سوالات و جواب های فیزیک ۲ ------------------- مهندسی برق

فصول :

۱ – قانون گاوس

۲ – اختلاف پتانسیل

۳ – میدان الکتریکی

وب سایت : Arshadebargh.blog.ir

ای میل : mbkalashi@gmail.com

kalashibagher@yahoo.com

پیامک : ۰۹۳۸۸۲۹۹۲۹۴

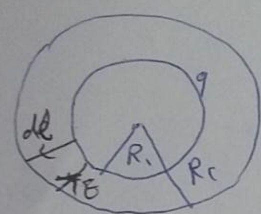
لاین ، وایبر ، واتس آپ ، تالک و ...

فصل اول قانون گاوس

فصل قانون گاوس

۱) دو پوسته کروی رسانا و هم مرکز دارای شعاع های $R_1 = 0/145\,m$ و $R_2 = 0/207\,m$ اند. کره داخلی حامل بار $-6\times10^{-8}\,C$ است. الکترونی با سرعت ناچیز کره داخلی را ترک می کند. با فرض اینکه ناحیه میان کره ها خلاء باشد، سرعت الکترون را هنگام برخورد به کره خارجی محاسبه کنید.

$q = -6\times10^{-8}\,C$



قضیه کار و انرژی $\quad W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int e\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

از قانون گاوس $\rightarrow \quad E(R_1<r<R_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\Rightarrow W = e\int_{R_1}^{R_2}\frac{q\,(+dr)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = +\frac{qe}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dr}{r^2} = \frac{qe}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Big]_{R_1}^{R_2}$$

$$= \frac{qe}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right]$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \longrightarrow \frac{qe}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right] = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

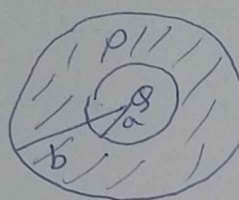
$$v^2 = \frac{qe}{2\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right] \longrightarrow v = \sqrt{\frac{qe}{m2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]}$$

$$v = \sqrt{\frac{6\times10^{-8}\times1.6\times10^{-19}}{\underbrace{9.11\times10^{-31}}_{\text{جرم الکترون}}}\times\frac{9\times10^{9}}{2}\times\left[\frac{1}{0.145}-\frac{1}{0.207}\right]} = 2\times10^{7}$$

فصل قانون گاوس

(۲) ناحیه کروی $a<r<b$ دارای بار حجمی $\rho = A/r$ است که در آن A مقدار ثابتی است. بار نقطه‌ای Q در مرکز $(r=0)$ حفره‌ی محصور شده، قرار دارد. مقدار A چقدر باشد تا بزرگی میدان الکتریکی در ناحیه $a<r<b$ ثابت بماند؟

$\rho = \frac{A}{r} \longrightarrow$ چگالی ثابت نیست



قانون گاوس $\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$

$E\,4\pi r^2 = \frac{\int \rho\, dv + Q}{\epsilon_0}$

$\int \rho\, dv = \int \frac{A}{r}\times 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_a^r r\, dr = 4\pi A\, r^2/2 \Big]_a^r$

$Q = 2\pi A\left[r^2 - a^2\right]$

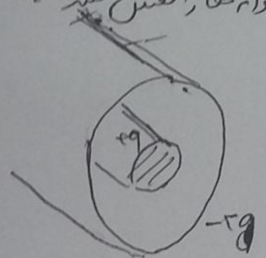
$$E = \frac{\int \rho\, dv + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\cancel{2}\cancel{\pi} A\left[r^2-a^2\right]}{\cancel{4}\cancel{\pi}\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\epsilon_0 r^2}\left[r^2-a^2\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\epsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{A}{2\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{Aa^2}{2\epsilon_0 r^2} = \frac{A}{2\epsilon_0} + \frac{Q - 2\pi A a^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$ باید ثابت باشد

بنابراین $\Rightarrow Q - 2\pi A a^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{A = \frac{Q}{2\pi a^2}}$

۳ – یک استوانه رسانای دراز به طول L حامل بار +q است (مطابق قانون گاوس) بوسیله پوسته استوانه‌ای رسانایی با بار کل -2q احاطه شده است. شکل مقطع این دو استوانه را نشان می‌دهد. با استفاده از قانون گاوس الف) میدان الکتریکی در نقاط خارج از پوسته رسانا، ب) توزیع بار روی پوسته رسانا، و ج) میدان الکتریکی در ناحیه میان استوانه‌ها را معین کنید.



