$$= P(1.177/\underline{31.8^\circ})$$

این عدد برای PF=0.85 است و برابر است با $\cos 31.8^\circ = 0.85$ که در آن Q مثبت می‌باشد (شکل ۱۹ـ۱۱). مشتریانی که زاویه PF آن‌ها بزرگ‌تر از این مقدار باشد مشمول جریمه‌اند.

تنظیم توان رآکتیو لازم معمولاً از طریق نصب تأسیسات خازنی جبران‌ساز در محل و موازی با بار (معمولاً در خارج امکانات مشتری) صورت می‌گیرد. می‌توان نشان داد که مقدار ظرفیت از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \frac{P(\tan\theta_{old} - \tan\theta_{new})}{\omega V^2_{rms}} \qquad (۲۸)$$

که در آن ω همان فرکانس، θ_{old} همان زاویه PF فعلی، θ_{new}،



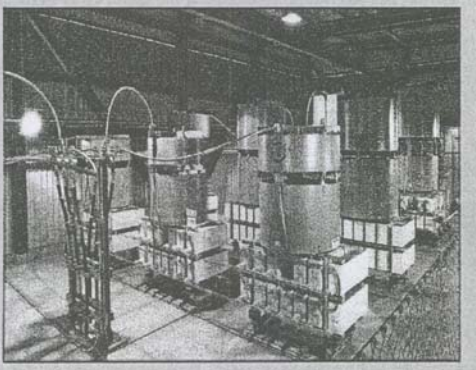
شکل ۱۹ـ۱۱ نموداری که نسبت توان رآکتیو را به توان متوسط برای ضریب توان 0.85 پسفاز نشان می‌دهد.

زاویه PF موردنظر است. در هر صورت به منظور سهولت بانک خازن جبران‌ساز با تغییر افزایشی خاصی برحسب واحدهای kVAR ساخته می‌شوند. مثالی از چنین تأسیسات در شکل ۲۰ـ۱۱ ملاحظه می‌گردد.

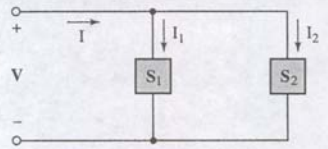
اکنون بیایید مثال خاصی را ملاحظه کنیم. یک مجموعه صنعتی دارای دیماند پیک ماهانه 5000 kW است و نیاز رآکتور آن نیز 6000 kVAR می‌باشد. با توجه به موارد فوق، هزینه سالانه این مشترک با احتساب جرائم PF چقدر است؟ اگر جبران از طریق هزینه $2390 در هر 1000 kVAR افزایش و $3130 به ازای هر 2000 kVAR افزایش یابد، بهترین راه حل اقتصادی برای این مشتری چیست؟

PF تأسیسات، زاویه توان مختلط S است، که در این‌جا 5000 + J6000 kVAR می‌باشد. پس، زاویه برابر است با $\tan^{-1}6000/5000 = 50.19°$ و PF برابر با 0.6ϕ پسفز است. معیار توان رآکتیو محاسبه‌شده 0.62 ضربدر حداکثر دیماند برابر است با 0.62(5000) = 3100 kVAR. بنابراین مجموعه صنعتی به میزان 6000 - 3100 = 2900 kVAR توان رآکتیو بیشتری را نسبت به میزان مجاز معاف از جریمه کمپانی تولیدکننده، مصرف می‌نماید. این میزان معادل $7656 = (0.22)(2900)12 بیش از هزینه برق سالیانه می‌باشد.

اگر مشترک بخواهد تأسیسات را 1000 kVAR افزایش دهد (به قیمت $2390)، تون رآکتیو اضافی به 2900 - 1000 = 1900 kVAR کاهش می‌یابد. بنابراین جریمه سالانه کنون $5016 = (0.22)(1900)12 خواهد شد پس هزینه سال جاری $7406 = $2390 + $5016 می‌گردد و در واقع $250 صرفه‌جویی صورت می‌گیرد. اگر مشتری 2000 kVAR تأسیسات اضافه کند (به قیمت $3130)، توان رآکتیو مصرفی اضافی 900 kVAR = 2000 - 2900 می‌باشد بنابراین جریمه سالانه کنون $2376 = (0.22)(900)12 خواهد شد. هزینه کل در سال اول $5506 = $3130 + $2376 بوده و صرفه‌جویی آن $2150 خواهد شد. با این وجود اگر مشتری 3000 kVAR تأسیسات خازنی اضافه کند در سال اول $14 صرفه‌جویی بیشتری نسبت به 2000 kVAR خواهد داشت.



شکل ۲۰ـ۱۱ تأسیسات خازنی جبرانساز.



شکل ۲۱ـ۱۱ مدار به‌کاررفته برای نشان‌دادن توان مختلط دریافتی به وسیله دو بار موازی که برابر با مجموع توان‌های مختلط آن‌ها است.

به سادگی می‌توان نشان داد که توان مختلط حمل‌شده به چند بار متصل به هم برابر با مجموع توان‌های مختلط داده‌شده به تک‌تک بارها است و به چگونگی اتصال آن‌ها ارتباطی ندارد. مثلاً دوبار موازی در شکل ۲۱ـ۱۱ را ملاحظه نمایید. اگر مقادیر rms درنظرگرفته شوند، توان مختلط حاصل از بار ترکیبی برابر است با:

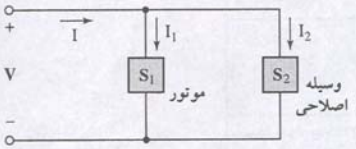
$$S = VI^* = V(I_1 + I_2)^* = V(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

و بنابراین:

$$S = V\dot{I}_1 + V\dot{I}_2$$

مثال ۹ـ۱۱

یک مصرف‌کننده صنعتی یک موتور القایی 50kW (67.1hp) را با پسفاز PF = 0.8 به کارگرفته است. ولتاژ منبع 230 Vrms است. با هدف مصرف برق کمتر، مشتری مایل است PF خود را تا 0.95 پسفاز بالا ببرد. بهترین راه‌حل را ارائه کنید.



شکل ۲۲ـ۱۱

گرچه با افزایش توان حقیقی و ثابت نگه‌داشتن توان رآکتیو می‌توان PF را افزایش داد ولی این‌کار موجب کاهش صورت‌حساب نشده و مورد قبول مشتری نیست. باید بار رآکتیو خالصی به سیستم اضافه نمود. البته واضح است که این افزایش نیز باید موازی باشد، زیرا ولتاژ تحویلی به موتور نباید تغییر کند. لذا مدار شکل ۲۲ـ۱۱ در این‌جا قابل استفاده است به‌شرطی‌که S_1 را توان مختلط موتور القایی و S_2 را توان مختلط وسیله اصلاحی بدانیم.

توان مختلط تولیدی به موتور القایی باید بخش حقیقی 50kW و زاویه $\cos^{-1}(0.8)$ یا $36.9°$ را داشته باشد. پس:

$$S_1 = \frac{50\angle 36.9°}{0.8} = 50 + j37.5 \text{ kVA}$$

برای دستیابی به PF = 0.95، توان مختلط کل باید چنین باشد:

$$S = \frac{50}{0.95}\angle\cos^{-1}(0.95) = 50 + j16.43 \text{ kVA}$$

بنابراین توان مختلط مصرفی به وسیله بار اصلاحی برابر:

$$S_2 = -j21.07 \text{ kVA}$$

است. بار امپدانسی Z_2 را می‌توان طی چند گام ساده به‌دست‌آورد. ما زاویه $0°$ را برای منبع ولتاژ برمی‌گزینیم. بنابراین جریان کشیده شده به وسیله Z_2 برابر است با:

$$\dot{I}_2 = \frac{S_2}{V} = \frac{-j21,070}{230} = -j91.6A$$

یا

$$I_2 = j91.6A$$

بنابراین:

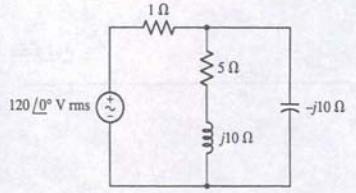
$$Z_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{230}{j91.6} = -j2.51\ \Omega$$

اگر فرکانس کاری 60Hz باشد، این بار به وسیله یک خازن $1056\mu F$ موازی با موتور قابل تهیه است. در هر صورت هزینه اولیه، نگهداری و استهلاک باید با کاهش صورت‌حساب الکتریسیته همخوانی داشته باشد.

تمرین

۹ـ۱۱ برای مدار شکل ۲۳ـ۱۱ توان مختلط جذب‌شده به‌وسیله (الف) مقاومت 1Ω، (ب) امپدانس -j10Ω، (ج) امپدانس j10Ω + 5 و (د) منبع، را به‌دست‌آورید.

جواب: 0 + j0 VA؛ 26.6 - j1331 VA؛ 532 + j1065 VA و -559 + j266 VA.



شکل ۲۳ـ۱۱

۶ـ۱۱ مقایسه واژه‌های توان

در این فصل با آرایه‌ای از واژه‌های توان آشنا شدیم، بررسی همه آن‌ها به صورت یک‌جا بد نخواهد بود. توصیف خلاصه‌ای برای هر یک در جدول ۲ـ۱۱ آورده شده است.

جدول ۲-۱۱ خلاصه‌ای از واژه‌های به‌کاررفته.

عبارات به‌کاررفته	سمبل	واحد	توصیف
توان لحظه‌ای	$p(t)$	W	$p(t) = v(t)i(t)$. مقدار توان در لحظه خاصی از زمان است. این توان حاصل‌ضرب فیزوری ولتاژ و جریان نیست.
توان متوسط	P	W	در حالت ماندگار سینوسی، $P=\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta-\phi)$، که θ زاویه ولتاژ و ϕ زاویه جریان است. راکتانس در P نقشی ندارد.
مقدار موثر یا rms	V_{rms} یا I_{rms}	V یا A	مثلاً به صورت $I_{eff} = 1/T \int_0^T i^2\,dt$ تعریف می‌شود. اگر $i(t)$ سینوسی باشد، آن‌گاه $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$ خواهد بود.
توان ظاهری	$\|S\|$	VA	$\|S\| = V_{eff}I_{eff}$ بوده و حداکثر مقدار توان متوسط می‌تواند باشد. $P = \|S\|$ فقط برای بارهای خالص مقاومتی است.
ضریب توان	PF	ندارد	نسبت توان متوسط به ظاهری است. اگر بار از نوع مقاومتی خالص باشد $PF = 1$ است و برای بار راکتیو خالص مقدار آن $PF = 0$ می‌باشد.
توان راکتیو	Q	VAR	به معنی انرژی جاری‌شده به و از بار راکتیو است.
توان مختلط	S	VA	کمیت مختلط مناسبی حاوی هر دو توان متوسط و توان راکتیو (القایی) است. $S = P + jQ$: Q.

اهمیت عملی این عبارات جدید را با شرح وضعیت عملی زیر می‌توان نشان داد. ابتدا فرض کنید که یک ژنراتور سینوسی داریم که به وسیله ماشینی که خروجی‌اش گشتاور مکانیکی مانند توربین بخار، یک موتور الکتریکی یا یک موتور احتراقی است می‌چرخد. ژنراتور ولتاژ خروجی 200 Vrms را در فرکانس 60Hz تولید می‌کند. به علاوه فرض کنید که مشخصه ژنراتور به صورت حداکثر توان خروجی 1kW بیان شده باشد. بنابراین ژنراتور قادر خواهد بود جریان 5Arms را به یک بار مقاومتی انتقال دهد. با این وجود اگر باری با توان پسقاز 1kW و ضریب توان 0.5 به ژنراتور وصل شود، آن‌گاه جریان 10Arms لازم خواهد بود. با کاهش PF، جریان‌های بیشتر و بیشتری نیاز است تا به بار منتقل شده و عملکرد در 200V و 1kW ثابت نگه داشته شود. اگر ژنراتور ما طراحی خوبی داشته باشد تا جریان 5A را تأمین کند، آن‌گاه جریان‌های بالاتر اجازه عملکرد رضایت‌بخشی را نخواهند داد و از آن جمله موجب می‌گردند تا عایق‌های داخلی بیش از حد گرم شده و دود کنند.

مشخصات ژنراتور معمولاً برحسب توان ظاهری به ولت‌آمپر داده می‌شود. بنابراین، 1000VA در 200V به این معنی است که ژنراتور می‌تواند تا 5A را در آن ولتاژ تأمین کند. توانی که ژنراتور انتقال می‌دهد به بار بستگی داشته و در نهایت می‌تواند صفر باشد. توان ظاهری با جریان مشخص‌شده هنگام کار در ولتاژ ثابت معادل است.

تمرین

۱۱-۱۰ یک منبع 440 Vrms توانی را به بار $Z_L = 10 + j2\Omega$ از طریق یک خط انتقال با مقاومت 1.5Ω می‌فرستد. (الف) توان متوسط و ظاهری تحویلی به بار چقدر است. (ب) توان متوسط و ظاهری تلف‌شده در خط انتقال را به‌دست‌آورید. (ج) توان متوسط و ظاهری تولیدی به وسیله منبع چقدر است. (د) ضریب توان کار منبع را تعیین کنید.

جواب: 14.21 kW، 14.49 kVA، 2.131 kW، 2.131 kVA، 16.34 kW، 16.59 kVA و 0.985 پسفاز.

۱۱-۷ خلاصه فصل و مرور

- توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله یک عنصر با عبارت $P(t) = v(t)i(t)$ داده می‌شود.
- توان متوسط داده‌شده به یک امپدانس از یک منبع سینوسی برابر $\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi)$ است که θ برابر زاویه فاز ولتاژ و ϕ زاویه فاز جریان است.
- تنها بخش مقاومتی یک بار توان متوسط غیرصفر را مصرف می‌کند. توان متوسط انتقالی به بخش راکتیو بار صفر است.
- حداکثر توان متوسط انتقالی تحت شرایط $Z_L = Z_{th}^*$ اتفاق می‌افتد.
- مقدار موثر یا rms موج سینوسی از تقسیم دامنه بر $\sqrt{2}$ به‌دست‌می‌آید.
- ضریب توان (PF) یک بار نسبت توان متوسط تلف‌شده به توان ظاهری است.
- یک بار مقاومتی خالص ضریب توان واحد دارد. یک بار راکتیو دارای ضریب توان صفر است.
- یک توان مختلط به صورت $S = P + jQ$ یا $S = V_{eff}I_{eff}^*$ تعریف می‌شود. واحد اندازه‌گیری آن ولت ـ آمپر (VA) است.
- توان راکتیو A بخش موهومی توان مختلط است و میزان انرژی جاری‌شده به و یا از بخش راکتیو بار است. واحد اندازه‌گیری آن ولت ـ آمپر ـ راکتیو (VAR) می‌باشد.
- خازن‌ها معمولاً برای اصلاح PF بارهای صنعتی به‌کار می‌روند تا توان راکتیو درخواستی از تولیدکننده کاهش یابد.

۱۱-۸ خواندنی‌های کمکی

A good overview of ac power concepts can be found in Chap. 2 of:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3rd ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

Contemporary issues pertaining to ac power systems can be found in:

International Journal of Electrical Power & Energy Systems. Guildford, England: IPC Science and Technology Press, 1979–. ISSN: 0142-0615.

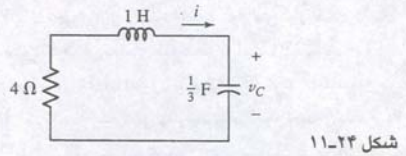
مسائل

۱۱-۱ توان لحظه‌ای

۱. یک منبع جریان، $i(t) = 2\cos 500t$ A، یک مقاومت 50Ω و یک خازن 25μF با هم موازی‌اند. توان تحویلی به وسیله منبع را مشخص نمایید، توان جذب‌شده به وسیله مقاومت، توان جذب‌شده به وسیله خازن را در $t = \frac{\pi}{2}$ ms به‌دست‌آورید.

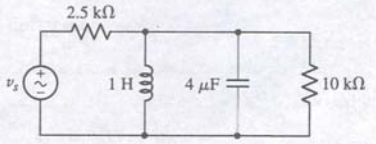
۲. جریان $i = 2t^2 - 1$ A در $1s \le t \le 3s$ در یک عنصر خاص جاری است. (الف) اگر عنصر یک القاگر 4H باشد، در فاصله زمانی داده‌شده چه انرژی به آن منتقل می‌گردد؟ (ب) اگر عنصر یک خازن 0.2F با $v(t) = 2V$ باشد، توان داده‌شده به آن در $t = 2s$ چقدر است؟

۳. در شکل ۱۱-۲۴، اگر $v_C(0) = -2V$ و $i(0) = 4A$ باشد، توان جذب‌شده به وسیله خازن در زمان t، (الف) 0^+، (ب) 0.2s و (ج) 0.4s چقدر است؟



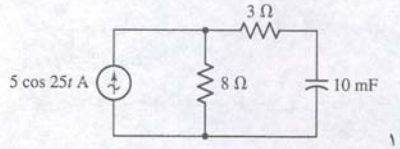
شکل ۱۱-۲۴

۴. توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر غیرفعال در مدار شکل ۱۱-۲۵ را در $t = 0$ پیدا کنید. به‌شرطی‌که $v_s = 20\cos(1000t + 30)$ V باشد. جواب را با PSpice چک کنید.



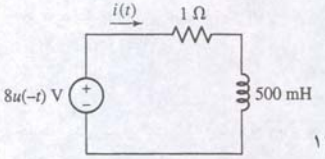
شکل ۱۱-۲۵

۵. مدار شکل ۱۱ـ۲۶ به حالت ماندگار رسیده است. توان جذب‌شده به وسیله هر چهار عنصر را در $t = 0.1s$ به‌دست‌آورید.



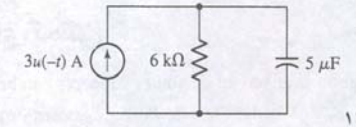
شکل ۱۱ـ۲۶

۶. مدار RL در شکل ۱۱ـ۲۷ را ملاحظه نمایید. توان جذب‌شده لحظه‌ای را به وسیله مقاومت در t (الف) برابر با 0^+، (ب) 1 s و (ج) 2 s به دست آورید.



شکل ۱۱ـ۲۷

۷. مدار RC شکل ۱۱ـ۲۸ را درنظربگیرید. توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله مقاومت را در t برابر با (الف) 0^+، (ب) 30 ms و (ج) 90 m معین کنید.



شکل ۱۱ـ۲۸

۸. اگر صاعقه‌ای از ابر به زمین را با جریان 30 kA برای 150 μs در نظر بگیریم، مطلوبست (الف) توان لحظه‌ای حمل‌شده به یک میله مسی با مقاومت 1.2 mΩ در زمان صاعقه و (ب) انرژی کل حمل‌شده به میله.

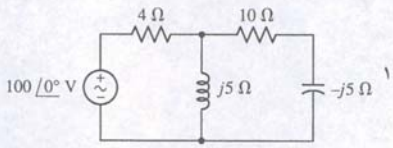
۹. یک خازن 100 mF مقدار 100 mJ انرژی را تا زمانی که یک هادی با مقاومت 1.2 Ω به دو سر پایانه‌های آن وصل نشده نگه می‌دارد. توان تلف‌شده لحظه‌ای در $t = 120$ ms چقدر است؟ به شرطی که ظرفیت گرمای ویژه هادی 0.9 kJ/kg.K و جرم آن 1 gr باشد، مطلوبست افزایش دمای هادی در ثانیه اول تخلیه خازن با فرض این‌که دمای همه عناصر در آغاز 23°C باشد.

۱۰. یک دیود نیمه هادی LED (نوری) با ولتاژ 2.76 V کار می‌کند و جریان 130 mA را می‌کشد. با چشم‌پوشی از ظرفیت داخلی، توان لحظه‌ای کشیده‌شده به وسیله LED، 2 ثانیه پس از روشن‌شدن چقدر است؟ اگر در عوض، آن را به یک منبع سینوسی با رابطه $v(t) = 2.76\cos(1000t)$ V وصل کنیم، چه اطلاعات دیگری لازم است تا توان لحظه‌ای در $t = 500$ ms محاسبه شود. وضعیت گذرا تا آن زمان از بین رفته فرض می‌شود.

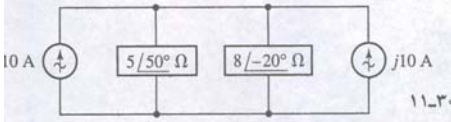
۱۱ـ۲ توان متوسط

۱۱. توان متوسط مصرف‌شده به‌وسیله هر یک از عناصر شکل ۱۱ـ۲۹ چقدر است.

۱۲. توان متوسط تولیدی به وسیله هر منبع و توان متوسط حمل‌شده به هر امپدانس در شکل ۱۱ـ۳۰ را پیداکنید.

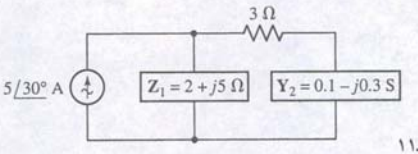


شکل ۱۱ـ۲۹



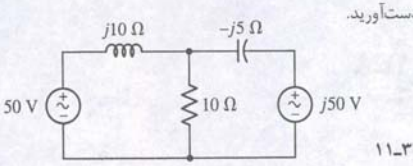
شکل ۱۱ـ۳۰

۱۳. در مدار شکل ۱۱ـ۳۱، توان متوسط، (الف) مصرفی در مقاومت 3Ω (ب) تولیدشده به وسیله منبع را بیابید.



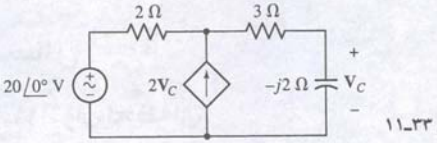
شکل ۱۱ـ۳۱

۱۴. توان متوسط جذب‌شده به وسیله هر پنج عنصر شکل ۱۱ـ۳۲ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۱ـ۳۲

۱۵. توان متوسط تولیدشده به وسیله منبع وابسته در مدار شکل ۱۱ـ۳۳ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۱ـ۳۳

۱۶. یک مدر معادل تونن در حوزه فرکانس از یک منبع سینوسی V_{th} سری با امپدانس $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$ تشکیل شده است. شرایطی را مشخص کنید که در آن یک بار $Z_L = R_L + jX_L$ با شرط (الف) $X_L = 0$، (ب) R_L و X_L مستقیماً انتخاب شوند، (ج) R_L ثابت (ولی نه مساوی R_{th}) باشد، (د) X_L (مستقل از X_{th}) و (ه) $X_L = 0$، حداکثر توان متوسط را جذب کند.

۱۷. برای مدار شکل ۱۱ـ۳۴، (الف) چه مقداری از Z_L حداکثر توان متوسط را جذب می‌کند. (ب) مقدار این توان ماکزیمم چقدر است؟

۱۸. برای مدار شکل ۱۱ـ۳۴ لازم است که بار R_L از نوع مقاومتی خالص باشد. چه مقدار از R_L حداکثر توان متوسط را جذب خواهد کرد و مقدار این توان چقدر است؟

۱۹. توان متوسط تولیدشده به وسیله منبع شکل ۱۱ـ۳۵ را پیداکنید.

شکل ۱۱ـ۳۴

شکل ۱۱ـ۳۵

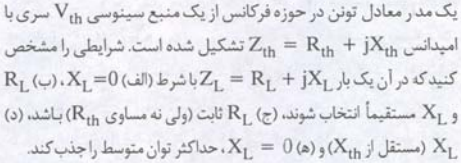
۲۰. برای شبکه شکل ۱۱ـ۳۶، (الف) امپدانس Z_L بین a و b چقدر باشد تا حداکثر توان متوسط به وسیله آن جذب شود؟ (ب) این توان متوسط حداکثر چقدر است؟

شکل ۱۱ـ۳۶

۲۱. توان متوسط حمل‌شده به هر جعبه در شبکه شکل ۱۱ـ۳۷ را پیدا کنید، به‌شرطی‌که منبع $10/0°$ A با $5/-30°$ A در فرکانس 50Hz جایگزین شود.

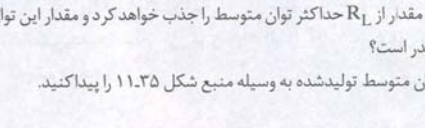
شکل ۱۱ـ۳۷

۲۲. مقدار R_L را در شکل ۱۱ـ۳۸ که توان حداکثر را جذب خواهد کرد، معین نمایید و مقدار توان را مشخص کنید.



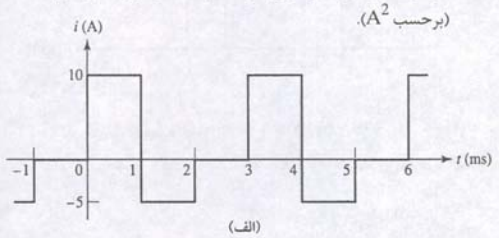
شکل ۱۱ـ۳۸

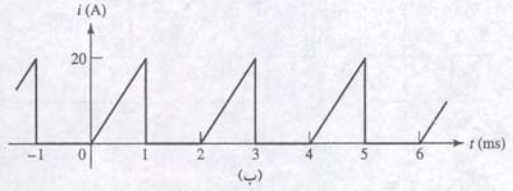
۲۳. توان متوسط حمل‌شده به هر مقاومت در شکل ۱۱ـ۳۹ را مشخص کنید به‌شرطی‌که (الف) $\lambda = 0$، (ب) $\lambda = 1$ باشد، و (ج) با فرض این‌که مدار در فرکانس 60Hz کار کند، پاسخ را با PSpice تست کنید.

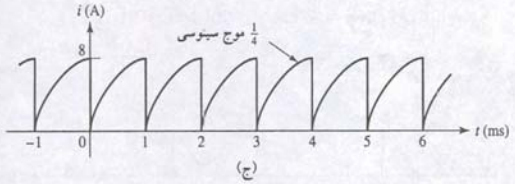


شکل ۱۱ـ۳۹

۲۴. (الف) مقدار متوسط هر یک از امواج شکل ۱۱ـ۴۰ را به‌دست‌آورید. (ب) اگر هر یک از این امواج مربع شوند، متوسط هر موج متناوب را پیدا کنید (برحسب A^2).







شکل ۱۱ـ۴۰

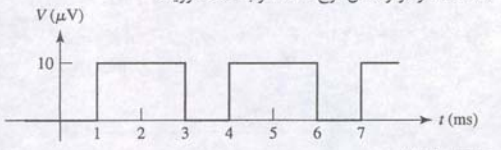
۲۵. توان متوسط حمل‌شده به هر عنصر مدار شکل ۱۱ـ۲۵ چقدر است، به‌شرطی‌که $v_s = 400\sqrt{2}\cos(120\pi t - 9°)$ V. صحت جواب را با PSpice آزمایش کنید.

۱۱ـ۳ مقادیر موثر ولتاژ و جریان

۲۶. مقدار موثر را برای موارد زیر به دست آورید: (الف) $12\cos(1000t)$V، (ب) $12\sin(1000t)$V، (ج) $12\cos(500t)$V و (د) $12\cos(500t - 88°)$ V.

۲۷. مقادیر موثر را برای هر یک از موارد زیر به دست آورید: (الف) $10\cos(10t)$ A، (ب) $10\sin(10t)$ A، (ج) $2\cos(5t)$ A و (د) $2\cos(5t - 32°)$ A.

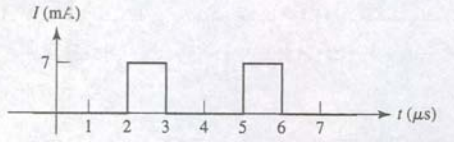
۲۸. مقدار موثر شکل موج ۱۱ـ۴۱ را به دست آورید.



شکل ۱۱ـ۴۱

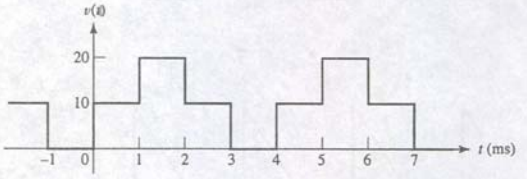
۲۹. مقدار موثر شکل موج ۱۱ـ۴۲ را به دست آورید.

۳۰. مقدار موثر (الف) 1 V، (ب) $1 + \cos 10t$ V و (ج) $1 + \cos(10t + 10°)$ V را به دست آورید.



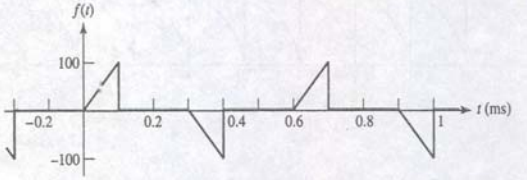
شکل ۱۱ـ۴۲

۳۱. مقدار موثر، (الف) $v(t) = 10 + 9\cos100t + 6\sin100t$ و (ب) برای موج شکل ۱۱ـ۴۳ به‌دست‌آورید. (ج) مقدار متوسط این موج را بیابید.



شکل ۱۱ـ۴۳

۳۲. مقدار موثر (الف) $g(t) = 2+3\cos100t+4\cos(100t-120°)$، (ب) $h(t) = 2+3\cos100t+4\cos(101t-120°)$ و (ج) شکل موج ۱۱ـ۴۴ را به‌دست‌آورید.



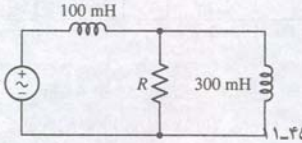
شکل ۱۱ـ۴۴

۳۳. با فرض موج $f(t) = (2 - 3\cos100t)^2$، مطلوبست مقدار متوسط آن و (ب) مقدار rms.

۳۴. مقدار موثر هر یک از سه موج شکل ۱۱ـ۴۰ را محاسبه کنید.

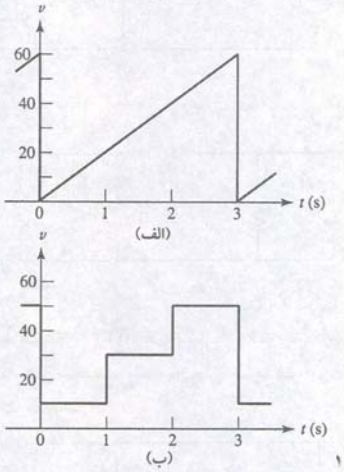
۳۵. چهار منبع ولتاژ ایده‌آل، $A\cos10t$، $B\sin(10t + 45°)$، $C\cos40t$ و ثابت D، به‌طور سری به مقاومت 4Ω وصلند. اگر (الف) $A = B = 10V$ و $C = D = 0$، (ب) $A = C = 10V$ و $B = D = 0$، (ج) $B = -10V$، $A = 10V$ و $C = D = 0$، (د) $A = B = C = D = 10V$ و (ه) $A = B = C = 0$ و $D=0$ باشد. توان متوسط تلف‌شده را به‌دست‌آورید.

۳۶. (الف) چه مقداری از R موجب می‌شود تا ولتاژهای rms دو سر القاگر در شکل ۱۱ـ۴۵ برابر شوند؟ (ب) مقدار ولتاژ rms چقدر است؟ (ج) جواب خود را با PSpice تست کنید.



شکل ۱۱ـ۴۵

۳۷. هر یک از امواج شکل ۱۱ـ۴۶ دوره تناوب 3s دارد. آن‌ها تا حدودی به هم شبیه هستند. (الف) مقدار متوسط هر کدام را محاسبه کنید. (ب) دو مقدار موثر را معین نمایید. (ج) جواب خود را برای موج دندان‌اره‌ی با PSpice تست کنید.



