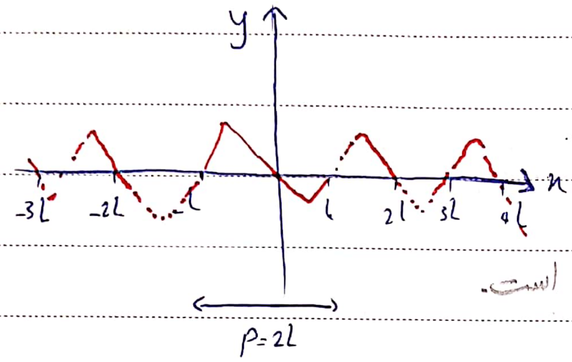
Subject ریاضی مهندسی محمودی فر ص21

Date نیم‌سال دوم 97

فصل اول - سری و انتگرال فوریه:

تعریف تابع متناوب: به هر تابعی مانند $y=f(x)$ که عدد مثبت $p=2L$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x+p)=f(x)$ به $f(x)$ تابع متناوب می‌گوئیم و p یک دوره تناوب گوییم



این تابع فرد است چون در بازه‌ی $-L$ تا L فرد است پس در بقیه‌ی بازه‌ها هم فرد است.

نسبت به مبدا قرینه است.

توابع زیر همگی توابعی متناوب با دوره تناوب 2π هستند:

$\sin x \; ; \; \sin 2x \; ; \; \sin 3x \; ; \; \dots \; ; \sin mx \; ; \dots$

$\cos x \; ; \; \cos 2x \; ; \; \cos 3x \; ; \; \dots \; ; \cos mx \; ; \dots$

$\underbrace{\sin^2 x}_{f(x)} \longrightarrow$ متناوب

می‌خواهیم چک کنیم که آیا دوره تناوب 2π هست یا نه:

$$f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)$$

$$=\sin(x+2\pi)\sin(x+2\pi)$$

sin و cos وقتی 2π بهشون اضافه میشه، 2π کلا حذف میشه.

$$=\sin x \quad \sin x$$

$$=\sin^2 x = f(x)$$

اینارو کجا نوشتیم؟

$$\sin^2 x = \boxed{\tfrac{1}{2}} + \boxed{0}\sin x + \boxed{0}\cos x + \boxed{0}\sin 2x + \boxed{-\tfrac{1}{2}}\cos 2x + \dots$$

$$+\boxed{0}\sin nx + \boxed{0}\cos nx + \dots$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x}$$

Subject
Date

تعریف سری فوریه: اگر $y=f(x)$ تابعی متناوب باشد با دوره تناوب $P=2L$ که در بازه‌ی $(-L, L)$ پیوسته نیز هست، در این صورت این تابع را می‌توان به صورت سری فوریه‌ی زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x\right)$$

به a_0 و a_n ها و b_n ها، ضرایب اویلر می‌گوئیم که از طریق فرمول‌های زیر بدست می‌آیند (فرمول های اویلر):

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \end{cases}$$

نکته: $a_0 = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$

مثال: سری فوریه‌ی تابع متناوب زیر را مشخص کنید:

برای رسم کدوم π لازم y عدد؟

توی درس میگه اگر تو بازه‌ی π تا 0، $f(x)=x$ بود شکل به طوری میشه؟

$$f(x) = \begin{cases} \pi & ; \quad 0 < x < \pi \\ -\pi & ; \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

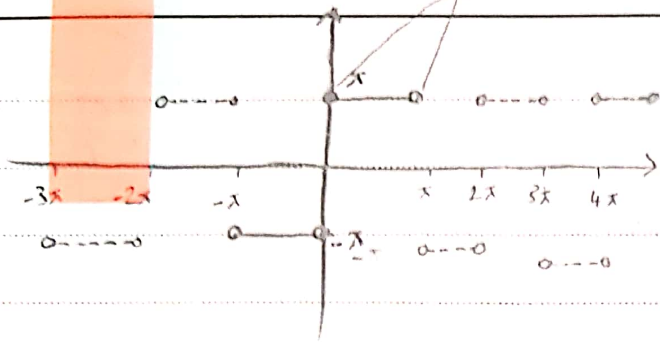
$$f(x+2\pi) = f(x)$$

اگر دوره تناوب بهمون نداد خودمون باید مشخص بدیم مثلاً اینجا از $-\pi$ تا π میشه 2π

PAPCO

Subject
Date

تفاضل چون تعریف نشده



$f(x) \longrightarrow$ تابع فرد

جواب

$p = 2L$

$\longrightarrow p = 2\pi$: دوره تناوب $\Longrightarrow L = \pi$

$\longrightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{تابع فرد}} dx = 0$ (تابع فرد)

انتگرال توابع فرد در بازه های متقارن = 0

$\longrightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{\pi}x\, dx = 0$

تابع فرد   تابع زوج   فرد = تابع زوج × تابع فرد

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

انتگرال توابع زوج در بازه های متقارن $\Longleftarrow$

تابع فرد   تابع فرد   زوج = تابع فرد × تابع فرد

توابع زوج

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi \sin nx\, dx = 2\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = -\frac{2}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n}(\cos n\pi - 1)$

$(-1)^n$

$\cos 2\pi, 4\pi, \ldots = 0$

$\cos 3\pi, 5\pi, \ldots$ ۲ جواب نگه

تا دقیقه ی ۴۵ جلسه اول تا اینجا را درس گوش دادم

بنابراین و به خاطر دو دستگی جواب ها

$= \begin{cases} 0 & n \text{ زوج:} \\ \frac{4}{n} & n \text{ فرد:} \end{cases}$

$\Longrightarrow b_1 = \frac{4}{1}$; $b_3 = \frac{4}{3}$; $b_5 = \frac{4}{5}$ ....

$b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0$

سری فوریه $f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{2n+1}\sin(2n+1)x = 4\sin x + \frac{4}{3}\sin 3x + \frac{4}{5}\sin 5x + \ldots$

PAPCO

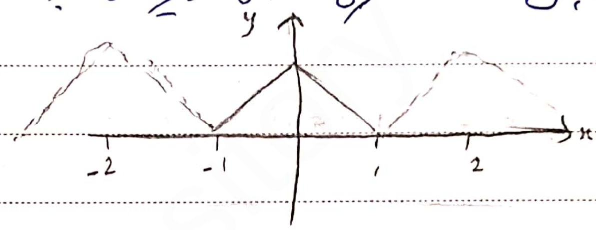
Subject
Date

سوال: سری فوریه ی تابع متناوب زیر را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x \; ; & 0<x<1 \\ 1+x \; ; & -1<x<0 \end{cases} \quad ; f(x+2)=f(x)$$

سپس مقدار سری عددی زیر را بدست آورید:

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$



دوره تناوب ; $\boxed{p=2}$; $\boxed{L=1}$

$1-x = 1-x$

زوج ; $f(-x) = f(x)$

$-L<x<0 \qquad 0<x<L$

فرد : $f(-x) = -f(x)$

$-L<x<0 \qquad 0<x<L$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)}_{\text{زوج}} \underbrace{\sin n\pi x}_{\text{فرد}} \, dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)}_{\text{زوج}} \, dx = 2\int_{0}^{1} 1-x \, dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)}_{\text{زوج}} \underbrace{\cos n\pi x}_{\text{زوج}} \, dx = 2\int_{0}^{1} (1-x)\cos n\pi x \, dx$$

$1-x$	$\cos n\pi x$
-1	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
0	$-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$

Subject

Date

$$= 2\left(\left(\frac{(1-x)}{n\pi}\sin n\pi x - \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(0 - \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\right) - 2\left(-\frac{1}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\begin{cases} 0 & : n \text{ زوج} \\ \frac{4}{n^2\pi^2} & : n \text{ فرد} \end{cases}$$

سری فوریه : $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + \cancel{b_n}^{0} \sin n\pi x)$

$f(x)$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\pi x}$$

نکته : اگر تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $p=2L$ ، در نقطه‌ی $x=x_0$ ، تعریف نشده باشد در این صورت می‌توان نوشت :

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x_0 + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x_0\right)$$

که : $\begin{cases} f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \longrightarrow \text{حد راست} \\ f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \longrightarrow \text{حد چپ} \end{cases}$

PAPCO

Subject
Date

حل بخش دوم سوال : ــــــ با روش کوتاه‌تر حل کنیم

از نکته‌ی قبل استفاده می‌کنیم : سری فوریه ②

$$f(0^+)=1,\quad f(0^-)=1 \Longrightarrow \boxed{\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=1} \quad ②$$

حال در سری فوریه ① مقدار x را در $x=0$ قرار بدهیم ، داریم :

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\underbrace{\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\right)}_{A}$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}A} \quad ③$$

با توجه به نکته‌ی قبل :

$$\frac{\overbrace{f(0^+)+f(0^-)}^{1}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}A$$

$$\Longrightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}A \longrightarrow \frac{1}{2}=\frac{4}{\pi^2}A \longrightarrow \boxed{A=\frac{\pi^2}{8}}$$

یادآوری از سری مکلورن :

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\dots \qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\dots$$

تذکر : در مثال قبل داشتیم ،

PAPCO

Subject
Date

$$f(x) = \begin{cases} 1-x \ ; & 0<x<1 \\ 1+x \ ; & -1<x<0 \end{cases}$$

زوج

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos(2n+1)\pi x$$

سوال: سری فوریه‌ی توابع زیر را بدست آورید:

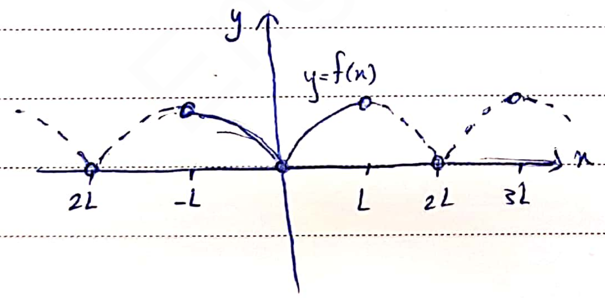
$$f'(x) = \begin{cases} -1 \ ; & 0<x<1 \\ 1 \ ; & -1<x<0 \end{cases}$$