الف)

$$E\,2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 L}$$

ب)

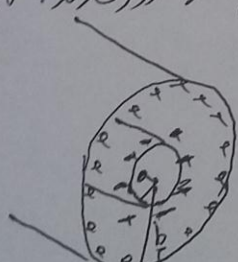
$$+q + (-2q) = -q$$

ج)

$$E\,2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0} \longrightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}$$

۴) شکل، مقطع دو استوانه دراز هم محور به شعاع‌های a و b را نشان می‌دهد. استوانه‌ها دارای بارهای مساوی و مخالف λ در واحد طول‌اند. با استفاده از قانون گاوس ثابت کنید، الف) به ازای $r>b$ و $r<a$، $E=0$ است و ب) در ناحیه میان استوانه‌ها E از رابطه $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$ بدست می‌آید. ج) حال فرض کنید الکترون بسیار در یک مسیر دایره‌ای به شعاع r بین استوانه‌ها و هم مرکز با مقطع آنها دور می‌زند. انرژی جنبشی الکترون، K، چقدر باید باشد؟

و ۳ قبلاً حل شده است.



$$K = \tfrac{1}{2} m v^2$$

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} = eE$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \Longrightarrow \frac{mv^2}{\cancel{r}} = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon \cancel{r}} \rightarrow v^2 = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon m}$$

$$\cancel{v^2 = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon m}} \quad K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{e\lambda}{4\pi\epsilon}$$

فصل دوم : پتانسیل الکتریکی

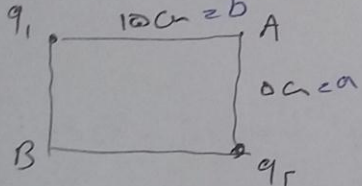
فصل پتانسیل الکتریکی

1) دو صفحه رسانای موازی بزرگ به فاصله 10cm از هم قرار دارند و دارای بارهای مساوی و مخالف روی سطح‌های مقابل خود هستند. به الکترونی که در وسط فاصله میان دو صفحه قرار دارد، یک نیروی $1/6\times10^{-15}\,N$ وارد می‌شود. اختلاف پتانسیل میان این دو صفحه چقدر است؟

$$E = \frac{F}{e} = \frac{1/6\times10^{-15}}{1/6\times10^{-19}} = 10^{4}\ N/C$$

$$\Delta V = Ed = (10^{4}\ N/C)(10\times10^{-2}\ m) = 10^{3}\ V$$

2) در مستطیل شکل طول اضلاع به ترتیب برابر است با 5cm و 15cm، $q_1 = -5\times10^{-6}C$ و $q_2 = 2\times10^{-6}C$. الف) پتانسیل الکتریکی در گوشه B همچنین در گوشه A چقدر است؟ ب) برای حرکت دادن بار سوم $q_3 = 3\times10^{-6}C$ از B تا A، در امتداد قطر مستطیل، چه مقدار کار باید انجام شود؟ ج) آیا در این فرآیند، کار خارجی به انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی تبدیل می‌شود یا برعکس؟ توضیح دهید.



الف)

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b}\right] = -7/8\times10^{5}\ V$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1}{b_1} + \frac{q_2}{a}\right] = 0/6\times10^{6}\ V$$

ب)

$$W_{BA} = q_3\left[V_A - V_B\right] = \int_B^A F\cdot dl$$

حرکت از B تا A

$$= 2/54\ J$$

کار عامل خارجی مثبت شده، یعنی عامل خارجی کار انجام می‌دهد و این انرژی به صورت انرژی پتانسیل در سیستم ذخیره می‌شود...

