به نام ستاره آفرین

قضیه ویریال

درود بر ملت نجومی ! در این درس نامه می خواهیم یکی از قضیه های معروف اخترفیزیک و مکانیک ، یعنی قضیه ی شریفه ی ویریال ، را به دست آوریم . به طور خلاصه قضیه ی ویریال متوسط انرژی جنبشی کل ذرات یک سیستم پایدارِ مقید به نیرو های پایستار را به متوسط انرژی پتانسیل کل شان مربوط می کند . برای رسیدن به این قضیه دو اثبات ارائه می دهیم :

1. اثبات اخترفیزیکی 2. اثبات مکانیکی

1. اثبات اخترفیزیکی :

فرض می کنیم در یک محیط گازی معادله حفاظت جرم و تعادل هیدرواستاتیک برای یک پوسته کروی برقرار باشد . پس:

معادله ی حفاظت جرم :

$$dM_r = \rho_r 4\pi r^2 dr$$

که در آن r فاصله از مرکز پوسته ی کروی ، ρ_r چگالی گاز در فاصله ی r از مرکز پوسته ، dM_r جرم پوسته و dr هم ضخامت پوسته ی کروی می باشد .

تعادل هیدروستاتیک :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho_r$$

که در آن r فاصله از مرکز ، $\frac{dP}{dr}$ گرادیان فشار محیط گازی در فاصله ی r از مرکز ، M_r جرم موجود در کره ای به شعاع r حول مرکز و ρ_r هم چگالی گاز در فاصله ی r از مرکز می باشد .

دو معادله را بر هم تقسیم می کنیم و چگالی و دیفرانسیل شعاع را حذف می کنیم.خواهیم داشت:

$$-\frac{GM_r}{\mathrm{r}}\mathrm{d}M_r = 4\pi \mathrm{r}^3 \mathrm{dP}$$

ان شاء الله در ریاضیات با روش جز به جز در انتگرال گیری آشنا هستید :

$$udv = d(uv) - vdu$$

بنابراین طرف راست معادله را با استفاده از روش جز به جز در انتگرال گیری می توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم :

$$4\pi r^3 dP = d(4\pi r^3 P) - 12\pi r^2 P_r dr = d(4\pi r^3 dP) - 3\frac{P}{\rho} dM_r$$

که در آخر دوباره از محافظت جرم استفاده کرده و dr را حذف نمودیم.

حال از معادله کلی به دست آمده انتگرال می گیریم:

$$\int_0^{4\pi R^3 P} d(4\pi r^3 P) - 3\int_0^M \frac{P}{\rho} dM = \int_0^M -\frac{GM}{r} dM$$

جمله سمت راست تساوی همان انرژی پتانسیل کل برای جرم داخل پوسته است . جمله اول سمت چپ ناشی از فشار وارد بر پوسته است.در حالت تعادل فشار بیرونی و درونی مساوی بوده و این جمله صفر است. میتوان این طور هم استدلال کرد :

$$\int_0^{4\pi R^3} d(4\pi r^3 P_r) = \left. 4\pi r^3 P_r \right|_{r=0}^{r=R} = 4\pi R^3 P_R - 4\pi . 0^3 . P_0$$

که P_R فشار در سطح بوده برابر صفر است و فشار در مرکز ستاره هم بی نهایت نیست . بنابراین در مجموع حاصل انتگرال صفر میشود . جمله دوم سمت چپ ناشی از گاز درون پوسته می باشد.بسته به رابطه فشار و انرژی درونی این جمله به شکل های گوناگون نوشته می شود:

ذرات غیر نسبیتی(فشار گاز کامل):

در ترمودینامیک فشار و انرژی درونی (واحد حجم) این ذرات به شکل زیر رابطه دارند:

$$P_{gas} = \frac{2}{3}\frac{dE_{in}}{dV}$$

که P_{gas} فشار ذرات گاز (غیر نسبیتی) می باشد . با قرار دادن فشار از رابطه ی بالا در انتگرال به روش جز به جزء مان و با فرض اینکه چگالی جزء حجمی که انتخاب کرده ایم ثابت است ، داریم :

$$\int_0^{4\pi R^3 P} d(4\pi r^3 P) - 3\int_0^M \frac{2dE_{in}}{3\rho dV} dM = \int_0^M -\frac{GM}{r} dM \Rightarrow$$

$$0 - 2E_{in} = U$$

که E_{in} انرژی درونی (جنبشی) ذرات توده گازی و U هم انرژی پتانسیل گرانشی ذرات گاز می باشد .بنابراین:

$$2E_{in} + U = 0$$

و چنین بود که قضیه ویریال را برای ذرات غیرنسبیتی به دست آوردیم .