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)x\pi}$$

فرد

سری فوریه‌ی تابع $f'(x)$

بسط کسینوسی (زوج):



$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) \ ; & 0<x<L \\ f(-x) \ ; & -L<x<0 \end{cases}$$

زوج

$$f_e(x+2L) = f_e(x)$$

PAPCO

تمرین ۴

Subject

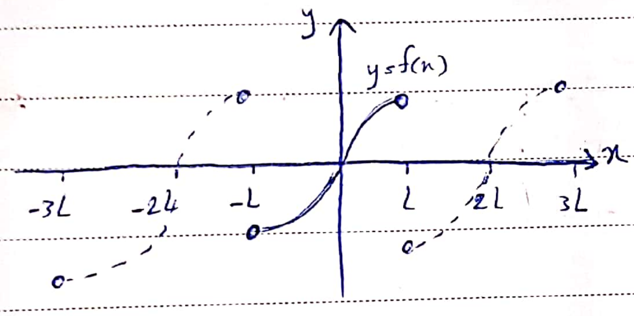
Date

$$f_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_e(x)\,dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx$$

بسط سینوسی (فرد) :



فرد :

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x) \; ; & 0 < x < L \\ -f(-x) \; ; & -L < x < 0 \end{cases}$$

$$f_o(x+2L) = f_o(x)$$

$$f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_o(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\,dx \longrightarrow b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{2\pi}{L} x\,dx$$

PAPCO

Subject
Date

مثال: سری فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)=\sin x\ ;\ 0<x<\pi$ را یافته و به کمک آن سری فوریه کسینوسی تابع $g(x)=\cos x\ ;\ 0<x<\pi$ را بدست آورید. $(L=\pi)$

حل: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad L=\pi$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}(1-(-1))=\boxed{\frac{4}{\pi}}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sin(n+1)x+\sin(1-n)x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n+1}\cos(n+1)x-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{-1}{n+1}\cos(n+1)\pi-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)\pi\right)-\left(\frac{-1}{n+1}-\frac{1}{1-n}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(1-n^2)} & n \text{ زوج} \\ & ;\ n\neq 1 \\ 0 & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2\pi}(1-1)=0$$

پس سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx$$

PAPCO

Subject

Subject
Date

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{-4}{\pi 3}\cos 2x + \frac{-4}{\pi 15}\cos 4x + \dots$$

حل آخرین قسمت مثال جلسه قبل: سری فوریه‌ی کسینوسی تابع $\pi \geq x \geq 0$ ، $g(x) = \cos x$ را بدست آورید. همچنین سری فوریه‌ی سینوسی همین تابع را نیز بدست آورید. $(g(x))$

حل: برای یافتن سری فوریه‌ی تابع g از سری فوریه‌ی تابع f مشتق می‌گیریم، داریم:

$$\boxed{g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8n}{\pi(1-4n^2)} \sin 2nx}$$ بسط سینوسی تابع g

اکنون برای تابع $g(x) = \cos x$ ، بسط کسینوسی آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g(x) = \boxed{0} + \boxed{1}\cos x + \boxed{0}\cos 2x + \boxed{0}\cos 3x + \dots$$

اتحاد مهم پارسوال:

اگر تابع $f(x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $p = 2L$ باشد، a_0 ، a_n ها و b_n ها ضرایب سری فوریه‌ی تابع $f(x)$ باشند، در این صورت اتحاد زیر (که به آن اتحاد پارسوال می‌گوییم) برقرار است:

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$ اتحاد پارسوال:

مثال: حاصل سری عددی زیر را به کمک اتحاد پارسوال بدست آورید.

$$A = \frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots$$

PAPCO

Subject
Date

حل: از سری فوریه ی آخرین مثال جلسه قبل استفاده می کنیم:

$$f_e(x)=\begin{cases}\sin x & ; \ 0<x<\pi \\ -\sin x & ; \ -\pi<x<0\end{cases} \quad \& \ f_e(x+2\pi)=f_e(x)$$

سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ = سری فوریه تابع $f_e(x)$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\underbrace{(4n^2-1)}_{(2n-1)(2n+1)}}\cos 2nx$$

$$=\underbrace{\frac{2}{\pi}}_{\frac{a_0}{2}}-\frac{4}{\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{1\times 3}}_{a_2}\cos 2x+\underbrace{\frac{1}{3\times 5}}_{a_4}\cos 4x+\underbrace{\frac{1}{5\times 7}}_{a_6}\cos 6x+\dots\right)$$

$$\boxed{a_0=\frac{4}{\pi}} ; \boxed{a_2=\frac{-4}{\pi(1\times 3)}} ; \boxed{a_4=\frac{-4}{\pi(3\times 5)}} ; \boxed{a_6=\frac{-4}{\pi(5\times 7)}} ; \boxed{b_n=0} , \boxed{L=\pi}$$

سمت چپ پارسوال: $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_e^2(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)\right]=\boxed{1}$$

سمت راست اتحاد پارسوال: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

Subject

Date

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{\frac{16}{\pi^2}}{2} + \left(\frac{16}{\pi^2(1^2 \times 3^2)} + \frac{16}{\pi^2(3^2 \times 5^2)} + \frac{16}{\pi^2(5^2 \times 7^2)} + \dots \right)$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \Bigg[\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots}_{A} \Bigg]$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} + A \right] \longrightarrow$$ سمت راست اتحاد پارسوال

$$\xrightarrow{\text{اتحاد پارسوال}} 1 = \frac{16}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} + A \right] \longrightarrow \frac{1}{2} + A = \frac{\pi^2}{16} \longrightarrow \boxed{A = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}}$$

سوال: ابتدا سری فوریه تابع $f(x) = x^2 \; ; \; 0 < x < 2 \;\&\; f(x+2) = f(x)$ را یافته

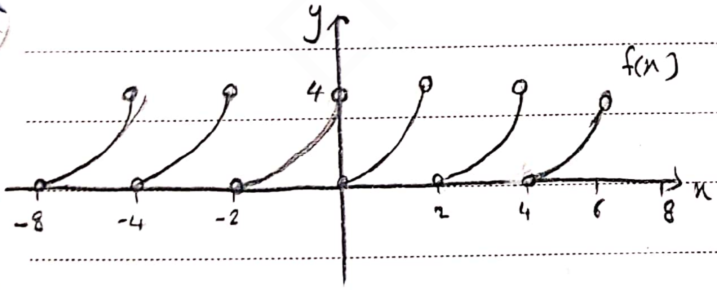
$p = 2 \;\&\; L = 1$

و سپس حاصل سری عددی زیر را به کمک آن بدست آورید.

از آنجایی که نه زوج اند نه فرد انتگرال را از $2L$ تا ۰ می‌گیریم

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

انتگرال توابع متناوب در بازه‌هایی که طول انتگرال با دوره تناوب برابر است برابرند.



$$\text{حل: } a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx \xrightarrow{L=1} a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_8^{10} f(x)\,dx$$

Subject
Date

$$L=1 \longrightarrow a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x \, dx$$

$$g(x) = f(x)\cos n\pi x \longrightarrow g(x+2) = f(x+2)\cos n\pi(x+2) = f(x)\cos n\pi x = g(x)$$

حل:

در این سوال: $p=2$ & $L=1$

$$\longrightarrow a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

$$\longrightarrow a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_0^2 x^2 \cos n\pi x\,dx$$

x^2 (+)	$\cos n\pi x$
$2x$ (−)	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
2 (+)	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$
0	$\frac{-1}{n^3\pi^3}\sin n\pi x$

$$= \left(\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{2x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{4}{n^2\pi^2}\right) - (0) \longrightarrow \boxed{a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}}$$

Subject
Date

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_{0}^{2} x^2 \sin n\pi x\,dx$$

x^2	$(+)$	$\sin n\pi x$
$2x$	$(-)$	$\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$
2	$(+)$	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$
0		$\frac{1}{n^3\pi^3}\cos n\pi x$

$$= \left[\frac{-x^2}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{2x}{n^2\pi^2}\sin n\pi x + \frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi x\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{-4}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\right) - \left(\frac{2}{n^3\pi^3}\right) \Longrightarrow \boxed{b_n = \frac{-4}{n\pi}}$$

سری فوریه تابع $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{4}{n\pi}\sin n\pi x\right)}$$

$$\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم } x=0]{\text{در سری فوریه}} \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2} \Longrightarrow \frac{0+4}{2} = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$\longrightarrow \frac{\cancel{4}}{2} - \frac{\cancel{4}}{3} = \frac{\cancel{4}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \to A \longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}A \Longrightarrow \boxed{A = \frac{\pi^2}{6}}$$

مرور مطالب جلسه قبل :

① سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $P=2L$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

② سری فوریه سینوسی سری فوریه کسینوسی توابع با دامنه $0<x<L$:

$$\begin{cases} f_c(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x \\ a_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_s=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x \\ b_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

③ اتحاد پارسوال :

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

④ نقاط ناپیوستگی :

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=f(x)$$ سری فوریه تابع

Subject
Date

انتگرال فوریه:

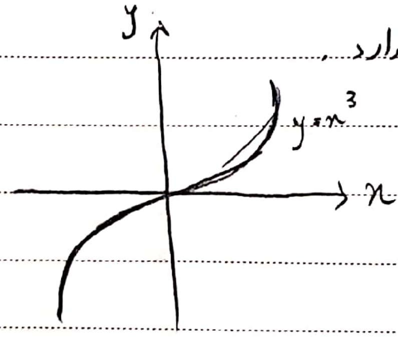
اگر $f(x)$ تابعی با دامنه $(+\infty , -\infty)$ باشد و همچنین انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ همگرا باشد، (به اصطلاح می‌گوییم $f(x)$ مطلقاً انتگرال پذیر است)، در این صورت تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت عبارت انتگرالی زیر نمایش داد:

$$\underbrace{f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx + B(w) \sin wx \, dw}_{\text{انتگرال فوریه‌ی تابع } f(x)}$$

که در آن $A(w)$ و $B(w)$ به کمک فرمول‌های زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} A(w) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos wx \, dx \\ B(w) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin wx \, dx \end{cases}$$