۲

(۳) ذره‌ای به جرم m، بار q «فرض کنید بار مثبت دارد» و انرژی جنبشی اولیه K، به طرف یک هسته سنگین با بار Q که در چارچوب مرجع ما ثابت فرض می‌شود، از فاصله بی‌نهایت پرتاب شده است. الف) اگر نشانه‌گیری دقیق باشد، هنگام توقف لحظه‌ای ذره، فاصله آن تا مرکز هسته چقدر است؟ ب) در یک نشانه‌گیری غیر دقیق خاص، نزدیک‌ترین فاصله ذره تا هسته دو برابر فاصله به دست آمده در قسمت الف است. سرعت ذره را در این نزدیک‌ترین فاصله تعیین کنید.

الف)

قانون بقاء انرژی $\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad , \quad K_2 = 0 \quad , \quad K_1 = K$$

$$\Rightarrow K = U_2 \Rightarrow K = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \longrightarrow \boxed{r = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 K}}$$

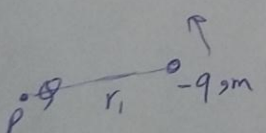
ب)

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$K + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 2r} \longrightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\cancel{qQ} \times \cancel{4\pi\epsilon_0} K}{\cancel{4\pi\epsilon_0} \times 2 \times \cancel{qQ}}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{2} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

(۴) ذره‌ای با بار Q در نقطه P ثابت فرض می‌شود. ذره دیگری به جرم m و بار $-q$ با سرعت ثابت روی دایره‌ای به شعاع r_1 و به مرکز P حرکت می‌کند. برای کاری که باید توسط یک عامل خارجی روی ذره دوم انجام شود تا شعاع دایره حرکت به مرکز P به r_2 افزایش پیدا کند، رابطه‌ای به دست آورید.



$$W = E_2 - E_1$$

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_1} \qquad \frac{mv_1^2}{r_1} = F_e = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$$

$$= \frac{qQ}{2 \times 4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_1} \qquad mv_1^2 = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

$$= -\frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 r_1}$$

$$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{q\Phi}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$ فرض پتانسیل الکتریکی

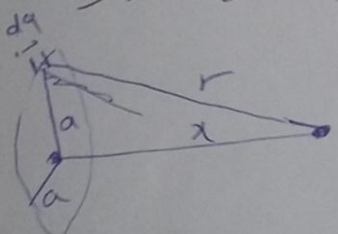
$$= \frac{-\Phi q}{8\pi\epsilon_0 r_2}$$

$$W = E_2 - E_1 = \frac{q\Phi}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

(۵) الف) نشان دهید که پتانسیل الکتریکی در نقطه ای روی محور یک حلقه باردار به شعاع a از رابطه زیر داده می شود:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

ب) از این نتیجه رابطه مربوط به E را برای نقاط محوری به دست آورید و آن را با نتیجه حاصل از محاسبه مستقیم E در فصل میدان الکتریکی مقایسه کنید.



$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$ المان طول حلقه

$$\lambda = \frac{q}{2\pi a} \rightarrow dq = \lambda\, dl = \frac{q}{2\pi a} dl$$

$$V = \int \frac{\lambda\, dl}{4\pi\epsilon_0 (a^2+x^2)^{1/2}} = \frac{\lambda \int dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\lambda\, 2\pi a}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2+x^2}}$$

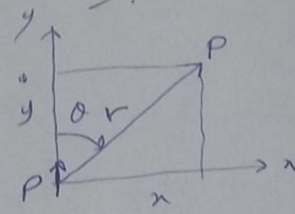
ب)

E برای نقاط محوری $= -\frac{dV}{dx} = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[+\frac{1}{2} \times 2x \times (a^2+x^2)^{-3/2}\right]$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$ → حاصل معادله ای است که مستقیماً از محاسبه میدان الکتریکی در فصل میدان الکتریکی به دست آمد...

