تحلیل سیستم های کنترلی در حوزه فرکانس

یکی از مهمترین مباحث تحلیل سیستم های کنترل در حوزه فرکانس معیار پایداری نایکوییست است که در این فصل بیان خواهد شد.

اگر $G_p(s)$ را در نظر بگیرید و $s = j\omega$ قرار دهید سه راه برای نمایش و توصیف یک سیستم در حوزه فرکانس وجود دارد :

1) (نمودار نایکوییست) $Nyquist\ plot$

2) (نمودار بود) $Bode\ plot$

3) (منحنی نیکولز) $Nichols\ chart$

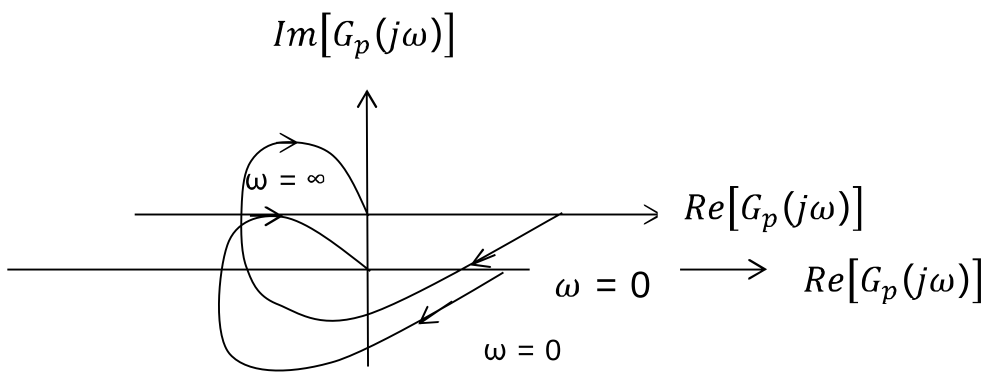
نمودار نایکوییست :

اگر $G_p(s)$ را به صورت زیر بنویسیم :

$$G_p(j\omega) = Re\left[G_p(j\omega)\right] + jIm\left[G_p(j\omega)\right]$$

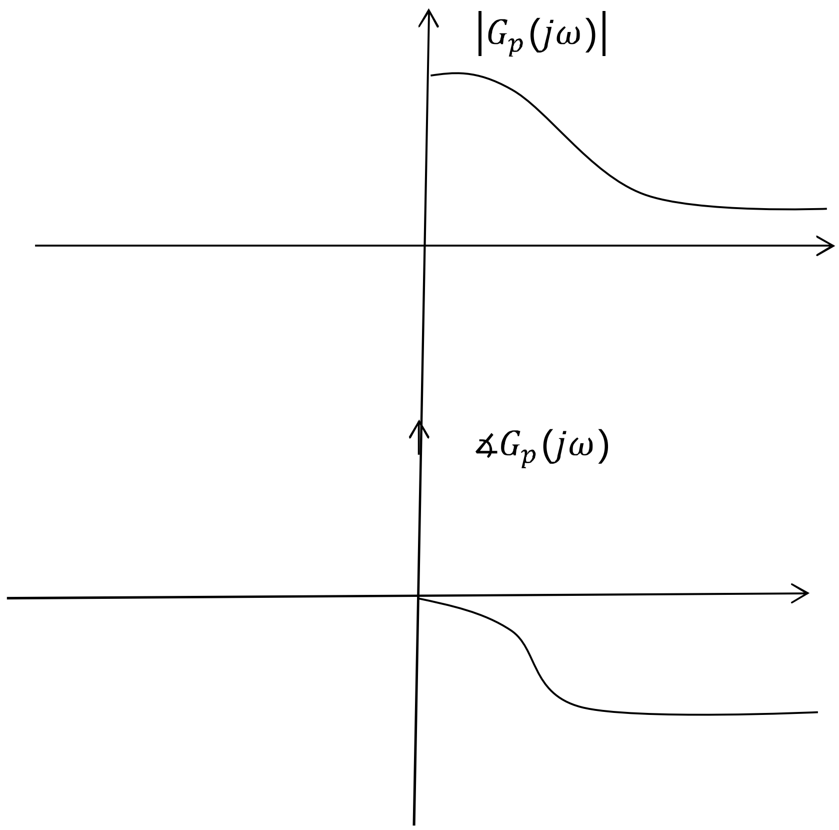
$Re\left[G_p(j\omega)\right]$ قسمت حقیقی و $Im\left[G_p(j\omega)\right]$ قسمت موهومی $G_p(j\omega)$ است.

در نمودار نایکوییست $Im\left[G_p(j\omega)\right]$ بر حسب $Re\left[G_p(j\omega)\right]$ همراه با تغییر است . $0 < \omega < \infty$ رسم می شود .



نمودار بود :

در نمودار بود اندازه و فاز $G_p(j\omega)$ یعنی $\left|G_p(j\omega)\right|$ و $\measuredangle G_p(j\omega)$ بر حسب $\log_{10}\omega$ و ω رسم می شوند . در نمودار بود در حقیقت دو نمودار برای توصیف سیستم در حوزه فرکانس داریم .