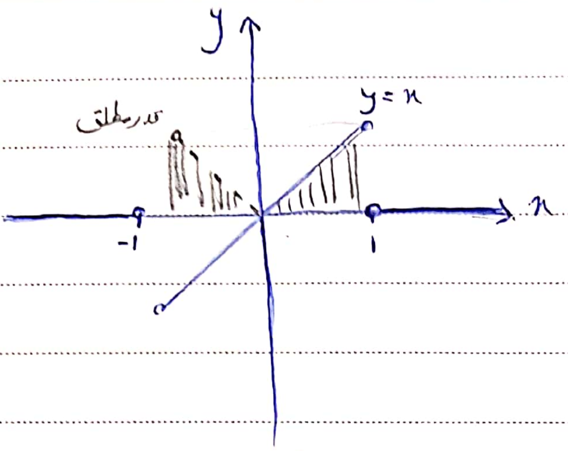
سوال: آیا تابع $f(x) = x^3$، انتگرال فوریه دارد؟! ندارد.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^3| \, dx = 2\int_0^{\infty} x^3 \, dx = \frac{x^4}{2} \Big|_0^{\infty} = \infty$$

واگراست

Subject:
Date



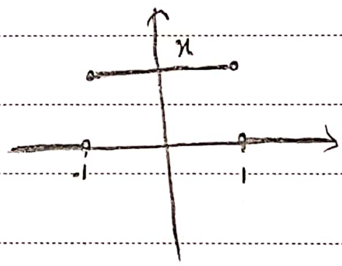
$$f(x)=\begin{cases} x & ; \quad -1<x<1 \\ 0 & ; \quad x<-1 \text{ یا } x>1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f| = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} |f|}_{0} + \cancel{\int_{-1}^{1} |f|} + \cancel{\int_{1}^{\infty} |f|}_{0} = 1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

مثال: انتگرال فوریه‌ی تابع زیر را بنویسید:

$$f(x)=\begin{cases} \pi & ; \quad |x|<1 \\ 0 & ; \quad |x|>1 \end{cases}$$



و سپس به کمک آن مقدار انتگرال زیر را نیز بدست آورید:

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

حل: چون تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس $B(w)=0$

$$\longrightarrow A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \pi \cos wx \, dx = \frac{2}{\cancel{\pi}}\int_{0}^{1} \cancel{\pi} \cos wx \, dx$$

Subject:
Date

$$= \frac{2}{w}\sin wx \Big|_0^1 = \boxed{\frac{2\sin w}{w}} \longrightarrow A(w)$$

$$\xrightarrow[\text{تابع } f(x)]{\text{انتگرال فوریه}} \boxed{f(x) = \int_0^\infty \frac{2\sin w}{w}\cos wx\,dw}$$

$$\xrightarrow{x=0} \pi = \int_0^\infty \frac{2\sin w}{w}\,dw \longrightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\,dw = \frac{\pi}{2}}$$

انتگرال فوریه‌ی سینوسی و انتگرال فوریه‌ی کسینوسی :

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,+\infty)$ تعریف شده باشد، در اینصورت :

الف) می‌توان برای تابع $f(x)$ انتگرال فوریه‌ی کسینوسی به صورت زیر نوشت :

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw \\ A(w) = \int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \end{cases}$$

ب) می‌توان برای تابع $f(x)$ انتگرال فوریه‌ی سینوسی به صورت زیر نوشت :

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw \\ B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx \end{cases}$$

Subject:
Date

مثال: برای تابع $f(x)=e^{-sx}$ که s عددی مثبت و $x>0$ ، انتگرال فوریه‌ی سینوسی و کسینوسی آن را بنویسید.

حل:

$$\xrightarrow[f(x)\ \text{سینوسی}]{\text{انتگرال فوریه‌ی}} f(x)=\int_0^\infty B(w)\sin wx\, dw$$

$$\longrightarrow B(w)=\frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}\sin wx\, dx}_{\text{تعریف تبدیل لاپلاس تابع } \sin wx}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{w}{s^2+w^2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \boxed{e^{-sx}=\int_0^\infty \frac{2w}{\pi(s^2+w^2)}\sin wx\, dw}$$

انتگرال فوریه‌ی سینوسی تابع $f(x)=e^{-sx}$

$$\xrightarrow[\text{کسینوسی}]{\text{انتگرال فوریه‌ی}} f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx\, dw$$

$$\longrightarrow A(w)=\frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}\cos wx\, dx}_{\text{تعریف تبدیل لاپلاس تابع } \cos wx}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+w^2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \boxed{e^{-sx}=\int_0^\infty \frac{2s}{\pi(s^2+w^2)}\cos wx\, dw}$$

انتگرال فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)=e^{-sx}$

PAPCO

Subject:
Date

سوال: مقدار انتگرال زیر را به کمک انتگرال فوریه ی کسینوسی مثال قبل محاسبه نمایید:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha$$

حل: انتگرال فوریه ی کسینوسی مثال قبل:
$$e^{-sx} = \int_0^\infty \frac{2s}{\pi(s^2+w^2)} \cos wx \, dw$$

$$\xrightarrow[s=1]{x=0} 1 = \int_0^\infty \frac{2}{\pi(1+w^2)} dw \longrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2}$$

فصل دوم - معادلات با مشتقات جزئی (PDE):

تعریف: یک معادله دیفرانسیل که مجهول آن تابعی حداقل دو متغیره باشد را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می گوییم. مثلاً:

① معادله لاپلاس: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

یکی از جواب‌های معادله ی لاپلاس می تواند تابع زیر باشد:

$$u(x,y) = e^x \sin y$$

$$\longrightarrow u_x = e^x \sin y \longrightarrow u_{xx} = e^x \sin y \quad u_y = e^x \cos y \longrightarrow u_{yy} = -e^x \sin y$$

Subject:
Date

$\longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = (e^x \sin y) + (-e^x \sin y) = 0$

مثال دیگه: $v(x,y) = x + y$

$\to v_x = 1 \to v_{xx} = 0$ $\qquad$ $v_y = 1 \to v_{yy} = 0$

$\longrightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0$

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$

② معادله حرارت یا گرما (یک بعدی): $u_t = c^2 u_{xx}$ $\qquad$ $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$u_{tx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$

بعد نسبت به x — اول نسبت به t

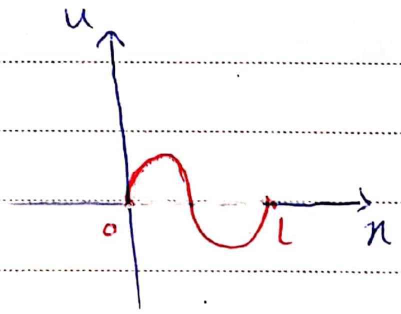
③ معادله موج: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

توی اندیس ترتیب به ترتیبه اما توی رند برعکس میشه

- معادله ی موج (تار مرتعش):

① $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$t > 0 \; ; \; 0 < x < L$



② $u(0,t) = u(L,t) = 0 \longrightarrow$ شرط مقدار مرزی

③ $u(x,0) = f(x)$

④ $u_t(x,0) = g(x)$

شروط مقدار اولیه

Subject:
Date

قبل از حل معادلهٔ موج ، معادله دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر بگیرید :

$$y'' = -\beta^2 y$$ ⟵ y تابعی برحسب t است . β عددی ثابت است

$$\longrightarrow y'' + \beta^2 y = 0 \xrightarrow{\text{معادله مفسر}} r^2 + \beta^2 = 0 \longrightarrow r = \pm \beta i$$

$$\xrightarrow[\text{عمومی}]{\text{جواب}} \boxed{y = A\sin\beta t + B\cos\beta t}$$

$$\xrightarrow{y(0)=y_0} \boxed{y_0 = B} \quad \& \quad \xrightarrow{y'(0)=y'_0} \boxed{y'_0 = A\beta}$$

تابع $u(x,t)$ نسبت به x دارای دامنهٔ محدود $0<x<L$ است . پس $u(x,t)$ نسبت به x می‌تواند یک سری فوریه‌ی سینوسی به صورت زیر داشته باشد :

$$\alpha$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x} \quad *$$

چرا دو شرط $u(L,t) = u(0,t) = 0$ برقرار است ؟! چون تابع u باید در معادله‌ی $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ صدق کند ، لذا سری فوریه‌ی سینوسی $(*)$ را در معادله‌ی موج تکرار می‌کنیم :

$$\longrightarrow u_t = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\longrightarrow u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} b''_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\longrightarrow u_x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha b_n(t) \cos \alpha x$$

$$u_{xx} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha^2 b_n(t) \sin \alpha x$$

جایگذاری در معادله

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underline{b''_n}(t) \sin \alpha x}_{u_{tt}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underline{-c^2 \alpha^2 b_n}(t) \sin \alpha x}_{c^2 u_{xx}}$$

$$\longrightarrow b''_n(t) = \underbrace{-c^2 \alpha^2}_{B^2} b_n(t)$$

$$\longrightarrow \boxed{b_n(t) = A \sin \alpha c t + B \cos \alpha c t} \quad (**)$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A \sin \alpha c t + B \cos \alpha c t) \sin \alpha x$$

$$\xrightarrow{u(x,0)=f(x)} \boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B \sin \frac{n\pi}{L} x}$$

سری فوریه‌ی سینوسی تابع $f(x)$

Subject:
Date

$$\rightarrow \boxed{B = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx} \qquad (***)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \longrightarrow u_t = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A\alpha c\cos\alpha ct - B\alpha c\sin\alpha ct\right)\sin\alpha x$$

$$\rightarrow \boxed{g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A\frac{n\pi}{L}c\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

سری فوریه ی سینوسی تابع $g(x)$

$$\rightarrow A\frac{n\pi}{\cancel{L}}c = \frac{2}{\cancel{L}}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\rightarrow \boxed{A = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx} \qquad (****)$$

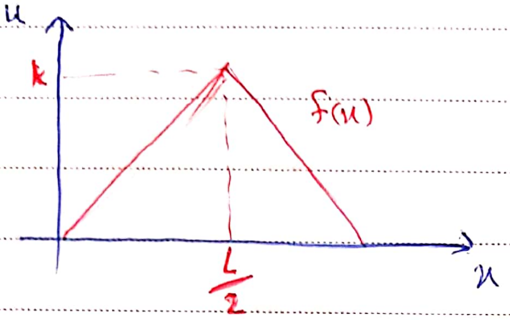
جمع بندی می کنیم:

$$\rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A\sin\frac{n\pi}{L}ct + B\cos\frac{n\pi}{L}ct\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

که:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{n\pi c}\displaystyle\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \\[2ex] B = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

مثال: نخی به طول L را مطابق شکل زیر از وسط به ارتفاع k بالا برده و رهایش ساخته ایم. انحراف این نخ را در هر لحظه و هر مکان مشخص نمایید.