۶) نقطه P (با فاصله دور) را از (پتانسیل الکتریکی) میدان یک دوقطبی که در مبدأ دستگاه محورهای xy واقع شده است، نشان می‌دهد. V از معادله زیر به دست می‌آید. E را به صورت تابعی از مختصات محاسبه کنید.

$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$V = \frac{p\,y}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

• برای نقاط روی محور عمود دوقطبی داریم ($y=0$):

$$E_y = \frac{-p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

$$E_x = 0$$

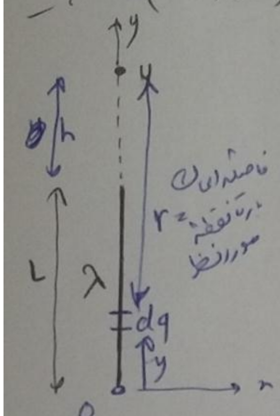
که با نتیجه‌ای که در فصل میدان الکتریکی برای میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی در نقاط دور روی محور عمود دوقطبی به دست آمد، برابر است.

۷) با استفاده از رابطه $V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (برای پتانسیل الکتریکی ناشی از دوقطبی)، مؤلفه شعاعی میدان الکتریکی حاصل از یک دوقطبی را پیدا کنید.

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}$$

۶) یک بار الکتریکی با بار واحد طول λ (منفی یا مثبت) به طور یکنواخت در طول یک پاره خط مستقیم به طول L توزیع شده است. الف) پتانسیل الکتروستاتیکی را (که در بی‌نهایت صفر فرض شده است) در نقطه P به فاصله h که روی امتداد پاره خط باردار واقع بر راستای آن تعیین کنید. ب) با استفاده از نتیجه قسمت الف مؤلفه میدان الکتریکی در نقطه P را در راستای y (در امتداد خط) محاسبه کنید.

الف)



$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad r = L + h - y$$

$$V = \int \frac{\lambda\, dy}{4\pi\epsilon_0 (L+h-y)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dy}{L+h-y}$$

$$= \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(L+h-y) \Big]_0^L$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{L+h}{h}\right]$$

ب)

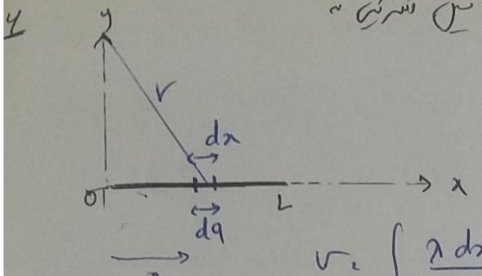
$$E_h = -\frac{dV}{dh} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dh} \ln\left[\frac{L+h}{h}\right]$$

$$= +\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{\cancel{h} - (L+\cancel{h})}{h^2}}{\frac{L+h}{\cancel{h}}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{h(L+h)}$$

$$E_h = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{h(L+h)}$$

۷) روی میله باریکی به طول L که بر محور x منطبق است و یک سر آن منطبق بر مبدأ قرار دارد، بار الکتریکی با بار واحد طول $\lambda = kx$ توزیع شده است که در آن k یک مقدار ثابت است. الف) با فرض اینکه پتانسیل الکتروستاتیکی در بی‌نهایت صفر است، آن را در نقطه P واقع بر محور y ها پیدا کنید. ب) مؤلفه قائم E_y شدت میدان الکتریکی را در نقطه P با استفاده از نتیجه قسمت الف ~~[illegible]~~ بدست آورید.