ذرات نسبیتی(فشار تابشی):

این ذرات از همان شکل رابطه پیروی می کنند.تنها تفاوت ضریب 2 در عبارت فشار است.

$$\mathrm{P_{rad}} = \frac{1}{3}\frac{dE_{in}}{dV}$$

که $\mathrm{P_{rad}}$ فشار ذرات نسبیتی (فشار تابشی) می باشد . پس قضیه ی ویریال برای این نوع ذرات به شکل زیر است:

$$E_{in} + U = 0$$

در حالت کلی تر باید رابطه فشار و انرژی درونی گاز را به طور کامل نوشت.چون در ستاره ها هر دو نوع فشار (گاز کامل و تابشی) وجود دارد. در این باره مدل ادینگتون را می توان به کار برد .

مدل ادینگتون:

این مدل می گوید فشار درون ستاره متشکل از دو نوع فشار (فشار گاز کامل و فشار تابشی) است. سهم هر یک از فشار ها با یک ضریب β بیان می شود.

$$\mathrm{P_{rad}} = (1-\beta)\mathrm{P}$$

$$P_{\mathrm{gas}} = \beta\mathrm{P}$$

که β کوچکتر از یک است . حال دو رابطه قبل را می نویسیم:

$$\mathrm{P_{gas}} = \frac{2}{3}\frac{dE_{gas}}{dV}$$

$$\mathrm{P_{rad}} = \frac{1}{3}\frac{dE_{rad}}{dV}$$

از هر دو عبارت جمله انرژی را به دست آورده و با هم جمع می کنیم تا انرژی کل به دست آید:

$$\frac{dE_{tot}}{dV} = \frac{dE_{gas}}{dV} + \frac{dE_{rad}}{dV} = \frac{3}{2}P_{gas} + 3P_{rad} = \frac{3}{2}\beta P + 3(1-\beta)P$$

$$\frac{dE_{tot}}{dV} = 3\mathrm{P}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)$$

از اینجا فشار را به دست آورده در انتگرال جاگذاری می کنیم.با همان فرض های قبلی خواهیم داشت:

$$\left(\frac{2}{2-\beta}\right)\mathrm{E}_{\mathrm{tot,in}} + \mathrm{U} = 0$$

که برای ذرات نسبیتی (فشار کاملا تابشی) ، $\beta = 0$ و برای ذرات غیر نسبیتی (فشار گاز تماما کامل!) ، $\beta = 1$ است. این هم از این !

2. **اثبات مکانیکی:**

مکانیک کلاسیک:

برای اثبات قضیه ، کمیت اسکالر لختی دورانی (moment of inertia) را می نویسیم:

$$I = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} m_i |\mathrm{r_i}|^2$$

از آن مشتق می گیریم:

$$\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} m_i \vec{\mathrm{r_i}}.\vec{\mathrm{r_i}} = 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r_i}}}{\mathrm{dt}} \cdot \vec{\mathrm{r_i}} = 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{\mathrm{p_i}} \cdot \vec{\mathrm{r_i}}$$

کمیت آخر را با نماد Q نمایش می دهیم.

$$Q = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{\mathrm{p_i}} \cdot \vec{\mathrm{r_i}}$$

از آن مشتق می گیریم:

$$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{\mathrm{p_i}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r_i}}}{\mathrm{dt}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{\overrightarrow{\mathrm{dp_i}}}{\mathrm{dt}} \cdot \vec{\mathrm{r_i}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{m_i} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r_i}}}{\mathrm{dt}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r_i}}}{\mathrm{dt}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{\mathrm{F_i}} \cdot \vec{\mathrm{r_i}} = 2\mathrm{K} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{\mathrm{F_i}} \cdot \vec{\mathrm{r_i}}$$

عبارت آخر به عنوان ویریال کلاسیوس شناخته می شود.