حل: چون نخ را رها کرده‌ایم، پس سرعت اولیه نداریم، یعنی $u_t(x,0)=0$ و این تیز یعنی $g(x)=0$. لذا خواهیم داشت $\boxed{A=0}$

اکنون ضابطه‌ی حالت اولیه‌ی نخ یعنی $f(x)$ را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{L}x & ; 0<x<\frac{L}{2}\\ -\frac{2k}{L}(x-L) & ; \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

در معادله‌ی موج، ضریب سینوس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$B=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{L}\left(\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2k}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx+\int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{2k}{L}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{B=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}}$$

Subject:
Date

جواب معادله‌ی موج به صورت زیر است:

$$\to \boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

معادله‌ی حرارت (گرما):

① $u_t=c^2u_{xx}$; $0<x<L$; $t>0$

② $u(0,t)=u(L,t)=0$

③ $u(x,0)=f(x)$

$$\longrightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\overset{\alpha}{\boxed{\frac{n\pi}{L}}}x$$

$$\to \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}b_n'(t)\sin\alpha x}_{u_t}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}-c^2\alpha^2b_n(t)\sin\alpha x}_{\cancel{c^2u_{xx}}\quad c^2u_{xx}}$$

$$\to b_n'(t)=-c^2\alpha^2b_n(t)$$

$$\to b_n(t)=Ae^{-c^2\alpha^2t}$$

Subject:
Date

$u(x,0) \rightarrow f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A \sin \frac{\cancel{2\pi}\ \frac{n\pi}{L}}{L} x \longrightarrow A = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

جمع بندی:

$$\rightarrow \boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A e^{-c^2 \alpha^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x}$$

&

$$\boxed{A = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx}$$

سوال: هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را به روش سری فوریه (جداسازی) حل کنید.

حرارت

$$① \begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 1 \end{cases}$$

$L = 1$ $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$

$C =$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} dx$$

Subject:
Date

②

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad 0 < x < 2\pi \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} \sin x & ; \quad 0 < x < \pi \\ 0 & ; \quad \pi < x < 2\pi \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

P4PCO

فصل سوم - توابع مختلط

مجموعه اعداد مختلط :

$$\mathbb{C}=\{\underbrace{a}_{\text{حقیقی}\ \to\ Re}+i\underbrace{b}_{\text{موهومی}\ \to\ Im} \mid a,b\in\mathbb{R}\ ;\ i^2=-1\}$$

مثال : $0\in\mathbb{C}$, $-\sqrt{2}\,i\in\mathbb{C}$; $\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i\in\mathbb{C}$

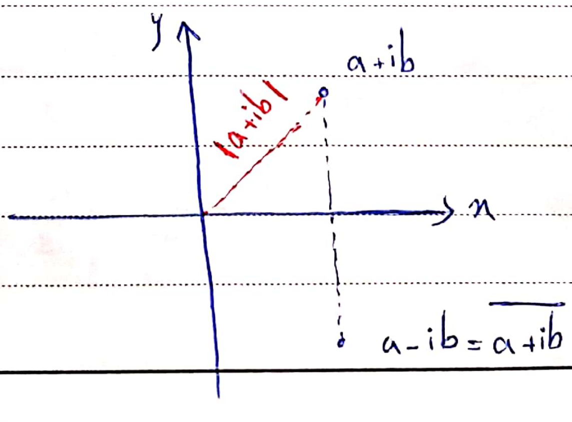
جمع ، تفریق ، ضرب ، مزدوج ، قدرمطلق ، معکوس و تقسیم اعداد مختلط :

① $(a_1+ib_1)\pm(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)\pm i(b_1+b_2)$

② $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$

مثال : $(1-2i)(2+3i)=(2+6)+i(3-4)=8-i$

③ مزدوج : $\overline{a+ib}=a-ib$



Subject:
Date

اندازه یا

④ قدر مطلق : $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

نکته : $z\bar{z} = |z|^2$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(a+ib)}_{z}\underbrace{(a-ib)}_{\bar{z}} = \underbrace{a^2+b^2}_{|z|^2}$

(اندازه)^2

مثال : $\underbrace{(2-3i)}_{z}\underbrace{(2+3i)}_{\bar{z}} = \underbrace{4+9}_{|z|^2} = 13$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

⑤ معکوس : $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ یا $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

مزدوج

(اندازه)^2

$a=0 \quad b=1$

مثال : $\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i$

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \left(\frac{1}{z_2}\right) = z_1 \times \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$

⑥ $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$ یا $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$

مثال : ① $\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{1+1} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

② $\frac{3i}{i-2} = \frac{3i \times (-i-2)}{1^2+(-2)^2} = \frac{3-6i}{5} = \frac{3}{5} + i\left(-\frac{6}{5}\right)$

$d=1 \quad c=-2$

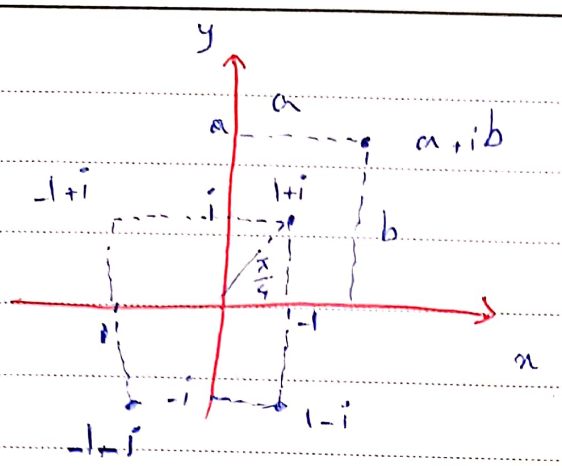
③ $\frac{5i-1}{3i} = \frac{(5i-1)\times(-3i)}{9} = \frac{15+3i}{9} = \frac{15}{9} + i\frac{1}{3}$

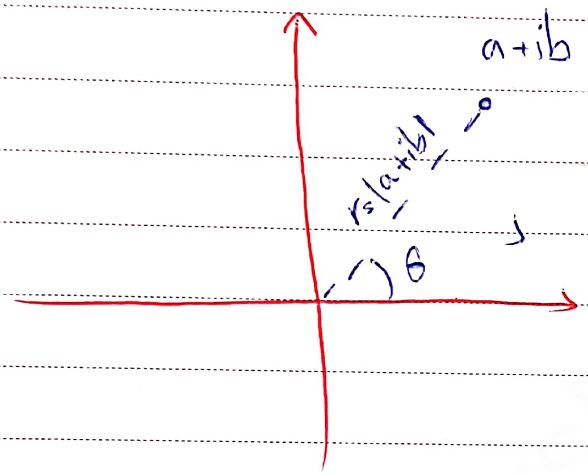
③ روش دیگر : $\frac{5i-1}{3i} = \frac{5\cancel{i}}{3\cancel{i}} - \frac{1}{3i} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{i}}\right) = \frac{5}{3} + i\left(\frac{1}{3}\right)$

$-i$

PAPCO

Subject:
Date

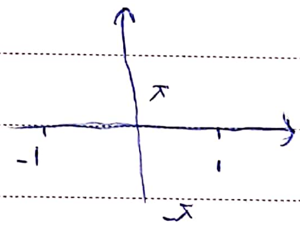




$\theta = \arg(a+ib)$ $\qquad\qquad$ $\theta_0 = Arg(a+ib)$

آرگومان

$-\pi < \theta_0 \leq \pi$

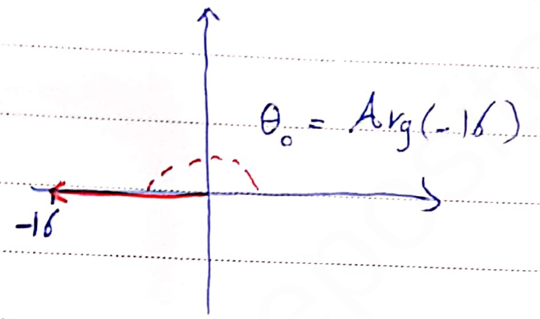


تعریف آرگومان و آرگومان اصلی :

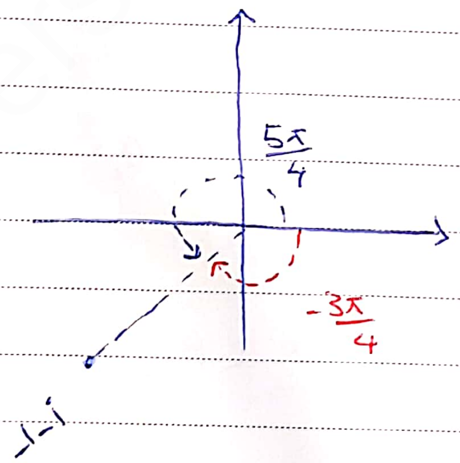
اگر $z = a+ib$ یک عدد مختلط باشد و $\vec{op}$ بردار واصل بین مبدأ مختصات

و نقطه‌ی $p=(a,b)$ باشد، در اینصورت به هر زاویه‌ای که نمایانگر زاویه‌ی بین بردار $\vec{OP}$ و سمت مثبت محور x ها باشد، آرگومان عدد $z=a+ib$ می‌گوییم و آن را با نماد $\boxed{\theta = arg(z)}$ نمایش می‌دهیم، همچنین اگر قرار داد کنیم که $-\pi < \theta \leq \pi$ در اینصورت به θ آرگومان اصلی عدد مختلط $z=a+ib$ می‌گوییم و این بار آن را با نماد $\boxed{\theta_0 = Arg(z)}$ نمایش می‌دهیم.