۷



الف) $dq = \lambda\, dx$ $V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$ فرض پتانسیل الکتریکی

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$V = \int \frac{\lambda\, dx}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^L \frac{kx\, dx}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$V = \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = ? \qquad x^2+y^2 = u^2 \longrightarrow x\,dx = u\,du$$

$$= \int \frac{\cancel{u}\,du}{\sqrt{\cancel{u^2}}} = u = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\sqrt{x^2+y^2}\,\Big]_0^L = \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\left[\sqrt{L^2+y^2} - y\right]$$

ب)

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\left[1 - \frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}\right]$$

۸) دو کره نازک هم مرکز، رسانا و عایق منزوی شده، به شعاع‌های R_1 و R_2، حامل بارهای q_1 و q_2 اند. روابطی برای $E(r)$ و $V(r)$ بدست آورید. r فاصله تا مرکز کره‌هاست.

$r > R_1$ و $r > R_2$:

$$E = \frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$R_1 < r < R_2$:

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad V = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

۷ $E = 0$ "محاسبه پتانسیل الکتریکی" : $r < R_1$ و $r < R_2$

$$V = \frac{q_2}{4\pi\epsilon R_2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon R_1}$$

⑨ فضای میان دو کره هم مرکز به شعاع های r_1 و r_2 از یک ماده نارسانا که دارای چگالی بار یکنواخت ρ است، پر شده است. پتانسیل الکتریکی V را به صورت تابعی از فاصله r از مرکز آنها در نواحی الف) $r > r_2$ ، ب) $r_1 < r < r_2$ و ج) $r < r_1$ بدست آورید.

الف)

$$E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi (r_2^3 - r_1^3)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho (r_2^3 - r_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{\rho (r_2^3 - r_1^3)}{3\epsilon_0 r}$$

ب)

$$V = -\int_{\infty}^{r_2} E \cdot dl - \int_{r_2}^{r} E \cdot dl$$

$$= \frac{\rho (r_2^3 - r_1^3)}{3\epsilon_0 r_2} + A$$

$$A = ? \quad E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi (r^3 - r_1^3)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho (r^3 - r_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$-\int_{r_2}^{r} E \cdot dl = -\int_{r_2}^{r} \frac{\rho r\, dr}{3\epsilon_0} + \int_{r_2}^{r} \frac{\rho r_1^3\, dr}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} \Big]_{r_2}^{r} + \frac{\rho r_1^3}{3\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)_{r_2}^{r}$$

$$= -\frac{\rho}{6\epsilon_0}(r^2 - r_2^2) - \frac{\rho r_1^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

مفهوم پتانسیل الکتریکی

$$V = \frac{\rho(r_2^3 - r_1^3)}{3\epsilon_0 r_2} - \frac{\rho}{6\epsilon_0}(r^2 - r_2^2) - \frac{\rho r_1^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{\rho r_2^2}{3\epsilon_0} - \cancel{\frac{\rho r_1^3}{3\epsilon_0 r_2}} + \cancel{\frac{\rho r_1^3}{3\epsilon_0 r_2}} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho}{6\epsilon_0} r_2^2 - \frac{\rho r_1^3}{3\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r_2^2 + \frac{r_2^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{r_1^3}{r}\right)$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2} r_2^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{r_1^3}{r}\right)$$ ج)

$$V = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2} r_2^2 - \frac{r_1^2}{2} - \frac{r_1^3}{r_1}\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2} r_2^2 - \frac{r_1^2}{2} - r_1^2\right)$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2} r_2^2 - \frac{3}{2} r_1^2\right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

۱۰) دو کره رسانا به شعاع یکی 6cm و شعاع دیگری 12cm است و هر کدام دارای بار $3\times10^{-8}C$ اند در فاصله بسیار زیاد از هم قرار دارند. اگر کره‌ها بوسیله یک سیم رسانا به هم وصل شوند، الف) راستای حرکت و انرژی بار منتقل شده و ب) بارهای روی هر کره و پتانسیل آنها را پیدا کنید.