شکل ۱۱ـ۴۶

۳۸. القاگر 10mH شکل ۱۱ـ۴۵ را با خازن 1μF و القاگر 300mH را با خازن 3μF جایگزین نمایید. (الف) چه مقداری از R می‌تواند جریان‌های rms را در خازن‌ها برابر کند؟ (ب) مقدار جریان rms چقدر است؟ (ج) با PSpice آن را آزمایش کنید.

۳۹. شکل موجی دارای تناوب 5s بوده و در فاصله $0 < t < 5s$ به صورت زیر بیان شده است:

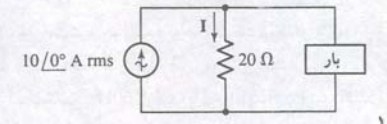
$$v(t) = 10t[u(t) - u(t - 2)] + 16e^{-0.5(t-3)}[u(t - 3) - t(t-5)]\ V$$

مقدار موثر جریان را به‌دست‌آورید.

۴۰. ترکیب سری مقاومت 1kΩ و القاگر 2H نباید توانی بیش از 250mW در هر لحظه تلف کند. اگر جریان سینوسی و $\omega = 500rad/s$ باشد، بزرگ‌ترین جریان rms قابل تحمل چقدر است؟

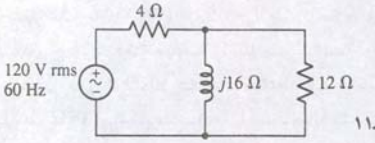
۱۱ـ۴ توان ظاهری و ضریب توان

۴۱. در شکل ۱۱ـ۴۷، اگر $I = 4/35°\ A$ باشد، توان متوسط (الف) منبع (ب) مصرف در مقاومت 20Ω، (ج) به بار را بیابید. توان ظاهری در (د) منبع، (ه) مقاومت 20Ω، (و) به بار را پیدا کنید. (ز) PF بار چند است.



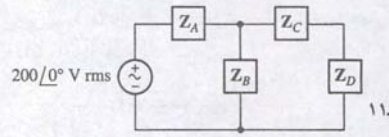
شکل ۱۱ـ۴۷

۴۲. (الف) ضریب توان منبعی که در شکل ۱۱ـ۴۸ کار می‌کند را بیابید. (ب) توان متوسط تولیدی به وسیله منبع را مشخص کنید. (ج) چه خازنی باید موازی با منبع نصب شود تا ضریب واحد گردد. (د) جواب را با PSpice آزمایش کنید.



شکل ۱۱ـ۴۸

۴۳. در مدار شکل ۱۱ـ۴۹، اگر $Z_A = 5 + j2\Omega$ و $Z_B = 20 + j10\ \Omega$، $Z_C = 10/30°\ \Omega$ و $Z_D = 10/-62°\ \Omega$ باشد. توان ظاهری حمل‌شده به هر بار و تولیدی توسط هر منبع را مشخص نمایید.



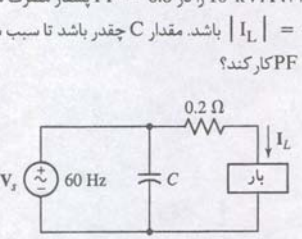
شکل ۱۱ـ۴۹

۴۴. شبکه‌ای را مجسم کنید که در $f = 50\ Hz$ کار کرده و به طور سری به بارهایی وصل و جریان $10/0°\ A$ rms از آن‌ها می‌گذرد. چنین مداری دوگان بارهای موازی و ولتاژ مشترک است. در سیستم سری، اگر بار را اتصال کوتاه کنیم، بار خاموش می‌شود. این کار موجب آتش‌سوزی می‌گردد. در این سیستم خاص دو بار وجود دارد، $Z_1 = 30/15°\ \Omega$ و $Z_2 = 40/40°\ \Omega$. منبع در چه PF کار می‌کند. (ج) چه خازنی باید با مدار سری شود تا ضریب توان پسفاز 0.9 به‌دست‌آید.

۱۱ـ۵ توان مختلط

۴۵. یک بار مرکب متشکل از سه بار به‌طور موازی به هم وصل شده‌اند. یکی از آن‌ها 100W با ضریب $PF = 0.92$ پسفاز، دیگری 250W در $PF = 0.8$ پسفاز و سومی 150W در $PF = 1$ می‌کشد. بارهای موازی با یک منبع سری v_s که مقاومتی 10Ω دارد تغذیه می‌شوند. همه بارها باید در 115 V rms کار کنند. مطلوبست (الف) جریان rms در منبع (ب) PF بار ترکیبی.

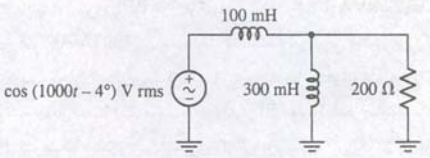
۴۶. بار در شکل ۱۱ـ۵۰، 10 kVA را در $PF = 0.8$ پسفاز مصرف می‌کند. اگر $|I_L| = 40\ A$ rms باشد. مقدار C چقدر باشد تا سبب شود که منبع در $PF = 0.9$ کار کند؟



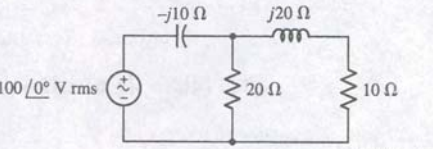
شکل ۱۱ـ۵۰

۴۷. مدار شکل ۱۱ـ۵۱ را درنظربگیرید. مقدار ظرفیت لازم برای افزایش PF به 0.92 پسفاز را به‌دست‌آورید، به‌شرطی‌که ظرفیت به‌طور (الف) سری با القاگر 100 mH وصل شود. (ب) موازی با القاگر 100 mH وصل گردد. جواب بخش‌های (الف) و (ب) را با PSpice چک کنید.

۴۸. مدار شکل ۱۱ـ۵۲ را برای یافتن توان مختلط جذب‌شده به وسیله هر پنج عنصر مدار تحلیل کنید.

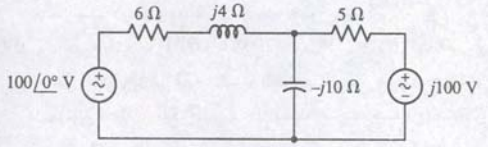


شکل ۱۱ـ۵۱



شکل ۱۱ـ۵۲

۴۹. هر دو منبع شکل ۱۱ـ۵۳ در فرکانس یکسانی کار می‌کنند. توان مختلط تولیدی به وسیله هر منبع را به‌دست‌آورید. توان مختلط مصرفی به وسیله هر عنصر غیرفعال مدار را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۱ـ۵۳

۵۰. توان مختلط حمل‌شده به یک بار، (الف) 500VA در $PF = 0.75$ پیشفاز (ب) 500W در $PF = 0.75$ پیشفاز، (ج) -500VAR در $PF = 0.75$ را محاسبه کنید.

۵۱. یک امپدانس خازنی $Z_C = -j120\Omega$ موازی با یک بار Z_L وجود دارد. ترکیب موازی به وسیله یک منبع $v_s = 400/0°$ Vrms تغذیه می‌شود. این منبع توان 0.5 kVA + 1.6 را تولید می‌نماید. (الف) توان مختلط داده‌شده به Z_L چقدر است؟ (ب) PF مربوط به Z_L چقدر است. (ج) PF مربوط به منبع چیست؟

۵۲. یک منبع 230 V rms سه بار موازی را تغذیه می‌کند، در $PF = 0.8$ پسفاز، 1.2 kVA، در $PF = 0.9$ پسفاز 1.6 kVA و 900W در $PF = 1$ است. مطلوبست (الف) دامنه جریان (ب) PF مربوط به حالت کار منبع. (ج) توان مختلط پوشش‌داده‌شده به وسیله منبع.

۵۳. یک سیستم 250V rms سه بار موازی را تغذیه می‌کند. یکی از آن‌ها 20 kW را در ضریب توان واحد، دومی 25 kVA را در ضریب توان $PF = 0.8$ پسفاز، و سومی توان 30kW را در $PF = 0.75$ پسفاز مصرف می‌کند. (الف) کل توان تولیدی به وسیله منبع را به‌دست‌آورید. (ب) کل توان ظاهری تولیدی به وسیله منبع چقدر است؟ (ج) در چه PF منبع کار می‌کند.

۵۴. مصرف‌کننده‌ای دارای دیماند حداکثر ماهانه 200 kW و نیاز راکتیوی 280 kVAR است. در تلاشی برای مقابله با اتلاف، تولیدکننده‌ای سعی

دارد تا مشتریانش در PF بالا کار کنند و لذا جریمه $0.22/kVAR را برای هر kVAR اضافی به صورت 0.65 ضربدر توان متوسط پیک (ماکزیمم مجاز) اعمال می‌کند. (الف) با توجه به مطلب فوق، هزینه سالانه جریمه چقدر است؟ (ب) سیاست جریمه PF تولیدکننده چقدر است؟ (ج) اگر بخواهیم جبران‌سازی بگذاریم و هزینه آن $200 در هر 100 kVAR باشد بهترین و اقتصادی‌ترین حل برای مشتری چیست؟ (د) مقدار واقعی ظرفیت برای اصلاح ضریب توان چیست؟

۵۵. معادله (۳۸) را به‌دست‌آورید.

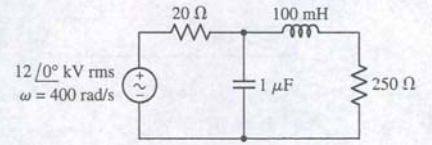
۱۱-۶ مقایسه واژه‌های توان

۵۶. یک منبع ولتاژ $339\cos(100\pi t - 66°)$ V به یک بار خالص مقاومتی 1kΩ وصل است. (الف) ولتاژ موثر منبع چیست؟ (ب) توان لحظه‌ای پیک جذب‌شده به وسیله بار چقدر است؟ (ج) حداقل توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله بار چه می‌باشد؟ (د) توان ظاهری حمل‌شده به وسیله منبع را به‌دست‌آورید. (ه) توان رآکتیو حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است؟ (و) توان مختلط حمل‌شده به بار چیست؟

۵۷. یک منبع ولتاژ $v_s(t) = 339\cos(100\pi t - 66°)$ V به یک بار خالص القایی 150mH وصل است. (الف) جریان موثر در مدار چیست؟ (ب) توان لحظه‌ای پیک جذب‌شده به وسیله بار چند است (ج) حداقل توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله بار چه می‌باشد. (د) توان ظاهری حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است؟ (ه) توان رآکتیو حمل‌شده از منبع چند است. (و) توان مختلط حمل‌شده به بار چیست؟

۵۸. در مدار شکل ۱۱-۲۵، $v_s = 5\cos t$ V است. (الف) حداکثر توان لحظه‌ای حمل‌شده به مقاومت 10kΩ چیست؟ (ب) توان رآکتیو حمل‌شده به مقاومت 10kΩ چند است. (ج) توان ظاهری حمل‌شده به مقاومت 10kΩ چه می‌باشد. (د) توان مختلط اخذشده از منبع را به‌دست‌آورید.

۵۹. (الف) توان مختلط حداکثر به هر عنصر غیرفعال در مدار شکل ۱۱-۵۴ را به‌دست‌آورید. (ب) نشان دهید که مجموع این مقادیر برابر با مقدار توان مختلط حاصل از منبع است. (ج) آیا این نتیجه برای توان ظاهری هم صحیح است. (د) توان متوسط حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است. توان رآکتیو حاصل از منبع چند است.



شکل ۱۱-۵۴

۶۰. باری در 2300 Vrms مقدار 28 A rms با ضریب توان 0.812 پسفاز را می‌کشد. مطلوبست (الف) جریان حداکثر برحسب آمپر؟ (ب) توان لحظه‌ای در t = 2.5ms با فرض فرکانس 60Hz ؟ (ج) توان حقیقی دریافتی به وسیله بار؟ (د) توان مختلط؟ (ه) توان ظاهری (و) امپدانس بار و (ز) توان رآکتیو.

فصل دوازدهم

مدارهای چند فاز

مفاهیم کلیدی

- سیستم‌های قدرت تک‌فاز
- سیستم‌های قدرت سه‌فاز
- منابع سه فاز
- ولتاژ خط در برابر فاز
- جریان خط در برابر فاز
- شبکه‌های اتصال ـ Y
- شبکه‌های اتصال ـ Δ
- بارهای بالانس
- تحلیل بر فاز
- اندازه‌گیری قدرت در سیستم‌های سه فاز

مقدمه

شرکت‌های تولید کننده برق به مشتریان خانگی و صنعتی، الکتریسیته را به فرم ولتاژها و جریان‌های سینوسی ارائه می‌کنند و به آن جریان (ac) می‌گویند. بسیاری از مناطق مسکونی در مریکای شمالی موج سینوسی را در فرکانس 60 Hz و ولتاژ rms تقریباً 120 V دریافت ی‌نمایند. در دیگر نقاط جهان الکتریسیته در 50 Hz و ولتاژ rms تقریباً 240 V اخذ می‌شود. در آغاز کمپانی‌های تولید کننده به وسیله توماس ادیسون[1] به توزیع توان از طریق شبکه‌های dc توصیه شده بودند. ولی نیکلا تسلا[2] و جورج وستینگهاوس[3] دو دانشمند صاحب‌نظر دیگر در زمینه الکتریسیته، به شدت از به‌کارگیری ac حمایت نمودند. بالاخره نظر این دو نفر پذیرفته شد.

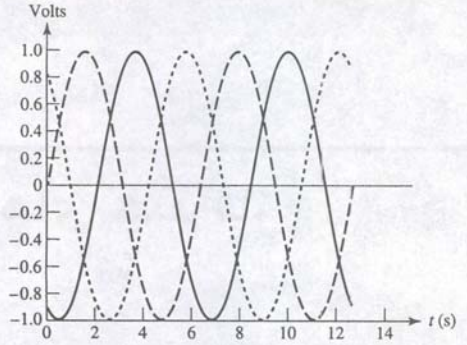
پاسخ گذرای سیستم‌های قدرت ac در تعیین دیماند یا تقاضای توان حداکثر مورد وجه‌اند، زیرا اغلب تجهیزات به‌هنگام شروع نسبت به حالت کار مداوم جریان بیشتری را لازم دارند. با این وجود در بسیاری از موارد عملکرد حالت ماندگار مورد توجه عمده می‌باشد بنابراین تجربه ما بر تحلیل مبتنی‌بر فیزور، مفیدتر خواهد بود. در این‌جا با نوع جدیدی از منبع ولتاژ آشنا می‌شویم که منبع سه‌فاز نام دارد و می‌تواند با آرایش سه سیم Δ یا چهار سیم Y اتصال یابد. به‌طور مشابه خواهیم دید که بار نیز می‌تواند بسته به کاربرد به صورت هر یک از اتصالات Δ یا Y در شبکه قرار گیرد.

۱۲-۱ سیستم‌های چند فاز

تاکنون هر وقت جمله "منبع سینوسی" را به‌کار بردیم، تصویری از یک منبع ولتاژ یا جریان سینوسی با دامنه، فرکانس و فاز خاص به نظر آمده است. در این فصل، منابع چند فاز را معرفی خواهیم کرد و به‌خصوص بر سیستم‌های سه‌فاز تکیه می‌کنیم. تولید توان سه‌فاز با ژنراتورهای دوار نسبت به تولید تک‌فاز مزایای بیشماری دارد و نیز در انتقال توان هم انتقال سه‌فاز از لحاظ اقتصادی ترجیح داده می‌شود. گرچه بسیاری از تجهیزات مورد استفاده تک‌فاز هستند ولی تجهیزات سه‌فاز خصوصاً در محیط‌های صنعتی ناآشنا هستند. موتورهای به‌کار رفته در سیستم‌های برودتی و ماشین ابزار اغلب به صورت

ولتاژ وسایل خانگی معمولاً 120 Vrms است، ولی گاهی 110 V یا 115 V (rms) هم مشخص می‌شود.

1. Thomas Edison 2. Nikola Tesla
3. George Westinghouse



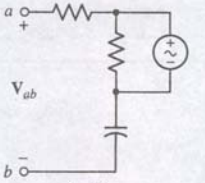
شکل ۱ـ۱۲ مثالی از مجموعه سه‌فاز، که هر یک 120° نسبت به دیگری اختلاف فاز دارد. خواهیم دید که در هر لحظه فقط یکی از ولتاژها ممکن‌است صفر باشد.

سه‌فاز سیم‌پیچی می‌شوند. در دیگر کاربردهای باقیمانده خواهیم دید که اگر با سیستم‌های چند فاز آشنا باشیم، برای تهیه توان تک‌فاز کافی است به یکی از پاهای سیستم چند فاز اتصالی ساده ایجاد شود.

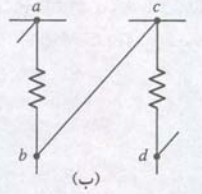
بیایید تا به یک سیستم چند فاز رایج، یعنی سیستم سه‌فاز متعادل یا بالانس نگاهی مختصر بیندازیم. منبع سه پایانه دارد (بدون احتساب اتصال زمین یا نول) اندازه‌گیری با ولت‌متر نشان می‌دهد که دامنه ولتاژ بین هر دو پایانه با یکدیگر برابر است. با این وجود این ولتاژها با یکدیگر همفاز نیستند و هر یک از سه ولتاژ، 120° اختلاف فاز با دیگری دارد. علامت فاز به جهت ولتاژها بستگی دارد. نمونه‌ای از این مجموعه در شکل ۱ـ۱۲ ملاحظه می‌گردد. هر بار متعادل توان یکسانی را از هر سه فاز می‌کشد، ولی وقتی یکی از ولتاژها برای یک لحظه صفر شود دو فاز دیگر باید نصف دامنه ماکزیمم خود را داشته باشند. **هیچ‌گاه توان لحظه‌ای دریافتی به وسیله بار کل به صفر نمی‌رسد، درواقع توان لحظه‌ای کل ثابت است.** این، یکی از مزایا برای ماشین‌های دوّار است زیرا گشتاور وارد بر روتور تقریباً ثابت خواهد بود و نسبت به حالتی که منبع تک‌فاز باشد وضعیت ثابت‌تری حاکم و لذا ارتعاش و لرزش ماشین کمتر می‌شود.

تعداد فاز بیشتر، مثل سیستم‌های 6 و 12 فاز، تقریباً در تهیه توان برای یکسوسازهای بزرگ کاربرد دارند. یکسوسازها جریان متناوب را به مستقیم تبدیل کرده و اجازه عبور جریان را از یک جهت به بار ممکن می‌سازند و لذا علامت ولتاژ دو سر بار همیشه ثابت باقی می‌ماند. خروجی یکسوساز یک جریان مستقیم به‌علاوه مؤلفه‌های متناوبی به نام ریپل یا تموّج است که با افزایش فاز کاهش می‌یابد.

تقریباً بدون استثناء تمام سیستم‌های چند فاز در عمل حاوی منابعی هستند که به‌خوبی می‌توان آن‌ها را با منابع ولتاژ ایده‌آل و یا با منابع ولتاژ ایده‌آل سری با امپدانس داخلی کوچک جایگزین نمود، منابع جریان سه‌فاز بسیار نادرند.



(الف)



(ب)

شکل ۲ـ۱۲ (الف) تعریف ولتاژ V_{ab}. (ب) $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = V_{ab} + V_{cd}$.

علامت با دو زیرنویس

بهتر است ولتاژها و جریان‌های چند فاز را با **دو زیرنویس** نشان دهیم. با این نماد جریان یا ولتاژ، مانند V_{ab} یا I_{aA} مفهوم‌تر از نمایش ساده‌ای چون V_3 یا I_x می‌باشد. بنا به تعریف ولتاژ نقطه a نسبت به b برابر V_{ab} است. به همین دلیل در شکل ۲ـ۱۲ (الف) علامت مثبت در a قرار گرفته است. بنابراین زیرنویسی دوتایی را می‌توان **معادل** با جفت علامت مثبت - منفی دانست. استفاده همزمان از هر دو عمل اضافی است. مثلاً با توجه به شکل ۲ـ۱۲ (ب) می‌بینیم که $V_{ad} = V_{ab} + V_{cd}$ است. مزیت علامت دو زیرنویس بر قانون کیرشهف استوار است که

می‌گوید اختلاف ولتاژ بین دو نقطه به مسیر انتخابی بین نقاط بستگی ندارد. بنابراین:

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bd} = V_{ac} + V_{cd} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$$

در این روش می‌توان KVL را بدون توجه به شکل نوشت، حتی اگر نقطه یا زیرنویسی روی شکل علامت زده نشده باشد، می‌توان معادله صحیحی داشت. مثلاً می‌توان نوشت $V_{ad} = V_{ax} + V_{xd}$ که x هر نقطه موردنظر انتخابی است.

شکل ۳ـ۱۲ یکی از فرم‌های نمایش سیستم سه‌فاز ولتاژ را نشان می‌دهد. بگذارید فرض کنیم ولتاژهای V_{an}، V_{bn} و V_{cn} مطلوبند:

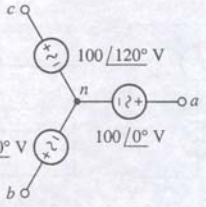
$$\mathbf{V}_{an} = 100\angle 0^\circ \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = 100\angle -120^\circ \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = 100\angle -240^\circ \text{ V}$$

بنابراین با نگاهی به زیرنویس، ولتاژ V_{ab} را می‌توان پیدا کرد.

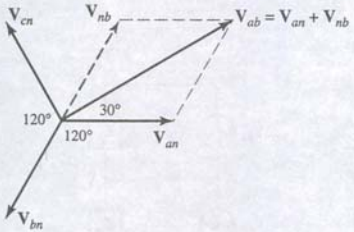
$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}\\ &= 100\angle 0^\circ - 100\angle -120^\circ \text{ V}\\ &= 100 - (-50 - j86.6) \text{ V}\\ &= 173.2\angle 30^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

سه ولتاژ معلوم و راه به دست آوردن فیزور V_{ab} ساخته شده از آن‌ها در شکل ۴ـ۱۲ مشاهده می‌شود.

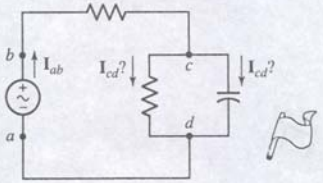
علامت دو زیرنویس (دواندیس) را می‌توان برای جریان هم به کار برد. جریان I_{ab} جریانی است که از a به b از مستقیم‌ترین مسیر ممکن جاری است. در هر مدار کاملی چنین می‌گوییم که باید حداقل دو مسیر ممکن بین نقاطی چون a و b وجود داشته باشد و قرار می‌گذاریم که از دو زیرنویس استفاده نکنیم، مگر این‌که به وضوح مسیر مستقیم‌تر یا کوتاه‌تری بین دو نقطه وجود داشته باشد. معمولاً این مسیر از یک عنصر ساده عبور می‌کند. بنابراین I_{ab} در شکل ۵ـ۱۲ درست نشان داده شده است. درواقع، برای نشان دادن این جریان به پیکان هم نیازی نیست، زیرنویس‌ها جهت را هم بیان می‌کنند. با این وجود در این شکل تعریف جریانی به نام I_{cd} مبهم است و موجب اشتباه خواهد شد.



شکل ۳ـ۱۲ شبکه به‌کاررفته به‌عنوان مثالی از علامت ولتاژ دو زیرنویسی.



شکل ۴ـ۱۲ این نمودار فیزوری کاربرد گرافیکی قرارداد ولتاژ دو زیرنویسی را برای یافتن V_{ab} در شکل ۳ـ۱۲ نشان می‌دهد.



شکل ۵ـ۱۲ موردی که استفاده از نماد دو زیرنویس مشکل پیش می‌آورد.

تمرین

۱ـ۱۲ اگر $V_{ab} = 100\angle 0^\circ$ V، $V_{bd} = 40\angle 80^\circ$ V و $V_{ca} = 70\angle 200^\circ$ V باشد، مطلوب است:

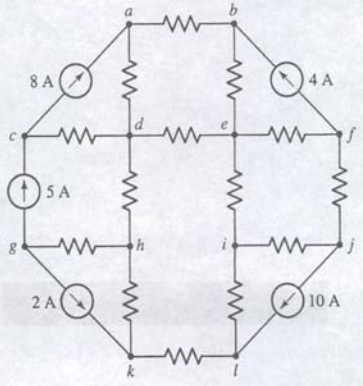
(الف) V_{ad}، (ب) V_{bc}، (ج) V_{cd}

۲ـ۱۲ به شکل ۱۲.۶ توجه کنید. اگر $I_{fj} = 3A$، $I_{de} = 2A$ و $I_{hd} = -6A$ باشد، مطلوب است:

(الف) I_{cd}، (ب) I_{ef}، (ج) I_{ij}

جواب ۱ـ۱۲: $44.0\angle 20.6^\circ$ V، 41.8، $114.0\angle 145.0^\circ$ V، $44.0\angle 20.6^\circ$ V

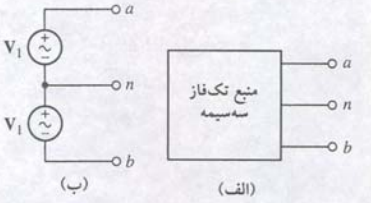
جواب ۲ـ۱۲: -3A، 7A، 7A



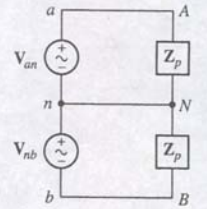
شکل ۶ـ۱۲

۱۲ـ۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم

منبع تک‌فاز سه سیم به صورت منبعی تعریف می‌شود که دارای سه پایانه خروجی مانند a، n و b در شکل ۷ـ۱۲(الف) است و در آن فیزور ولتاژ $\mathbf{V}_{an}$ و $\mathbf{V}_{nb}$ برابرند. بنابراین منبع را می‌توان به صورت ترکیبی از دو منبع ولتاژ یکسان نشان داد. در شکل ۷ـ۱۲ (ب)،



شکل ۷ـ۱۲ (الف) یک منبع تکفاز سه سیمه. (ب) نمایش منبع تکفاز سه سیمه با دو منبع ولتاژ مشابه.



شکل ۸ـ۱۲ یک سیستم تکفاز سه سیمه. دو بار یکسانند و جریان سیم خنثی صفر است.

$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_1$ است. واضح است که $\mathbf{V}_{ab} = 2\mathbf{V}_{an} = 2\mathbf{V}_{nb}$ است و بنابراین منبعی داریم که بار متصل به آن در هر یک از دو ولتاژ فوق کار می‌کند. سیستم معمول منازل سیستم تک‌فاز سه سیمه است و می‌توان هر دو نوع دستگاه 110 V و 220 V را تغذیه نمود. وسایل برقی ولتاژ بالاتر آن‌هایی هستند که مقدار بیشتری انرژی مصرف می‌کنند. کار در ولتاژ بالاتر جریان کمتری را در توان ثابت لازم خواهد داشت. بنابراین قطر سیم می‌تواند با امنیت کافی کمتر باشد. در سیستم توزیع منزل یا پست توزیع شرکت برق، قطر سیم‌ها باید بیشتر باشد تا گرمای کمتری در سیم‌ها تولید گردد.

به کارگیری نام **تک‌فاز** به این دلیل است که ولتاژهای $\mathbf{V}_{an}$ و $\mathbf{V}_{nb}$ مساویند و باید زاویه فاز برابری هم داشته باشند. با این حال، از دید دیگر، ولتاژهای بین سیم‌های بیرونی و سیم وسط که معمولاً سیم خنثی نامیده می‌شود، با یکدیگر 180° اختلاف فاز دارند، یعنی $\mathbf{V}_{an} = -\mathbf{V}_{bn}$ و $\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} = 0$. بعداً خواهیم دید که سیستم‌های چندفازه متعادل یا بالانس هم، چند ولتاژ هم‌دامنه دارند که جمع فیزوری آن‌ها صفر است. از این دیدگاه سیستم تک‌فاز سه سیمه درواقع یک سیستم دو فاز بالانس است. با این وجود دو فاز جمله‌ای است که نسبتاً به سیستم‌های غیرمهم غیربالانسی که دو منبع با اختلاف فاز 90 دارند، اتلاق می‌گردد.

اکنون باید یک سیستم تک فاز سه سیم حاوی بارهای یکسان $\mathbf{Z}_p$ بین هر سیم خروجی و سیم خنثی را در نظر بگیریم (شکل ۸ـ۱۲). در آغاز فرض می‌کنیم که سیم‌های اتصال منبع به بارهادی‌های خوبی هستند. چون:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb}$$

آنگاه

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{V}_{an} / \mathbf{Z}_p = \mathbf{I}_{Bb} = \mathbf{V}_{nb} / \mathbf{Z}_p$$

و بنابراین

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_{Bb} + \mathbf{I}_{Aa} = \mathbf{I}_{Bb} - \mathbf{I}_{aA} = 0$$

بنابرین جریانی در سیم خنثی وجود ندارد و می‌توان بدون هرگونه تغییر در جریان یا ولتاژ آن را حذف کرد.

اثر امپدانس غیرصفر یک سیم

اکنون تأثیر یک امپدانس غیرصفر در هر سیم را بررسی می‌کنیم. اگر خطوط aA و bB امپدانس‌های برابری داشته باشند می‌توان آن را به $\mathbf{Z}_p$ اضافه کرد و دو مرتبه دوبار یکسان حاصل می‌گردد و باز هم جریان سیم خنثی صفر است. حال تصور کنید که سیم خنثی کمی امپدانس مثل $\mathbf{Z}_n$ داشته باشد. بدون انجام تحلیل دقیق، اصل تجمیع نشان می‌دهد که تقارن موجب می‌شود تا باز هم جریان خنثی صفر باشد. از این گذشته اگر امپدانس مستقیمی بین دو خط خارجی وصل شود باز هم مدار متقارن خواهد بود و از سیم خنثی جریان نمی‌گذرد. بنابراین صفر بودن جریان در سیم خنثی نتیجه بالانس بودن بار است و امپدانس غیرصفر در سیم خنثی تقارن را از بین نمی‌برد.

به‌طور کلی اغلب سیستم‌های تک‌فاز سه سیمه متقارن نیستند. در این سیستم‌ها دوبار نامساوی بین دو سیم بیرونی و سیم خنثی، و یک امپدانس بین دو سیم بیرونی وصل می‌شود. امپدانس دو سیم بیرونی ممکن‌است مساوی تصور شوند ولی امپدانس سیم خنثی کمی بزرگتر از آن دو است. بگذارید مثالی از چنین سیستم را بررسی کنیم. خصوصاً به جریان موجود در سیم خنثی توجه بیشتری خواهیم نمود. همچنین راندمان انتقال نیرو به بار نامتعادل بررسی خواهد شد.

مثال ۱ـ۱۲

سیستم شکل ۹ـ۱۲ را تحلیل کنید و توان حمل شده به هر سه بار و توان تلف شده در سیم خنثی و هر دو خط را معین کنید.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

سه بار در مدار عبارتند از: مقاومت 50 Ω، مقاومت 100Ω و یک امپدانس 20 + J10 Ω هر یک از دو خط مقاومت 1 Ω و سیم خنثی مقاومت 3 Ω دارد. برای تعیین توان لازم، جریان در هر یک از آن‌ها معین شود.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

ما یک سیستم تک‌فاز سه سیمه داریم. نمودار جریان آن کاملاً علامت‌گذاری شده است. جریان‌های محاسبه شده به واحد rms هستند.

- **ارائه طرح.**

مدار را از راه مش حل می‌کنیم و در آن نیز سه حلقه قابل تعریف است. نتیجه تحلیل، تعدادی معادله برای جریان حلقه‌ها است که بعداً قابل استفاده در محاسبه توان است.