مثال: $Arg(-16) = \pi$

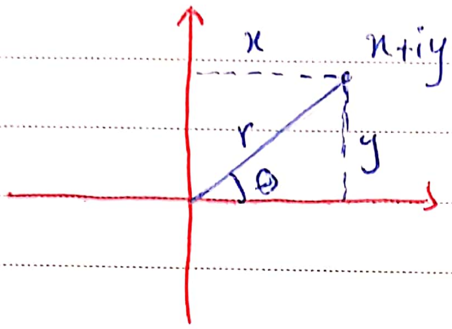


مثال: $Arg(-1-i)$



Subject:
Date

- نمایش یک عدد مختلط در مختصات قطبی:



$\longrightarrow x+iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$$\boxed{r\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{cis(\theta)}}$$

نمایش قطبی

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

سری مکلورن: $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$

Subject:
Date

$e^{i\theta} = \cancel{\cos\theta + i\sin\theta}$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$

$-\theta^2$ $\quad -i\theta^3 \quad \theta^4$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + - \dots\right)}_{\cos\theta} + \underbrace{i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + - \dots\right)}_{i\sin\theta}$$

- قضیه (فرمول دموآوور):

می‌دانیم: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$$\Longrightarrow \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

فرمول دموآدور

- حل معادلات $w^n = z$ یا یافتن ریشه‌ی n ام عدد z:

ابتدا عدد مختلط z را به فرم قطبی آن، یعنی به فرم زیر می‌نویسیم:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ یا $z = re^{i\theta}$

Subject:
Date

که θ آرگومان اصلی عدد مختلط z است، حال جواب‌های معادله‌ی $w^n = z$ به صورت زیر بدست می‌آیند:

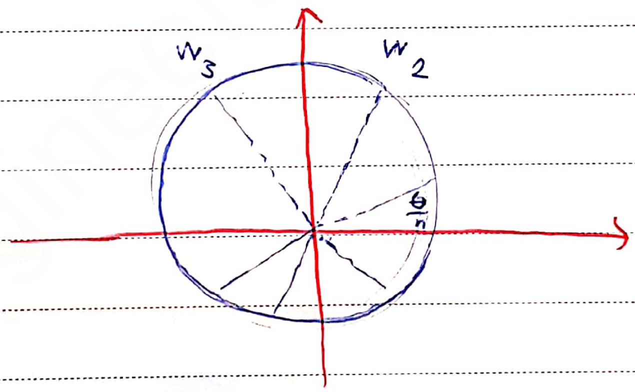
$$\longrightarrow w_1 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$$

$$\longrightarrow w_2 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)}$$

$$\longrightarrow w_3 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+4\pi}{n}\right)}$$

$\vdots$

$$\longrightarrow w_n = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)}$$

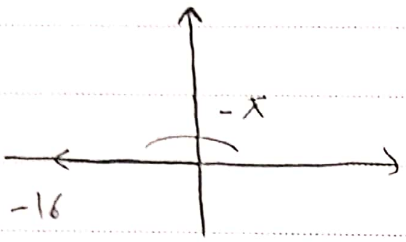


سوال: $\sqrt[4]{-16} = ?$

$$\overset{n \leftarrow 4}{w} = \underbrace{-16}_{z}$$

Subject:
Date

$$Z = -16 \xrightarrow[\text{قطبی}]{\text{نمایش}} Z = 16 \times e^{i\pi}$$



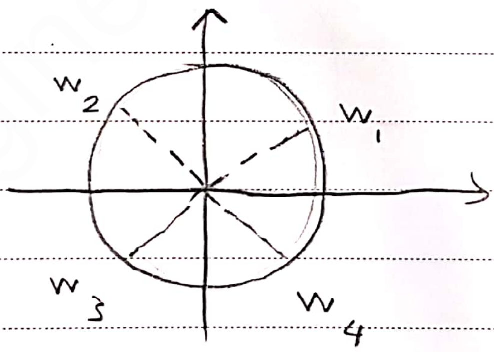
$$\Longrightarrow \begin{cases} r = 16 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$\rightarrow w_1 = \sqrt[4]{16}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow w_2 = \sqrt[4]{16}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow w_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow w_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$



- تابع مختلط :

$$\boxed{f(x, iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)}$$

Subject:
Date

مثال: $\underbrace{f(x,iy)}_{Z} = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)} + i\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

$\longrightarrow f(z) = z^2$

سوال: $\underbrace{f(x,iy)}_{Z} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$

$\longrightarrow f(z) = e^x(\underbrace{\cos y + i\sin y}_{e^{iy}})$

$= e^x \times e^{iy} = e^{x+iy} \longrightarrow \boxed{f(z) = e^z}$

$\Longrightarrow f(x,iy) = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\underbrace{2xy}_{v}$

$\longrightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 2x \end{cases} \longrightarrow \boxed{u_x = v_y}$ $\quad \begin{cases} u_y = -2y \\ v_x = 2y \end{cases} \longrightarrow \boxed{u_y = -v_x}$

روابط کوشی ـ ریمان

PAPCO

Subject:
Date

$$\Rightarrow f(x+iy) = \underbrace{e^{x}\cos y}_{u} + i\underbrace{e^{x}\sin y}_{v}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = e^{x}\cos y \\ v_y = e^{x}\cos y \end{cases} \rightarrow \boxed{u_x = v_y}$$

$$\begin{cases} u_y = -e^{x}\sin y \\ v_x = e^{x}\sin y \end{cases} \rightarrow \boxed{u_y = -v_x}$$

روابط کوشی - ریمان

PAPCO

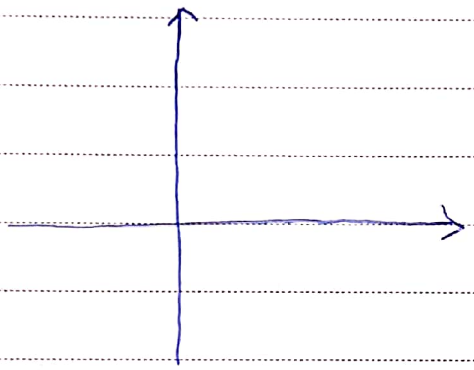
Subject:
Date

مشتق توابع مختلط:

اگر $w=f(z)$ تابعی مختلط باشد، در این صورت مشتق تابع f را در نقطه‌ی $z_0=x_0+iy_0$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

صفحه‌ی اعداد مختلط



$$\rightarrow f'(x_0+iy_0)=\lim \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

مثال: به کمک تعریف مشتق، نشان دهید تابع زیر در نقطه‌ی $z=0$ مشتق‌پذیر نیست.

$f($

Subject :
Date

نکات مهم :

① تابع مختلط $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ تابعی مشتق پذیر است هرگاه معادلات کوشی - ریمان برقرار باشند :

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

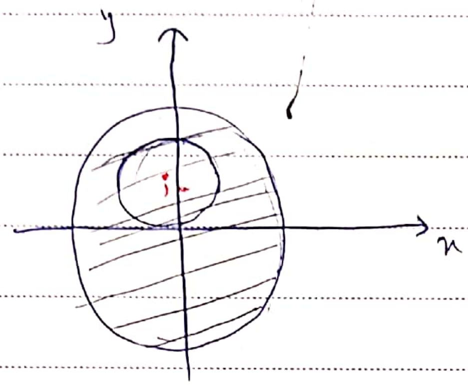
معادلات کوشی - ریمان

در این حالت نیز مشتق تابع f را می‌توان با فرمول های زیر محاسبه کرد :

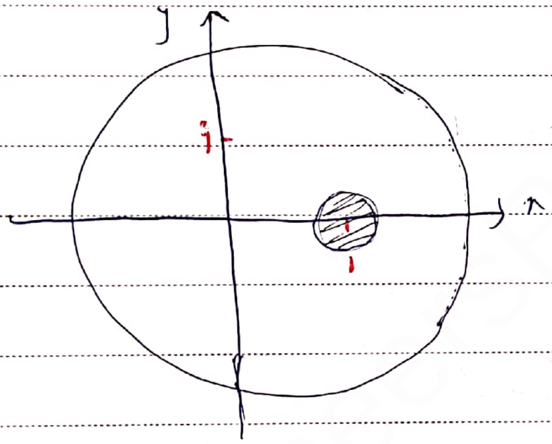
$$\begin{cases} f'(x+iy) = u_x + i v_x \\ f'(x+iy) = v_y - i u_y \end{cases}$$

PAPCO

مثال: آیا تابع $f(z)=\frac{z^2+1}{i-z}$ در نقطه‌ی $z=i$ تحلیلی هست یا خیر؟

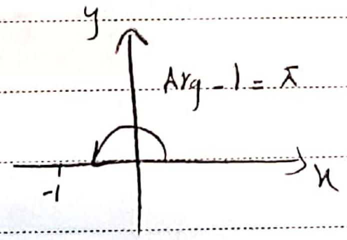


سوال: آیا تابع $f(z)=\frac{z^2+1}{i-z}$ در نقطه‌ی $z=1$ تحلیلی هست یا خیر؟!



نکته: تابع $w=f(z)$ ، در هر نقطه‌ی متعلق به دامنه‌اش تحلیلی است. (منظور تابع‌هایی هستند که ما تا الان با آن‌ها آشنا شدیم و تا آخر درس با آن‌ها کار خواهیم داشت)

$\ln -1 = \ln 1 + i\pi = i\pi$



$\ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$

② اگر $f(x+iy) = u + iv$ مشتق پذیر باشد ، در این صورت ،
توابع u و v مزدوج همساز یکدیگر می گویند.

(هر تابعی که در معادله‌ی زیر صدق کند را یک تابع همساز می گوییم.

$u_{xx} + u_{yy} = 0$: معادله‌ی لاپلاس

هم u و v در معادله‌ی لاپلاس صدق می کنند.