از این به بعد راه های مختلفی وجود دارد که به قضیه اصلی ویریال منجر می شود.یکی از آن راه ها را می آوریم . در این روش از متوسط گیری زمانی در طی یک دوره τ استفاده می کنیم :

$$\langle\frac{dQ}{dt}\rangle_\tau = \frac{Q(\tau) - Q(0)}{\tau} = 2\langle K\rangle_\tau + \sum_{i=1}^{N}\langle\vec{F_i}\cdot\vec{r_i}\rangle_\tau$$

"< >" نماد متوسط گیری می باشد . اگر سیستم ما تناوبی باشد یعنی پس از مدت زمان τ به حالت اولیه برگردد،عبارت $\langle\frac{dQ}{dt}\rangle_\tau$ صفر می شود . بنابراین:

$$2\langle K\rangle_\tau = \sum_{i=1}^{N}\langle\vec{F_i}\cdot\vec{r_i}\rangle_\tau$$

از قضیه های مکانیک می دانیم عبارت داخل سیگما در حقیقت انرژی پتانسیل متوسط است.پس:

$$\sum_{i=1}^{N}\langle\vec{F_i}\cdot\vec{r_i}\rangle_\tau = -\langle U_{\text{tot}}\rangle_\tau$$

علامت منفی به خاطر تعریف انرژی پتانسیل که در بینهایت صفر است وارد معادله شده است .

بنابراین:

$$\langle K\rangle_\tau = -\frac{1}{2}\langle U_{\text{tot}}\rangle_\tau$$

تمام شد رفت !

نسبیت:

می دانیم در نسبیت خاص دیگر انرژی جنبشی یک جسم برابر $K = \frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{v}$ نیست.پس نمی توانیم در مراحل اثبات که به عبارت زیر رسیدیم از تعریف انرژی جنبشی استفاده کنیم.

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p_i}\cdot\frac{d\vec{r_i}}{dt} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\overrightarrow{dp_i}}{dt}\cdot\vec{r_i}$$

اما می دانیم انرژی جنبشی یک تک ذره در نسبیت به شکل مقابل است: $K = (\gamma - 1)mc^2$

بنابراین رابطه ای بین $\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{v}$ و انرژی جنبشی به دست می آوریم:

$$\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\gamma m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\gamma\frac{v^2}{c^2}mc^2 = \frac{1}{2}\gamma\frac{v^2}{c^2}\frac{K}{\gamma - 1}$$

عبارت آخر را می توانیم ساده کنیم و در آخر با جاگذاری در محاسبات به چیزی که می خواستیم برسیم:

$$\frac{1}{2}\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{v}}=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\mathrm{K}$$

$$-\frac{1}{2}\langle \mathrm{U_{tot}}\rangle_{\tau}=\langle\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}}\left(\frac{\gamma_{\mathrm{i}}+1}{2\gamma_{\mathrm{i}}}\right)\mathrm{K}_{i}\rangle_{\tau}$$

این عبارت می گوید که نسبت انرژی جنبشی و پتانسیل دیگر ثابت نیست.اما عبارت طرف راست در حد ها برای ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی (کامل) دو مقدار اختیار می کند:

$$\langle\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}}\left(\frac{\gamma_{\mathrm{i}}+1}{2\gamma_{\mathrm{i}}}\right)\mathrm{K}_{i}\rangle_{\tau}=[1\text{ or }0.5]\langle K_{tot}\rangle_{\tau}$$

برای ذرات نسبیتی 0.5 و برای ذرات غیر نسبیتی 1 قابل قبول است . بنابراین باز هم به همان قضیه ویریال دست یافتیم:

$$K=E_{in}=-\frac{1}{2}U$$

$$K=E_{in}=-U$$

از دیاری ویریالی می گذشت !

دید جنبش با پتانسیّل به گشت !

گفت : آیا نسبتی دارید ؟! هان ؟!

پاسخ آمد : یار در عقد من است !

تهیه و گردآوری : محمدرضا حسن پور hasanpoormdra@yahoo.com

بازبینی و تنظیم : سید حسین هاشمی s.h.hashemi@ut.ac.ir

منابع:

An introduction to modern astrophysics [B. Carroll , D. Ostlie]

Physic of star [A. C. Phillips]

Classical mechanics [H. Goldstein]

First exam in 9'th astronomy summer school

http://en.wikipedia.org/wiki/Virial_theorem

http://wiki.avastarco.com/index.php