پس از اتصال کره‌ها به یکدیگر

$$q'_{کل} = 2\times3\times10^{-8} = q_1 + q_2$$

$$\Rightarrow \boxed{6\times10^{-8} = q_1 + q_2} \quad (1)$$

پس از اتصال $\rightarrow V_1 = V_2 \rightarrow \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{q_2}{q_1}$

$$\rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{12}{6} = 2 \rightarrow \boxed{q_2 = 2q_1} \quad (2)$$

الف) $(2) \rightarrow (1) \Rightarrow 3q_1 = 6\times10^{-8} \rightarrow q_1 = 2\times10^{-8}C$ و $q_2 = 4\times10^{-8}C$

جهت حرکت بار از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر یا از کره کوچکتر به کره بزرگتر خواهد بود.

ب) $V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{9\times10^9 \times 2\times10^{-8}}{6\times10^{-2}} = 3\times10^9\times10^{-6} = 3\times10^3 V$

فصل سوم : میدان الکتریکی

(1)

حل مسائل فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل ۲۷ : میدان الکتریکی

پاسخ مسئله ۴ : الف)

$$\vec{a} = \frac{\vec{E}}{m_e} = \frac{-1.6\times10^{-19} \times (\hat{j}\, 1.2\times10^{4})}{9.1\times10^{-31}\,kg} = -\hat{j}\,(2.1\times10^{15})\, m/s^2$$

ب)

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{2\times10^{-2}}{1.5\times10^{5}} = 1.3\times10^{-7}\, s$$

$$v_y = v_{0y} + at = 0.3\times10^{4} + (-2.1\times10^{15})\times1.3\times10^{-7}$$

$$= 0.3\times10^{4} - 2.73\times10^{8}$$

$$\cong -2.8\times10^{8}$$

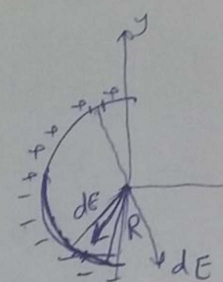
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = 1.3\times10^{-7}\,\hat{i} - 2.8\times10^{8}\,\hat{j}$$

مسئله ۴ : در یک لحظه مشخص مؤلفه‌های سرعت الکترونی که میان دو صفحه موازی باردار حرکت می‌کند، عبارتند از $v_x = 1.5\times10^{5}\, m/s$ و $v_y = 0.3\times10^{4}\, m/s$. اگر میدان الکتریکی میان صفحات از رابطه $\vec{E} = \hat{j}\, 1.2\times10^{4}\, N/C$ بدست آید، الف) شتاب الکترون چقدر است؟ ب) هنگامی که مختصه x الکترون به اندازه $2.0\, cm$ تغییر کند، سرعت الکترون چقدر خواهد بود؟

۴

حل مسائل فصل دوم (فصل ۲۴ میدان الکتریکی)

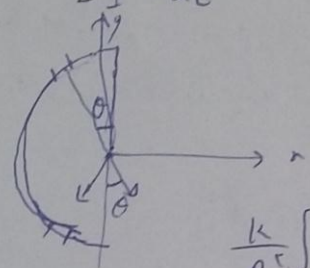
۲۲) یک میله شیشه ای باریک به صورت نیم دایره ای به شعاع R خم شده است. مطابق شکل بارهای $+Q$ در نیمهٔ بالا و $-Q$ در نیمهٔ پایین به طور یکنواخت توزیع شده است. میدان الکتریکی E را در نقطهٔ P مرکز نیم دایره پیدا کنید.



$$\vec{E} = \int \frac{k\,dq}{R^2} \cos\theta \ \hat{j}$$

$$\int \frac{k\,dq}{R^2} \cos\theta = ?$$

$$\frac{k}{R^2}\int dq \cos\theta$$



$$dq = \lambda\, dl = \lambda R\, d\theta$$

$$\frac{k}{R^2}\int dq\cos\theta = \frac{k}{R^2}\int \lambda R\, d\theta \cos\theta = \frac{k\lambda}{R}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\frac{k\lambda}{R} \sin\theta \Big]_0^{\pi/2} = \frac{2k\lambda}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{2Q}{2\pi^2 R^2 \epsilon_0}$$

$$\lambda = \frac{Q}{\pi/2\, R} = \frac{2Q}{\pi R}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{\pi^2 \epsilon_0 R^2}}$$