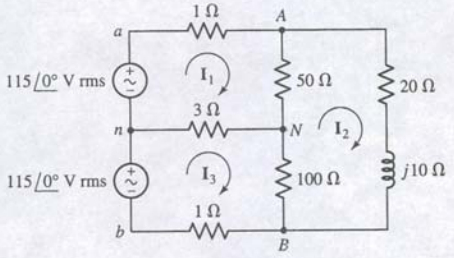
- **معادلات مناسب را بنویسید.**

سه معادله حلقه عبارتند از:

$$-115\angle 0^\circ + \mathbf{I}_1 + 50(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = 0$$
$$(20 + j10)\mathbf{I}_2 + 100(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 50(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$
$$-115\angle 0^\circ + 3(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) + 100(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + \mathbf{I}_3 = 0$$

که با مرتب کردن آن‌ها سه معادله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 54\mathbf{I}_1 &- 50\mathbf{I}_2 &- 3\mathbf{I}_3 &= 115\angle 0^\circ \\ -50\mathbf{I}_1 &+ (170 + j10)\mathbf{I}_2 &- 100\mathbf{I}_3 &= 0 \\ -3\mathbf{I}_1 &- 100\mathbf{I}_2 &+ 104\mathbf{I}_3 &= 115\angle 0^\circ \end{aligned}$$



شکل ۹ـ۱۲ یک سیستم نمونه تکفاز سه‌سیم.

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

ما مجموعه‌ای از سه معادله و سه مجهول داریم. بنابراین می‌توان برای حل آن اقدام کرد.

- **اقدام به حل.**

به کمک یک ماشین حساب $\mathbf{I}_1$، $\mathbf{I}_2$ و $\mathbf{I}_3$ را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{I}_1 = 11.24\angle -19.83^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_2 = 9.389\angle -24.47^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_3 = 10.37\angle -21.80^\circ \text{ A}$$

جریان در خطوط بیرونی عبارتنداز:

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_1 = 11.24\angle -19.83^\circ \text{ A}$$

و

$$\mathbf{I}_{bB} = -\mathbf{I}_3 = 10.37\angle 158.20^\circ \text{ A}$$

و جریان کوچکتر در سیم خنثی عبارت است از:

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1 = 0.9459\angle -177.7^\circ \text{ A}$$

پس توان متوسط دریافتی به وسیله هر بار چنین تعیین می‌شود:

$$P_{50} = |\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2|^2 (50) = 206 \text{ W}$$
$$P_{100} = |\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2|^2 (100) = 117 \text{ W}$$
$$P_{20+j10} = |\mathbf{I}_2|^2 (20) = 1763 \text{ W}$$

توجه کنید که ضریب $\frac{1}{2}$ لازم نیست چون جریان‌های rms را به‌کار می‌بریم.

به این ترتیب توان بار کل برابر 2086 W است. تفاوت در هر خط برابر است با

$$P_{aA} = |I_1|^2 (1) = 126 \text{ W}$$

$$P_{bB} = |I_3|^2 (1) = 108 \text{ W}$$

$$P_{nN} = |I_{nN}|^2 (3) = 3 \text{ W}$$

که مجموعاً 237 W می‌باشد. پیدا است که این خطوط خیلی طویل‌اند وگرنه این توان نسبتاً زیاد دما را تا حد خطرناکی بالا می‌برد.

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟**

توان کل تولید شده برابر است با

$$206 + 117 + 1763 + 237 = 2323 \text{ W}$$

و می‌توان آن را با توجه به توان حمل‌شده به وسیله هر منبع ولتاژ چک کرد:

$$P_{an} = 115(11.24) \cos 19.83^\circ = 1216 \text{ W}$$

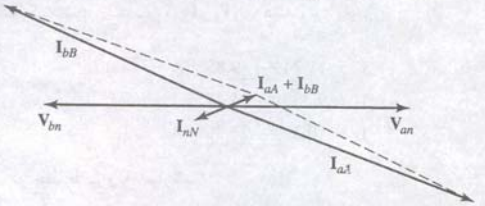
$$P_{bn} = 115(10.37) \cos 21.80^\circ = 1107 \text{ W}$$

که جمعاً همان 2323 W می‌باشد. بازده خط انتقال سیستم برابر است با:

$$\eta = \frac{\text{توان کل محل شده به بار}}{\text{کل توان مولد}} = \frac{2086}{2086 + 237} = 89.8\%$$

چنین بازدهی برای یک موتور بخار یا موتور احتراق داخلی عددی بالا است ولی برای یک سیستم توزیع خوب خیلی پایین است. اگر بخواهیم منبع و بار را به یکدیگر نزدیک کنیم، باید قطر سیم‌ها را افزایش دهیم.

نمایش فیزوری دو منبع ولتاژ، جریان در خطوط بیرونی و جریان سیم خنثی در شکل ۱۰ـ۱۲ نشان داده شده است. رابطه $\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$ در نمودار مشخص شده است.



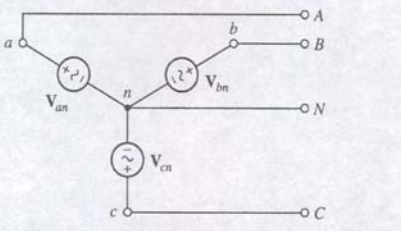
شکل ۱۰ـ۱۲ ولتاژ منابع و سه جریان در مدار شکل ۹ـ۱۲ روی نمودار فیزوری نشان داده شده‌اند. توجه کنید که

$$\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$$

تمرین

۳ـ۱۲ با جمع مقاومت 1.5 Ω به هر یک از دو سیم بیرونی و 2.5 Ω به سیم خنثی، شکل ۹ـ۱۲ را تصحیح کنید. توان متوسط تحویلی به هر سه بار را مشخص نمایید.

جواب: 153.1 W، 95.8 W و 1374 W



شکل ۱۱ـ۱۲ منبع چهارسیم با اتصال Y.

۱۲ـ۳ اتصال سه فاز Y-Y

منبع سه فاز سه پایانه دارند، که به آن‌ها **پایانه‌های خط** می‌گویند و ممکن‌است خط چهارمی داشته و یا نداشته باشند. این منابع می‌توانند پایانه چهارمی هم به‌نام اتصال خنثی داشته و یا نداشته باشند. بحث را با سیستم سه‌فازی که اتصال خنثی دارد، شروع می‌کنیم. این سیستم ممکن‌است از سه منبع ولتاژ ایده‌آل به صورت Y، شکل ۱۱ـ۱۲، به هم متصل شده باشد. هر چهار پایانه a، b، c و n در دسترس می‌باشند. ما تنها منابع سه‌فاز متعادل یا بالانس را مطالعه خواهیم کرد که به فرم زیر تعریف می‌شوند.

$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

ین سه ولتاژ که هر کدام بین یک خط و سیم خنثی برقرار است را **ولتاژهای فاز** می‌نامیم. به طور اختیاری V_{an} را به عنوان مرجع اختیار می‌کنیم، یعنی:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

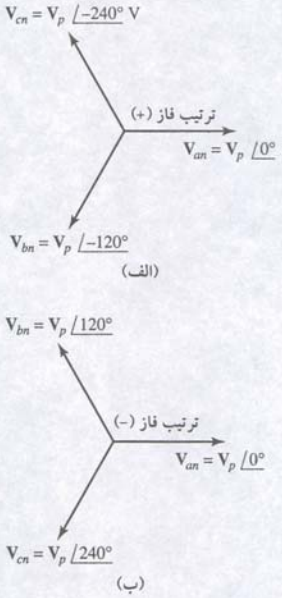
ما همواره از V_p برای نشان دادن دامنه rms هر یک از ولتاژهای فاز استفاده خواهیم کرد. پس منبع سه فاز چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p \angle -240^\circ$$

یا

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle 120^\circ \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p \angle 240^\circ$$

ولی را **ترتیب فاز مثبت** یا ترتیب فاز abc می‌گویند و در شکل ۱۲ـ۱۲(الف) نشان داده شده است. روابط بعدی را **ترتیب فاز منفی** یا cba می‌خوانند و در شکل ۱۲ـ۱۲(ب) ملاحظه می‌گردد. ترتیب واقعی فاز یک منبع سه فاز فیزیکی به این انتخاب اختیاری پایانه‌های a، b و c بستگی دارد. این انتخاب را می‌توان همیشه طوری برگزید که ترتیب فاز مثبت باشد و فرض می‌کنیم از این پس همین انتخاب در سیستم‌های مورد بررسی برقرار باشد.



شکل ۱۲ـ۱۲ (الف) ترتیب فاز مثبت یا abc. (ب) ترتیب فاز منفی یا cba.

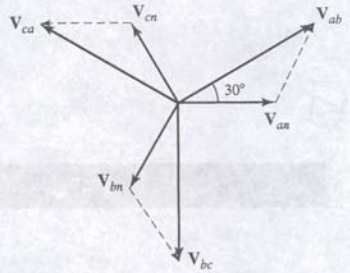
ولتاژهای خط به خط

حال بیایید ولتاژهای خط‌به‌خط (یا به طور خلاصه "ولتاژهای خط") را به دست آوریم. این ولتاژها هنگامی که ولتاژهای خط همچون شکل ۱۲ـ۱۲(الف) باشند، برقرارند. ساده‌ترین راه یافتن ولتاژهای خط استفاده از نمودار فیزور است زیرا زوایا همگی مضارب صحیحی از 30° هستند. نمودار مزبور در شکل ۱۳ـ۱۲ ترسیم شده و نتایج عبارتند از:

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ \quad (1)$$

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ \quad (3)$$



شکل ۱۳ـ۱۲ نمودار فیزوری به‌کاررفته برای یافتن ولتاژهای خط برحسب ولتاژهای فاز.

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} =$$
$$V_p \angle 0^\circ - V_p \angle -120^\circ =$$
$$V_p - V_p \cos(-120^\circ) - jV_p \sin(-120^\circ) =$$
$$V_p(1 + \tfrac{1}{2} + j\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$$

طبق قانون کیرشهف مجموع ولتاژهای فوق صفر است. بد نیست خواننده این مطلب را تحقیق کند. اگر دامنه rms هر یک از این ولتاژهای خط را با V_L نشان دهیم، آنگاه یکی از مهمترین مشخصه‌های منبع سه فاز با اتصال Y را چنین می‌توان بیان کرد.

$$V_L = \sqrt{3} V_p$$

توجه کنید که با ترتیب فاز مثبت، $\mathbf{V}_{ab}$ از $\mathbf{V}_{an}$ و $\mathbf{V}_{bc}$ از $\mathbf{V}_{bn}$ و $\mathbf{V}_{ca}$ از $\mathbf{V}_{cn}$ هریک به اندازهٔ 120° از دیگری پیشفاز است و نیز $\mathbf{V}_{an}$ از $\mathbf{V}_{bc}$ و $\mathbf{V}_{bn}$ از $\mathbf{V}_{ca}$ دوباره هر کدام 120° از دیگری پیشفاز است. اگر به جای پیشفاز از پسفاز استفاده کنیم، مطالب فوق برای ترتیب فاز منفی صحت خواهدداشت.

بگذارید یک بار متعادل سه فاز Y را به منبع وصل کنیم و برای این کار از سه خط و خط خنثی استفاده نماییم (شکل ۱۴ـ۱۲). بار بین هر خط و خط خنثی را با $\mathbf{Z}_p$ نشان می‌دهیم. جریان‌های این سه خط را به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد، زیرا در حقیقت سه مدار تک‌فاز داریم که یک سیم آن‌ها مشترک است.

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p}$$

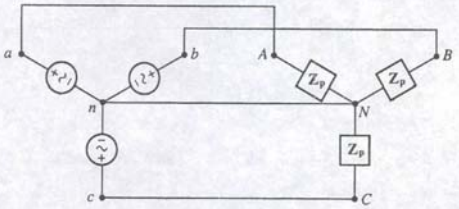
$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{\mathbf{V}_{an}\angle -120^\circ}{\mathbf{Z}_p} = \mathbf{I}_{aA}\angle -120^\circ$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{aA}\angle -240^\circ$$

و بنابراین:

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = 0$$

بنابراین اگر منبع و بار متعادل باشند و اگر چهار سیم، امپدانس صفر داشته باشند، سیم خنثی جریانی را حمل نخواهد کرد. اگر در هر یک از سه خط، امپدانس $\mathbf{Z}_L$ را به صورت سری قرار دهیم و نیز امپدانس $\mathbf{Z}_n$ را در خط خنثی بگذاریم، آنگاه جریان سیم خنثی چه خواهد شد؟ واضح است که $\mathbf{Z}_L$ها را می‌توان با امپدانس‌های بار ترکیب کرد. این بار حاصل همچنان متعادل می‌ماند و می‌توان سیم هادی خنثی را حذف نمود. بنابراین اگر با اتصال کوتاه یا بازکردن مدار بین n و N تغییری در سیستم به چشم نخورد، هر امپدانسی را می‌توان در سیم خنثی وارد کرد و جریان سیم خنثی در هر حال صفر باقی می‌ماند.

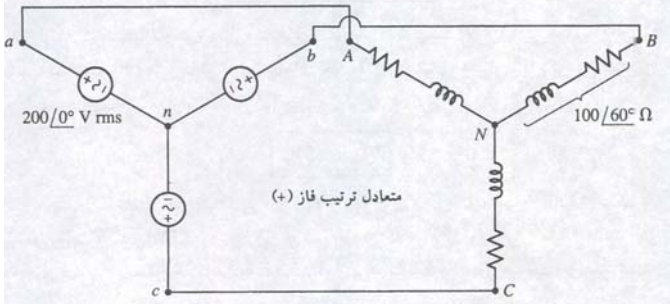


شکل ۱۴ـ۱۲ یک سیستم سه‌فاز بالانس با اتصال Y-Y و سیم خنثی.

پس اگر منبع و بارها متعادل باشند، سیم خنثی می‌تواند هر امپدانسی مثل اتصال کوتاه یا مدار باز داشته باشد. به هر حال این امپدانس هر چه باشد تأثیری بر ولتاژها و جریان‌های سیستم ندارد. اغلب بهتر است بین دو نقطهٔ خنثی را اتصال کوتاه تصور کرد، خواه واقعاً وجود داشته باشد یا نباشد. در این حال مسئله به سه مسئله تک‌فاز تبدیل می‌گردد و هر سه آن‌ها تنها در زاویه فاز با یک‌دیگر اختلاف دارند. در این حالت می‌گوییم مسئله را براساس "تک‌فاز" حل می‌کنیم.

مثال ۲ـ۱۲

برای مدار شکل ۱۵ـ۱۲، جریان‌ها و ولتاژهای مدار را پیدا کنید و توان کل مصرفی دو بار را محاسبه نمایید.

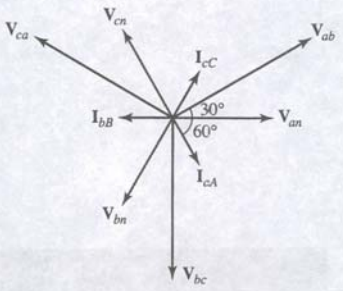


شکل ۱۵ـ۱۲ یک سیستم سه‌فاز با اتصال سه‌سیم Y-Y.

چون ولتاژ یکی از فازهای منبع داده شده و نیز ترتیب فاز مثبت است، سه ولتاژ فاز عبارتند از:

$$\mathbf{V}_{an} = 200\angle 0^\circ \text{ V} \quad \mathbf{V}_{bn} = 200\angle -120^\circ \text{ V} \quad \mathbf{V}_{cn} = 200\angle -240^\circ \text{ V}$$

ولتاژ خط $200\sqrt{3} = 346$ V است. زاویه فاز هر ولتاژ خط را می‌توان با ایجاد نمودار فیزوری مثل شکل ۱۳ـ۱۲ معین کرد. درواقع، نمودار فیزوری شکل ۱۳ـ۱۲ این‌جا هم قابل اعمال است. آنگاه با استفاده از یک ماشین‌حساب یا معادلات (۱) تا (۳) خواهیم داشت: $\mathbf{V}_{ab} = 346\angle 30^\circ$ V، $\mathbf{V}_{bc} = 346\angle -90^\circ$ V و $\mathbf{V}_{ca} = 346\angle -210^\circ$ V.



شکل ۱۶ـ۱۲ نمودار فیزوری مدار شکل ۱۵ـ۱۲.

بیایید با فاز A کار کنیم. جریان خط برابر است با:

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{200\angle 0^\circ}{100\angle 60^\circ} = 2\angle -60^\circ \text{ A}$$

چون می‌دانیم سیستم سه‌فاز بالانس است، می‌توان بقیه جریان‌های خط را براساس $\mathbf{I}_{aA}$ نوشت:

$$\mathbf{I}_{bB} = 2\angle(-60^\circ - 120^\circ) = 2\angle -180^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 2\angle(-60^\circ - 240^\circ) = 2\angle -300^\circ \text{ A}$$

توان جذب شده به وسیله فاز A برابر است با

$$P_{AN} = 200(2)\cos(0^\circ + 60^\circ) = 200 \text{ W}$$

بنابراین توان جذب شده به وسیله بار سه فاز 600 W خواهد شد.

نمودار فیزوری این مدار در شکل ۱۶ـ۱۲ مشاهده می‌شود. به محض این‌که اندازه ولتاژ خط و یا جریان را بدانیم زوایای هر سه ولتاژ و هر سه جریان به سادگی با خواندن از روی نمودار تعیین خواهد شد.

تمرین

۴ـ۱۲ یک سیستم سه فاز سه سیم به باری با اتصال Y وصل شده است، هر فاز شامل سه بار موازی است: $-J100\ \Omega$، $100\ \Omega$ و $50 + J50\ \Omega$. با فرض ترتیب فاز مثبت و $\mathbf{V}_{ab} = 400\angle 0^\circ$ V مطلوب است: (الف) $\mathbf{V}_{an}$، (ب) $\mathbf{I}_{aA}$ (ج) توان کل مصرفی در بار.

جواب: $\mathbf{V}\ \angle -30^\circ$ V، $231\ \angle -30^\circ$ A و 3200 W

قبل از ارائه مثالی دیگر، فرصت خوبی است تا عبارت بخش ۱ـ۱۲ را بشکافیم. عبارت چنین بود که اگر حتی ولتاژها و جریان‌های فاز در هر لحظه خاصی از زمان صفر باشند (در شمال امریکا هر ۱/۱۲۰ ثانیه) توان لحظه‌ای حمل شده به کل بار هرگز صفر نیست. یک بار دیگر مثال ۲ـ۱۲ را ملاحظه کنید که در آن ولتاژ و جریان فاز در حوزه زمان نوشته شده است.

$$v_{AN} = 200\sqrt{2}\cos(120\pi t + 0^\circ) \text{ V}$$

و

$$i_{AN} = 2\sqrt{2}\cos(120\pi t - 60^\circ) \text{A}$$

بنابراین توان لحظه‌ای مصرفی در فاز A برابر است با:

$$P_A(t) = v_{AN} i_{AN} = 800\cos(120\pi t)\cos(120\pi t - 60^\circ)$$
$$= 400\,[\cos(-60^\circ) + \cos(240\pi t - 60^\circ)]$$
$$= 200 + 400\cos(240\pi t - 60^\circ) \text{ W}$$

ضریب $\sqrt{2}$ برای تبدیل از واحد rms به‌کاررفته است.

به طریق مشابه داریم:

$$P_B(t) = 200 + 400 \cos(240\pi t - 300^\circ)\ W$$

و

$$P_C(t) = 200 + 400 \cos(240\pi t - 180^\circ)\ W$$

توان لحظه‌ای جذب شده به وسیله کل بار برابر است با:

$$P(t) = P_A(t) + P_B(t) + P_C(t) = 600\ W$$

این توان مستقل از زمان بوده و مقدار آن همان توان متوسط در مثال ۲ـ۱۲ است.

مثال ۳ـ۱۲

یک سیم سه فاز متعادل یا بالانس با ولتاژ خط 300 V، یک بار 1200 W با اتصال Y را در PF = 0.8 تغذیه می‌کند. جریان خط و امپدانس بار هر خط را معین کنید.

ولتاژ فاز $300 / \sqrt{3}$ و توان هر فاز $400\ W = 1200 / 3$ می‌باشد. بنابراین:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}} (I_L)\ (0.8)$$

و بنابراین جریان هر فاز 2.89 A می‌باشد. امپدانس فاز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$|Z_P| = \frac{V_P}{I_L} = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} = 60\ \Omega$$

چون PF = 0.8 پیشفاز است، امپدانس زاویه -36.9° را دارد، پس $Z_P = 60 \angle -36.9^\circ\ \Omega$ خواهد شد. بارهای پیچیده‌تر را هم به‌سادگی می‌توان بررسی کرد، چون مسائل مذکور به مسائل ساده‌تر تک‌فاز تبدیل می‌شوند.

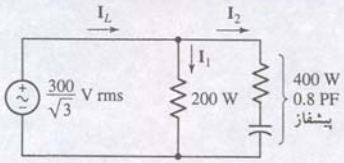
تمرین

۱۲ـ۵ یک سیستم سه فاز سه سیمه ولتاژ خط 500 V را دارد. دوبار با اتصال متعادل Y نیز به آن وصل است. یکی از آن‌ها بار خازنی با $-J2\ \Omega$ در هر فاز و دیگری القایی با $4 + J2\ \Omega$ در هر فاز می‌باشد. (الف) ولتاژ فاز را به دست آورید، (ب) جریان خط چقدر است؟، (ج) توان کل جذب شده به وسیله بار را معین نمایید، (د) ضریب توان هر منبع را پیدا کنید.

جواب: 289 V، 97.5 A، 83.0 kW، 0.983 پسفاز

مثال ۴ـ۱۲

یک بار روشنایی متعادل 600 W به سیستم مثال ۳ـ۱۲ اضافه شده است. جریان خط جدید را به دست آورید.



شکل ۱۲ـ۱۷ مدار تکفازی که برای تحلیل یک مثال سه‌فاز بالانس به‌کاررفته است.

ابتدا مدار تک‌فاز مناسبی مثل شکل ۱۲ـ۱۷ می‌کشیم. فرض شده است که بار 600 W متعادل بوده و به طور مساوی بین سه فاز تقسیم شده باشد و بنابراین در هر فاز 200 W مصرف می‌شود. دامنه جریان روشنایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}} |I_1| \cos 0^\circ$$

بنابراین:

$$|I_1| = 1.155\ A$$

به همین ترتیب اندازه جریان بار خازنی با آن‌چه قبلاً دیدیم تفاوتی ندارد، زیرا ولتاژ دو سر آن ثابت باقی می‌ماند.

$$|I_2| = 2.89\ A$$

اگر بازی که با آن کار می‌کنیم زاویه 0° داشته باشد، آن‌گاه:

$$I_1 = 1.155 \angle 0^\circ\ A \qquad I_2 = 2.89 \angle +36.9^\circ\ A$$

و جریان خط برابر است با

$$I_L = I_1 + I_2 = 3.87 \angle +26.6^\circ\ A$$

به‌علاوه، توان تولیدی در این فاز برابر است با

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}} 3.87 \cos(+26.6^\circ) = 600\ \Omega$$

که تهیه 200 W توان به‌وسیله هر خط با روشنایی جدید و نیز 400 W برای بار اصلی را تأیید می‌کند.

تمرین

۱۲ـ۶ سه بار بالانس با اتصال Y روی یک سیستم سه‌فاز چهار سیمه نصب شده است. بار 1 کلاً 6 kW را در PF = 1 می‌کشد، بار 2 به 10 kVA در PF = 0.69 پسفاز نیاز دارد و بار 3 مقدار 7 kW را در PF = 0.85 پسفاز لازم دارد. اگر ولتاژ فاز در بارها 135 V و هر خط $0.1\ \Omega$ مقاومت داشته باشد و نیز مقاومت خط خنثی $1\ \Omega$ باشد، مطلوب است: (الف) توان کل کشیده شده به وسیله بارها، (ب) PF کل بارها، (ج) توان کل از دست رفته در چهار خط، (د) ولتاژ فاز در منبع و (ه) ضریب توان کل منبع

جواب: 22.6 kW، 0.954 پسفاز، 1027 W، 140.6 V، 0.957 پسفاز

اگر بار Y نامتعادل به یک سیستم سه فاز که به لحاظ دیگر بالانس است وصل شود، باز هم می‌توان سیستم را براساس تک‌فاز تحلیل کرد، مشروط بر این‌که سیم خنثی وجود داشته باشد و امپدانس آن هم صفر باشد. اگر هر یک از این شرایط برقرار نباشد، باید از روش‌های دیگری چون روش تک‌حلقه یا تحلیل گره استفاده نمود. با این وجود مهندسینی که بیشتر وقت خود را با سیستم‌های سه‌فاز نامتعادل صرف کرده‌اند، می‌دانند که کاربرد **مؤلفه‌های متقارن** چقدر باعث صرفه‌جویی در وقت است. ما در این‌جا این روش را بحث نمی‌کنیم.

۱۲ـ۴ اتصال مثلث یا دلتا (Δ)

آرایشی دیگر در اتصال بارهای سه‌فاز اتصال Δ است، (شکل ۱۸ـ۱۲). این آرایش بسیار رایج بوده و نیازی به اتصال سیم خنثی ندارد.

اجازه دهید تا یک بار با اتصال Δ را که از سه امپدانس Z_P تشکیل شده بررسی کنیم. با مراجعه به شکل ۱۸ـ۱۲ ولتاژهای خطوط را چنین فرض می‌کنیم:

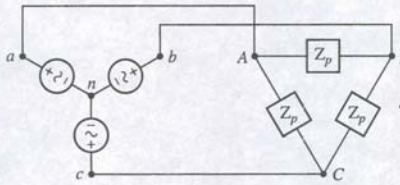
$$V_L = |V_{ab}| = |V_{bc}| = |V_{ca}|$$

یا ولتاژهای فاز معلوم چنین هستند:

$$V_P = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

که در آن

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ \quad \text{و} \quad V_L = \sqrt{3} V_p$$



شکل ۱۸ـ۱۲ یک بار Δ بالانس روی سیستم سه‌فاز سه سیم. منبع به شکل Y است.

و همان است که قبلاً دیدیم. چون ولتاژ دو سر هر شاخه از Δ معلوم است، جریان‌های فاز به راحتی به دست می‌آیند.

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_p} \qquad I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_p} \qquad I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_p}$$

و اختلاف آن‌ها جریان‌های خط را به دست می‌دهند، مثل:

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA}$$

چون با یک سیستم بالانس کار می‌کنیم. جریان‌های سه‌فاز دارای دامنه‌های برابری هستند.

$$\mathbf{I}_P = |\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}|$$

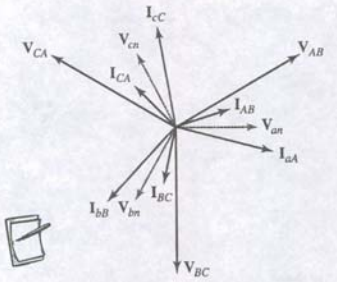
دامنه جریان‌های خط نیز برابرند. تفارن آن‌ها از روی نمودار فیزور شکل ۱۹ـ۱۲ آشکار است. پس داریم:

$$I_L = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}|$$

و

$$I_L = \sqrt{3}\, I_P$$

بگذارید موقتاً منبع را کنار بگذاریم و فقط بار متعادل را بررسی کنیم. اگر بار با اتصال Δ است، نمی‌توان ولتاژ فاز و ولتاژ خط را از هم تمیز داد، ولی جریان خط $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز است. با این وجود در اتصال Y هر دو جریان فاز و جریان خط یک مقدار دارند و ولتاژ خط $\sqrt{3}$ برابر ولتاژ فاز است.



شکل ۱۹ـ۱۲ نمودار فیزوری که اگر، $\mathbf{Z}_p$ یک امپدانس القایی باشد، قابل اعمال به مدار شکل ۱۸ـ۱۲ است.

مثال ۵ـ۱۲

دامنه یک جریان خط در سیستم سه‌فازی با ولتاژ خط 300 V را معین کنید. این خط 1200 V را به بار Δ در PF = 0.8 پسفاز منتقل می‌کند.

بیایید دوباره حالت تک‌فاز را بررسی کنیم. در این حالت بار، 400 W را در P = 0.8 پستاز از ولتاژ خط 300 V می‌کشد. بنابراین:

$$400 = 300(I_p)(0.8)$$

و

$$I_P = 1.667 \text{ A}$$

توجه داشته باشید که همه ولتاژها و جریان‌ها به rms فرض شده‌اند و رابطه بین جریان‌های فاز و جریان‌های خط برابر است با

$$I_L = \sqrt{3}(1.667) = 2.89 \text{ A}$$

به‌علاوه زاویه فاز بار برابر $\cos^{-1}(0.8) = 36.9^\circ$ است و بنابراین امپدانس در هر فاز باید برابر رابطهٔ زیر باشد:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300}{1.667}\angle 36.9^\circ = 180\angle 36.9^\circ\ \Omega$$

تمرین

۷ـ۱۳ هر فاز از یک بار Δ متعادل از یک القاگر 0.2 H سری با ترکیبی از خازن 5 μF و مقاومت 200 Ω تشکیل شده است. مقاومت خط را صفر و ولتاژ فاز را 200 V در $\omega = 400$ rad/s فرض کنید. (الف) جریان فاز را پیدا کنید. (ب) جریان خط را پیدا کنید. (ج) کل توان جذب شده به وسیله بار را معین کنید.

جواب: 693 W، 2.01 A، 1.158 A

مثال ۶ـ۱۲

دامنه جریان خط را در یک سیستم سه فاز با ولتاژ خط 300 V که 1200 W توان را به یک بار Y در P = 0.8 پسفاز منتقل می‌کند، به دست آورید. (این همان مدار مثال ۵ـ۱۲ است ولی بار به شکل Y منتقل شده است).

براساس تک‌فاز، اکنون ولتاژ فاز $300/\sqrt{3}$ V و توان 400 W و P = 0.8 پسفاز را داریم. بنابراین:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_p)(0.8)$$

و

$$I_P = 2.89$$

یا

$$I_L = 2.89 \text{ A rms}$$

زاویه فاز بار مجدداً همان 36.9° است. بنابراین امپدانس هر فاز Y چنین خواهد بود.

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89}\angle 36.9^\circ = 60\angle 36.9^\circ\ \Omega$$

ضریب $\sqrt{3}$ نه تنها کمیت‌های خط و فاز را به هم مرتبط می‌سازد بلکه در توان کشیده شده به وسیله هر بار سه فاز هم ظاهر می‌شود. اگر یک بار Y با زاویه ضریب توان θ را فرض کنیم توان دریافتی به وسیله هر فاز برابر است با:

$$P_P = V_P I_P \cos\theta = V_P I_L \cos\theta = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\theta$$

و توان کل برابر است با:

$$P = 3P_P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$$

به طریق مشابه توان انتقالی در هر فاز به بار Δ برابر است با:

$$P_P = V_P I_P \cos\theta = V_L I_P \cos\theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\theta$$

و درنتیجه توان کل برابر است با:

$$P = 3P_P$$

$$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \qquad (۴)$$

بنابراین معادله (۴) امکان محاسبه توان کل به بار متعادل را با آگاهی از اندازه ولتاژ خط، جریان خط و زاویه فاز امپدانس بار فراهم می‌سازد و اتصال Y یا Δ در آن نقشی ندارد. اکنون جریان خط در مثال ۵ـ۱۲ و ۶ـ۱۲ در دو گام ساده قابل محاسبه است:

$$1200 = \sqrt{3}(300)(I_L)(0.8)$$

بنابراین

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89 \text{ A}$$

مقایسه‌ای خلاصه از ولتاژهای فاز و خط و جریان‌های فاز و خط در جدول ۱ـ۱۲ هم برای بارهای Y و هم Δ که به وسیله منبع سه فاز Y تغذیه شده‌اند، ارائه شده است.