دلیل
$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

$$\rightarrow u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

مثال: ابتدا بررسی کنید تابع زیر در چه نقاطی مشتق پذیرند و سپس مشتق تابع را در آن نقاط بدست آورید:

$$f(x+iy) = x^2 + iy^2$$

Subject:
Date

حل: برای بررسی نقاطی که تابع f در آن جا مشتق پذیر است معادلات کوشی - ریمان را بررسی می‌کنیم:

$u = x^2$ & $v = y^2$

معادلات کوشی - ریمان
$$\begin{cases} u_x = 2x \ \& \ v_y = 2y \\ u_y = 0 \ \& \ v_x = 0 \end{cases}$$

$u_x = v_y$: $2x = 2y \Longrightarrow \boxed{x = y}$

$u_y = -v_x$: $0 = 0$ ✓

پس تابع f در نقاط $z = x + iy$ که $x = y$ مشتق پذیر است. برای محاسبه‌ی مقدار مشتق تابع f از فرمول $f' = u_x + iv_x$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$f'(x+iy) = 2x + i \cdot 0 = 2x \xrightarrow{z = x + ix} \boxed{f'(x+ix) = 2x}$$

مثلا: $f'(1+i) = 2$

$x=1$, $y=1$

PAPCO

Subject:
Date

$f(x) = x^2$ & $f'(1) = ?!$

$f(1) = 1 \longrightarrow f'(1) = 0$

$f'(x+iy) = v_y - iu_y = 2y - i \times 0 = 2y \Rightarrow \boxed{f'(x+ix) = 2x}$

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر همساز باشد و سپس یک مزدوج همساز برای آن پیدا کنید:

$u(x,y) = \cos ax \cosh by$

حل: برای همساز بودن u ، باید u در معادله‌ی لاپلاس صدق کند. داریم:

$\longrightarrow \begin{cases} u_x = -a \sin ax \cosh by \\ \boxed{u_{xx} = -a^2 \cos ax \cosh by} \end{cases}$ $\begin{cases} u_y = b \cos ax \sinh by \\ \boxed{u_{yy} = b^2 \cos ax \cosh by} \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{معادله‌ی لاپلاس}} u_{xx} + u_{yy} = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -a^2 \cos ax \cosh by + b^2 \cos ax \cosh by = 0$

$\longrightarrow \cos ax \cosh by \times (b^2 - a^2) = 0 \longrightarrow b^2 - a^2 \longrightarrow \boxed{b = \pm a}$

بنابراین تابع u به صورت زیر نوشته می‌شود:

Subject:
Date

$$u(x,y) = \cos ax \cosh(\pm ay) \Rightarrow \boxed{u(x,y) = \cos ax \cosh ay}$$

مزدوج همساز

$$\begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow v_y = -a\sin ax \cosh ay \\ u_y = -v_x \Rightarrow v_x = -a\cos ax \sinh ay \end{cases}$$

انتگرال گیری

$$\begin{cases} V = \int -a\sin ax \cosh ay \, dy \\ \boxed{v = -\sin ax \sinh ay} \\ V = \int -a\cos ax \sinh ay \, dx \\ \boxed{V = -\sin ax \sinh ay} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ مزدوج همساز u : $\boxed{V = -\sin ax \sinh ay}$

چند تا چیز مهم دیگر:

فرمول اویلر : $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$\longrightarrow \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$+$

$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

Subject:
Date

$$\Longrightarrow \boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} \quad (1)$$

هیپربولیک
$$\longrightarrow \boxed{\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}} \quad (1')$$

$$\longrightarrow \boxed{\cosh ix = \cos x}$$

$$\longrightarrow e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

$$\longrightarrow \boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}} \quad (2)$$

هیپربولیک
$$\longrightarrow \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sinh ix = i \sin x}$$

Subject:
Date

تابع سینوسی مختلط : $\sin z = \sin(x+iy)$

$= \sin x \cos iy + \sin iy \cos x$

$\boxed{= \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x}$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

تابع کسینوسی : $\cos z = \cos(x+iy)$

$= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$

$\boxed{= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

Subject:
Date

$\sinh z = \sinh(x+iy)$

$= \sinh x \cosh iy + \sinh iy \cosh x$

$\boxed{= \sinh x \cos y + i \sin y \cosh x}$

$\rightarrow \boxed{\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}}$

$\cosh z = \cosh(x+iy)$

$= \cosh x \cosh iy - \sinh x \sinh iy$

$\boxed{= \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y}$

$\rightarrow \boxed{\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}}$

Ln تابع : $\ln z = \ln re^{i\theta}$

$= \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta \ln e$

Subject:
Date

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta}$$

آرگومان اصلی

$$\Rightarrow (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$$

چون تابع تک مقدار می‌دهد

آرگومان های آرگ را نادیده بگیریم

پس بینهایت جواب می‌دهد

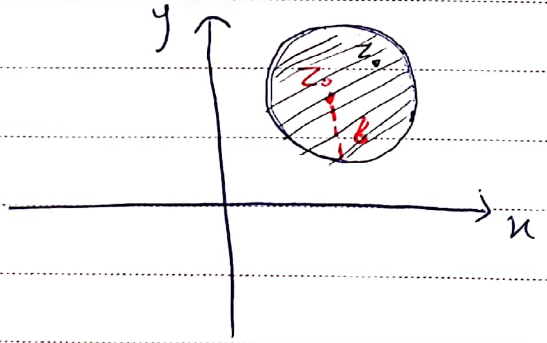
تابع توانی: $\boxed{z^c = e^{c \ln z}}$

$$\rightarrow (z^c)' = c z^{c-1}$$

فصل چهارم - انتگرال توابع مختلط:

تعریف (تابع تحلیلی، تابع تام): تابع $w=f(z)$ را در نقطه‌ی $z=z_0$ تحلیلی می‌نامند هرگاه برای هر نقطه z متعلق به یک همسایگی از نقطه‌ی $z=z_0$، مانند $|z-z_0|<\delta$، تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر باشد.

فاصله‌ی z تا z_0 کمتر از دلتا



PAPCO

Subject:
Date

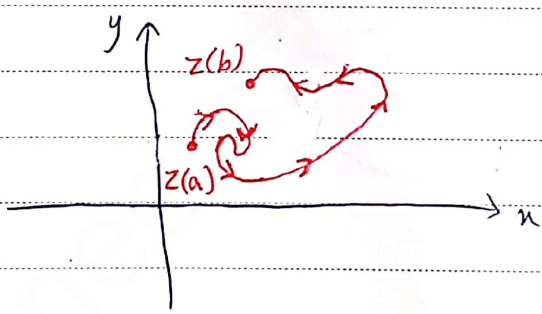
همچنین تابع $w=f(z)$ را تابعی تام می‌نامیم هرگاه برای هر عدد مختلط z، تحلیلی باشد. توابع زیر همگی تام هستند:

① $f(z)=$ چندجمله‌ای ② $f(z)=e^{z}$

③ $f(z)=\sin z\,,\ \cos z\,,\ \sinh z\,,\ \cosh z$

تعریف انتگرال توابع مختلط: اگر $w=f(z)$ یک تابع مختلط باشد و C یک خم پارامتری به صورت زیر باشد:

$$C:\ z(t)=x(t)+iy(t) \quad \text{که} \quad a\leq t\leq b$$



$$\int_C f(z)\,dz$$ انتگرال روی خم تابع $f(z)$ روی خم C

$$=\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$ که $\boxed{z'(t)=x'(t)+iy'(t)}$

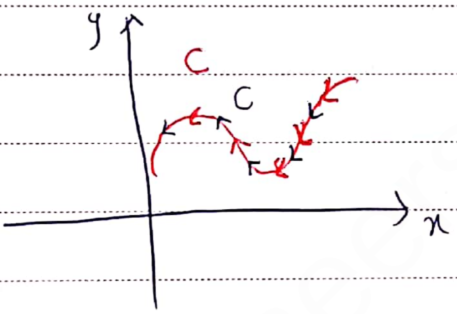
Subject:
Date

یادآوری: $\displaystyle\int_{z(a)}^{z(b)} z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{z(a)}^{z(b)}$

$$\int_{z(a)}^{z(a)} \frac{1}{z}\,dz \neq 0$$

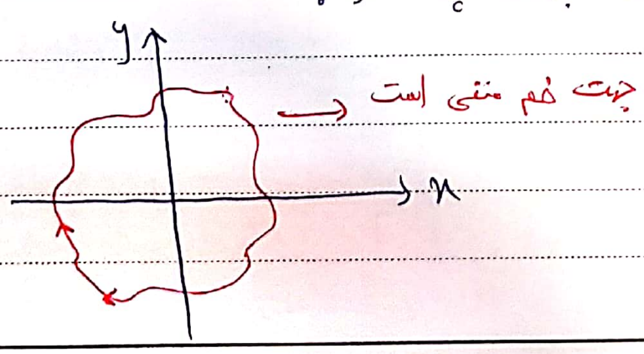
چند نکته بسیار مهم در مورد انتگرال تابع مختلط:

① جهت خم: اگر C' همان خم C باشد ولی در جهت معکوس، در این صورت:



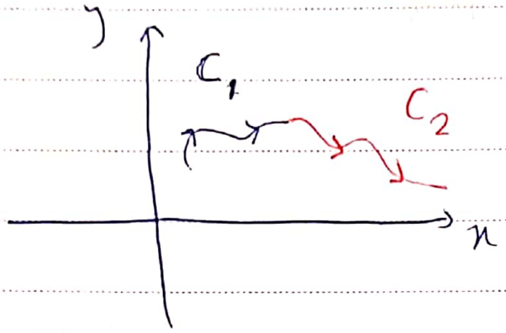
$$\int_C f(z)\,dz = -\int_{C'} f(z)\,dz$$

یادآوری جهت مثبت یعنی جهت پادساعتگرد:



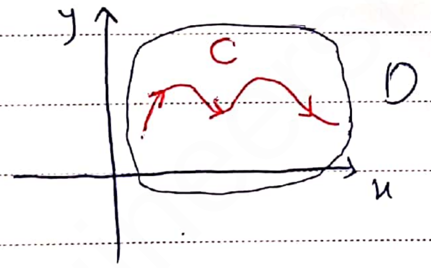
Subject:
Date

جهت مثبت یا منفی فقط برای خم‌های ساده بسته معنی دارد.