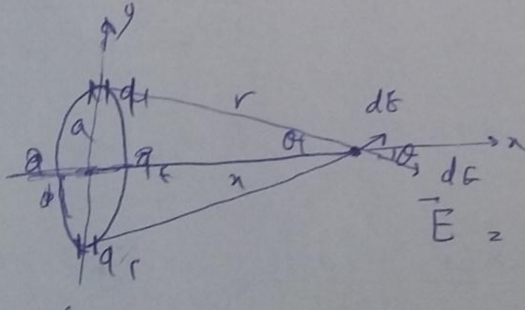
یا

$$\frac{k}{R^2}\int dq\cos\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta - \frac{k\lambda}{R}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{k\lambda}{R}\left\{ \sin\theta \Big]_0^{\pi/2} - \sin\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} \right\} = \frac{k\lambda}{R}\left\{ 1 - (-1) \right\}$$

$$= \frac{2k\lambda}{R} = \frac{Q}{\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

۲۷



$$q_1 = q_2 = q$$

$$\vec{E} = \int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta\ \hat{i} + \int \frac{k\,dq}{r^2}\sin\theta\ \hat{j}$$

$$\Rightarrow \int \frac{k\,dq}{a^2+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{kx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\int dq = \frac{kx\,q_1}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

مسئله ۲۷ : فرض می‌کنیم به جای اینکه بار q بطور یکنواخت
در روی حلقه توزیع شده باشد در عوض بار q_1 در روی
نیمه‌ای از محیط و بار q_2 در روی نیمه دیگر
بطور یکنواخت توزیع شده باشد. فرض می‌کنیم
$q_1+q_2=q$. میدان الکتریکی را
در امتداد محور برای یک نقطه واقع بر محور پیدا کنید

فرض میدان الکتریکی q_1

(۳) $k\int \frac{dq}{r^2}\sin\theta = \frac{ka}{(a^2+x^2)^{3/2}}\, q_1$

$$\vec{E}_1 = \frac{k}{(a^2+x^2)^{3/2}}\left[a q_1 \hat{j} + x q_1 \hat{i}\right]$$

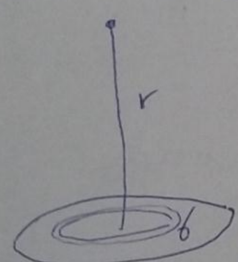
$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon (a^2+x^2)^{3/2}}\left[-a\hat{j} + x\hat{i}\right]$$

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon (a^2+x^2)^{3/2}}\left[a\hat{j} + x\hat{i}\right]$$

$$\cancel{\vec{E}_1 = \vec{E}_1+\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon (a^2+x^2)^{3/2}}\left[a\hat{j} + x\hat{i}\right]}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1+\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon (a^2+x^2)^{3/2}}\left[(q_2-q_1)a\hat{j} + qx\hat{i}\right]$$

(۳۲) قرص نازکی به شعاع a بطور یکنواخت باردار شده است و بار واحد سطح آن σ است. میدان الکتریکی را در روی محور قرص در فاصله r از آن پیدا کنید.



$$E = \int \frac{k\,dq}{r^2}$$

میدان الکتریکی ناشی از حلقه باردار بر روی محور :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{qr}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{dq\,r}{(a^2+r^2)^{3/2}} \rightarrow E = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int\frac{dq\,r}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{r}{4\pi\epsilon}\int\frac{dq}{(a^2+r^2)^{3/2}} \qquad dq = \sigma\,dA = \sigma\,2\pi a\,da$$

$$= \frac{r}{4\pi\epsilon}\int\frac{\sigma\,2\pi a\,da}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma r}{4\pi\epsilon}\int\frac{a\,da}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