جدول ۱ـ۱۲ مقایسه بارهای سه فاز اتصال ستاره (Y) و مثلث (Δ). V_P مقدار ولتاژ فاز و منبع اتصال ستاره (Y) است.

بار	ولتاژ فازی	ولتاژ خطی	جریان فازی	جریان خطی	توان در فاز
Y	$\mathbf{V}_{AN} = V_P\angle 0^\circ$ $\mathbf{V}_{BN} = V_P\angle -120^\circ$ $\mathbf{V}_{CN} = V_P\angle -240^\circ$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\mathbf{V}_{AN} = \sqrt{3}V_P\angle 30^\circ$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\mathbf{V}_{BN} = \sqrt{3}V_P\angle -90^\circ$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\mathbf{V}_{CN} = \sqrt{3}V_P\angle -210^\circ$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ که $\cos\theta$ = ضریب توان بار
Δ	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_P\angle 30^\circ$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_P\angle -90^\circ$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_P\angle -210^\circ$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_P\angle 30^\circ$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_P\angle -90^\circ$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_P\angle -210^\circ$	$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = (\sqrt{3}\angle -30^\circ)\frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = (\sqrt{3}\angle -30^\circ)\frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = (\sqrt{3}\angle -30^\circ)\frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ که $\cos\theta$ = ضریب توان بار

تمرین

۸ـ۱۲ یک سیستم سه فاز سه سیمه به دو بار موازی Δ ختم شده است. بار 1، 40 kVA در PF = 0.8 پسفاز می‌باشد. در حالی که بار 2، 24 kW را در PF = 0.8 پیشفاز جذب می‌نماید. اگر مقاومتی در خط نباشد و $\mathbf{V}_{ab} = 440\angle 30^\circ$ V باشد، (الف) توان کل دریافتی به وسیله بارها چقدر است؟ (ب) جریان فاز $\mathbf{I}_{AB1}$ برای بار پسفاز چیست؟ (ج) $\mathbf{I}_{AB2}$. (د) $\mathbf{I}_{aA}$

جواب: $75.3\angle -12.46^\circ$ A، $20.2\angle 55.8^\circ$ A، $30.3\angle -6.87^\circ$ A، 56.0 kW

منابع با اتصال Δ

منبع را هم می‌توان به فرم Δ به هم متصل کرد. البته این روش مرسوم نیست زیرا هر وضعیت نامتعادل در فازهای منابع می‌تواند منجر به چرخش جریانی قابل توجه در حلقه Δ گردد. مثلاً سه منبع تک فاز V_{ab}، V_{bc} و V_{ca} را در نظر بگیرید. قبل از بستن Δ که با اتصال d به a صورت می‌گیرد، وضعیت نامتعادل را با جمع $V_{ab} + V_{bc} + V_{ca}$ معین می‌کنیم. فرض کنید دامنه نتیجه تنها 1 درصد ولتاژ خط باشد، بنابراین جریان چرخشی تقریباً $\frac{1}{3}$ درصد ولتاژ خط تقسیم بر امپدانس هر منبع است. این امپدانس چقدر می‌تواند باشد؟ این امپدانس به جریانی که منبع می‌تواند بدهد، بستگی دارد که البته مختصر اتی در ولتاژ پایانه خواهد داشت. اگر این حداکثر جریان 1 درصد افت ر در ولتاژ پایانه موجب شود، آنگاه جریان چرخشی یک‌سوم جریان ماکزیمم است! پس توانایی منبع در تأمین جریان کم ـ تلفات داخلی آن زیاد خواهد شد. همچنین باید توجه کرد که منابع سه فاز متعادل را از Y به Δ و یا برعکس بدون تأثیر بر جریان‌ها یا ولتاژهای بار می‌توان تبدیل نمود. روابط لازم بین ولتاژهای خط و فاز برای حالتی که V_{an} دارای زاویه فاز مرجع 0° است، در شکل ۱۳ـ۱۲ دیده می‌شود. این تبدیل اجازه می‌دهد تا هر اتصال منبعی را که ترجیح می‌دهیم انتخاب کنیم. البته تا وقتی که اتصال را ندانیم، نمی‌توانیم جریان‌ها و ولتاژهای منبع را مشخص کنیم. بارهای سه‌فاز را می‌توان با استفاده از رابطه زیر از Δ به Y تبدیل نمود.

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

که حفظ کردن آن ارزشمند است.

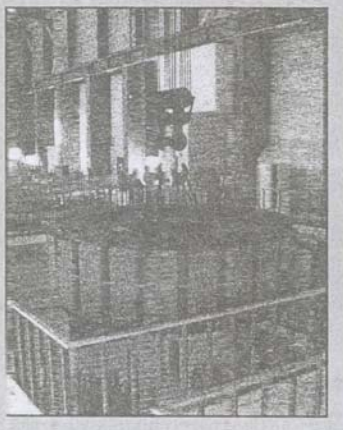
کاربرد عملی

سیستم‌های مولد توان الکتریکی

در تولید توان الکتریکی از تکنیک‌های متنوعی می‌توان استفاده کرد. مثلاً تبدیل مستقیم انرژی خورشید به الکتریسیته با سلول خورشیدی تولید توان dc می‌کند. با این وجود علیرغم وجود یک تکنولوژی ساده در این تکنیک تأسیسات مبتنی‌بر سلول خورشیدی فعلاً از دیگر روش‌های تولید الکتریسیته خیلی گران‌تر بوده و به مبدل‌هایی برای تبدیل از dc به ac نیاز دارند. دیگر تکنولوژی‌ها مانند ژنراتورهای مبتنی‌بر توربین‌های بادی، حرارت حاصل از گرمای زمین، هیدرودینامیک، هسته‌ای و سوخت فسیلی بسیار اقتصادی‌ترند. در این سیستم‌ها شفتی از طریق محرک اصلی مثل پره‌های بادی یا توربین آبی یا بخاری روی تیغه‌های توربین می‌چرخد (شکل ۲۰ـ۱۲).

با اتصال محرک اصلی برای چرخش شفت، چندین روش برای تبدیل این انرژی مکانیکی به الکتریکی وجود دارد. مثالی از این تبدیل ژنراتور سنکرون شکل ۲۱ـ۱۲ است. این ماشین‌ها از دو بخش اصلی تشکیل شده‌اند، یکی بخش ساکن به نام استاتور و بخش دوار به نام روتور. به سیم‌پیچ حول روتور یک جریان dc اعمال می‌گردد تا یک میدان مغناطیسی تولید شود. روتور توسط محرک اصلی می‌چرخد. آنگاه یک مجموعه ولتاژ سه‌فاز در بخش دوم سیم‌پیچی حول استاتور تولید می‌گردد. ژنراتورهای سنکرون یا همزمان نام خود را از همزمان بودن فرکانس ولتاژ ac تولید شده با روتور مکنیکی دوار گرفته‌اند.

شکل ۲۰ـ۱۲ تأسیسات انرژی بادی در کالیفرنیا که از 7000 ایستگاه تشکیل شده است.



شکل ۲۱ـ۱۲ روتور 24 قطبی.

دیماند واقعی یک مولد، به شدت به نوع بار اضافه شده یا حذف شده مانند تهویه مطبوع و روشنایی وابسته است. به‌طور ایده‌آل ولتاژ خروجی مولد یا ژنراتور باید مستقل از بار باشد ولی عملاً چنین نیست. ولتاژ E_A القا شده در هر فاز استاتور که غالباً به آن ولتاژ تولیدی داخلی می‌گویند دارای اندازه زیر است:

$$E_A = K\phi\omega$$

که K به ساختمان ماشین وابسته است، ϕ شار مغناطیسی تولید شده به وسیله میدان سیم‌پیچ‌های روتور (بنابراین به بار وابسته نیست) و ω سرعت دوران است و فقط به محرک اصلی و نه به بار متصل به ژنراتور وابسته است. تغییر بار اندازه E_A را تغییر نمی‌دهد. ولتاژ تولید شده داخلی را می‌توان به ولتاژ فاز V_ϕ و جریان فاز I_A با رابطه زیر مرتبط کرد:

$$E_A = V_\phi + jX_S I_A$$

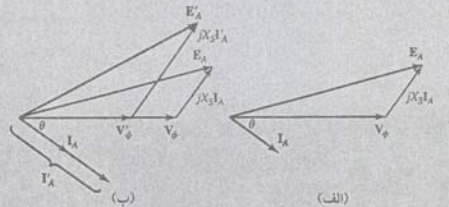
که X_S راکتانس سنکرون ژنراتور است. اگر بار افزایش یابد، آنگاه جریان زیادی از ژنراتور کشیده می‌شود اگر ضریب توان تغییر نکند (مثلاً زاویه بین V_ϕ و I_A ثابت بماند)، V_ϕ کاهش می‌یابد زیرا E_A نمی‌تواند تغییر کند.

مثلاً نمودار فیزوری شکل ۲۲ـ۱۲ (الف) را در نظر بگیرید. این نمودار ولتاژ – جریان خروجی یک ژنراتور تک‌فاز متصل به باری با ضریب توان $\cos\theta$ را نشان می‌دهد. ولتاژ تولیدی داخلی E_A هم نشان داده شده است. اگر باری بدون تغییر ضریب توان اضافه گردد، شکل ۲۲ـ۱۲ (ب)، جریان I_A به I'_A افزایش می‌یابد. در این حالت اندازه ولتاژ تولیدی داخلی که از جمع فیزوری $jX_S I'_A$ و V'_ϕ به دست می‌آید باید بدون تغییر باقی بماند. بنابراین $E'_A = E_A$ و ولتاژ خروجی (V'_ϕ) ژنراتور کمی کاهش می‌یابد. شکل ۲۲ـ۱۲ (ب).

تثبیت ولتاژ یک ژنراتور با رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\%\ \text{تثبیت} = \frac{V_{\text{بی‌بار}} - V_{\text{بارکامل}}}{V_{\text{بارکامل}}} \times 100$$

به‌طور ایده‌آل این مقدار تا حد ممکن باید به صفر نزدیک باشد، ولی تنها در شرایطی امکان‌پذیر است که جریان dc به کار رفته برای کنترل شار ϕ حول سیم‌پیچ میدان تغییر کند، تا هرگونه تغییر بار را جبران نماید. این کار چندان ساده نیست. به این دلیل، هنگام طراحی یک نیروگاه، ساخت چند ژنراتور کوچک بر یک ژنراتور بزرگ که قادر به تحمل بار پیک باشد، ترجیح داده می‌شود. هر ژنراتور می‌تواند در نزدیکی بار کامل کار کند تا ولتاژ خروجی اساساً ثابت بماند. می‌توان برحسب تقاضای مشتریان تک‌تک ژنراتورها را حذف و یا وارد مدار کرد.



شکل ۲۲ـ۱۲ نمودار فیزوری که تأثیر بار را روی یک ژنراتور همزمان نشان می‌دهد. (الف) ژنراتور به باری با ضریب توان پسفاز $\cos\theta$ متصل است. (ب) باری بدون تغییر ضریب توان اضافه‌شده است. اندازه ولتاژ تولید درونی E_A ثابت است ولی جریان خروجی افزایش می‌یابد. بنابراین ولتاژ خروجی V_ϕ کاهش خواهد یافت.

۱۲ـ۵ اندازه‌گیری توان در سیستم‌های سه‌فاز

کاربرد واتمتر

قبل از آغاز بحث در مورد تکنیک‌های خاص به کار رفته برای اندازه‌گیری توان سیستم‌های سه‌فاز، بهتر است ابتدا چگونگی کار **وات‌متر** که در مدار تک‌فاز به کار می‌رود را مطالعه کنیم.

اندازه‌گیری توان با وات‌مترهایی که دو سیم‌پیچ جدا دارند، معمولاً در فرکانس‌هایی کمتر از چند صد Hz انجام می‌شود. یکی از آن‌ها از سیم‌های ضخیم با مقاومت خیلی کم، ساخته

شده و **سیم‌پیچ جریان** نام دارد. دیگری از تعداد دورهای بیشتر و سیمی نازک‌تر با مقاومت نسبتاً زیاد ساخته شده و **سیم‌پیچ پتانسیل** یا **ولتاژ** خوانده می‌شود. می‌توان مقاومتی اضافه را هم در داخل یا خارج با سیم‌پیچ سری کرد. گشتاور اعمال شده بر سیستم متحرک و عقربه متناسب با حاصل‌ضرب لحظه‌ای جریان در دو سیم‌پیچ است. به هر حال ماندگاری مکانیکی سیستم متحرک موجب انحراف عقربه متناسب با مقدار متوسط این گشتاور می‌گردد. طریقهٔ اتصال وات‌متر به شبکه طوری است که جریان عبوری از وات‌متر همان جریان شبکه و ولتاژ روی سیم‌پیچ با ولتاژ دوسر پایانه‌های شبکه برابر است. جریان در سیم‌پیچ پتانسیل از تقسیم ولتاژ ورودی بر مقاومت سیم‌پیچ حاصل می‌گردد.

واضح است که وات‌متر چهار پایانه دارد و اتصال به این پایانه‌ها باید به‌طور صحیحی صورت گیرد تا امکان خواندن فراهم گردد. دقیق‌تر بگوییم، فرض کنید که می‌خواهیم توان جذب شده به وسیله یک شبکه غیرفعال را اندازه بگیریم. سیم‌پیچ جریان با یکی از دو سیم متصل به بار سری می‌شود و سیم‌پیچ پتانسیل بین دو سیم معمولاً در سمت بار سیم‌پیچ جریان قرار می‌گیرد. پایانه‌های سیم‌پیچ پتانسیل اغلب طبق شکل ۲۳ـ۱۲(الف) با پیکان نشان داده می‌شوند. هر سیم‌پیچ دو پایانه دارد و رابطه صحیحی بین حس جریان و ولتاژ باید مشاهده گردد. انتهای هر سیم‌پیچ معمولاً با (+) علامت زده می‌شود و خواندن صحیح هنگامی امکان‌پذیر است که جریان مثبت وارد پایانه (+) سیم‌پیچ جریان گردد، ضمن این‌که پایانه (+) سیم‌پیچ پتانسیل نسبت به پایانه بی‌علامت مثبت است. پس وات‌متر شکل ۲۳ـ۱۲(الف) هنگام جذب توان به وسیله شبکه سمت راست، انحرافی صحیح و افزاینده خواهد داشت. اگر فقط یکی از سیم‌پیچ‌ها معکوس گردد، و نه هر دوی آن‌ها، موجب انحراف معکوس عقربه می‌شود. معکوس کردن هر دو سیم‌پیچ تأثیری بر خواندن ندارد. بیایید به‌عنوان مثالی از کاربرد چنین وات‌متری در اندازه‌گیری توان متوسط، مدار شکل ۲۳ـ۱۲(ب) را بررسی کنیم. اتصال وات‌متر طوری است که توان جذب شده در سمت راست وات‌متر، یعنی منبع سمت راست در جهت افزایشی خوانده شود. توان جذب شده به وسیله این منبع با رابطه زیر داده می‌شود:

$$P = |\mathbf{V}_2|\ |\mathbf{I}|\ \cos\ (\text{ang}\ \mathbf{V}_2 - \text{ang}\ \mathbf{I})$$

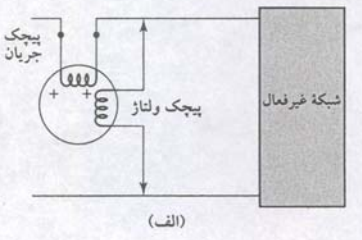
با روش تجمیع یا تحلیل تک حلقه، جریان را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{I} = 11.18 \angle 153.4^\circ\ \text{A}$$

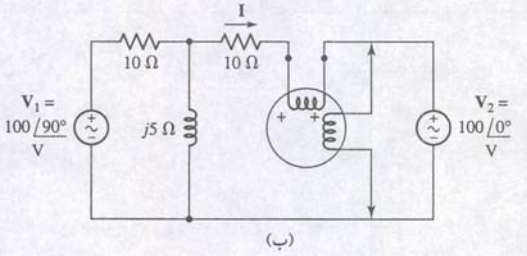
و بنابراین توان جذب شده برابر است با:

$$P = (100)(11.18)\cos(0^\circ - 153.4^\circ) = -1000\ \text{W}$$

بنابراین عقربه اندازه‌گیری به سمت پایین منحرف می‌شود تا جایی که متوقف گردد. در عمل تعویض سیم‌پیچ پتانسیل راحت‌تر از سیم‌پیچ جریان صورت می‌گیرد. این عمل خواندن 1000 W را به همراه دارد.



(الف)

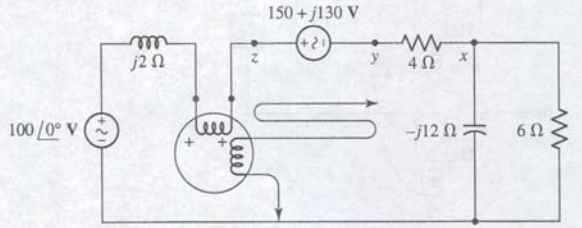


(ب)

شکل ۲۳ـ۱۲ (الف) اتصال وات‌متر که هنگام خواندن توان جذب‌شده شبکه عقربه آن در جهت افزاینده حرکت می‌کند. (ب) مثالی از نصب وات‌متر برای خواندن توان جذب‌شده به وسیله منبع سمت راست.

تمرین

۹ـ۱۲ قرائت وات‌متر در شکل ۲۴ـ۱۲ را معین کنید. بگویید برای قرائت مثبت باید سیم‌پیچ پتانسیل را معکوس کرد یا خیر. سپس وسیله یا وسایلی که این انرژی را جذب یا تولید می‌کند، مشخص نمایید. پایانه (+) وات‌متر متصل به (الف) x، (ب) y و (ج) z وصل است.



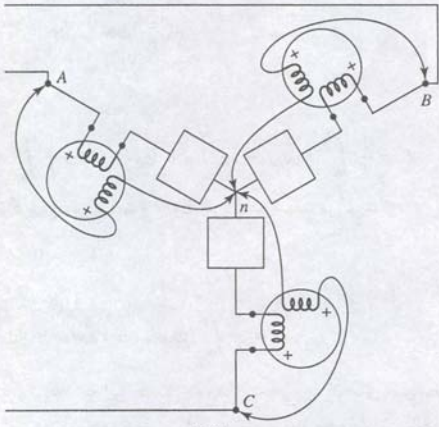
شکل ۲۴ـ۱۲

جواب: 1200 W همان‌طور که هست، $P_{6\Omega}$ (مصرف)، 2200 W همان‌طور که هست $P_{4\Omega} + P_{6\Omega}$ (مصرف)، 500 W عوض شود: مصرفی به وسیله 100 V (مصرف).

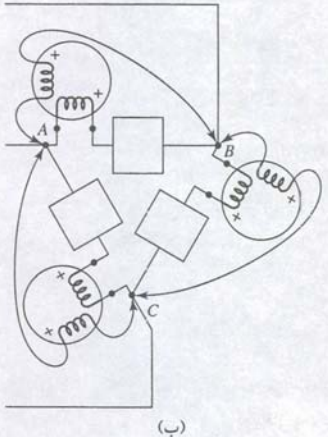
وات‌متر در سیستم سه‌فاز

ر نگاه اول، اندازه گیری توان مصرف شده به وسیله بار سه‌فاز ساده به نظر می‌رسد. کافی است ر هر فاز تنها یک وات‌متر مستقر کنیم و نتایج را به هم بیفزاییم. مثلاً، یک اتصال صحیح برای تصال Y بار در شکل ۲۵ـ۱۲(الف) نشان داده شده است. هر وات‌متر سیم‌پیچ جریان خود را در ک فاز بار قرار داده و سیم‌پیچ پتانسیل خود را هم بین بار و سیم خنثی مستقر کرده است. به روشی شابه، سه وات‌متر را می‌توان مثل شکل ۲۵ـ۱۲(ب) بست تا توان کل دریافتی به وسیله بار Δ ندازه گیری شود. روش‌ها از لحاظ تئوری صحیح‌اند، ولی در عمل قابل پیاده‌سازی نیستند، زیرا سیم خنثی در Y همیشه قابل دسترسی نیست و فازها هم در Δ در دسترس نمی‌باشند. مثلاً یک ماشین چرخان سه‌فاز فقط سه پایانه قابل دسترسی دارد، که ما آن‌ها را A، B و C می‌خوانیم.

واضح است که به روشی برای اندازه گیری توان کل جذبی به وسیله بار سه‌فاز با سه پایانه ابل دسترسی نیاز است. اندازه گیری‌ها ممکن است در سمت منبع صورت گیرد و نه در سمت بار.

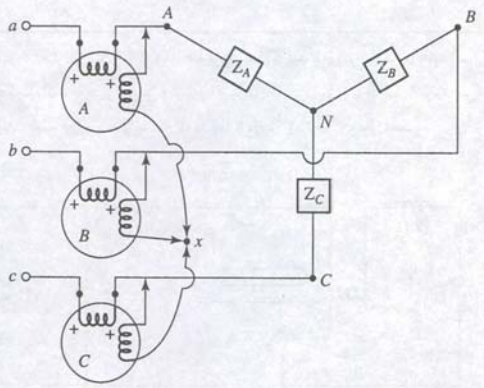


(الف)



(ب)

شکل ۲۵ـ۱۲ سه وات‌متر طوری وصل شده‌اند که توانی جذبی به‌وسیله یکی از بارهای سه‌فاز را بخواند و جمع سه اندازه‌گیری توان کل است. (الف) یک بار Y، (ب) یک بار Δ. هیچ‌یک از بارها یا منابع نیازی به بالانس‌بودن ندارند.



شکل ۲۶ـ۱۲ روش اتصال وات‌مترها برای اندازه‌گیری کل توان مصرفی به‌وسیله بار سه‌فاز. تنها سه پایانهٔ بار قابل دسترس‌اند.

چنین روشی وجود دارد و با آن می‌توان توان دریافتی به وسیله یک بار نامتعادل از یک منبع نامتعادل را اندازه گرفت. اکنون بیایید سه وات‌متر را طوری وصل کنیم که هر یک از سیم‌پیچ‌های جریان به یک سیم منبع و سیم‌پیچ ولتاژ بین آن خط و نقطه مشترک x ، طبق شکل ۲۶ـ۱۲ باشد. گرچه یک سیستم با اتصال بار Y تشریح شده است، بحث ارائه شده برای بار Δ هم معتبر است. نقطه x ممکن است یک نقطه نامشخص در سیستم سه‌فاز باشد، یا صرفاً نقطه‌ای در فضا باشد که در آن هر سه سیم‌پیچ پتانسیل گره مشترکی دارند. توان متوسط اندازه‌گیری شده با وات‌متر A برابر است با:

$$P_A = \frac{1}{T}\int_0^T v_{Ax} i_{aA}\, dt$$

که در آن T تناوب همه ولتاژهای منابع است. اندازه‌گیری در وات‌متر دیگر با عبارتی مشابه داده می‌شود. بنابراین توان متوسط کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{Ax} i_{aA} + v_{Bx} i_{bB} + v_{Cx} i_{cC})\, dt$$

هر یک از سه ولتاژ در عبارت فوق را می‌توان برحسب یک ولتاژ فاز و ولتاژ بین نقطه x و خط خنثی نوشت:

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$
$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$
$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

و بنابراین

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC})\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_{Nx}(i_{aA} + i_{bB} + i_{cC})\, dt$$

کل بار سه‌فاز را می‌توان یک ابرگره در نظر گرفت و قانون جریان کیرشهف می‌گوید که:

$$i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$$

پس

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC})\, dt$$

مراجعه به نمودار مدار نشان می‌دهد که این حاصل‌جمع‌ها، مجموع توان‌های متوسط دریافتی به وسیله هر فاز از بار است و لذا مجموع مقادیر قرائت شده توسط سه وات‌متر بیانگر توان متوسط کل دریافتی به وسیله بار کل است!

اجازه دهید این روال را قبل از این‌که بدانیم وات‌مترها در واقع بیش از نیازند، بررسی کنیم. فرض می‌کنیم منبع متعادل یا بالانس باشد:

$$\mathbf{V}_{ab} = 100\angle 0° \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 100\angle -120° \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 100\angle -240° \quad \text{V}$$

یا

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -30° \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -150° \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -270° \quad \text{V}$$

برای بار نامتعادل داریم:

$$\mathbf{Z}_A = -j\,10\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_B = j\,10\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_C = 10\ \Omega$$

اکنون وات‌مترها را ایده‌آل تصور کنید که طبق شکل ۲۶ـ۱۲ وصل شده و نقطه x آن روی n قرار دارد. جریان‌های سه خط از تحلیل حلقه به دست می‌آید:

$$\mathbf{I}_{aA} = 19.32\angle 15° \quad \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{bB} = 19.32\angle 165° \quad \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 10\angle -90° \quad \text{A}$$

ولتاژ بین سیم‌های خنثی برابر است با

$$\mathbf{V}_{nN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{V}_{BN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{I}_{bB}(j10) = 157.7\angle -90°$$

توان متوسطی که هر وات‌متر مشخص می‌کند را می‌توان محاسبه کرد:

$$P_A = V_P I_{aA} \cos(\text{ang}\,\mathbf{V}_{am} - \text{ang}\,\mathbf{I}_{aA})$$

$$P_A = \frac{100}{\sqrt{3}}\,19.32\cos(-30° - 15°) = 788.7\ \text{W}$$

$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}}\,19.32\cos(-150° - 165°) = 788.7\ \text{W}$$

$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}}\,10\cos(-270° + 90°) = -577.4\ \text{W}$$

توجه کنید که مقدار اندازه‌گیری شده توسط یکی از وات‌مترها منفی است. در بحث قبلی دیدید که براساس کاربرد یک وات‌متر، خواندن افزایشی روی صفحه اندازه‌گیری فقط پس از تعویض سیم‌پیچ پتانسیل یا سیم‌پیچ جریان به دست می‌آید.

پس کل توان 1 kW است. چون یک جریان 10 A rms از مقاومت بار می‌گذرد، توان کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = 10^2(10) = 1\ \text{kW}$$

و به این وسیله هر دو روش با یکدیگر همخوانی دارد.

روش دو وات متری

نشان دادیم که نقطه x، یعنی اتصال مشترک سه سیم‌پیچ پتانسیل هر جایی که بخواهیم می‌تواند باشد، بدون این‌که جمع جبری مقادیر قرائت شده با وات‌مترها را تحت تأثیر قرار دهد. اکنون بگذارید اثر استقرار نقطه x را روی یکی از سه خط منبع بررسی کنیم. مثلاً اگر یکی از دو انتهای هر سیم‌پیچ پتانسیل به B بازگردانده شود، ولتاژی در دو سر سیم‌پیچ پتانسیل وات‌متر B وجود ندارد و این وات‌متر باید عدد صفر را بخواند. بنابراین می‌توان آن را حذف کرد ولی جمع جبری در وات‌متر دیگر هنوز توان کل دریافتی به وسیله بار است. وقتی محل x به این طریق انتخاب گردد، روش را روش **دو وات‌متر** می‌نامیم. مجموع دو اندازه‌گیری توان کل را مشخص می‌کند و این مستقل از (۱) بار نامتعادل (۲) منبع نامتعادل (۳) اختلاف در دو وات‌متر و (۴) شکل موج منبع متناوب است. تنها فرضی که نمودیم این بود که اصلاح وات‌متر به اندازه کافی کوچک است و می‌توان از آن چشم پوشید. مثلاً در شکل ۲۶ـ۱۲، از سیم‌پیچ جریان هر وات‌متر جریان منبع عبور کرده و به وسیله بار به‌علاوه سیم‌پیچ ولتاژ کشیده می‌شود. چون جریان آخری خیلی کوچک است، اثر آن را می‌توان با آگاهی از مقاومت سیم‌پیچ پتانسیل و ولتاژ دو سرش، مشخص کرد. با این دو کمیت می‌توان توان تلف شده در سیم‌پیچ ولتاژ را به‌خوبی تخمین زد.

در مثال عددی فوق، اکنون بیایید فرض کنیم که دو وات‌متر به کار رفته است، یکی با سیم‌پیچ جریان در خط a و سیم‌پیچ پتانسیل در بین خطوط A و B و دیگری با سیم‌پیچ جریان در خط c و سیم‌پیچ ولتاژ بین C و B. وات‌متر اول چنین می‌خواند:

$$\begin{aligned} P_1 &= V_{AB} I_{aA} \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA}) \\ &= 100\ (19.32) \cos(0^\circ - 15^\circ) \\ &= 1866 \text{ W} \end{aligned}$$

و دومی چنین قرائت می‌کند:

$$\begin{aligned} P_2 &= V_{CB} I_{cC} \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cC}) \\ &= 100\ (10) \cos(60^\circ + 90^\circ) \\ &= -866 \text{ W} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$P = P_1 + P_2 = 1866 - 866 = 1000 \text{ W}$$

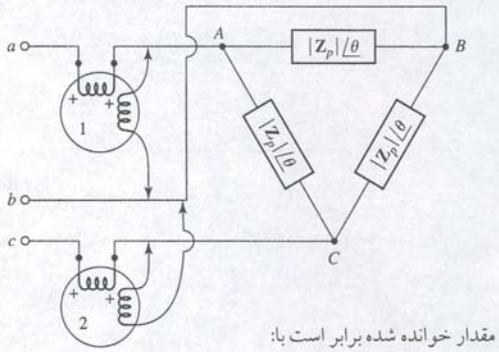
و این همان چیزی است که از مدار انتظار داریم.

در حالت بار متعادل، روش دو وات‌متر اجازه می‌دهد تا زاویه PF و نیز توان دریافتی به وسیله بار مشخص شود. بیایید باری امپدانسی را با زاویه فاز θ فرض کنیم. هر یک از دو اتصال Y یا Δ می‌تواند به کار رود ولی ما اتصال Δ را طبق شکل ۲۷ـ۱۲ برمی‌گزینیم، ساخت یک نمودار فیزوری مثل شکل ۱۹ـ۱۲، تعیین زاویه فاز بین ولتاژها و جریان‌های خط را امکان‌پذیر می‌سازد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} P_1 &= |\mathbf{V}_{AB}|\ |\mathbf{I}_{aA}| \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{AB} - \text{ang } \mathbf{I}_{aA}) \\ &= V_L I_L \cos(30^\circ + \theta) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P_2 &= |\mathbf{V}_{CB}|\ |\mathbf{I}_{cC}| \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{CB} - \text{ang } \mathbf{I}_{cC}) \\ &= V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) \end{aligned}$$



شکل ۲۷ـ۱۲ دو وات‌متر برای خواندن توان کل دریافتی به‌وسیله بار سه‌فاز متعادل، وصل شده‌اند.