$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

③ تابع اولیه: اگر $f(z)$ در یک ناحیه‌ی شامل خم C تحلیلی باشد، در این صورت:



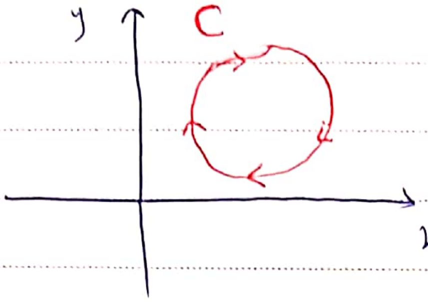
$$(F'(z) = f(z))$$

$$\int_C f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z(\text{نقطه‌ی ابتدایی})}^{z(\text{نقطه‌ی انتهایی})}$$

④ قضیه‌ی کوشی ـ گورسا:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

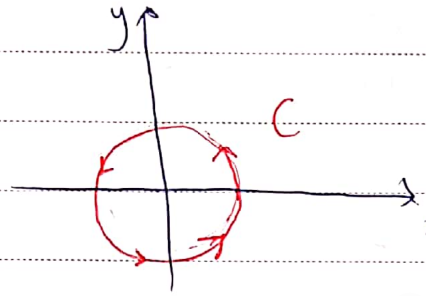
Subject:
Date



تابع $f(z)$ هم روی خم C
و هم داخل خم C تحلیلی باشد.

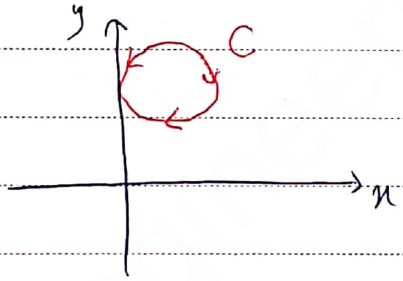
مثلاً:

$$\oint_C \frac{1}{z}dz \overset{?!}{=} 0$$



چون $f(z)=\frac{1}{z}$ در C شامل نقطه‌ی $z=0$ است پس برای محاسبه‌ی این انتگرال از قضیه‌ی کوشی - گورسا نمی‌توان استفاده کرد.

مثلاً:



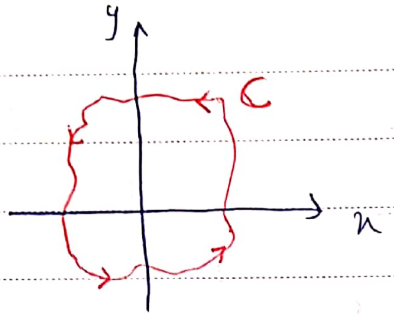
مطابق قضیه‌ی کوشی - گورسا:
$$\oint_C \frac{1}{z}dz = 0$$

⑤ فرمول انتگرال کوشی:

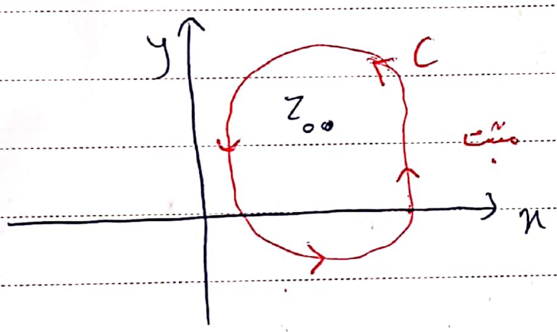
$$\oint_C \frac{\overbrace{z^2+1}^{f(z)}}{(z-0)^1}dz = \frac{2\pi i}{0!} \times \underbrace{f(0)}_{1} = 2\pi i$$

$z_0 = 0$

Subject:
Date



$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\,dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \times f^{(n-1)}(z_0)$$

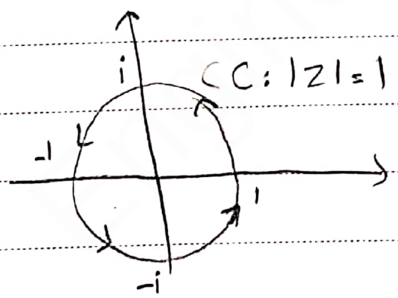


مثال:

$$\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^{2}(z-1)}\,dz$$

$n=2$

حل:



$$\longrightarrow f(z) = \frac{z+1}{z-2} \longrightarrow f'(z) = \frac{z-2-(z+1)}{(z-2)^2}$$

$$\rightarrow f'(z) = \frac{-3}{(z-2)^3} \xrightarrow{z_0=0} \boxed{f'(0) = -\frac{3}{4}}$$

$$\xrightarrow[\text{کوشی}]{\text{فرمول انتگرال}} \oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^2(z-3)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\pi}{2} i$$

• سری ها (یادآوری) :

① $$\underbrace{e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots}_{\text{سری مکلورن تابع } e^z}$$

② $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots$$

③ $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \dots$$

④ $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$ اگر $|z|<1$:

⑤ $$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$ اگر $|z|>1$:

$\left|\frac{1}{z}\right|<1$:

$$= \frac{-1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right) = \frac{-1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots$$ اگر $|z|>1$:

سری لوران: اگر تابع مختلط $w=f(z)$ را بتوان به صورت سری زیر نمایش داد، در این صورت این سری را سری لوران تابع $f(z)$ (در نقطه‌ی z_0) می‌نامند:

توان های منفی — توان های مثبت

$$f(z)=\cdots+\underbrace{\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\frac{b_1}{z-z_0}}_{\text{قسمت اصلی سری لوران}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots}_{\text{مکلورن}}$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\ ; & n=0,1,2,\dots \\[2ex] b_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{1-n}}\,dz\ ; & n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

که خم C خمی بسته و شامل نقطه‌ی $z=z_0$ است و جهت خم C نیز مثبت است.

مثال: سری لوران تابع زیر را در ناحیه‌ی $\frac{1}{2}<|z|<2$ بنویسید:

$$f(z)=\frac{1}{(2z-1)(z-2)}$$

حل: تفکیک کسر:

$$\frac{1}{(2z-1)(z-2)}=\frac{-\frac{2}{3}}{2z-1}+\frac{\frac{1}{3}}{z-2}$$

Subject:
Date
سری لوران اول + سری لوران دوم

$$= -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2z-1}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{سری لوران}} \frac{1}{2z-1} = -\frac{1}{1-2z}$$

$$\xrightarrow[\text{فرمول } 4]{|2z|<1} = -\left(1+2z+4z^2+8z^3+\cdots\right)$$

مناسب نیست زیرا در این سری $|z|<\frac{1}{2}$ که در ناحیه $\frac{1}{2}<|z|<2$ قرار ندارد.

$$\xrightarrow{\text{سری لوران}} \frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2z}}\right)$$

$$\xrightarrow[|2z|>1]{\left|\frac{1}{2z}\right|<1} \frac{1}{2z}\left(1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{8z^3}+\cdots\right)$$

یا

$|z|>\frac{1}{2}$

(4) در فرمول

$$= \underbrace{\frac{1}{2z}+\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{8z^3}+\frac{1}{16z^4}+\cdots}$$

سری لوران تابع $\frac{1}{2z-1}$ در ناحیه $|z|>\frac{1}{2}$

$$\xrightarrow[\left|\frac{z}{2}\right|<1]{\text{سری لوران}} \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

یعنی

$|z|<2$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right)$$

PAPCO

Subject:
Date

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 - \cdots$$

سری لوران تابع $\frac{1}{z-2}$ در ناحیه‌ی $|z|<2$

$$|z|>\tfrac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{8z^3} + \cdots$$

$$|z|<2 \longrightarrow \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 - \cdots$$

$$f(z) \xrightarrow{\text{سری لوران تابع}} = f(z) = \frac{1}{(2z-1)(z-2)} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2z-1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

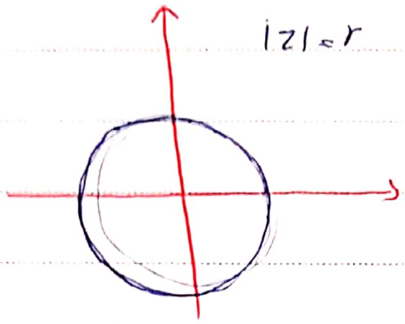
$$\underline{\underline{\tfrac{1}{2}<|z|<2}} \quad -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{8z^3} + \cdots\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 - \cdots\right)$$

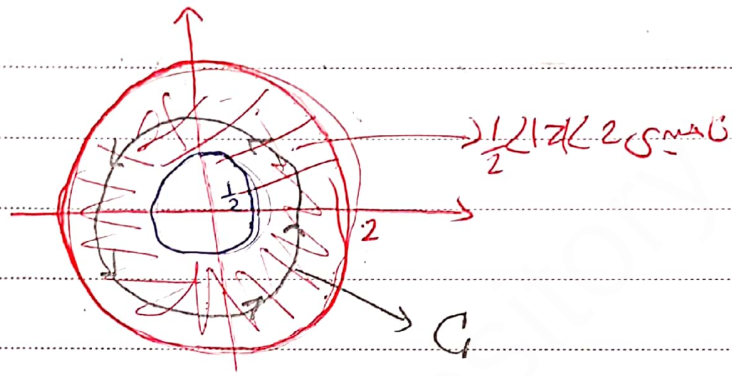
$$\boxed{f(z) = \cdots - \frac{1}{12z^3} - \frac{1}{6z^2} - \frac{1}{3z} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}z - \frac{1}{24}z^2 - \cdots}$$

سری لوران تابع $f(z)$ در ناحیه‌ی $\frac{1}{2}<|z|<2$

تذکر: صفحه‌ی اعداد مختلط



$\frac{1}{2} < |z| < 2$



• چند تعریف مهم: اگر تابع $w=f(z)$ دارای یک سری لوران حول نقطه‌ی $z=z_0$ به صورت زیر باشد:

$$f(z) = \dots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

① به عبارت زیر قسمت اصلی سری لوران تابع $f(z)$ می‌گوئیم:

$$\underbrace{\frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots}_{\text{قسمت اصلی سری لوران}}$$

② به عدد b_1 در قسمت اصلی سری لوران تابع $f(z)$، مانده‌ی تابع $f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ می‌گوییم، آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\boxed{b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)}$$

Subject:
Date

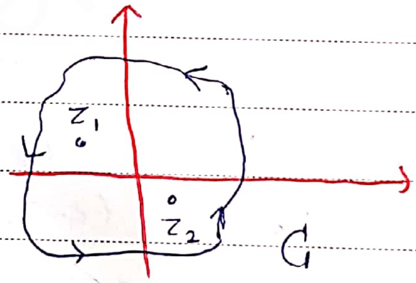
③ قطب مرتبه‌ی m : اگر در قسمت اصلی سری لوران داشته باشیم :

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

در این صورت ، $z=z_0$ را یک قطب مرتبه‌ی m تابع می‌گوییم. اگر $m=1$ ، در این حالت خاص ، $z=z_0$ را یک قطب ساده‌ی تابع $f(z)$ می‌نامیم.