$a = r\tan\theta$ $\cancel{\rightarrow da = r(1+\tan^2\theta)d\theta}$

حل سئوال فصل دوم (صفحه ۳۷ میدان الکتریکی) 1/2

$\cancel{\frac{2\pi a\sigma r}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{r(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{r^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}} = \frac{2\pi a\sigma}{4\pi\epsilon_0 r}\int\frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{1/2}}}$

$\cancel{\frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r}\int\cos\theta\,d\theta = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r}\sin\theta}$

$\cancel{\tan\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \to \frac{a^2}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}$

$\cancel{\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta = \sin^2\theta \to \sin^2\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{a^2}{r^2}}$

$\cancel{\sin^2\theta = \frac{a^2/r^2}{(1+a^2/r^2)} \longrightarrow \sin\theta = \frac{+a/r}{\sqrt{1+a^2/r^2}}}$

$\cancel{= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r}\left.\frac{a/r}{\sqrt{1+a^2/r^2}}\right]_0^R = \left.\frac{\sigma}{2\epsilon_0 r^2}\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2/r^2}}\right]_0^R}$

$\cancel{\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 r^2\sqrt{1+R^2/r^2}}}$

$a^2+r^2=u^2$

$a\,da = u\,du$

(*) $\Longrightarrow \frac{2\pi\sigma r}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{a\,da}{(a^2+r^2)^{3/2}}$

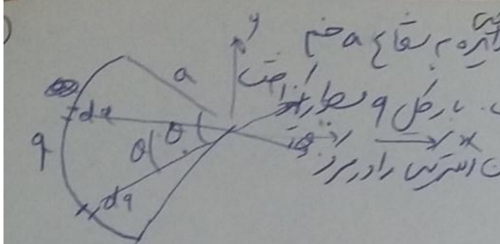
$\frac{\sigma r}{2\epsilon_0}\int\frac{u\,du}{u^3} = \frac{\sigma r}{2\epsilon_0}\int\frac{du}{u^2} = \frac{\sigma r}{2\epsilon_0}\int u^{-2}du = \frac{\sigma r}{2\epsilon_0}\frac{u^{-1}}{-1}$

$= -\frac{\sigma r}{2\epsilon_0}\frac{1}{u} = \left.\frac{-\sigma r}{2\epsilon_0\sqrt{a^2+r^2}}\right]_0^R = \frac{-\sigma r}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2}}-\frac{1}{r}\right]$

$= \frac{\sigma r}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1-\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}\right]$

فصل میدان الکتریکی

۳۱) حلقه باریک نارسانای به صورت کمانی از یک دایره به شعاع a خم شده و زاویه مرکزی مقابل به آن θ_0 است. بار کل q به طور یکنواخت در طول حلقه پاشیده شده است. میدان الکتریکی را در مرکز دایره برحسب a، q و θ_0 پیدا کنید.



$$E = \int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = k\int \frac{dq}{a^2}\cos\theta = \frac{k}{a^2}\int \lambda a\,d\theta\cos\theta$$

$dq = \lambda a\,d\theta$

$$= \frac{k\lambda}{a}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\sin\theta\Big]_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2}$$

$$\cancel{= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\sin\theta_0}$$

$\lambda = \dfrac{q}{\theta_0 a}$

$$= \frac{q}{a\theta_0 4\pi\epsilon_0 a}\left[\sin\frac{\theta_0}{2} + \sin\frac{\theta_0}{2}\right]$$

$$\cancel{= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a\theta_0}\sin\theta_0}$$

$$= \frac{q}{\cancel{2}\,4\pi\epsilon_0\theta_0 a^2}\times \cancel{2}\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\theta_0 a^2}\sin\frac{\theta_0}{2}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\theta_0 a^2}\sin\frac{\theta_0}{2}\,\hat{i}$$