نسبت دو مقدار خوانده شده برابر است با:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos(30^\circ - \theta)} \qquad (۵)$$

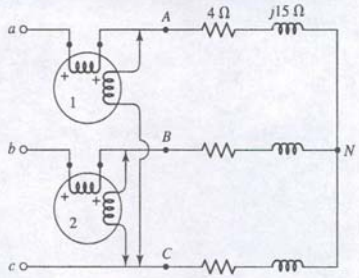
اگر جملات کسینوس را بسط دهیم، این معادله برای $\tan\theta$ به راحتی حل می‌گردد.

$$\tan\theta = \sqrt{3}\,\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \qquad (۶)$$

گر قرائت دو وات‌متر مساوی باشند، PF = 1 است، در خواندن مساوی با علامت مخالف، وع بار راکتیو خالص است، P_2 بزرگتر از P_1 امپدانسی القایی و P_2 کوچک‌تر از P_1 نیز بار خازنی را نشان می‌دهد. چگونه بدانیم که کدام وات‌متر P_1 و کدام P_2 است؟ می‌دانیم که P_1 در خط A و P_2 در خط C است و ترتیب فاز سیستم به نحوی است که V_{an} نسبت به V_{cn} پسفاز ست. برای تفکیک این دو وات‌متر همین اطلاعات کافی است، ولی در عمل موجب اشتباه می‌شود. اگر حتی موفق به تفکیک آن دو نشویم، اندازه زاویه فاز را می‌دانیم ولی علامت آن را می‌دانیم. غالباً این اطلاعات کافی است، اگر بار یک موتور القایی باشد، زاویه باید مثبت باشد ر دیگر دانستن این که کدام وات‌متر کدام است، لازم نیست. اگر اطلاعات قبلی راجع به بار داریم، آنگاه چند روش برای رفع شبهات وجود دارد. شاید که ساده‌ترین راه افزودن یک بار راکتیو امپدانس بالا مثلاً خازن سه فاز در دو سر بار مجهول باشد. در این حال بار خازنی‌تر می‌شود. بنابراین اگر اندازه $\tan\theta$ (یا اندازه θ) کاهش یابد، آنگاه بار القایی است، در حالی که فزایش در اندازه $\tan\theta$ بیانگر وجود بار خازنی است.

مثال ۷ـ۱۲

بار متعادل شکل ۲۸ـ۱۲ به وسیله یک سیستم سه‌فاز متعادل با $\mathbf{V}_{ab} = 230\underline{/0^\circ}$ V rms تغذیه و ترتیب فاز مثبت اختیار شده است. مقدار قرائت شده به وسیله هر وات‌متر و توان کل دریافتی به وسیله بار را مشخص نمایید.



شکل ۲۸ـ۱۲ یک سیستم بالانس سه‌فاز متصل به یک بار سه‌فاز بالانس که توان آن با تفکیک دو وات‌متر اندازه‌گیری می‌شود.

سیم‌پیچ ولتاژ وات‌متر شماره 1 برای اندازه‌گیری ولتاژ $\mathbf{V}_{ac}$ و سیم‌پیچ جریان آن برای اندازه‌گیری فاز جریان $\mathbf{I}_{aA}$ به کار رفته است. چون ترتیب فاز مثبت به کار رفته است. پس:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= 230\underline{/0^\circ} && \text{V} \\ \mathbf{V}_{bc} &= 230\underline{/-120^\circ} && \text{V} \\ \mathbf{V}_{ca} &= 230\underline{/120^\circ} && \text{V} \end{aligned}$$

وجه کنید که $\mathbf{V}_{ac} = -\mathbf{V}_{ca} = 230\underline{/-60^\circ}$ V است.

جریان فاز $\mathbf{I}_{aA}$ از ولتاژ فاز $\mathbf{V}_{an}$ تقسیم بر امپدانس فاز $4 + j15\ \Omega$ به دست می‌آید:

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{4 + j15} = \frac{\left(230/\sqrt{3}\right)\angle -30^\circ}{4 + j15}\ \text{A}$$

$$= 8.554\angle -105.1^\circ\ \text{A}$$

بنابراین می‌توانیم توان قرائت شده به وسیله وات‌متر 1 را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$P_1 = |\mathbf{V}_{ac}|\ |\mathbf{I}_{aA}|\ \cos(\text{ang}\ \mathbf{V}_{ac} - \text{ang}\ \mathbf{I}_{aA})$$

$$= (230)(8.554)\cos(-60^\circ + 105.1^\circ)\ \text{W}$$

$$= 1389\ \text{W}$$

به همین ترتیب داریم:

$$P_2 = |\mathbf{V}_{bc}|\ |\mathbf{I}_{bB}|\ \cos(\text{ang}\ \mathbf{V}_{bc} - \text{ang}\ \mathbf{I}_{bB})$$

$$= (230)(8.554)\cos(-120^\circ - 134.9.1^\circ)\ \text{W}$$

$$= -512.5\ \text{W}$$

بنابراین توان متوسط کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = 876.5\ \text{W}$$

تمرین

۱۰-۱۲ برای مدار شکل ۱۲-۲۶، فرض کنید بارهای $Z_A = 25\angle 60^\circ\ \Omega$، $Z_B = 50\angle 60^\circ\ \Omega$، $Z_C = 50\angle 60^\circ\ \Omega$ و $V_{AB} = 600\angle 0^\circ$ rms به‌علاوه ترتیب فاز مثبت و نقطه x در C باشد. (الف) P_A، (ب) P_B، (ج) P_C.

جواب: 0، 7200 W، 0

۱۲-۶ خلاصه فصل و مرور

- بخش عمده تولید الکتریسیته به فرم توان سه فاز است.
- برق منازل مسکونی به فرم جریان متناوب با فرکانس 60 Hz و ولتاژ 115 rms است.
- منابع سه فاز می‌توانند به صورت Y یا Δ متصل شوند. هر دو نوع منبع سه پایانه دارند و هر یک متعلق به یک فاز است. منابع Y یک سیم اتصال خنثی نیز دارند.
- در یک سیستم متعادل سه‌فاز، تمام ولتاژها با هم برابرند، ولی هر یک با دو فاز دیگر 120° اختلاف فاز دارد.
- بار در یک سیستم سه فاز ممکن است به فرم Y یا Δ باشد.
- در یک منبع متعادل با اتصال Y و ترتیب فاز مثبت (abc)، ولتاژ خط برابر است با:

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ \qquad \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90^\circ$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle -210^\circ$$

و ولتاژ هر فاز برابر است با:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0^\circ \qquad \mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -120^\circ \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\angle -240^\circ$$

- در یک سیستم با بار Y، جریان‌های منبع با جریان‌های فاز برابرند.
- در اتصال Δ منبع، ولتاژهای خط با ولتاژهای فاز برابر است.
- در یک سیستم متعادل با ترتیب فاز مثبت و یک بار Δ متعادل، جریان‌های خط عبارتنداز:

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\angle -30^\circ \qquad \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{BC}\sqrt{3}\angle -150^\circ \qquad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{CA}\sqrt{3}\angle +90^\circ$$

و جریان‌های فاز عبارتنداز:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

- بیشتر محاسبات توان بر مبنای تک‌فاز انجام می‌شود و فرض بر این‌است‌که سیستم متعادل است. در غیر این صورت تحلیل گرهی / حلقه‌ای، روشی معتبر خواهد بود.
- توان در یک سیستم سه فاز (بالانس یا غیربالانس) تنها با دو وات‌متر اندازه‌گیری می‌شود.
- توان لحظه‌ای در هر سیستم سه فاز بالانس ثابت است.

۱۲-۷ خواندنی‌های کمکی

A good overview of ac power concepts can be found in Chap. 2 of:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3rd ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

A comprehensive book on generation of electrical power from wind is:

T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins, and E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook*. Chichester, England: Wiley, 2001.

مسائل

۱۲-۲ سیستم‌های چندفاز

۱. مداری که در آزمایشگاهی ساخته شده با ولت‌متر اندازه‌گیری و نتایج زیر حاصل شده است:

$$V_{ce} = 10\ \text{V} \qquad V_{bc} = 0.7\ \text{V}$$

مطلوب است V_{cb}، V_{eb}، V_{bc}.

۲. یک تقویت کننده ترانزیستوری اثر میدان سورس مشترک با SPICE شبیه‌سازی شده است الف. اگر $V_{gs} = -1$ V و $V_{ds} = 5$ V باشد، V_{gd} را پیدا کنید. ب. اگر $V_{ds} = 4$ V و $V_{gd} = 2.5$ V باشد، V_{sg} را به دست آورید.

۳. یک سیستم قدرت (توان) شش فاز به صورت بخشی از منبع تغذیه dc جریان بالا ساخته شده است. ولتاژهای فاز را برای (الف) ترتیب فاز مثبت (ب) ترتیب فاز منفی بنویسید.

۴. اگر $\mathbf{V}_{xy} = 110\angle 20^\circ$ V و $\mathbf{V}_{xz} = 160\angle -50^\circ$ V و $\mathbf{V}_{ay} = 80\angle 130^\circ$ V باشد، مطلوب است (الف) $\mathbf{V}_{yz}$، (ب) $\mathbf{V}_{az}$، (ج) $\mathbf{V}_{zx}$ / $\mathbf{V}_{xy}$.

۵. برای مداری خاص، می‌دانیم که $\mathbf{V}_{12} = 100\angle 0^\circ$، $\mathbf{V}_{45} = 60\angle 75^\circ$، $\mathbf{V}_{42} = 80\angle 120^\circ$ و $\mathbf{V}_{35} = -j120$ است. مطلوب است (الف) $\mathbf{V}_{25}$، (ب) $\mathbf{V}_{13}$.

۶. در یک سیستم ac خاص، $\mathbf{V}_{12} = 9\angle 87^\circ$ V و $\mathbf{V}_{23} = 8\angle 45^\circ$ V است. مطلوبست (الف) $\mathbf{V}_{21}$، (ب) $\mathbf{V}_{32}$ و (ج) $\mathbf{V}_{12} - \mathbf{V}_{32}$.

۷. یک سیستم قدرت دارای $\mathbf{V}_{an} = 400\angle -45^\circ$ V و $\mathbf{V}_{bn} = 400\angle 75^\circ$ V است. (الف) نمودار فیزوری شامل $\mathbf{V}_{cn}$ را ترسیم نمایید. (ب) آیا رشته فاز سیستم مثبت است یا منفی؟ توضیح دهید.

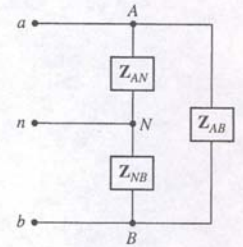
۸. با فرض $\mathbf{I}_{12} = 33\angle 12^\circ$ A و $\mathbf{I}_{23} = 40\angle 12^\circ$ A، جریان $\mathbf{I}_{31}$ چند است؟

۹. اگر یک مدار ac دارای جریان‌های $\mathbf{I}_{12} = 5\angle 55^\circ$ A و $\mathbf{I}_{23} = 4\angle 33^\circ$ A باشد، $\mathbf{I}_{31}$ برای فرکانس 50 Hz چقدر است؟

۱۲-۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم

۱۰. یک سیستم سه سیمه 230/460 V rms، 60 Hz در شکل ۱۲-۲۹ دیده می‌شود که سه بار را تغذیه می‌کند: بار AN توان مختلط $10\angle 40^\circ$ kVA، بار NB، $8\angle 10^\circ$ kVA و بار AB، $4\angle -80^\circ$ را دریافت می‌نماید. دو جریان خط و جریان سیم خنثی را پیدا کنید.

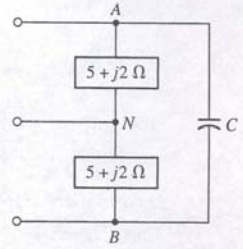
۱۱. یک سیستم یک فاز سه سیم بارهای $Z_{AN} = Z_{NB} = 10\ \Omega$ و بار $Z_{AB} = 16+J2\ \Omega$ را دارد. فرض می‌شود که هر سه خط فاقد مقاومت باشد، فرض کنید $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = 120\angle 0^\circ$ V باشد، مطلوب است (الف) $\mathbf{I}_{aA}$ و $\mathbf{I}_{nN}$، (ب) با اتصال یک مقاومت 10Ω دیگر که موازی Z است، سیستم از حالت تعادل خارج می‌شود. مطلوب است $\mathbf{I}_{aA}$، $\mathbf{I}_{bB}$ و $\mathbf{I}_{nN}$.



شکل ۲۹ـ۱۲

۱۲. یک سیستم کم بازده تک‌فاز سه سیم دارای ولتاژهای منبع $V_{an} = V_{nb} = 720\angle 0^\circ$ V مقاومت خط $R_{nN} = 10\ \Omega$ و $R_{aA} = R_{bB} = 1\ \Omega$ و بارهای $Z_{AN} = 10 + J3\ \Omega$، $Z_{NB} = 8 + J2\ \Omega$ و $Z_{AB} = 18 + J0\ \Omega$ است. مطلوب است (الف) I_{aA}، (ب) I_{nN}، (ج) کل سیم‌ها P، (د) کل بارها P.

۱۳. در یک سیستم تک‌فاز سه سیم متعادل شکل ۱۲ـ۳۰ $V_{AN} = 220$ V در 60 Hz است. (الف) سایز C چه باید باشد تا ضریب توان بار واحد گردد؟ (ب) C چند k VA را تحمل می‌کند.

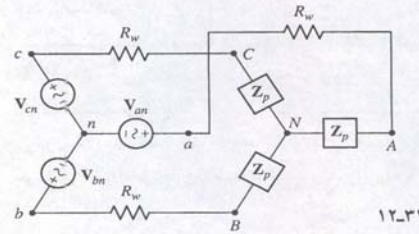


شکل ۳۰ـ۱۲

۱۴. سیستم تک‌فاز سه سیم متعادل شکل ۱۲ـ۲۹ دارای ولتاژهای منبع $V_{an} = V_{nb} = 200\angle 0^\circ$ V مقاومت خط و خنثی صفر، بارهای $Z_{AN} = Z_{NB} = 12 + J3\ \Omega$ است. مطلوب است Z_{AB} به نحوی که (الف) $X_{AB}=0$ و $I_{aA}=30$ A rms، (ب) $R_{AB}=0$ و زاویه $I_{aA}=0^\circ$ است.

۱۲ـ۳ اتصال سه فاز Y-Y

۱۵. شکل ۱۲ـ۳۱ یک سیستم سه‌فاز سه‌سیمه متعادل را با ترتیب فاز مثبت نشان می‌دهد. اجازه بدهید $V_{BC} = 120\angle 60^\circ$ V و $R_w = 0.6\ \Omega$ باشد. اگر بار کل (شامل مقاومت سیم) مقدار 5 k VA را در PF = 0.8 پسفاز دریافت کند (الف) توان کلی در مقاومت خط را پیدا کنید و (ب) V_{an}.



شکل ۳۱ـ۱۲

۱۶. فرض کنید در سیستم متعادل شکل ۱۲ـ۳۱ مقدار $V_{an}=2300\angle 0^\circ$ V و $R_w = 2\ \Omega$ باشد. اگر برای منبعی که توان مختلط کل $S = 100 + J30$ k VA را فراهم می‌کند، ترتیب مثبت فاز اختیار شود (الف) I_{aA} را به دست آورید، (ب) V_{AN}، (ج) Z_P، (د) بازده انتقال را مشخص نمایید.

۱۷. در سیستم سه فاز متعادل (شکل ۱۲ـ۳۱) فرض کنید $Z_P=12+J5\ \Omega$ و $I_{bB} = 20\angle 0^\circ$ A با ترتیب فاز مثبت باشد. اگر منبع با ضریب توان 0.935 کار کند. مطلوب است (الف) R_w، (ب) V_{bn}، (ج) V_{AB}، (د) توان مختلط تولیدی به وسیله منبع.

۱۸. یک سیستم سه فاز سه سیمه به بار متعادل Y با مقاومت 75 Ω، القاگر 125 mH و خازن 55 μF به طور سری از هر خط به نقطه خنثی وصل است. با فرض ترتیب فاز مثبت و $V_P = 125$ V در 60 Hz، جریان خط را به دست آورید. توان کل دریافتی به وسیله بار را مشخص نمایید و ضریب توان بار را معین کنید.

۱۹. یک سیم خنثی بدون اتلاف سیمی بین دو گره n و N در سیستم سه فاز شکل ۱۲ـ۳۱ دیده می‌شود. سیستم را متعادل با ترتیب فاز مثبت تصور کنید، ولی بارها نامتعادل می‌باشند. $Z_{AN} = 8 + J6\ \Omega$، $Z_{BN} = 12 - J16\ \Omega$ و $Z_{CN} = 5\ \Omega$ است. اگر $V_{an} = 120\angle 0^\circ$ V و $R_w = 0.5\ \Omega$ باشد، I_{nN} را پیدا کنید.

۲۰. برای مدار بالانس شکل ۱۲ـ۳۱، $V_{an} = 40\angle 0^\circ$ V است (با فاز مثبت) مطلوب است جریان خط و توان کل تحویلی به بار اگر امپدانس فاز $Z_P = 5 + J10\ \Omega$ و R_w برابر با (الف) 0 Ω (ب) 3 Ω باشد.

۲۱. امپدانس فاز Z_P در سیستم شکل ۱۲ـ۳۱ متشکل از یک امپدانس $75\angle 25^\circ\ \Omega$ موازی با خازن 25 μF است. $V_{an} = 240\angle 0^\circ$ V در فرکانس 60 Hz و $R_w = 2\ \Omega$ است. (الف) I_{aA} را پیدا کنید، (ب) $P_{بار}$، (ج) $P_{سیم‌ها}$، (د) ضریب توان منبع را پیدا کنید.

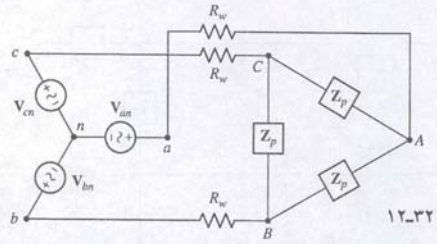
۲۲. هر بار در مدار شکل ۱۲ـ۳۱ متشکل از یک امپدانس‌القایی $100\angle 28^\circ\ \Omega$ موازی با یک خازن 500 nF است، مقاومت $R_w = 1\ \Omega$ است. با ترتیب فاز مثبت و $V_{ab} = 240\ \angle 0^\circ$ V در $f = 50$ Hz، جریان rms خط را به دست آورید، توان کل حمل شده به بار را مشخص کنید، توان تلف شده در سیم‌ها را بیابید. پاسخ خود را با شبیه‌سازی مناسبی روی PSpice تست نمایید.

۲۳. سیستم سه فاز سه سیمه متعادل شکل ۱۲ـ۳۱ دارای $R_w = 0\ \Omega$ و $Z_P = 10 + J5\ \Omega$ در هر فاز است. (الف) منبع در چه ضریب توانی کار می‌کند؟ (ب) با فرض $f = 60$ Hz چه خازنی باید موازی با امپدانس هر فاز قرار داد تا ضریب به 0.93 پسفاز افزایش یابد؟ (ج) چقدر توان راکتیو به وسیله هر خازن کشیده می‌شود به شرطی که ولتاژ خط در بار 440 V باشد.

۲۴. هر بار در شکل ۱۲ـ۳۱ متشکل از یک القاگر 1.5 H موازی با یک خازن 100 μF و یک مقاومت 1 kΩ است. مقاومت $R_w = 0\ \Omega$ می‌باشد. با استفاده از فاز مثبت و $V_{ab} = 115\angle 0^\circ$ V در $f = 60$ Hz، جریان rms خط و توان کل حمل شده به بار را معین کنید. پاسخ را با شبیه‌ساز PSpice تست کنید.

۱۲ـ۴ اتصال مثلث یا (دلتا) Δ

۲۵. شکل ۱۲ـ۳۲ یک مدار سه فاز سه سیمه متعادل را نشان می‌دهد. فرض کنید $R_w = 0$ و $V_{an} = 200\ \angle 60^\circ$ V باشد، هر فاز از بار یک بار مختلط به اندازه $S_P = 2 - J1k$ VA را جذب می‌کند. اگر ترتیب فاز (+) را اختیار کنیم. مطلوب است (الف) V_{bc}، (ب) Z_P، (ج) I_{aA}.



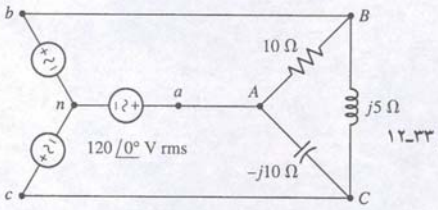
شکل ۳۲ـ۱۲

۲۶. یک بار متعادل Δ از شکل ۱۲ـ۳۲ به توان 15 kVA در PF = 0.8 پسفاز نیاز دارد. فرض کنید ترتیب فاز (+) و $V_{BC} = 180\angle 30^\circ$ V باشد. اگر $R_w = 0.75\ \Omega$ باشد، مطلوب است (الف) V_{bc}، (ب) توان مختلط کل تولید به وسیله منبع.

۲۷. بار در سیستم متعادل شکل ۱۲ـ۳۲ توان مختلط کل $3 + J1.8$ kVA را می‌کشد، در حالی که منبع $3.46 + J1.8$ kVA را تولید می‌نماید. اگر $R_w = 5\ \Omega$ باشد، مطلوب است (الف) I_{aA}، (ب) I_{AB}، (ج) V_{an}.

۲۸. بار Δ در مدار شکل ۱۲ـ۳۲ توان 1800 W را با $PF = \sqrt{2}/2$ پسفاز می‌کشد. توان تلف شده در مقاومت سیم 240 W و $R_w = 2.3\ \Omega$ است. ولتاژ فاز rms منبع و rms جریان بار را به دست آورید.

۲۹. منبع شکل ۱۲ـ۳۳ متعادل و دارای ترتیب فاز مثبت است (الف) I_{aA}، (ب) I_{bB}، (ج) I_{cC} و (د) کل توان مختلطی را که منبع تأمین می‌کند، به دست آورید.

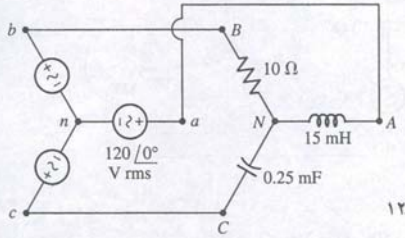


شکل ۳۳ـ۱۲

۳۰. برای مدار شکل ۱۲ـ۳۲، $V_{AB} = 200\angle 0^\circ$ V با ترتیب فاز (+)، $R_w = 200$ mΩ و امپدانس فاز Z_P متشکل از یک مقاومت موازی با یک راکتانس Ω 30 می‌باشد. توان کل تهیه شده به وسیله منبع، ضریب توان آن و بازده انتقال را پیدا کنید.

۳۱. منبع Y سه فاز بالانس در شکل ۱۲ـ۳۲ دارای $V_{an} = 140\angle 0^\circ$ V با ترتیب فاز مثبت است. فرض کنید $R_w = 0$ است. بار سه فاز متعادل 15 kW و 9+ kVAR را می‌کشد، مطلوب است (الف) V_{AB}، (ب) I_{AB}، (ج) I_{aA}.

۳۲. برای سیستم سه فاز شکل ۱۲ـ۳۴، یک منبع متعادل با ترتیب فاز (+) را در نظر بگیرید. اگر فرکانس کاری 60 Hz باشد، اندازه (الف) V_{AN}، (ب) V_{BN}، (ج) V_{CN} را به دست آورید. پاسخ خود را با یک شبیه‌سازی مناسب در PSpice آزمایش کنید.



شکل ۳۴ـ۱۲

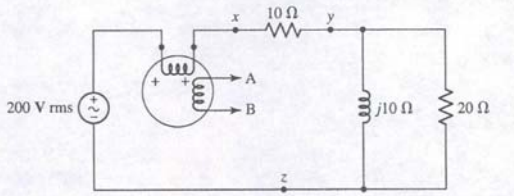
۳۳. (الف) در هر یک از خطوط شکل ۱۲ـ۳۳ یک مقاومت 1Ω وارد کنید و دوباره تمرین ۲۹ را تکرار نمایید. (ب) حل خود را با PSpice تست کنید.

۳۴. یک سیستم سه فاز که دارای ولتاژ خط 240 V rms است حاوی یک بار Δ از $12 + J$kΩ در هر فاز و نیز یک بار $5 + J3$kΩ در هر فاز است. جریان خط، توان دریافتی به وسیله بار ترکیبی و ضریب توان بار را معین کنید.

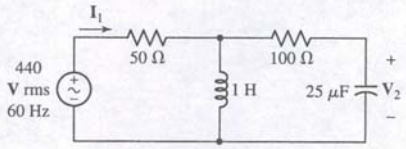
۱۲ـ۵ اندازه گیری توان در سیستم‌های سه فاز

۳۵. مقدار قرائت شده به وسیله وات‌متر در مدار شکل ۱۲ـ۳۵ را معین کنید. به شرطی که پایانه‌های A و B به ترتیب (الف) x و y، (ب) x و z، (ج) y و z وصل باشد.

۳۶. یک وات‌متر در مدار شکل ۱۲ـ۳۶ وصل است به نحوی که I_1 وارد پایانه (+) سیم‌پیچ جریان می‌گردد، در حالی که V_2 ولتاژ دو سر سیم‌پیچ پتانسیل است. وات‌متر چه چیزی را اندازه می‌گیرد. پاسخ خود را با شبیه سازی مناسب با PSpice آزمایش کنید.

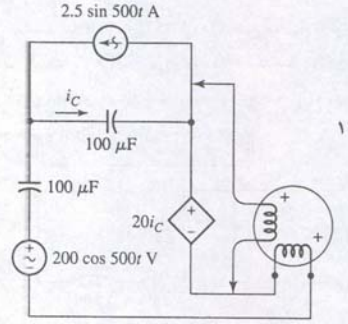


شکل ۳۵ـ۱۲



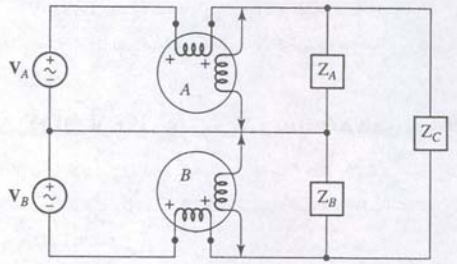
شکل ۳۶ـ۱۲

۳۷. وات‌متر متصل به مدار شکل ۱۲.۳۷ چقدر می‌خواند.



شکل ۱۲.۳۷

۳۸. (الف) دو وات‌متر در شکل ۱۲.۳۸ چه می‌خوانند. به شرطی که $V_A = 100 \angle 0^\circ$ Vrms و $V_B = 50 \angle 90^\circ$ Vrms، $Z_A = 10 - J10\Omega$، $Z_B = 8 + J6\ \Omega$ و $Z_C = 30 + J10\ \Omega$ باشد، پاسخ خود را با PSpice آزمایش نمایید.

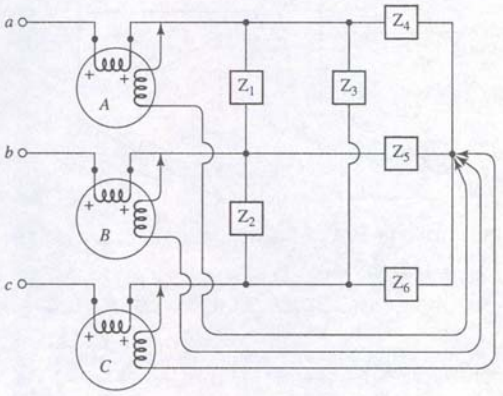


شکل ۱۲.۳۸

۳۹. مقدار مدار شکل ۱۲.۳۹ عبارتنداز: $V_{ab} = 200 \angle 0^\circ$، $V_{bc} = 200 \angle 120^\circ$ Vrms و $V_{ca} = 200 \angle 240^\circ$ Vrms، $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 50 \angle -60^\circ\ \Omega$، $Z_4 = Z_5 = Z_6 = 25 \angle 30^\circ\ \Omega$ هر وات‌متر چه می‌خواند.

۴۰. برای مدار شکل ۱۲.۳۲ نشان دهید که توان جذب شده به وسیله بار قابل اندازه‌گیری (الف) سه وات‌متر است (ب) دو وات‌متر است.

۴۱. برای مدار شکل ۱۲.۳۱ نشان دهید که توان جذب شده به وسیله بار چگونه قابل اندازه‌گیری (الف) سه وات‌متر (ب) دو وات‌متر است.



شکل ۱۲.۳۹

فصل سیزدهم

مدار با کوپل مغناطیسی

مقدمه

هر وقت که جریان ac یا dc در رسانایی جاری شود، یک میدان مغناطیسی حول آن تولید می‌گردد. در مدارها غالباً به شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه سیمی اشاره می‌شود و درواقع متوسط مؤلفه عمودی میدان مغناطیسی حاصل از حلقه ضربدر سطح حلقه است. وقتی یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان به وسیله یک حلقه تولید شود در حلقه دوم نفوذ می‌کند و ولتاژهای بین دو انتهای سیم دوم القا می‌گردد. برای این‌که این پدیده را از القا تمیز دهیم، اولی را خودالقا می‌نامیم. دومین پدیده بنابراین، **القای متقابل** است.

وسیله‌ای به‌عنوان القاگر متقابل وجود ندارد، ولی اصول این پدیده مبنای وسیلهٔ مهمی به نام ترانسفورماتور یا ساده‌تر بگوییم ترانس است. یک ترانس از دو سیم‌پیچ که با فاصله‌ای کم از یکدیگر جدا شده‌اند، تشکیل شده است و معمولاً بسته به کاربرد برای تبدیل ولتاژهای ac به مقادیر بیشتر یا کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر وسیله الکتریکی که برای کار به جریان dc نیاز دارد، برای وصل به پریز از ترانس استفاده می‌نماید تا قبل از یکسوسازی سطح ولتاژ را تنظیم نماید. عمل یکسوسازی معمولاً با کمک دیودها صورت می‌گیرد و در هر کتاب الکترونیک پایه نیز توصیف شده است.

مفاهیم کلیدی

- القای متقابل
- خودالقایی
- قرارداد نقطه
- امپدانس منعکسه
- شبکه‌های معادل T و π
- ترانس ایده‌آل
- نسبت دور یک ترانس ایده‌آل
- تطبیق امپدانس
- تحلیل PSpice مدارهای ترانس‌دار

۱۳-۱ القای متقابل

در فصل ۷ القاکنایی را با معرفی رابطه‌ای بین ولتاژ و جریان تعریف کردیم.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

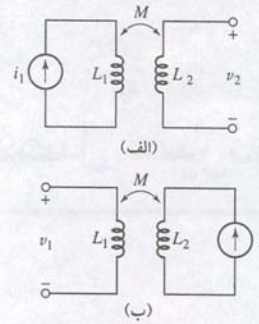
که در آن قرارداد علامت عنصر غیرفعال رعایت شد. مبنای فیزیکی این مشخصه جریان - ولتاژ بر دو مورد متکی است.

۱. تولید **شار مغناطیسی** به وسیله جریان، که در آن شار در القاگرهای خطی متناسب با جریان است.

۲. تولید ولتاژ با میدان مغناطیسی متغیر با زمان، که در آن ولتاژ متناسب با تغییر زمانی میدان مغناطیسی یا شار مغناطیسی است.

ضریب القای متقابل

القای متقابل حاصل تعمیم بحث فوق است. جریانی که در یک سیم‌پیچ جاری می‌شود، حول آن سیم‌پیچ و سیم‌پیچ دیگری در آن حوالی، میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. شار متغیر با زمان که سیم‌پیچ دوم را احاطه کرده است ولتاژی در دو سر آن تولید می‌نماید. این ولتاژ



شکل ۱-۱۳ (الف) جریان i_1 در L_1 ولتاژ مدار باز v_2 را در L_2 به‌وجود می‌آورد. (ب) جریان i_2 در L_2 ولتاژ مدار باز v_1 را در L_1 ایجاد می‌کند.