• نکته‌ی مهم (محاسبه‌ی انتگرال‌ها به کمک مانده‌ها)

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \times \left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) + \cdots\right)$$

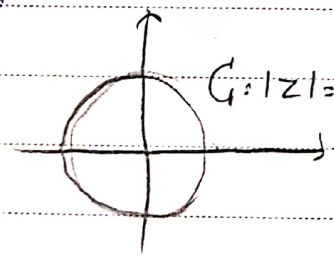


که $f(z)$ در نقاط z_1 ، z_2 و ... تحلیلی نیست.

مثال :

$$I=\oint_{|z|=1} \underbrace{z^2 e^{\frac{1}{z}}}_{f(z)}\,dz$$

مثلا



$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) \longrightarrow f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

یادآوری: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$

$$\longrightarrow f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots\right)$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \underbrace{\frac{1}{3!\,z}} + \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{مانده}} b_1 = \underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{1}{6}$$

$$\longrightarrow \oint_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}}\, dz = 2\pi i \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{\pi i}{3}}$$ حاصل انتگرال

Subject:
Date:

Subject:
Date:

تجمیع فرمول های انتگرال توابع مختلط :

① روش مستقیم : (زمانی میریم سراغش که بار داشته باشیم. مثلاً اینجا $\bar{z}$ داریم)

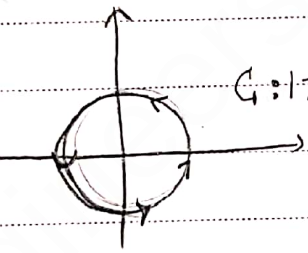
$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

$$\downarrow$$

$$C : z(t) = x(t) + i\,y(t) \;;\; a \le t \le b$$

مثال: $I = \oint_{|z|=1} \bar{z}\,dz$

حل: C



$$\xrightarrow[\text{دایره } |z|=1]{\text{پارامتری کردن}} \begin{cases} z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it} \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

Subject:
Date

روش مستقیم $\longrightarrow I=\oint_{|z|=1} \bar{z}\,dz$

$(e^{it})' = ie^{it}$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos t + i\sin t)}_{z(t)}\, \underbrace{ie^{it}}_{z'(t)}\, \underbrace{dt}_{dt}$$

$\overline{e^{it}} = e^{-it} \longrightarrow$
$$= \int_0^{2\pi} \cancel{e^{-it}} \times i\cancel{e^{it}}\, dt = i\underbrace{\int_0^{2\pi} dt}_{t\big|_0^{2\pi}} = \boxed{2\pi i}$$

داخل یا روی خم بسته

② قضیه‌ی کوشی - گورسا زمانی که خم بسته باشد و نقطه غیرتحلیلی نداشته باشیم استفاده می‌شود

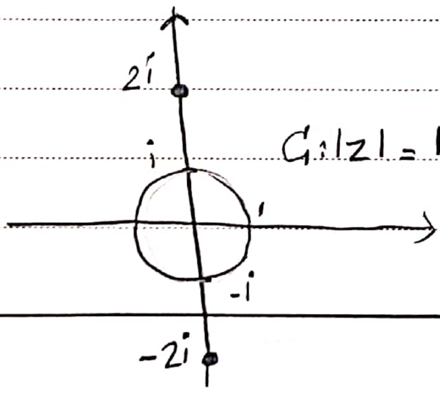
$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

یعنی: داخل خم بسته C تحلیلی باشد

مثال: $I=\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2+4}\, dz$

$z^2+4=0$

$\longrightarrow z=\pm 2i$



Subject:
Date

تابع $\frac{\sin z}{z^2+4}$ در نقاط $z=\pm 2i$ تحلیلی نیست.

چون نقاط غیرتحلیلی داخل خم C نیستند، پس مطابق قضیه‌ی کوشی - گورسا داریم:

$$\longrightarrow I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2+4}\, dz = 0$$

③ فرمول انتگرال کوشی باید خم بسته باشد و در عین حال خم باید در جهت مثبت باشد.

وقتی که توی مخرج عبارت $z-z_0$ رو ببینیم از این راه میریم به خصوص که توان

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}\, dz = 2\pi i \times \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

$f(z)$ در z_0 تحلیلی است

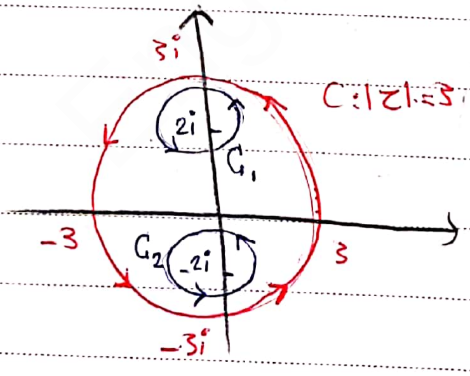
خم بسته و در جهت مثبت

معمولاً برای $m=1,2,3$ استفاده می‌شود

مثال:

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2+4}\, dz \qquad z^2+4 = (z+2i)(z-2i)$$

$z=\pm 2i$



PAPCO

PAPCO

$$\longrightarrow I = \oint_{C_2} \frac{\boxed{\frac{\sin z}{z-2i}}^{\,f}}{(z+2i)^1}\,dz + \oint_{C_1} \frac{\boxed{\frac{\sin z}{z+2i}}^{\,f}}{(z-2i)^1}\,dz$$

$z_0 = -2i$ ① $z_0 = 2i$ ②

$$①: 2\pi i \times \frac{\frac{\sin(-2i)}{-4i}}{0!} + 2\pi i \times \frac{\frac{\sin(2i)}{4i}}{0!}$$

$$= 2\pi i \underbrace{\left[\frac{-\sin 2i}{-4i} + \frac{\sin 2i}{4i}\right]}_{\frac{2\sin 2i}{4i}} = \cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{i} \times \cancel{2}\frac{\sin 2i}{\cancel{4i}} = \boxed{\pi \sin 2i} : I \text{ حاصل انتگرال}$$

اگر $(z-z_0)^m$ ، عدد m بزرگ باشد یا ~~اصلا مخرج~~ به چیزی خارج از $z-z_0$ است.

④ مانده‌ها: محاسبه روی خم‌های بسته است، زمانی سراغش می‌ریم که یک عبارت کسری داشته باشیم.

$$\oint_{C} f(z)\,dz = 2\pi i \times \sum \operatorname{Res} F(z)$$

نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)$ که داخل خم C قرار دارند.

مثال: $$I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z^2}{z^5}\,dz$$

$z^5 \to (z-0)^5$

مانده‌ی $\frac{\sin z^2}{z^5}$ در نقطه‌ی $z=0$:

Subject:
Date

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \cdots$$

$$\longrightarrow \sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \frac{z^{14}}{7!} + - \cdots$$

$$\longrightarrow \frac{\sin z^2}{z^5} = 0 + \frac{1}{z^3} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots$$

$$\Longrightarrow b_1 = 0 \longrightarrow \boxed{\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z^2}{z^5} = 0}$$

$$\longrightarrow I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z^2}{z^5}\, dz = 2\pi i \times \left[\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z^2}{z^5}\right] = 0$$ حاصل انتگرال

مثال:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{e^z - 1 - z}\, dz$$

یافتن سری لوران تابع $\frac{\sin z}{e^z - 1 - z}$ در نقطه‌ی $z=0$:

$$\begin{cases} \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots \\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \end{cases}$$

Subject:
Date

$$e^z - 1 - z = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\longrightarrow \frac{\sin z}{e^z - 1 - z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots}{\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}$$

$$\longrightarrow z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \quad \Big| \quad \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$-\left(z + \frac{z^2}{12} + \dots\right) \qquad \frac{1}{2!z} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$-\frac{z^2}{12} - \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad \frac{1}{2!z} \to \frac{b_1}{z}$$

$$\longrightarrow b_1 = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{e^z - 1 - z} = \frac{1}{2} \longrightarrow I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{e^z - 1 - z} dz$$

$$= 2\pi i \times \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{\sin z}{e^z - 1 - z}\right) = \boxed{\pi i}$$ حاصل انتگرال

$$\operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{\sin z}{e^z - 1 - z}\right) \to \frac{1}{2}$$

تبدیل فوریه :

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx = \hat{f}(\omega)$$

P4PCO

Subject:
Date

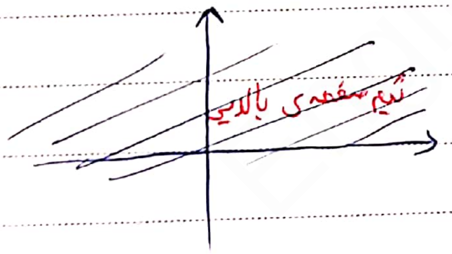
کاربرد انتگرال توابع مختلط برای محاسبه‌ی انتگرال‌های حقیقی :

① $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

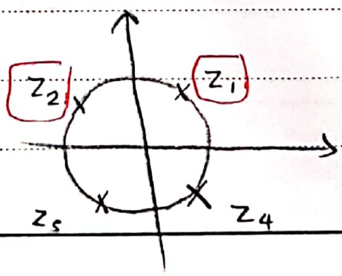
② $I = \int_{0}^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$

① $\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \times \left(\sum_{z=z_0} \operatorname{Res} f(z)\right)$

که z_0 نقاط غیرتحلیلی تابع
$f(z)$ در نیم صفحه‌ی بالایی هستند



مثال: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$



$\longrightarrow f(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4} \longrightarrow z_1, z_2, z_3, z_4$