ساده‌ای از دو سیم‌پیچ L_1 و L_2 را نشان می‌دهد که به اندازه کافی به هم نزدیک می‌باشند، به نحوی که شار تولیدی به وسیله جریان $i_1(t)$ در L_1 یک ولتاژ مدار باز $v_2(t)$ را در دو سر L_2 ایجاد می‌نماید. در این‌جا بدون تأکید بر علامت صحیح جبری برای این ارتباط، ضریب القای متقابل یا ساده‌تر القای متقابل M_{21} را چنین تعریف می‌کنیم:

$$v_2(t) = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \qquad (۱)$$

ترتیب زیرنویس به این معنی است که پاسخ ولتاژ حاصل در L_2 به وسیله منبع جریانی در L_1 تولید شده است. اگر سیستم معکوس گردد، آن‌گاه طبق شکل ۱-۱۳(ب) داریم:

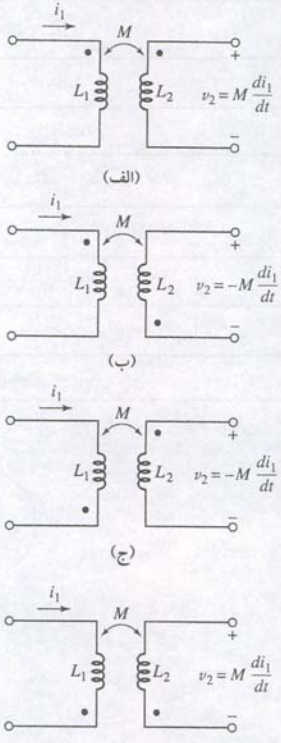
$$v_1(t) = M_{12}\frac{di_2(t)}{dt} \qquad (۲)$$

در هر صورت دو ضریب القای متقابل لزومی ندارند. بعداً با به‌کارگیری روابط انرژی ثابت، خواهیم دید که M_{12} و M_{21} برابر هم می‌باشند. پس $M_{12} = M_{21} = M$. وجود کوپل یا تزویج متقابل بین دو سیم‌پیچ با یک پیکان دوسر نشان داده می‌شود (شکل ۱-۱۳(الف و ب)).

القای متقابل برحسب هنری اندازه‌گیری می‌شود و مانند مقاومت، القاکنایی و ظرفیت، کمیتی مثبت است. البته القای متقابل را به صراحت نمی‌توان مثبت فرض کرد. خصوصاً بهتر است وقتی که سه یا چند سیم‌پیچ در کنار هم هستند هر یک علامت خود را داشته باشد و با سیم‌پیچ‌های دیگر واکنش نماید. ما در ادامه، بحث خود را به دو سیم‌پیچ محدود می‌کنیم. در هر صورت ولتاژ $M\,di/dt$ بسته به افزایش یا کاهش جریان در هر لحظه از زمان ممکن است مثبت یا منفی تصور شود.

قرارداد نقطه

القاگر عنصری دو پایانه است و به همین دلیل مجازیم از قرارداد علامت عنصر غیرفعال برای آن استفاده کنیم و علامت صحیحی برای ولتاژ $L\,di/dt$ یا $j\omega LI$ برگزینیم . اگر جریان وارد پایانه مثبت ولتاژ گردد، آن‌گاه قرارداد مثبت به کار رفته است. با این وجود القای متقابل را نمی‌توان به طریقی مشابه بررسی کرد، زیرا چهار پایانه دارد. گزینش علامت صحیح را به چند طریق می‌توان انجام داد، از آن جمله **"قرارداد نقطه"** یا بررسی روش خاصی که طی آن جهت سیم‌پیچ مشخص می‌شود. در این‌جا فقط قرارداد نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم و به شکل فیزیکی سیم‌پیچ‌ها هم نگاه مختصری می‌اندازیم. وقتی با دو سیم‌پیچ کوپل شده سروکار داریم، استفاده از دیگر نمادهای خاص لزومی ندارد.



شکل ۲-۱۳ جریان وارده به پایانه نقطه‌دار یک سیم‌پیچ ولتاژی ایجاد می‌کند که علامت مثبت آن در سمت نقطه‌دار است. جریانی که وارد پایانه بی‌نقطه یک سیم می‌شود، مثبت ولتاژ در سیم‌پیچ ۲ در سمت بی‌نقطه است.

در قرارداد نقطه‌ای، در هر سمت سیم‌پیچ‌هایی که القاکنایی متقابل دارند، یک نقطه بزرگ گذاشته می‌شود. علامت ولتاژ حاصل از القای متقابل را چنین تعریف می‌کنیم.

> جریانی که وارد پایانه نقطه‌دار یکی از سیم‌پیچ‌ها شود، ولتاژ مدار بازی را به وجود می‌آورد که مرجع مثبت آن در پایانه نقطه‌دار سیم‌پیچ دوم است.

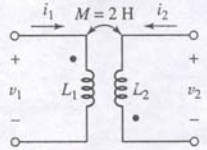
به این ترتیب در شکل ۲-۱۳ (الف)، i_1 وارد پایانه نقطه‌دار L_1 می‌شود و v_2 به صورت مثبت در پایانه نقطه‌دار L_2 حس می‌گردد، یعنی $v_2 = M di_1/dt$ خواهد بود. قبلاً ملاحظه شد که همواره نمی‌توان جریان‌ها و ولتاژها را در سرتاسر مدار طوری انتخاب کرد که قرارداد علامت عناصر غیرفعال تأیید شود. مورد مشابهی برای کوپل متقابل هم وجود دارد. مثلاً در شکل ۲-۱۳ (ب) بهتر است v_2 را با مرجع مثبت واقع در پایانه بدون نقطه نشان داد. در این صورت $v_2 = -M\,di_1/dt$ خواهد بود. ممکن است جریان‌ها هم همیشه وارد پایانه‌های نقطه‌دار نشوند، مثل شکل ۲-۱۳ (ج) و (د). آن‌گاه می‌گوییم:

> جریانی که وارد پایانه بدون نقطه یک سیم‌پیچ می‌شود، ولتاژی ایجاد می‌کند که علامت مثبت آن در پایانه بدون نقطه سیم‌پیچ دوم قرار دارد.

توجه کنید که در بحث‌های قبلی نقشی برای خودالقایی در ولتاژ در نظر گرفته نشده است، که اگر i_2 غیرصفر باشد، قطعاً اثرگذار خواهد بود. ما این وضعیت مهم را به‌طور مشروح بحث می‌کنیم ولی ابتدا مثالی سریع مناسب‌تر است.

مثال ۱-۱۳

در مدار شکل ۳-۱۳، (الف) اگر $i_2 = 5\sin 45t$ A و $i_1 = 0$ A باشد، v_1 را تعیین کنید. (ب) اگر $i_1 = -8\,e^{-t}$A و $i_2 = 0$ باشد، v_2 را به دست آورید.



شکل ۳-۱۳ قرارداد نقطه رابطه‌ای بین پایانه‌ای که جریان در آن وارد یک سیم‌پیچ می‌شود با ولتاژ مثبت در پایانه سیم‌پیچ دیگر را فراهم می‌سازد.

(الف) چون جریان i_2 وارد پایانه بی‌نقطه سیم‌پیچ سمت راست می‌شود، مرجع مثبت برای ولتاژ القا شده در سیم‌پیچ چپ، پایانه بدون نقطه است. پس ولتاژ مدار باز چنین است:

$$v_1 = -(2)(45)(5\cos 45t) = -450\cos 45t\ \text{V}$$

که به علت شار مغناطیسی متغیر با زمان حاصل از جریان i_2 در پایانه سمت راست ولتاژ فوق در دو سر پایانه‌های سمت چپ ظاهر می‌گردد. چون هیچ جریانی از سیم‌پیچ سمت چپ عبور نمی‌کند، در v_1 موضوع خود القا هیچ نقشی ندارد. (ب) اکنون جریانی داریم که وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود، ولی v_2 در پایانه بدون نقطه مثبت است. پس:

$$v_2 = -(2)(-1)(-8e^{-t}) = -16e^{-t}\text{V}$$

تمرین

۱-۱۳ با فرض $M = 10$ H و $i_1 = -2e^{-5t}$ A، ولتاژ v_2 را برای (الف) شکل ۲-۱۳(الف)، (ب) شکل ۲-۱۳ (ب) به دست آورید.

جواب: $-100e^{-5t}$ V ، $100e^{-5t}$ V .

ترکیبی از ولتاژ القاء متقابل و خودالقا

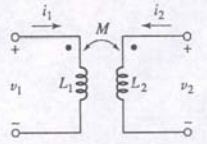
تا این‌جا فقط ولتاژ متقابل موجود در دو سر یک سیم‌پیچ مدار باز را ملاحظه کردیم. به‌طور کلی جریان می‌تواند از هر دو سیم‌پیچ بگذرد و روی هر سیم‌پیچ یک ولتاژ ناشی از عبور جریان در سیم‌پیچ دیگر به‌وجود آید. این ولتاژ متقابل مستقل و علاوه بر هر ولتاژ خودالقا است. به بیان دیگر، ولتاژ دوسر پایانه‌های L_1 متشکل از دو جمله است: $L_1\,di_1/dt$ و $M\,di_2/dt$ که هر یک بسته به جهت جریان، جهت فرض شده برای ولتاژها و محل قرارگرفتن نقطه‌ها علامت می‌گیرند. در بخشی از مدار شکل ۴-۱۳، جریان‌های i_1 و i_2 نشان داده شده‌اند. فرض بر این است که هر کدام به پایانه نقطه‌دار وارد می‌شوند. بنابراین ولتاژ دوسر L_1 از دو بخش تشکیل شده است.

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

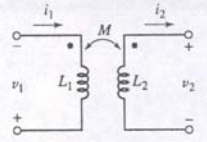
و ولتاژ دوسر L_2 چنین است:

$$v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

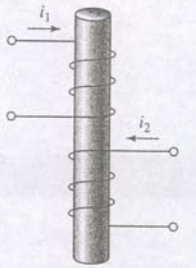
در شکل ۵-۱۳ ولتاژها و جریان‌ها طوری انتخاب نشده‌اند تا همه جملات v_1 و v_2 مثبت باشند. با بررسی i_1 و v_1 می‌بینیم که قرارداد علامت عناصر غیرفعال رعایت نشده و بنابراین $L_1\,di_1/dt$ باید منفی باشد. برای جمله $L_2\,di_2/dt$ هم به نتیجه مشابهی می‌توان رسید. جمله



شکل ۴-۱۳ چون جفت‌های v_1 و i_1 و v_2 و i_2 قرارداد علامت عناصر غیرفعال را تأیید می‌کنند هر دو ولتاژ خود القاء مثبت‌اند. چون i_1 و i_2 هر دو وارد پایانه‌های نقطه‌دار می‌شوند و چون v_1 و v_2 هر دو مثبت احساس می‌شوند ولتاژ القاء متقابل نیز مثبت است.



شکل ۵-۱۳ چون v_1 و i_1 و v_2 و i_2 طبق قرارداد علامت عناصر غیرفعال نیستند ولتاژهای خود القاء هر دو منفی‌اند. چون i_1 وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود و ولتاژ v_2 به‌طور مثبت در پایانه نقطه‌دار مثبت فرض می‌شوند، جمله متقابل v_2 مثبت است و چون i_2 وارد پایانه بی‌نقطه گشته و v_1 در پایانه بی‌نقطه مثبت حس می‌شود، جمله متقابل v_1 هم مثبت می‌باشد.



شکل ۶ـ۱۳ ساختار فیزیکی سیم‌پیچ با کوپل متقابل. با ملاحظه جهت فلوی مغناطیسی تولیدی به‌وسیله هر سیم‌پیچ، می‌توان نقطه‌ها را در پایانه‌های بالا و پایین سیم‌پیچ قرار داد.

متقابل v_2 با بررسی جهت i_1 و v_2 علامت می‌گیرد، چون i_1 وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود و v_2 در پایانه 2 مثبت حس می‌گردد، علامت $M\ di_1/dt$ مثبت است. بالاخره i_2 وارد پایانه بی‌نقطه L_2 می‌گردد و بخش متقابل v_1 یعنی $M\ di_2/dt$ نیز باید مثبت باشد. پس داریم:

$$v_1 = -L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

برای منبع سینوسی در همه فرکانس‌های ω نیز به انتخاب علامت مشابهی خواهیم رسید:

$$\mathbf{V}_1 = -j\omega L_1\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{V}_2 = -j\omega L_2\mathbf{I}_2 + j\omega M\mathbf{I}_1$$

مبنای فیزیکی قرارداد نقطه

با نگاهی بر مبنای فیزیکی قرارداد نقطه می‌توان درک بهتری از آن به دست آورد. اکنون مفهوم نقطه‌ها را برحسب شار مغناطیسی تعبیر می‌کنیم. در شکل ۶ـ۱۳ دو سیم‌پیچ روی استوانه‌ای پیچیده شده و جهت هر سیم‌پیچ نیز مشخص است. فرض کنید که جریان i_1 مثبت و با زمان افزایش یابد. جهت شار مغناطیسی ناشی از i_1 را می‌توان به کمک قانون دست راست پیدا کرد. وقتی که دست راست حول سیم‌پیچ بسته شود، انگشت شست جهت شار داخل سیم‌پیچ را نشان می‌دهد. پس شار تولیدی به وسیله i_1 به سمت پایین است. چون جریان i_1 با زمان افزایش می‌یابد، شار که با i_1 متناسب است نیز با زمان افزایش پیدا می‌کند. اکنون به سیم‌پیچ دوم توجه می‌کنیم. بگذارید i_2 را هم‌جهت و افزاینده تصور کنیم. به‌کارگیری قاعده دست راست نشان می‌دهد که میدان حاصل از i_2 نیز به سمت پایین و افزاینده است. به بیان دیگر جریان‌های i_1 و i_2 شارهای جمع شونده تولید می‌کنند.

ولتاژ دو سر پایانه‌های هر سیم‌پیچ از تغییر زمانی شار در داخل سیم‌پیچ ناشی می‌شود. پس ولتاژ دو سر پایانه‌های اولین سیم‌پیچ هنگامی که i_2 وجود دارد، بزرگتر از زمانی است که $i_2 = 0$ است. پس ولتاژی که i_2 در سیم‌پیچ اول القا می‌کند، هم‌جهت با ولتاژ خودالقا کنایی در آن سیم‌پیچ است. علامت ولتاژ خودالقا از قرارداد علامت عناصر غیرفعال مشخص است، پس علامت ولتاژ القای متقابل هم به دست خواهد آمد.

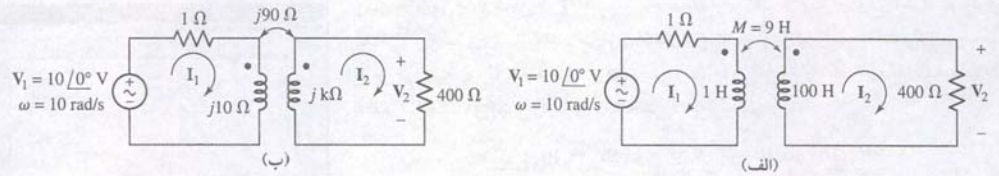
قرارداد نقطهٔ زحمت بررسی ساختمان فیزیکی سیم‌پیچ‌ها را با دو نقطه از دوش ما برمی‌دارد. به‌نحوی که مطمئن خواهیم بود در صورت ورود جریان به آن‌ها، شارهای هم‌جهت و جمع شونده تولید می‌گردد. واضح است که دو امکان برای نقطه‌ها وجود دارد، زیرا ممکن است نقاط را برداشت و در انتهای دیگر سیم‌پیچ‌ها قرار داد و باز هم شارهای جمع‌شونده به دست آورد.

مثال ۲ـ۱۳

در مدار شکل ۷ـ۱۳ (الف)، نسبت ولتاژ خروجی دو سر مقاومت 400Ω را به ولتاژ منبع به دست آورید.

- **اهداف مسئله را شناسایی کنید.**
  ما عبارتی را برای $\mathbf{V}_2$ لازم داریم که حاوی مقادیر معلوم باشد. آنگاه آن را بر $10\ \angle 0^\circ$ V تقسیم خواهیم کرد.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**
  ما با جایگزینی 1 H و 100 H با امپدانس مربوط به آن‌ها یعنی J10 Ω و Jk Ω آغاز می‌کنیم (شکل ۷ـ۱۳(ب)). همچنین القای متقابل 9 H را هم با $J\omega M = J90\ \Omega$ عوض می‌نماییم.



شکل ۷ـ۱۳ (الف) مداری حاوی القاء متقابل که در آن نسبت $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ موردنظر است. (ب) القاهای متقابل و خودالقاء با امپدانس‌های متناظر جایگزین شده‌اند.

- **ارائه طرح.**
  به‌نظر می‌رسد تکنیک مش روش خوبی باشد و ما نیز مداری با دو مش مشخص داریم.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**
  در حلقه سمت چپ علامت جمله متقابل با اعمال قرارداد نقطه معین می‌شود. چون $\mathbf{I}_2$ وارد پایانه بی‌نقطه L_2 می‌شود، ولتاژ متقابل در دوسر L_1 باید علامت مثبت را در پایانه بی‌نقطه داشته باشد. پس:

$$(1 + j10)\ \mathbf{I}_1 - j90\mathbf{I}_2 = 10\ \angle 0^\circ$$

علامت جمله متقابل در حلقه دوم به طریقی مشابه حاصل می‌گردد. چون $\mathbf{I}_1$ وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود، جمله متقابل در حلقه سمت راست دارای مرجع مثبت خود در پایانه نقطه‌دار القاگر 100 H خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(400 + j1000)\mathbf{I}_2 - j90\mathbf{I}_1 = 0$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است؟**
  ما دو معادله برای دو مجهول $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ داریم. به محض یافتن دو جریان، ولتاژ خروجی $\mathbf{V}_2$ از ضرب $\mathbf{I}_2$ در 400 Ω به دست می‌آید.

- **اقدام به حل.**
  با حل دو معادلهٔ فوق به وسیله ماشین حساب می‌بینیم که

$$\mathbf{I}_2 = 0.172\angle -16.70^\circ\ \text{A}$$

پس

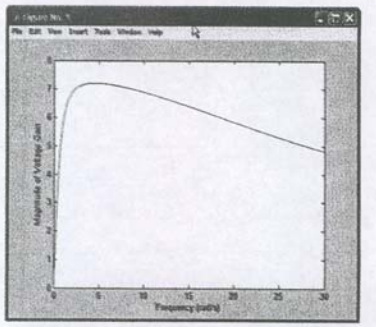
$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400\,(0.172\angle -16.70^\circ)}{10\angle 0^\circ} = 6.880\angle -16.70^\circ$$

- **صحت حل را تأیید کنید. آیا پاسخ منطقی است؟**
  ملاحظه می‌شود که $\mathbf{V}_2$ از نظر اندازه بزرگتر از $\mathbf{V}_1$ است. آیا باید همیشه این انتظار را داشت؟ پاسخ منفی است. در بخش‌های بعد خواهیم دید که می‌توان ترانسفورماتورهایی ساخت که ولتاژ را هم افزایش و هم کاهش دهند. با این وجود می‌توان گمانه‌ای سریع زد و حداقل محدوده بالا و پایین را برای پاسخ به دست آورد. اگر مقاومت 400 Ω با یک مدار اتصال کوتاه جایگزین شود، آنگاه $\mathbf{V}_2 = 0$ خواهد شد. برعکس اگر مقاومت 400 Ω را با مدار باز جایگزین کنیم، آنگاه $\mathbf{I}_2 = 0$ خواهد بود و در نتیجه:

$$\mathbf{V}_1 = 1 + j\omega L_1\mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1$$

از دو رابطه فوق می‌توان انتظار داشت که بزرگترین مقدار برای $\mathbf{V}_2 / \mathbf{V}_1$ برابر $8.955\ \angle 5.711^\circ$ است. بنابراین جواب حداقل منطقی است.



شکل ۸ـ۱۳ بهره ولتاژ $|V_2/V_1|$ مدار شکل ۷ـ۱۳ (الف) به صورت تابعی از ω و برنامه متلب زیر ترسیم شده است.

```
>> w = linspace(0,30,1000);
>> num = j*w*3600;
>> for indx = 1:1000
den = 400 + j*500*w(indx) −19*w(indx)*w(indx);
gain(indx) = num(indx)/den;
end
>> plot(w, abs(gain));
>> xlabel('Frequency (rad/s)');
>> ylabel('Magnitude of Voltage Gain');
```

ولتاژ خروجی مدار شکل ۷ـ۱۳(الف) از لحاظ مقدار بزرگتر از ولتاژ ورودی است، به نحوی که افزایش ولتاژی را با این مدار می‌توان انتظار داشت. همچنین بررسی نسبت ولتاژ برحسب تابعی از ω نیز جالب توجه است. برای یافتن $\mathbf{I}_2(J\omega)$ در این مدار خاص، جملات معادلات حلقه را برحسب فرکانس زاویه‌ای نامشخص ω می‌نویسیم:

$$(1 + j\omega)\mathbf{I}_1 \qquad -j\omega\, 9\mathbf{I}_2 = 10 \angle 0^\circ$$

و

$$-j\omega 9\mathbf{I}_1 + (400 + j\omega 100)\mathbf{I}_2 = 0$$

از حل آن دو داریم:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j90\omega}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

بنابراین نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی به صورت تابعی از فرکانس ω چنین خواهد شد:

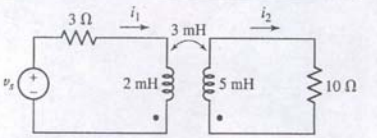
$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400\mathbf{I}_2}{10} = \frac{j\omega 3600}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

به این کسر گاهی **تابع تبدیل** مدار می‌گویند، در شکل ۸ـ۱۳ ترسیم و اندازه نقطهٔ اوج تقریباً 7 در فرکانس 4.6 rad/s می‌باشد. با این وجود در فرکانس‌های خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ، اندازه تابع تبدیل به کمتر از واحد می‌رسد.

مدار هنوز هم، به جز از برای منبع ولتاژ، غیرفعال است و تقویت (یا بهره) ولتاژ را نباید به اشتباه تقویت توان دانست. در $\omega = 10$ rad/s بهره ولتاژ 6.88 است ولی منبع ولتاژ ایده‌آل با ولتاژ پایانه 10 V، کلاً 8.07 W انرژی تولید می‌کند و از آن تنها 5.94 W به مقاومت 400 Ω انتقال می‌یابد. نسبت توان خروجی به توان منبع که آن را **بهره توان** می‌گویند، 0.736 است.

تمرین

۱۳ـ۲ برای مدار شکل ۹ـ۱۳ معادلات حلقه را برای حلقه‌های چپ و راست بنویسید به‌شرطی که $v_s = 20e^{-1000t}$V باشد.



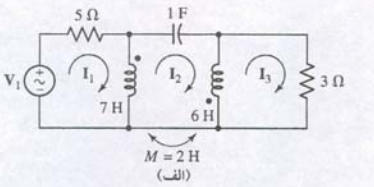
شکل ۹ـ۱۳

جواب: $20e^{-1000t} = 3i_1 + 0.002di_1/dt - 0.003di_2/dt$،

$$10i_2 + 0.005di_2/dt - 0.003di_1/dt = 0$$

مثال ۳ـ۱۳

مجموعه معادلات مناسبی برای مدار شکل ۱۰ـ۱۳(الف) بنویسید.



شکل ۱۰ـ۱۳ (الف) یک مدار سه‌حلقه با کوپل متقابل.

مدار حاوی سه مش یا حلقه بوده و سه جریان هم از قبل تخصیص یافته است. دوباره اولین گام ما جایگزینی هر دو القای متقابل و دو خودالقا با امپدانس‌های متناظر طبق شکل ۱۰ـ۱۳(ب) است. با اعمال قانون KVL به اولین حلقه و انتخاب $(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)$ به‌عنوان جریان در سیم‌پیچ دوم، علامت مثبتی برای جمله متقابل حاصل می‌گردد.

$$5\mathbf{I}_1 + 7j\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 2j\omega(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) = \mathbf{V}_1$$

یا

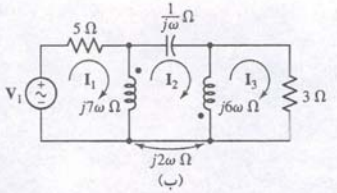
$$(5 + 7j\omega)\mathbf{I}_1 - 9j\omega\mathbf{I}_2 + 2j\omega\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1 \qquad (۳)$$

دومین حلقه دو جمله خودالقا و دو جمله القای متقابل دارد و نمی‌توان معادله را سرسری نوشت. داریم:

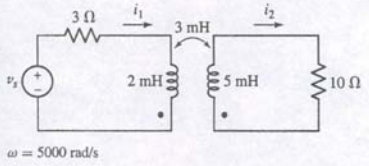
$$7j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + 2j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + \frac{1}{j\omega}\mathbf{I}_2 + 6j\omega\,(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 2j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$

یا

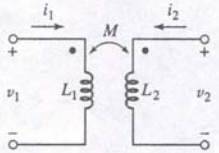
$$-9j\omega\mathbf{I}_1 + (17j\omega + \frac{1}{j\omega})\,\mathbf{I}_2 - 8j\omega\mathbf{I}_3 = 0 \qquad (۴)$$



شکل ۱۰ـ۱۳ (ب) خازن 1F و القاهای متقابل و خودالقاء با امپدانس متناظر جایگزین شده‌اند.



شکل ۱۱ـ۱۳



شکل ۱۲ـ۱۳ جفت سیم‌پیچ کوپل‌شده با یک القاکنایی متقابل $M_{12} = M_{21} = M$.

بالاخره برای سومین حلقه

$$6j\omega(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + 2j\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3\mathbf{I}_3 = 0$$

یا

$$2j\omega\mathbf{I}_1 - 8j\omega\mathbf{I}_2 + (3 + 6j\omega)\mathbf{I}_2 = 0 \qquad (۵)$$

معادلات (۳) تا (۵) با هر روش مناسبی قابل حل می‌باشند.

تمرین

۱۳ـ۳ برای مدار شکل ۱۱ـ۱۳، معادله حلقه مناسبی را برحسب جریان‌های فیزوری $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ برای (الف) حلقه چپ، (ب) حلقه راست بنویسید.

جواب: $\mathbf{V}_s = (3 + J10)\mathbf{I}_1 - J15\mathbf{I}_2$، $0 = -J15\mathbf{I}_1 + (10 + J25)\mathbf{I}_2$.

۱۳ـ۲ ملاحظات انرژی

حال بیایید تا انرژی ذخیره شده در القاگرهای کوپل متقابل را بررسی کنیم. نتایج این مطالعه به دلایل متعددی مفید خواهد بود. ابتدا فرض $M_{12} = M_{21}$ را اثبات می‌کنیم و آنگاه حداکثر مقدار القاکنایی متقابل بین دو القاگر را معین خواهیم کرد.

برابری M_{21} و M_{12}

در هر دو سیم‌پیچ کوپل شده در شکل ۱۲ـ۱۳، جریان‌ها و ولتاژها و نقاط قطب مشخص شده‌اند. برای اثبات $M_{12} = M_{21}$ با صفر کردن همه جریان‌ها و ولتاژها آغاز می‌کنیم و به این ترتیب انرژی ذخیره شده اولیه در مدار صفر تصور خواهد شد.

سپس جفت پایانه‌های سمت راست را مدار باز کرده و جریان i_1 را از صفر تا مقدار ثابت I_1(dc) در زمان $t = t_1$ افزایش می‌دهیم. توان ورودی به شبکه از سمت چپ در هر لحظه از زمان برابر است با:

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

و توان ورودی از سمت راست برابر است با:

$$v_2 i_2 = 0$$

پس انرژی ذخیره شده در شبکه هنگام $i_1 = I_1$ برابر است با:

$$\int_0^{t_1} v_1 i_1\, dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1\, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

اکنون i_1 را ثابت می‌گیریم، یعنی $i_1 = I_1$ و i_2 را از صفر در $t = t_1$ به مقدار ثابت I_2 در $t = t_2$ می‌رسانیم، پس انرژی انتقالی از منبع سمت راست چنین است:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2\, dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2\, di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

در هر صورت، به رغم ثابت بودن i_1، منبع سمت چپ در این فاصله زمانی مقداری انرژی به مدار تحویل خواهد داد:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1\, dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12}\frac{di_2}{dt} i_1\, dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

انرژی کل ذخیره شده در شبکه وقتی هر دو جریان i_1 و i_2 به مقادیر ثابتی برسند، برابر زیر است:

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

اکنون می‌توانیم جریان نهایی در این شبکه را با رساندن جریان‌ها به مقادیر نهایی‌شان ولی به ترتیب معکوس ایجاد کنیم، یعنی ابتدا i_2 را از صفر به I_2 برسانیم و سپس ضمن ثابت نگهداشتن آن، L_1 را از صفر تا I_2 افزایش دهیم، اگر باز هم انرژی ذخیره شده کل را برای آزمایش محاسبه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

تنها اختلاف در دو رابطه انرژی کل تفاوت القاکنایی‌هایی متقابل M_{21} و M_{12} است. چون شرایط اولیه نهایی در شبکه یکسان است، بنابراین دو مقدار انرژی ذخیره شده باید برابر باشند. پس:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

و

$$W = \tfrac{1}{2}L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \qquad (۶)$$

اگر یکی از جریان‌ها وارد پایانه نقطه‌دار شود، در حالی که دیگری پایانه نقطه‌دار را ترک می‌کند، علامت جمله انرژی متقابل معکوس می‌گردد:

$$W = \tfrac{1}{2}L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \qquad (۷)$$

هر چند معادلات (۶) و (۷) با فرض مقادیر نهایی مثبت برای دو جریان به دست آمدند ولی واضح است که این مقادیر ثابت می‌توانند هر مقداری باشند. پس اگر به جای I_1 و I_2 مقادیر لحظه‌ای i_1 و i_2 را بگذاریم، باز هم این عبارت انرژی ذخیره شده در شبکه را به نحو صحیحی نشان می‌دهد. به‌عبارت دیگر می‌توانیم جریان‌های لحظه‌ای را هم در این معادله به کار ببریم.

$$w(t) = \tfrac{1}{2}L_1 [i_1(t)]^2 + \tfrac{1}{2}L_2 [i_2(t)]^2 \pm M [i_1(t)][i_2(t)] \qquad (۸)$$

تنها شرطی که معادله (۸) بر آن متکی است، این‌است‌که به ازای صفر بودن هر دو جریان، انرژی ذخیره شده در شبکه صفر است.

ایجاد حد بالا برای M

اکنون به کمک معادله (۸) حد بالای M را پیدا می‌کنیم. چون $w(t)$ انرژی ذخیره شده در شبکه **غیرفعال** را نشان می‌دهد، در ازای مقادیر i_1 و i_2، L_1 و L_2 یا M نمی‌تواند منفی باشد. بگذارید فرض کنیم که i_1 و i_2 هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است. از معادلهٔ (۸) تنها حالتی که انرژی ممکن است منفی باشد، عبارت است از:

$$w = \tfrac{1}{2}L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$w = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2\right)^2 + \sqrt{L_1 L_2}\, i_1 i_2 - M i_1 i_2$$

چون درواقع انرژی منفی نیست، سمت راست معادله فوق نمی‌تواند منفی گردد. البته اولین جمله ممکن است نزدیک به صفر باشد و به این ترتیب محدودیت ما این خواهد بود که دو جمله آخر نمی‌تواند منفی شود. پس

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$

یا

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \qquad (۹)$$

بنابراین مقدار القاکنایی متقابل حد بالایی دارد. این القاکنایی متقابل نمی‌تواند از واسطه هندسی خودالقاکنایی سیم‌پیچ‌ها بیشتر شود. گرچه این برابری از فرض هم‌علامت بودن i_1 و i_2 حاصل شد ولی اگر i_1 و i_2 هم‌علامت نباشند، باز می‌توان نتیجه مشابهی به دست آورد و کافی است در معادله (۸) علامت مثبت را اختیار کنیم.

صحت نامساوی (۹) را با بررسی فیزیکی کوپل مغناطیسی هم می‌توان نشان داد. اگر i_2 را صفر بگیریم، i_1 در هر دو L_1 و L_2 شاری را می‌گذراند. واضح است که شار درون L_2 نمی‌تواند بزرگتر از L_1 باشد. زیرا شار کل از L_1 می‌گذرد. پس به طور کیفی، برای اندازه القاکنایی متقابل ممکن بین دو القاگر حد بالایی وجود دارد.

ضریب کوپل

سرعت نزدیک شدن M به مقدار ماکزیممش را ضریب کوپل می‌خوانیم و با رابطه زیر نشان می‌دهیم:

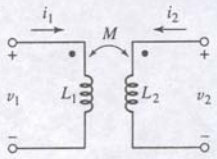
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad (۱۰)$$

چون $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

$$0 \leq k \leq 1$$

هر چقدر سیم‌پیچ‌ها به هم نزدیک‌تر باشند، ضریب کوپل بزرگتر حاصل می‌شود و نیز هر چه پیچش و جهت آن‌ها به تولید شار مغناطیسی کمک کند، ضریب کوپل یا تزویج بزرگتر خواهد بود. بالاخره برای داشتن ضریب کوپل بزرگتر می‌توان یک مسیر متمرکز ایجاد نموده و شار مغناطیسی را شدت بخشید. سیم‌پیچ‌هایی که ضریب کوپل نزدیک به واحد دارند، را **کوپل شدید** می‌گویند.

مثال ۴ـ۱۳



شکل ۱۳ـ۱۳ دو سیم‌پیچ با ضریب کوپل 0.6. $L_1 = 0.4\text{H}$ و $L_2 = 2.5\text{H}$ است.

در شکل ۱۳-۱۳ فرض کنید $L_1 = 0.4$ H، $L_2 = 2.5$ H، $k = 0.6$ **و** $i_1 = 4i_2 = 20\cos(500\text{ t} - 20^\circ)$mA **باشد. کمیت‌های زیر را در** $t = 0$ **بیابید: (الف)** i_2 **(ب)** v_1 **(ج) انرژی کل ذخیره شده در سیستم.**

(الف) $i_2(t) = 5\cos(500\text{t} - 20^\circ)$ mA پس $i_2(0) = 5\cos(-20^\circ) = 4.698$ mA

(ب) برای تعیین مقدار v_1، باید نقش خودالقایی سیم‌پیچ 1 و القای متقابل سیم‌پیچ 2 را لحاظ کنیم. بنابراین با توجه به قرارداد نقطه داریم:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

برای محاسبه این کمیت، به M نیاز است. مقدار آن از معادله (۱۰) به دست می‌آید.

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.6\sqrt{(0.4)(2.5)} = 0.6\text{ H}$$

بنابراین

$$v_1(0) = 0.4\,[-10\sin(-20^\circ)] + 0.6\,[-2.5\sin(-20^\circ)] = 1.881\text{ V}$$

(ج) انرژی کل از جمع انرژی ذخیره شده در هر القاگر به دست می‌آید. این انرژی سه جمله دارد، زیرا فرض شده است که دو سیم‌پیچ به طور مغناطیسی به هم کوپل شده‌اند. چون هر دو جریان وارد پایانه نقطه می‌شوند:

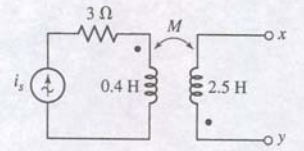
$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2}L_2 [i_2(t)]^2 + \text{M}[i_1(t)][i_2(t)]$$

با توجه به بند (الف) که $i_2(0) = 4.698$ mA و $i_1(0) = 4i_2(0) = 18.79$ mA بود می‌بینیم که انرژی کل ذخیره شده در سیم‌پیچ در زمان $t = 0$ برابر $151.2\ \mu$J است.

تمرین

۱۳-۴ اگر در مدار شکل ۱۳-۱۴ جریان منبع $i_s = 2\cos 10t$ A باشد، انرژی کل ذخیره شده در شبکه غیرفعال را در $t = 0$ معین کنید به شرطی که $k = 0.6$ و پایانه‌های x و y (الف) باز رها شوند، (ب) اتصال کوتاه شوند.

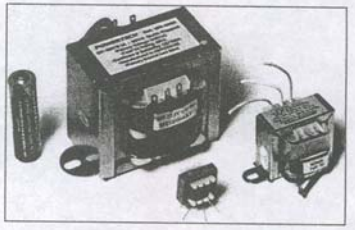
جواب: 0.8 J، 0.512 J.



شکل ۱۳-۱۴

۱۳-۳ ترانسفورماتورهای خطی

اکنون آماده‌ایم تا دانش خود از کوپل مغناطیسی را در توصیف دو وسیله خاصی که هر یک مدلی حاوی القای متقابل است، پیاده کنیم. این دو وسیله **ترانسفورماتور** هستند، جمله‌ای که می‌توان آن را برای شبکه‌ای متشکل از دو یا چند سیم‌پیچ که به نحوی حساب شده کوپل شده‌اند، به کار برد (شکل ۱۵-۱۳). در این بخش ترانسفورماتورهای خطی را ملاحظه خواهیم کرد که مدل خوبی از ترانس‌های عملی به کار رفته در فرکانس‌های رادیویی و فرکانس‌های بالاتر است. در بخش بعد ترانس ایده‌آل را در نظر می‌گیریم که مدل ایده‌آلی از ترانس‌های عملی با ضریب کوپل واحد است.



شکل ۱۳-۱۵ گزینه‌ای از چند ترانس برای استفاده در الکترونیک باطری AA فقط به خاطر مقایسه آمده است.

در شکل ۱۶-۱۳ ترانسی با دو مش جریان دیده می‌شود. اولین حلقه که معمولاً حاوی منبع است، **اولیه** خوانده می‌شود در حالی که حلقه دوم معمولاً به بار وصل شده و **ثانویه** نام دارد. القاگرهای L_1 و L_2 را هم به ترتیب اولیه و ثانویه ترانس گویند. فرض بر این است که ترانس خطی باشد. این بدان معنی است که هیچ ماده مغناطیسی به کار نرفته است (این گونه مواد، ممکن است رابطه شار - جریان را غیرخطی کنند). البته در غیاب چنین موادی به سختی می‌توان به ضریب کوپلی بزرگتر از چند دهم نائل آمد. دو مقاومت نشان داده شده عبارتند از مقاومت سیم‌هایی که L_1 و L_2 از آن‌ها ساخته شده‌اند و نیز دیگر تلفات موجود.

امپدانس منعکسه

امپدانس ورودی را در پایانه‌های مدار اولیه ملاحظه کنید. معادلات دو تک‌حلقه عبارتند از:

$$\mathbf{V}_s = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad (11)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \qquad (12)$$

روابط فوق را با تعاریف زیر ساده می‌کنیم:

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$$

$$\mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

پس

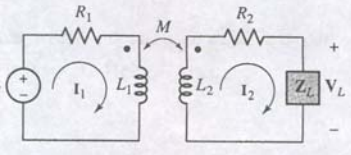
$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad (13)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad (14)$$

با حل معادله دوم برای یافتن $\mathbf{I}_2$ و جایگزینی نتیجه در معادله اول می‌توان امپدانس ورودی را به دست آورد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega)^2M^2}{\mathbf{Z}_{22}} \qquad (15)$$

قبل از دستکاری بیشتر این معادله می‌توان چند نتیجه جالب را از آن به دست آورد. اول این‌که این نتیجه مستقل از نقطه‌ها در روی هر یک از سیم‌پیچ‌ها است. اگر هر یک از نقطه‌های سیم‌پیچ



شکل ۱۳-۱۶ یک ترانس خطی حاوی یک منبع در اولیه و یک بار در ثانویه. در هر دو بخش اولیه و ثانویه مقاومت هم لحاظ شده است.

$\mathbf{Z}_{in}$ امپدانسی است که از سیم‌پیچ اولیهٔ ترانسفورماتور دیده می‌شود.

را جابه‌جا کنیم، تنها علامت M در معادلات (۱۱) الی (۱۴) تغییر می‌کند. پس می‌توان در عبارات فوق به جای M، $(-M)$ گذاشت و این تغییر علامت تأثیری بر معادله (۱۵) ندارد. همچنین توجه کنید که در معادله (۱۵) امپدانس ورودی به شرطی $\mathbf{Z}_{11}$ است که جمله تزویج یا کوپل به صفر کاهش یابد. با افزایش کوپلاژ، امپدانس ورودی با $\mathbf{Z}_{11}$ به اندازه $\omega^2M^2 / \mathbf{Z}_{22}$ تغییر می‌یابد. جمله اخیر، **امپدانس منعکسه** خوانده می‌شود. طبیعت و نقش این تغییر امپدانس با بسط عبارت آشکارتر می‌گردد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

امپدانس منعکسه را گویا می‌کنیم:

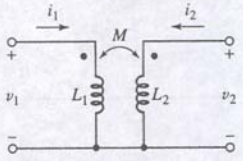
$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2M^2R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2M^2X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

چون $\omega^2M^2R_{22} / (R_{22}^2 + X_{22}^2)$ مثبت است، واضح است که وجود ثانویه، تلفات را در اولیه افزایش می‌دهد. به بیان دیگر، وجود ثانویه در اولیه با افزایش مقاومت R_1 خود را نشان می‌دهد و نیز راکتانسی که ثانویه در مدار اولیه ایجاد می‌کند، دارای علامت مخالف با X_{22}، یعنی راکتانس خالص حلقه دوم است. راکتانس X_{22} مجموع ωL_2 و X_L می‌باشد. علامت X_{22} برای بارهای القایی، مثبت و برای بارهای خازنی بسته به اندازه راکتانس بار، مثبت یا منفی است.

تمرین

۱۳-۵ مقادیر عناصر برای یک ترانس خطی عبارتنداز $R_1 = 3\ \Omega$، $R_2 = 6\ \Omega$، $L_1 = 2$ mH، $L_2 = 10$ mH و $M = 4$ mH. اگر $\omega = 5000$ rad/s باشد، $\mathbf{Z}_{in}$ را در ازای $\mathbf{Z}_L$ (الف) 10 Ω، (ب) J20 Ω (ج) J20 Ω + 10 (د) J20 Ω- به دست آورید.

جواب: 5.32 + j2.74 Ω؛ 3.49 + j4.33 Ω؛ 4.24 + j4.57 Ω؛ 5.56 - j2.82 Ω.



شکل ۱۳-۱۷ یک ترانس مفروض که با یک مدار T یا Π جایگزین می‌شود.

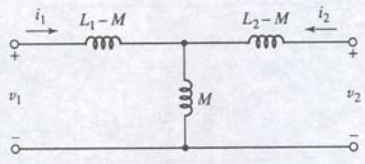
شبکه‌های معادل T و Π

غالباً جایگزینی یک ترانس با یک شبکه معادل فرم T و یا Π مفید است. اگر مقاومت‌های اولیه و ثانویه را از ترانس جدا کنیم تنها القاگرهای متقابل باقی می‌مانند (شکل ۱۷-۱۳). دقت کنید دو پایانه پایین ترانس به یکدیگر وصل می‌باشند تا یک شبکه سه پایانه به وجود آید. این کار را به این علت انجام می‌دهیم که هر دو شبکه معادل حاصل شبکه‌های سه پایانه‌اند. معادلات دیفرانسیل توصیف کننده این مدار عبارتنداز:

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad (16)$$

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \qquad (17)$$

شکل این دو معادله آشنا به نظر می‌رسد و به آسانی می‌توان آن‌ها را با تحلیل مش تفسیر کرد. اکنون i_1 را در جهت عقربه‌های ساعت (ساعت‌گرد) و i_2 را در خلاف آن در نظر می‌گیریم تا دقیقاً با جریان‌های شکل ۱۷-۱۳ یکی باشند. جمله $M\,di_2/dt$ در معادله (۱۶) و $M\,di_1/dt$ در معادله (۱۷) نشان می‌دهند که دو مش باید یک خود القای مشترک M داشته باشند. چون خودالقای کل حول مش سمت چپ L_1 است، یک خودالقای $L_1 - M$ باید در مش اول در نظر گرفته شود ولی نه در مش دوم. به همین طریق خودالقای $L_2 - M$ در مش دوم لازم است ولی نه در مش اول. شبکهٔ معادل حاصل در شکل ۱۸-۱۳ نشان داده شده است. یکسان بودن روابط v_1، i_1، v_2 و i_2 برای دو شبکه معادل بودن آن‌ها را تضمین می‌کند.



شکل ۱۳-۱۸ معادل T ترانس شکل ۱۷-۱۳.

اگر یکی از نقطه‌های ترانس داده شده در پایانه دیگر سیم‌پیچ قرار داشته باشد، علامت جمله‌های متقابل در معادلات (۱۶) و (۱۷) منفی می‌گردد. این به معنی تعویض M با $(-M)$ است و انجام این عمل در شبکه معادل شکل ۱۸-۱۳، منجر به شبکه معادل صحیحی خواهد شد. مقدار سه القاکنایی جدید، $L_1 + M$، $-M$ و $L_2 + M$ هستند.

تمام القاکنایی‌ها در معادل T، همگی خودالقا می‌باشند و در این شبکه القاکنایی متقابل وجود ندارد. ممکن است القاکنایی این مدار معادل منفی شود، ولی اگر هدف تحلیل ریاضی است، منفی بودن آن اصلاً مهم نیست. البته در صورت منفی بودن القاکنایی ساخت چنین مدار معادلی در شبکه ممکن نخواهد بود. با این وجود مواردی وجود دارد که در سنتز شبکه‌ها به دست آوردن تابع تبدیل منجر به پیدایش شبکه T با القاکنایی منفی می‌گردد. در این حالت، باید با یک ترانسفورماتور خطی مناسب چنین شبکه‌ای را ساخت.

مثال ۵-۱۳

معادل T در ترانس خطی شکل ۱۹-۱۳ (الف) را پیدا کنید.

می‌بینیم که $L_1 = 30$ mH، $L_2 = 60$ mH و $M = 40$ mH است. هر دو نقطه در پایانه‌های بالایی شکل ۱۷-۱۳ قرار دارند. پس در بازوی بالای چپ $L_1 - M = -10$ mH در بالای سمت راست $L_2 - M = 20$ mH و بخش وسط هم $M = 40$ mH می‌باشد. معادل کامل T در شکل ۱۹-۱۳(ب) ملاحظه می‌گردد.

برای نمایش هم‌ارزی این دو، بگذارید پایانه‌های C و D را مدار باز فرض کنیم و $v_{AB} = 10\cos 100t$ V را به ورودی شکل ۱۹-۱۳(الف) اعمال نماییم. پس:

$$i_1 = \frac{1}{30 \times 10^{-3}} \int 10\cos(100t)\,dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

و

$$v_{CD} = M\frac{di}{dt} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t$$
$$= 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

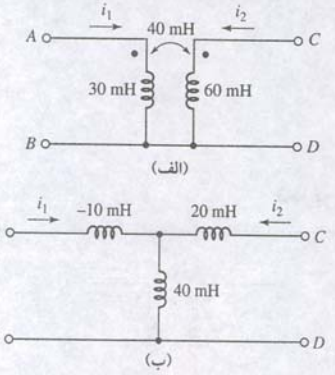
با اعمال همان ولتاژ در معادل T داریم:

$$i_1 = \frac{1}{(-10 + 40)\,10^{-3}} \int 10\cos(100t)\,dt = 3.33 \sin 100t \quad \text{A}$$

که همان مقدار قبلی است. همچنین ولتاژ در C و D برابر با ولتاژ دوسر القاگر 40 mH می‌گردد. پس:

$$v_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100\cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

و دو شبکه نتیجه یکسانی می‌دهند.

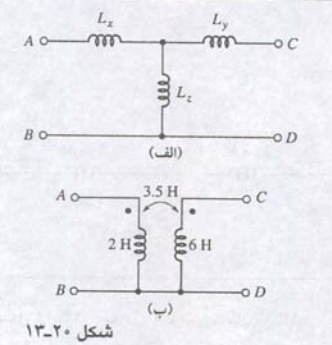


شکل ۱۹-۱۳ (الف) مثالی از ترانس خطی. (ب) شبکه تونن ترانس.

تمرین

۶-۱۳ (الف) اگر دو شبکه شکل ۲۰-۱۳ معادل باشند، مقادیر L_x، L_y و L_z را مشخص کنید. (ب) اگر نقطه در ثانویه شکل ۲۰-۱۳ (ب) در پایین سیم‌پیچ باشد، محاسبه را تکرار کنید.

جواب: 1.5-، 2.5 و 3.5 H؛ 5.5، 9.5 و 3.5- H.



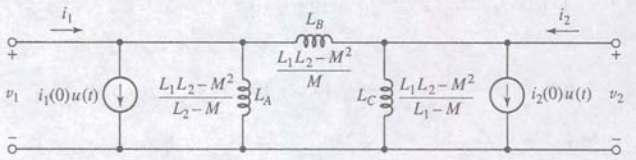
شکل ۲۰-۱۳

شبکه Π معادل به سادگی به دست نمی‌آید. این شبکه بسیار پیچیده‌تر است و آن‌قدر هم کاربرد ندارد. برای یافتن آن باید معادله (۱۷) را برای di_2/dt حل و نتیجه را در معادله (۱۶) قرار داد:

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt}$$

یا

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}v_1 - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}v_2$$



شکل ۲۱-۱۳ شبکه Π معادل ترانسفورماتور شکل ۱۷-۱۳.

اکنون اگر از ۰ تا t انتگرال بگیریم، داریم:

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\,dt - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\,dt \qquad (۱۸)$$

به طریقی مشابه داریم:

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\,dt + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\,dt \qquad (۱۹)$$

معادلات (۱۸) و (۱۹) را می‌توان به عنوان جفت معادلات گره تصور کرد، برای تهیه مقادیر اولیه مناسب باید یک منبع جریان پله را در هر گره نصب نمود. ضرایب هر انتگرال فرم کلی عکس القاکنایی‌های معادل معینی را دارند. بنابراین ضریب دوم در معادله (۱۸)، یعنی $M / (L_1L_2 - M^2)$ برابر $1 / L_B$ یا عکس القاکنایی بین گره‌های 1 و 2 در معادل Π طبق شکل ۲۱-۱۳ می‌باشد. پس:

$$L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{M}$$

اولین ضریب در معادله (۱۸) یعنی $L_2 / (L_1L_2 - M^2)$ برابر $1 / L_B + 1 / L_A$ است. پس:

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}$$

یا

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

سرانجام:

$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

در شبکه معادل Π هیچ کوپل مغناطیسی بین القاگرها وجود ندارد و جریان‌های اولیه در سه خود القاگر صفر می‌باشند.

برای جبران اثر جابه‌جاشدن هریک از نقطه‌های ترانس، کافی است علامت M را در شبکه معادل منفی کنیم. در این‌جا هم همچون شبکه T، ممکن است در شبکه Π مقدار خودالقا منفی باشد.

مثال ۶-۱۳

شبکه معادل Π ترانس در شکل ۱۹-۱۳(الف) را پیدا کنید.

جریان‌های اولیه صفر می‌شوند. چون جمله $L_1L_2 - M^2$ بین L_A، L_B و L_C مشترک است، اول آن را محاسبه می‌کنیم:

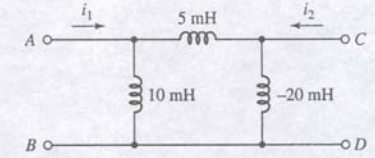
$$30 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} - (40 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ H}^2$$

بنابراین

$$L_A = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_2 - M)} = \frac{2 \times 10^{-4}}{(20 \times 10^{-3})} = 10 \text{ mH}$$

$$L_C = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_1 - M)} = -20 \text{ mH}$$

و $L_B = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{M} = 5$ mH. شبکه Π معادل در شکل ۲۲-۱۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۲۲-۱۳ معادل Π ترانس خطی شکل ۱۹-۱۳ (الف). فرض بر این است که $i_1(0) = 0$ و $i_2(0) = 0$ باشد.

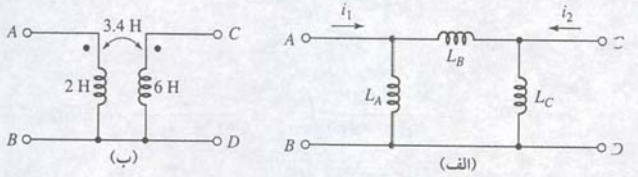
اگر دوباره نتیجه را با فرض $v_{AB} = 10 \cos 100t$ V تست کنیم و پایانه‌های C - D را باز بگذاریم، ولتاژ خروجی به راحتی از تقسیم ولتاژ به دست می‌آید:

$$v_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}} 10 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

که مثل قبل است. بنابراین شبکه شکل ۲۲-۱۳ به لحاظ الکتریکی معادل شبکه‌های شکل ۱۹-۱۳ (الف) و (ب) می‌باشد.

تمرین

۷-۱۳ اگر شبکه‌های شکل ۲۳-۱۳ معادل باشند، مقادیر L_A، L_B و L_C را مشخص کنید (به mH).



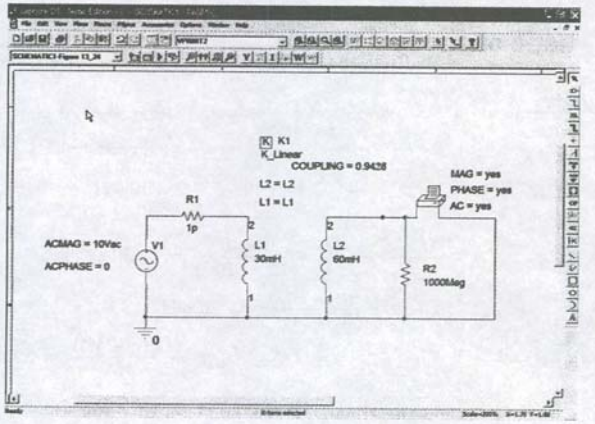
شکل ۲۳-۱۳

جواب: $L_A = 169.2$ mH، $L_B = 129.4$ mH و $L_C = -314.3$ mH.

تحلیل کامپیوتری

توانمندی در شبیه‌سازی مدارهایی که حاوی القاکنایی کوپل مغناطیسی‌اند، خصوصاً با کاهش روزافزون ابعاد مدارهای مدرن، مهارتی مفید است. با نزدیک شدن حلقه‌ها و یا بخش‌هایی از رساناها به واسطه میدان‌های پراکنده با یکدیگر کوپل می‌گردند و با هم واکنش نشان می‌دهند. PSpice اجازه می‌دهد تا با جعبه اجزای K_Linear این اثر را بررسی کنیم. این مؤلفه جهت القاگرها را در شماتیک با ضریب k به هم مرتبط می‌سازد و $0 \leq k \leq 1$ است.

مثلاً فرض کنید که مدار شکل ۱۹-۱۳(الف) را که از دو سیم‌پیچ تشکیل و کوپل آن با القای متقابل M = 40 mH توصیف شده است، بخواهیم شبیه‌سازی کنیم. این کمیت متناظر با ضریب کوپل k = 0.9428 است. مدار مبنای مربوطه در شکل ۲۴-۱۳ ملاحظه می‌شود. می‌بینید که هیچ نقطه‌ای در کنار سمبل القاگر وجود ندارد. وقتی که القاگر افقی روی شماتیک قرار گیرد، پایانه نقطه‌دار در سمت چپ است. این پایه‌ای است که نماد حول آن می‌چرخد و دقت کنید که جعبه محاوره K_Linear به طور دلخواه هر جایی می‌تواند باشد. دو القاگر کوپل شده L_1 و L_2 همراه با ضریب کوپل در کادر محاوره اجزا داده شده‌اند.



شکل ۲۴-۱۳ شماتیک مداری که باید شبیه‌سازی شود.

مدار به یک منبع ولتاژ سینوسی (15.92 Hz) 100 rad/s وصل است. همچنین لازم است تا دو مقاومت را به شماتیک بیفزاییم تا PSpice بدون تولید هر پیام خطایی کار کند. ابتدا یک مقاومت کوچک بین منبع ولتاژ و L_1 قرار داده می‌شود. برای حداقل کردن اثر آن مقاومت 1 pΩ انتخاب شده است. دوم، یک مقاومت 1000 MΩ (در واقع بینهایت) به L_2 وصل است. خروجی شبیه‌سازی، یک ولتاژ با اندازهٔ 13.33 V و زاویهٔ فاز $10^{-8} \times 3.819$- درجه (تقریباً صفر) است که با محاسبه دستی تجانس دارد.

PSpice دو مدل ترانس دیگر نیز دارد، یکی ترانس خطی XFRM_LINEAR و دیگری ترانس ایده‌آل XFRM_NONLINEAR که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشند. در ترانس خطی مقادیر ضریب کوپل برای هر دو القاکنایی سیم‌پیچ باید معلوم باشد. ترانس ایده‌آل همان‌طور که خواهیم دید، نیاز به ضریب کوپل دارد ولی در ترانس ایده‌آل مقدار القاکنایی بینهایت یا نزدیک به بینهایت است. بنابراین پارامتر لازم برای بخش XFRM_NONLINEAR تعداد دور هر سیم‌پیچ است.

۱۳-۴ ترانسفورماتور ایده‌آل

یک ترانس ایده‌آل تقریب خوبی از یک ترانس باکوپل یا تزویج بالا است و در آن ضریب کوپلاژ تقریباً برابر یک، و راکتانس القاگرهای اولیه و ثانویه در مقایسه با امپدانس‌های متصل به اولیه و ثانویه بسیار بزرگ است. برای دستیابی به این ویژگی در محدوده‌ای از فرکانس‌ها از هسته آهنی استفاده می‌شود. می‌توان ترانس هسته آهنی را به‌سادگی با جایگزینی ترانس با ترانس ایده‌آل تحلیل کرد. ترانس ایده‌آل مدل مرتبه اولی از ترانس هسته آهنی است.

نسبت دور در یک ترانس ایده‌آل

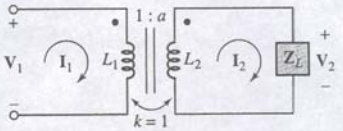
در مورد ترانس ایده‌آل با مفهوم جدیدی به نام **نسبت دور** a سروکار خواهیم داشت. خودالقای یک سیم‌پیچ متناسب با مربع تعداد دور سیمی است که سیم‌پیچ را می‌سازد. این رابطه به شرطی معتبر است که شار ناشی از جریان در سیم‌پیچ از تمام دورها بگذرد. برای ایجاد رابطه‌ای کمّی لازم است، مفاهیم الکترومغناطیسی را به کار ببریم. این کار در بحث تحلیل مدار ما گنجانده نشده است. با این وجود یک بحث کیفی هم می‌تواند کافی باشد. اگر جریان i در یک سیم‌پیچ N دور جاری شود، شار حاصل N برابر شار ناشی از یک دور سیم‌پیچ است. اگر N دور را همزمان تصور کنیم، آنگاه همه شار قطعاً همه دورها را در برمی‌گیرد. با تغییر زمانی جریان و شار، ولتاژی در سیم‌پیچ القا می‌شود مسلماً ولتاژ القایی در سیم‌پیچ N دوری باید N برابر ولتاژ یک دور باشد. به این دلیل، تناسب بین القاکنایی و مربع تعداد دورها از این‌جا ناشی می‌شود. پس:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = a^2 \qquad (۳۰)$$

یا

$$\boxed{a = \frac{N_2}{N_1}} \qquad (۳۱)$$

شکل ۲۵-۱۳ یک ترانس ایده‌آل را که بار به ثانویه آن وصل است، نشان می‌دهد. طبیعت ایده‌آل در ترانس به چند طریق نشان داده شده است: یکی این‌که بین دو سیم‌پیچ خطوط موازی



شکل ۲۵-۱۳ یک ترانسفورماتور ایده‌آل با بار Z_L در ثانویهٔ آن.

عمدی رسم شده تا نمایشگر ورق‌های آهنی در هسته ترانس باشد. ضریب کوپل 1 و نیز علامت a : 1 نسبت دور N_1 به N_2 را نشان می‌دهد.

بگذارید این ترانس را در حالت ماندگار سینوسی تحلیل کنیم تا فرضیات خود را در ساده‌ترین فرم ببینیم. دو معادله حلقه وجود دارد:

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad (۳۲)$$

$$0 = j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_L + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 \qquad (۳۳)$$

ابتدا امپدانس ورودی را تعیین می‌کنیم. با حل معادله (۲۳) برای یافتن $\mathbf{I}_2$ و جایگزینی آن در معادله (۲۲) داریم:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + \mathbf{I}_1 \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

و

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

چون $M^2 = L_1L_2$ ،$k = 1$ است، پس:

$$\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

در کنار ضریب کوپل واحد، دیگر مشخصه یک ترانس ایده‌آل وجود امپدانس خیلی بالا در اولیه و ثانویه سیم‌پیچ‌ها است که از فرکانس کار هم مستقل می‌باشد. این خصوصیت بیان می‌کند که حالت ایده‌آل برای L_1 و L_2 گرایش آن‌ها به سمت بینهایت است. با این وجود، نسبت آن‌ها باید معین باقی بماند که با نسبت دورها مشخص می‌شود. پس:

$$L_2 = a^2 L_1$$

و

$$\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1}$$

اکنون اگر L_1 بینهایت شود، هر دو جمله در سمت راست عبارت فوق بینهایت خواهد شد و حاصل نامعین است. پس لازم است ابتدا دو جمله را ترکیب کنیم.

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} \qquad (۳۴)$$

یا

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L/j\omega L_1 + a^2} \qquad (۳۵)$$

اکنون با $L_1 \to \infty$ می‌بینیم که

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} \qquad (۳۶)$$

در قبال $\mathbf{Z}_L$ معین است.

این نتیجه چند نکته جالب در بر دارد، که حداقل یکی از آن‌ها با مشخصات ترانس خطی متناقض است. امپدانس ورودی یک ترانس ایده‌آل متناسب با امپدانس بار است و ثابت تناسب هم عکس مربع نسبت دورها است. به بیان دیگر، اگر امپدانس بار از نوع امپدانس خازنی باشد، آنگاه امپدانس ورودی از نوع خازنی است. در ترانس خطی، با این وجود، امپدانس منعکسه تغییر علامت می‌داد و بار خازنی به صورت القایی در اولیه ظاهر می‌شد. علت را چنین می‌توان تفسیر کرد که اولاً $\mathbf{Z}_L / a^2$ امپدانس منعکسه نیست، گرچه به اشتباه آن

را به این نام می‌خوانند. در ترانس ایده‌آل امپدانس منعکسه واقعی بینهایت است وگرنه امپدانس بینهایت الگاز اولیه حذف نمی‌شد. این عمل حذف در صورت معادله (۲۴) رخ می‌دهد. امپدانس $\mathbf{Z}_L / a^2$ جمله کوچکی است که به دلیل عدم حذف کامل باقی می‌ماند. قسمت رآکتیو امپدانس منعکسه واقعی ترانس ایده‌آل هم تغییر علامت می‌دهد. با این وجود، اثر رآکتانس بینهایت سیم‌پیچ اولیه و رآکتانس منعکسه بینهایت ولی با علامت منفی ثانویه حذف می‌گردد.

بنابراین مهمترین مشخصه ترانس ایده‌آل قابلیت تغییر اندازه امپدانس یا بهتر بگوییم تغییر سطح امپدانس است. ترانس ایده‌آل اولیه‌ای که 100 دور سیم‌پیچ اولیه و 10000 دور سیم‌پیچ ثانویه دارد، نسبت دور آن 10000/100 یا 100 خواهد بود. سپس هر امپدانسی که به دو سر ثانویه نصب گردد، با ضریب 100^2 یا 10000 کاهش می‌یابد. درواقع یک مقاومت 20000Ω، تنها 2 Ω و هر الگاز 200 mH همچون 20 μH و هر خازن 100 PF به مقدار 1 μF به نظر خواهد رسید. اگر محل سیم‌پیچ اولیه و ثانویه تعویض شود، آنگاه $a = 0.01$ بوده و امپدانس بار بزرگ می‌شود. در عمل، همیشه این تغییراندازه رخ نمی‌دهد، زیرا به یاد داریم که در قدم آخر محاسبه امپدانس ورودی و میل L_1 در معادله (۲۵) به سمت بینهایت، لازم شد که $\mathbf{Z}_L$ را در مقایسه با $j\omega L_1$ نادیده بگیریم. چون L_2 هرگز بینهایت نمی‌شود، اگر امپدانس بار خیلی بزرگ باشد، مدل ترانس ایده‌آل هرگز معتبر نیست.

استفاده از ترانس‌ها برای تطبیق امپدانس

مثالی عملی از کاربرد یک ترانس آهنی به عنوان تغییر دهنده سطح امپدانس، اتصال یک تقویت کننده صوتی لامپی متصل به بلندگو است. برای دستیابی به حداکثر توان انتقالی می‌دانیم که مقاومت بار باید برابر با مقاومت داخلی منبع باشد. معمولاً بلندگو مقاومتی در حد چند اهم (و اغلب از جنس اهمی) دارد، در حالی که تقویت کننده توان، مقاومتی چند هزار اهمی را از خود به نمایش می‌گذارد. پس ترانسی با $N_2 < N_1$ لازم است. مثلاً اگر تقویت کننده (یا ژنراتور) امپدانس داخلی Ω 4000 داشته ولی مقاومت بلندگو Ω 8 باشد، آنگاه:

$$\mathbf{Z}_g = 4000 = \frac{\mathbf{Z}}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

یا

$$a = \frac{1}{22.4}$$

خواهد بود. پس:

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

بین جریان‌های اولیه و ثانویه $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ در ترانس ارتباط ساده‌ای وجود دارد. از معادله (۲۳) داریم:

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

اجازه می‌دهیم تا L_2 بینهایت شود و بنابراین:

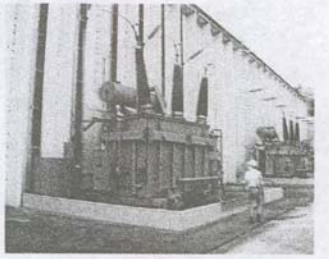
$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

یا

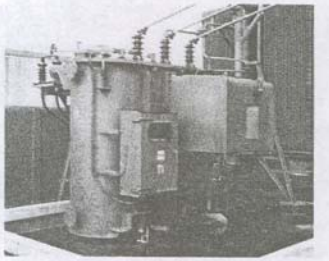
$$\boxed{\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{a}} \qquad (۳۷)$$

بنابراین نسبت جریان‌های اولیه و ثانویه همان نسبت دورها است. اگر $N_2 > N_1$ باشد، آنگاه $a > 1$ است و آشکار است که جریان بیشتر در تعداد دور کمتر وجود خواهد داشت. به بیان دیگر:

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$



(الف)



(ب)

(ج)

شکل ۲۶-۱۳ (الف) ترانس افزاینده که در افزایش ولتاژ خروجی برای ارسال به خط انتقال به‌کاررفته است. (ب) پست‌های ترانس به‌کاررفته برای کاهش ولتاژ از سطح 230 kV به چند ده کیلووات جهت توزیع محلی. (ج) ترانس‌های کاهنده برای کاهش سطح ولتاژ توزیع به 240 V جهت مصارف انرژی خانگی.

اگر هر یک از دو جریان معکوس شود و یا محل نقطه ترانس عوض گردد، نسبت جریان‌ها منفی نسبت دورها خواهد بود.

در مثالی که ارائه شد و در آن یک ترانس ایده‌آل برای تغییر سطح امپدانس و تطبیق بلندگوی تقویت‌کننده به‌کار رفت، جریان 50 mA rms با فرکانس 1000 Hz در اولیه موجب تولید جریان 1.12 A با فرکانس 1000 Hz در ثانویه شده توان انتقالی به بلندگو $8(1.12)^2$ یا 10 W می‌گردد و توان انتقال یافته به تقویت‌کننده هم همان $4000(0.05)^2$ یا 10 W است. پاسخ مورد تأیید است زیرا یک ترانس ایده‌آل نه حاوی بار فعال است تا تولید توان کند و نه مقاومتی دارد تا توان را جذب نماید.

استفاده از ترانس در تنظیم سطح ولتاژ

چون توان حمل شده به ترانس ایده‌آل مثل توان انتقالی به یک بار است ولی جریان‌های اولیه و ثانویه با نسبت دور مناسب می‌باشند، منطقی است که ولتاژهای اولیه و ثانویه به نسبت دورها باشند. اگر ولتاژ ثانویه یا ولتاژ بار را با رابطه زیر تعریف کنیم:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 \mathbf{Z}_L$$

و ولتاژ اولیه در دو سر L_1 باشد، آنگاه:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 \mathbf{Z}_{in} = \mathbf{I}_1 \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2}$$

در این صورت نسبت دو ولتاژ چنین است:

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a^2 \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

یا

$$\boxed{\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a = \frac{N_2}{N_1}} \qquad (۲۸)$$

بنابراین نسبت ولتاژ ثانویه به ولتاژ ولیه برابر نسبت دورها است. باید توجه کرد که این معادله عکس معادله (۲۷) است و این خود منشأ اشتباه برای بسیاری از دانشجویان می‌باشد. این نسبت می‌تواند با معکوس کردن ولتاژ یا تغییر محل نقطه منفی گردد.

به این ترتیب با انتخاب هر نسبت دوری می‌توان هر ولتاژ ac را به هر ولتاژ ac دیگر تبدیل کرد. اگر $a > 1$ باشد، ولتاژ ثانویه بیشتر از اولیه است و چیزی را که به آن امروزه **ترانس افزاینده** می‌گویند خواهیم داشت. اگر $a < 1$ باشد، ولتاژ ثانویه کوچکتر از اولیه می‌باشد و به آن **ترانس کاهنده** می‌گوییم. شرکت‌های تولید برق معمولاً ولتاژ را بین 12 kV تا 25 kV تولید می‌کنند. گرچه این سطح ولتاژ بالا است ولی تلفات انتقال در فواصل طولانی را با افزایش سطح ولتاژ به حدود چند صد هزار ولت توسط ترانس افزاینده می‌توان کاهش داد (شکل ۲۶-۱۳ (الف)). سپس این ولتاژ به وسیله ترانس کاهنده به چند ده کیلووات در پست‌های محلی توزیع کاهش می‌یابد (شکل ۲۶-۱۳(ب)). ترانس‌های کاهنده بیشتر که در خارج ساختمان نصب می‌شوند می‌توانند ولتاژ را به سطح 110 یا 220 V که مورد استفاده است برسانند (شکل ۲۶-۱۳(ج)). از ترکیب معادلات (۲۷) و (۲۸) داریم:

$$\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1$$

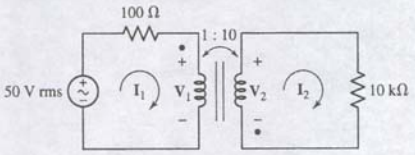
ملاحظه می‌شود که ولت آمپرهای اولیه - ثانویه برابرند. اندازه این حاصل‌ضرب معمولاً به‌عنوان حداکثر مجاز ترانس‌های قدرت شناخته می‌شوند. اگر بار دارای زاویه فاز θ باشد، یعنی:

$$\mathbf{Z}_L = |\mathbf{Z}_L| \angle \theta$$

آنگاه $\mathbf{V}_2$ از $\mathbf{I}_2$ به اندازهٔ θ پیشفاز است. به‌علاوه امپدانس $\mathbf{Z}_L / a^2$ بوده و $\mathbf{V}_1$ نیز از $\mathbf{I}_1$ به اندازه θ. اگر جریان و ولتاژ با مقدار rms نمایش داده شوند، آنگاه $|\mathbf{V}_2|\ |\mathbf{I}_2| \cos\theta$ باید برابر با $|\mathbf{V}_1|\ |\mathbf{I}_1| \cos\theta$ باشد و در این هنگام همه توان انتقالی به پایانه‌های اولیه به بار منتقل می‌گردد و هیچ انرژی انتقالی به یک ترانس ایده‌آل، جذب آن نمی‌شود. مشخصه ترانس ایده‌آلی را که به دست آوردیم با تحلیل فیزوری هم قابل دستیابی‌اند. البته این مشخصه‌ها در پاسخ حالت ماندگار سینوسی صحیح‌اند ولی دلیلی بر صحت آن‌ها در پاسخ کامل وجود ندارد. درواقع این مشخصات در حالت کلی هم معتبرند. این مطلب را به راحتی می‌توان با استفاده از حوزه فرکانسی نشان داد. در هر حال تحلیل ما حاوی تقریب‌هایی است که باید در مدل‌های ترانس‌های واقعی اعمال شود تا ترانس ایده‌آل به دست آید. مثلاً دیدیم که رآکتانس ثانویه باید از بزرگترین امپدانسی که به آن متصل می‌گردد، خیلی بزرگتر باشد. بنابراین شرایطی را به دست آوردیم که تحت آن یک ترانس به جز آن، به صورت ایده‌آل عمل نمی‌کرد.

مثال ۷-۱۳

برای مدار شکل ۲۷-۱۳ توان متوسط مصرفی را در مقاومت 10 kΩ معین کنید.



شکل ۲۷-۱۳ یک مدار ساده با ترانسی ایده‌آل.

توان متوسط مصرفی در مقاومت 10 kΩ برابر است با

$$P = 10000\ |\mathbf{I}_2|^2$$

منبع 50 V rms امپدانس ورودی ترانس را $\mathbf{Z}_L / a^2$ یا 100 Ω حس می‌کند. بنابراین:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{50}{100 + 100} = 250 \text{ mA rms}$$

از معادله (۲۷) داریم $\mathbf{I}_2 = (1/a)\mathbf{I}_1 = 25$ mA rms. بنابراین درمی‌یابیم که مقاومت 10 kΩ، 6.25 W توان مصرف می‌کند.

در این مثال از زوایای فاز صرفنظر شده است زیرا در محاسبه توان متوسط تلف شده در یک مقاومت بار خالص اهمی نقشی ندارند.

تمرین

۸-۱۳ مثال ۷-۱۳ را با استفاده از ولتاژها برای یافتن توان تلف شده تکرار کنید.

جواب: 6.25 W

رابطه ولتاژ در حوزه زمان

اکنون ببینیم که کمیت‌های حوزه زمان v_1 و v_2 چگونه در یک ترانس ایده‌آل با هم مرتبط‌اند. با مراجعه به شکل ۱۷-۱۳ با ملاحظه دو معادله (۱۶) و (۱۷) که این ارتباط را بیان می‌کنند و حل di_2/dt در معادله دوم و جایگزینی در معادله اول داریم:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

با این وجود برای ضریب کوپل واحد، $M^2 = L_1 L_2$ بوده و خواهیم داشت:

$$v_1 = \frac{M}{L_2} v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} v_2 = \frac{1}{a} v_2$$

پس رابطه بین ولتاژ اولیه و ثانویه در پاسخ کامل حوزه زمان هم صدق می‌کند.

عبارتی برای ارتباط جریان اولیه و ثانویه در حوزه زمان از تقسیم طرفین معادله (۱۶) بر L_1 خیلی سریع‌تر حاصل می‌گردد.

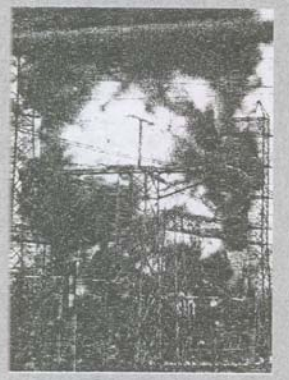
دو طرف معادله (۱۶) را بر L_1 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + a \frac{di_2}{dt}$$

کاربرد عملی

ترانسفورماتورهای ابررسانا

در بسیاری از موارد، از انواع تلفاتی که ممکن است در یک ترانس خاص صورت گیرد، صرفنظر کردیم. با این وجود، هنگام بررسی ترانس‌های قدرت باید به این تلفات توجه خاصی نمود حتی اگر بازده آن‌ها ۹۷٪ یا بالاتر باشد. گرچه چنین راندمانی ممکن است عدد تقریباً ایده‌آلی به نظر برسد ولی در جریان‌های چند هزار آمپری، این بازده مقدار قابل توجهی تلفات انرژی دارد. مثلاً وقتی جریانی از سیم‌پیچی بگذرد، مقاومت مجر به تلفات i^2R می‌گردد و به این معنی است که توان جذب شده به وسیلهٔ سیم‌ها با مربع جریان ارتباط دارد و به صورت گرما تلف می‌گردد. با افزایش دما، مقاومت هم بالا می‌رود و لذا توان تلف شده i^2R نیز در سیم اضافه خواهد شد. همچنین دمای بالا سبب تخریب عایق سیم و بنابراین کوتاه شدن عمر ترانس می‌شود. در نتیجه بسیاری از ترانس‌های قدرت مدرن به جای روغن مایع برای دفع گرمای تولیدی مجهزند. با این وجود این روش چند عیب دارد. زنگ‌زدگی ناشی از عمر طولانی و عوارضی از این قبیل اغلب سبب نشتی ترانس و لذا اثرات مخرب محیطی می‌گردد. استفاده از روغن‌های قابل اشتعال هم خطر آتش‌سوزی داشته و مبارزه با آتش در پست‌های ولتاژ بالا کاری خطرناک می‌باشد (شکل ۲۸-۱۳).

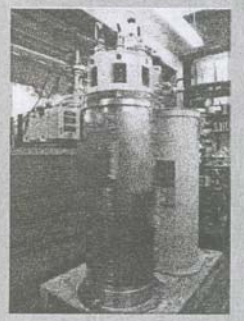


شکل ۲۸-۱۳

یک روش ممکن برای اصلاح رفتار چنین ترانس‌ها استفاده از سیم‌های ابررسانا (سوپرکنداکتو) و جایگزینی آن با سیم‌پیچ‌های مقاومتی است. مواد ابررسانا در دمای بالا مقاومت دارند ولی در دمای بحرانی در برابر جریان بی‌مقاومت می‌شوند. برای بسیاری از مواد این دمای بحرانی تنها چند درجه از صفر مطلق بیشتر است. بنابراین نیاز به مایع هلیوم برای خنک شدن دارند. با این وجود به پیدایش ابررسانای سرامیک دمای بالا در سال ۱۹۸۰ مواد در دماهای 90 K (-180°C) و بالاتر ساخته شدند و جایگزینی تجهیزات مبتنی بر هلیوم با سیستم‌های نیتروژنی امکان‌پذیر شد. این مواد به میزان قابل توجهی از لحاظ ساخت و کار ارزان‌تر تمام می‌شوند. شکل ۲۹-۱۳ یک ترانس 630 - KVA ابررسانا را که به وسیله کمپانی ABB ساخته شده نشان می‌دهد که برای شبکه برق شهر ژنو سویس در مارس ۱۹۹۷ ساخته شده است.

تغییر خط مشی طراحی و جایگزینی سیم‌های ابررسانا به جای سیم‌پیچ‌های مقاومتی مزایای متعددی دارد. اول این که اندازه ترانس با توان یکسان به یک سوم کاهش یافته است. دوم این‌که استفاده از خنک کننده نیتروژنی خطر آتش‌سوزی روغن را از بین برده است و نیز چون مایع نیتروژن به گاز نیتروژن تبدیل می‌گردد، از قبل محیط محصور شده و نشتی هم موجب آلودگی آب‌های زیرزمینی نمی‌گردد. سوم ولی شاید مهمتر از همه، حذف تلفات مقاومتی موجب بالا رفتن بازده ترانس می‌شود و به این ترتیب توان مورد تقاضا از ژنراتور کاهش یافته و صرفه‌جویی قابل توجهی به دنبال دارد.

در هر صورت هر طرحی معایبی دارد که باید در برابر مزایای آن ارزیابی گردد و ترانس‌های ابررسانا عمومیت نیستند. یکی از مهمترین موانع، هزینه بالای ساخت سیم‌های ابررسانای چند کیلومتری در مقایسه با سیم مسی است. این سیم‌ها معمولاً در داخل غلافی از نقره ساخته می‌شوند و در نتیجه با هنگام گرم شدن مسیر جریانی ایجاد خواهد شد (مادامی که سیم درونی ابررسانا باشد، جریانی از نقره عبور نمی‌کند زیرا در دمای نیتروژن مایع دارای مقاومت است) به کارگیری نقره بر قیمت سیم می‌افزاید. با این وجود استفاده از ماده ارزانتر مس انتخاب خوبی در این کاربرد نیست، زیرا این ماده مایل به واکنش با مواد ابررسانا است، خلاصه این‌که گرچه ترانس ابررسانا قادر است در هزینه تولیدکننده در درازمدت صرفه‌جویی کند (بسیاری از ترانس‌ها ممکن است تا ۳۰ سال سرویس بدهند) ولی هزینه اولیه آن خیلی بالاتر از ترانس‌های مقاومتی قدیمی است. در حال حاضر بسیاری از کمپانی‌ها و تولیدکنندگان انرژی الکریکی هزینه‌های کوتاه‌مدت را در نظر می‌گیرند و به سرمایه‌گذاری برای منابع درازمدت مایل نیستند.



شکل ۲۹-۱۳ ترانس ابررسانای 15 kVA.

سپس یکی از مفروضات مربوط به ترانس ایده‌آل را به کار می‌گیریم. L_1 بینهایت است. اگر فرض شود که v_1 بینهایت نیست، باید داشته باشیم:

$$\frac{di_1}{dt} = - a \frac{di_2}{dt}$$

با گرفتن انتگرال از طرفین داریم:

$$i_1 = -ai_2 + A$$

که در آن A ثابتی از انتگرال‌گیری است که برحسب زمان تغییر نمی‌کند. لذا اگر از جریان dc اولیه و ثانویه صرف‌نظر کنیم و توجه خود را فقط به بخشی از پاسخ معطوف داریم که برحسب زمان تغییر می‌کند، خواهیم داشت:

$$i_1 = -ai_2$$

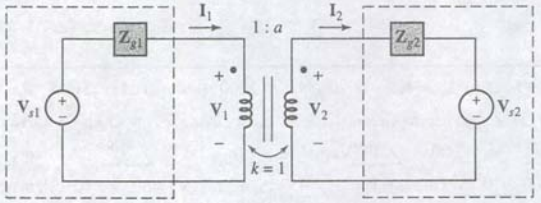
علامت منفی ناشی از محل نقطه بر روی ترانس و انتخاب جهت جریان‌ها در شکل ۱۷-۱۳ است.

بنابراین همان رابطه جریان - ولتاژی در حوزه زمان به دست آمد که قبلاً در حوزه فرکانس به دست آمده بود، با این شرط که مؤلفه‌های dc چشم‌پوشی شوند. نتایج حاصله در حوزه زمان عمومی‌تر ند ولی روش به دست آوردنشان واضح نیست. به کمک مشخصات ترانس ایده‌آل می‌توان مدارهای ترانس را ساده کرد. برای نشان دادن این مطلب اجازه بدهید فرض کنیم که به جای تمام مدارهای سمت چپ اولیه، معادل تونن آن را گذاشته‌ایم و همین کار را در مورد شبکه سمت راست ثانویه هم انجام می‌دهیم. بنابراین مدار شکل ۳۰-۱۳ را خواهیم داشت. فرکانس منبع محرک ω فرض شده است.

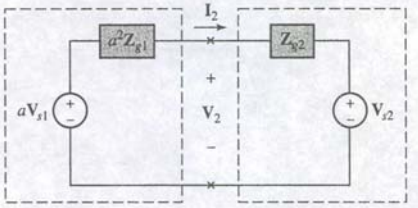
مدارهای معادل

اکنون قضایای تونن و نورتن را برای دستیابی به مدار معادلی که حاوی ترانس است پیاده می‌کنیم. مثلاً بیایید ابتدا معادل تونن سمت چپ پایانه‌های ثانویه را معین کنیم. با بازکردن مدار ثانویه $\mathbf{I}_2 = 0$ و لذا $\mathbf{I}_1 = 0$ می‌گردد (L_1 را بینهایت در نظر بگیرید). هیچ ولتاژی دو سر $\mathbf{Z}_{g1}$ ظاهر نمی‌شود و بنابراین $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{s1}$ و $V_{2oc} = a\mathbf{V}_{s1}$ خواهد بود. امپدانس تونن با کشتن $\mathbf{V}_{s1}$ و استفاده از مربع نسبت دوروو در واقع عکس این نسبت به دست می‌آید، چون ما از پایانه‌های ثانویه به اولیه نگاه می‌کنیم، بنابراین، $\mathbf{Z}_{th2} = \mathbf{Z}_{g1}a^2$. به منظور تست بگذارید جریان ثانویه مدار باز $\mathbf{I}_{2sc}$ را معین کنیم. با اتصال کوتاه ثانویه، مولد موجود در اولیه امپدانس $\mathbf{Z}_{g1}$ را در مقابل خود می‌بینید، پس $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_{s1} / \mathbf{Z}_{g1}$ و $\mathbf{I}_{2sc} = \mathbf{V}_{s1} / a\mathbf{Z}_{g1}$. نسبت ولتاژ مدار باز به جریان اتصال کوتاه برابر $a^2\mathbf{Z}_{g1}$ است که باید هم باشد. معادل تونن ترانس و مدار اولیه در مدار شکل ۳۱-۱۳ مشاهده می‌شود.

بنابراین هر ولتاژ اولیه‌ای در نسبت دور ضرب می‌شود و هر جریان اولیه‌ای بر نسبت دور تقسیم می‌گردد، و هر امپدانس اولیه‌ای در مربع نسبت دورها ضرب می‌شود. آنگاه این مقادیر جایگزین ولتاژ، جریان، امپدانس و نهایتاً ترانس می‌گردند. اگر هر یک از نقاط روی پایانه‌ها تغییر مکان دهند، می‌توان معادل را با تعویض علامت نسبت دور به دست آورد.



شکل ۳۰-۱۳ شبکه متصل به پایانه‌های اولیه و ثانویه ترانس ایده‌آل با معادل تونن نشان داده شده است.



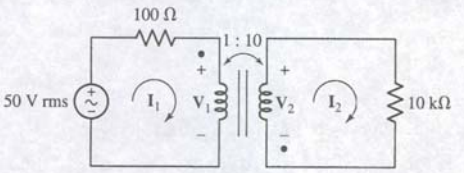
شکل ۱۳-۳۱ معادل تونن شبکه سمت چپ پایانه‌های ثانویه در شکل ۱۳-۳۰ که برای ساده‌کردن مدار به‌کار رفته است.

معادل‌های فوق‌الذکر طبق شکل ۱۳-۳۱ هنگامی امکان‌پذیرند که شبکه متصل به دو پایانه اولیه و متصل به دو پایانه ثانویه قابل جایگزینی با معادل‌های تونن باشند. یعنی هر یک باید یک شبکه دو پایانه باشند. مثلاً اگر ما دو سیم اولیه را از محل ترانس قطع کنیم، مدار باید به دو بخش تقسیم گردد و نباید عنصر یا شبکه‌ای بین اولیه و ثانویه ترانس پل بزند.

تحلیل مشابهی از ترانس و شبکه ثانویه نشان می‌دهد که هر چیزی در سمت راست پایه‌های اولیه با یک شبکه معادل بدون لحاظ ترانس قابل جایگزینی است و در آن هر ولتاژی بر a تقسیم، هر جریانی ضربدر a و هر امپدانسی بر a^2 تقسیم می‌شود. تعویض هر سیم‌پیچ با دیگری ضریب نسبت دور a- را به دست می‌دهد.

مثال ۸-۱۳

برای مدار شکل ۱۳-۳۲ مدار معادل ترانس و ثانویه و نیز معادل ترانس و مدار اولیه را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۳-۳۲ مدار ساده‌ای که بار مقاومتی با امپدانس منبع با روش ترانس معادل تطابق دارد.

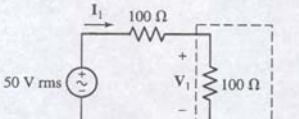
این همان مدار مثال ۷-۱۳ است. مثل قبل، امپدانس ورودی $10000/(10)^2$ یا 100 Ω و بنابراین $|\mathbf{I}_1| = 25$ mA rms است. می‌توان ولتاژ دو سر سیم‌پیچ اولیه را هم حساب کرد.

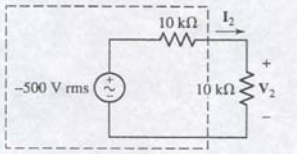
$$|\mathbf{V}_1| = |50 - 100\mathbf{I}_1| = 25 \text{ V rms}$$

و بنابراین می‌توان دریافت که منبع توان $12.5\text{W} = (50)(25 \times 10^{-3})$ را به‌مدار منتقل می‌کند که از آن $6.25\text{W} = (100)(25 \times 10^{-3})^2$ در مقاومت داخلی منبع تلف شده و $6.25\text{W} = 12.5 - 6.25$ نیز به بار منتقل می‌گردد.

اگر مدار ثانویه و ترانس ایده‌آل با معادل تونن جایگزین گردد، منبع 50 V و مقاومت 100Ω، امپدانس 100 Ω را نظاره خواهد کرد و به این ترتیب مدار ساده شده ۱۳-۳۳(الف) به دست می‌آید و لذا جریان و ولتاژ اولیه مشخص است.

اگر این بار، شبکه سمت چپ پایانه‌های ثانویه با معادل تونن جایگزین شود، خواهیم داشت: $V_{th} = -10(50) = -500$ V rms و $Z_{th} = (-10)^2(100) = 10$ kΩ. مدار حاصل در شکل ۱۳-۳۳(ب) ملاحظه می‌گردد.



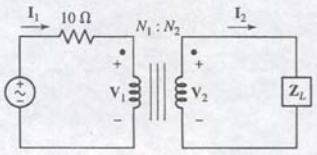


شکل ۱۳-۳۳ (الف) مدار شکل ۱۳-۳۲ با جایگزینی (الف) ترانس و ثانویه با معادل تونن یا (ب) ترانس اولیه با معادل تونن، ساده شده است.

تمرین

۱۳-۹ فرض کنید در یک ترانس ایده‌آل $N_1 = 1000$ و $N_2 = 5000$ باشد (شکل ۱۳-۳۴). اگر $Z_L = 500 - j400\Omega$ باشد، متوسط توان حمل شده به Z_L را برای (الف) $I_2 = 1.4 \angle 20^\circ$ A rms (ب)، $V_2 = 900 \angle 40^\circ$ Vrms (ج)، $V_s = 200 \angle 0^\circ$ V rms (د)، $I_1 = 6 \angle 45^\circ$ Arms (ه)، $V_1 = 80 \angle 110^\circ$ Vrms تعیین کنید.

جواب: 980 W، 988 W، 195.1 W، 720 W و 692 W.



شکل ۱۳-۳۴

۱۳-۵ خلاصه فصل و مرور

- القای متقابل، ولتاژ القایی را در دو سر یک سیم‌پیچ به علت میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم‌پیچ دوم توصیف می‌کند.
- قرارداد نقطه، علامت را به جمله القای متقابل تخصیص می‌دهد.
- برطبق قرارداد نقطه، جریان وارده به پایانه نقطه‌دار یک سیم‌پیچ، ولتاژ مدار بازی را با مرجع ولتاژ مثبت در پایانه نقطه‌دار سیم‌پیچ دوم تولید می‌کند.
- انرژی کل ذخیره شده در جهت سیم‌پیچ کوپل شده سه جمله دارد: انرژی ذخیره شده در هر خودالقا $(\frac{1}{2}Li^2)$ و انرژی ذخیره شده در القاکنایی متقابل (Mi_1i_2).
- ضریب کوپلاژ با رابطه $k = M / \sqrt{L_1L_2}$ داده می‌شود و محدود به مقداری بین 0 و 1 است.
- یک ترانس خطی از دو سیم‌پیچ کوپل شده تشکیل شده است: یکی سیم‌پیچ اولیه و دیگری سیم‌پیچ ثانویه.
- یک ترانس ایده‌آل تقریب خوبی برای ترانس‌های هسته آهنی است. ضریب کوپل برابر واحد و القاکنایی بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود.
- نسبت دور $a = N_2 / N_1$ یک ترانس ایده‌آل ولتاژهای سیم‌پیچ اولیه را به ثانویه ارتباط می‌دهند: $V_2 = a\,V_1$.
- نسبت دور a، جریان‌های اولیه و ثانویه را در سیم‌پیچ‌های اولیه و ثانویه مرتبط می‌کند: $I_1 = a\,I_2$.

۱۳-۶ خواندنی‌های کمکی

Almost everything you ever wanted to know about transformers can be found in

M. Heathcote, *J&P Transformer Book,* 12th ed. Oxford: Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1998.

Another comprehensive transformer title is

W.T. McLyman, *Transformer and Inductor Design Handbook,* 3rd ed. New York: Marcel Dekker, 2004.

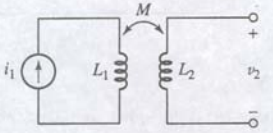
A good transformer book with a strong economic focus is

B.K. Kennedy, *Energy Efficient Transformers.* New York: McGraw-Hill, 1998.

مسائل

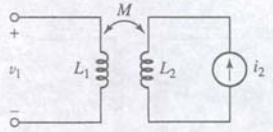
۱۳-۱ القای متقابل

۱. مدار شکل ۱۳-۳۵ را ملاحظه کنید. اگر $i_1(t) = 400\cos 120\pi t$ A باشد و حداکثر مقدار $v_2(t)$ برابر 100 V باشد، مقدار القای متقابل بین L_1 و L_2 چیست؟



شکل ۱۳-۳۵

۲. در مدار شکل ۱۳-۳۶، ولتاژ v_1 برابر $115\sqrt{2}\cos(120\pi t - 16^\circ)$ V است. اگر مقدار پیک برابر 45 A اندازه‌گیری شود، مقدار القای متقابل دو القاگر L_1 و L_2 چیست؟



شکل ۱۳-۳۶

۳. ساختار فیزیکی سه جفت سیم‌پیچ کوپل شده در شکل ۱۳-۳۷ دیده می‌شود. روی سیم‌پیچ هر یک از آن‌ها محل نقطه را مشخص کنید.

۴. دو القاگر کوپل‌شده شکل ۱۳-۳۸ در مداری با ولتاژها و جریان‌های شکل به هم وصل‌اند. $L_1 = 1$ H، $L_2 = 3$ H و $M = 0.5$ H. اگر $i_1 = 30\sin 80t$ A و $i_2 = 30\cos 80t$ A باشد مطلوبست (الف) v_1 و (ب) v_2.