منحنی نیکولز :

در منحنی نیکولز اندازه $G_p(j\omega)$ بر حسب فاز $G_p(j\omega)$ رسم می گردد .

رسم نمودار نایکوییست :

1) ابتدا $Re\left[G_p(j\omega)\right]$ و $Im\left[G_p(j\omega)\right]$ را به دست آورید.

2) محدوده ω را از 0 تا ∞ در نظر بگیرید.

3) $Im\left[G_p(j\omega)\right]$ را برای تمام فرکانس هایی که $Re\left[G_p(j\omega)\right] = 0$ را بدست آورید.

4) $Re\left[G_p(j\omega)\right]$ را برای تمام فرکانس هایی که $Im\left[G_p(j\omega)\right] = 0$ را بدست آورید.

5) با وصل نقاط بدست آمده منحنی نایکوییست را به طور تقریبی رسم نمایید .

مثال : نمودار نایکوییست تابع انتقال $G_p(s) = \frac{s-2}{s^2+4s+3}$ را رسم کنید .

حل) گام یک و دو :

$$G_p(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{j\omega - 2}{-\omega^2 + 3 + 4j\omega}$$

$$= \frac{(j\omega - 2)(3 - \omega^2 - j4\omega)}{(3 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

$$G_p(j\omega) = \frac{-2(3 - \omega^2) + 4\omega^2}{(3 - \omega^2)^2 + 16\omega^2} + j\frac{\omega(3 - \omega^2) + 8\omega}{(3 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

$$Re[G_p(j\omega)] = \frac{-2(3 - \omega^2) + 4\omega^2}{(3 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

$$Im[G_p(j\omega)] = \frac{\omega(3 - \omega^2) + 8\omega}{(3 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

گام سه :

$$Re[G_p(j\omega)] = 0 \rightarrow$$

$$\frac{-2(3 - \omega^2) + 4\omega^2}{(3 - \omega^2)^2 + 16\omega^2} = 0$$

$$\rightarrow -6 + 2\omega^2 + 4\omega^2 = 0 \rightarrow \omega = \pm 1$$

$$\omega = +1 \rightarrow Im[G_p(j\omega)] = \frac{(3 - 1) + 8}{(3 - 1)^2 + 16} = 0.5$$

$$Im[G_p(j\omega)] = 0 \rightarrow \omega(3 - \omega^2) + 8\omega = 0$$

$$\rightarrow \omega(11 - \omega^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \pm 3.32 \end{cases}$$

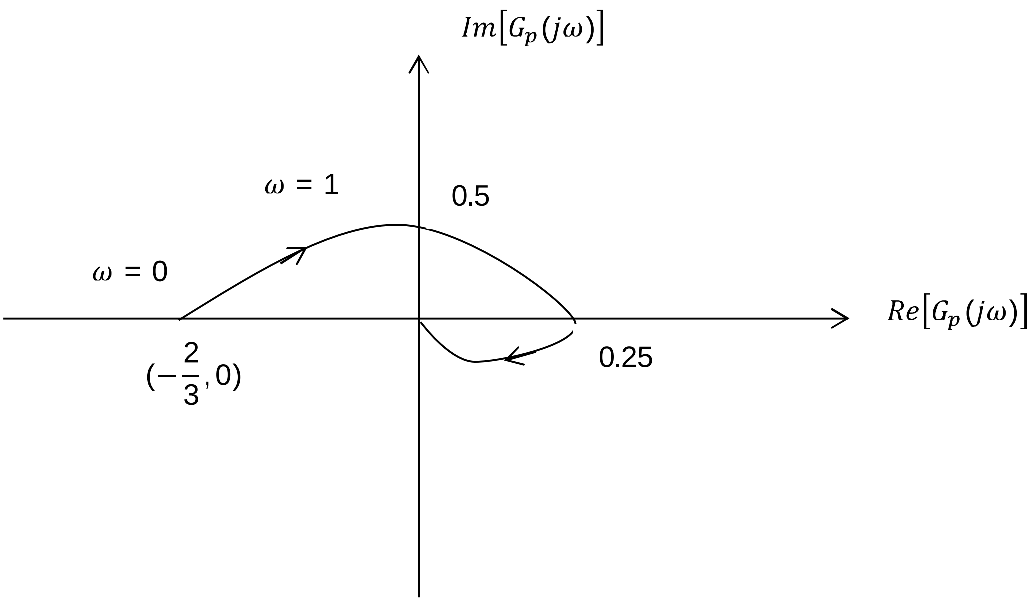
$$\omega = +3.32 \rightarrow Re[G_p(j3.32)] = \frac{-2(3 - 11) + 4 \times 11}{(3 - 11)^2 + 16 \times 11}$$

$$Re[G_p(j3.32)] = 0.25$$

$$\omega = \infty \rightarrow Re[G_p(j\infty)] = 0$$

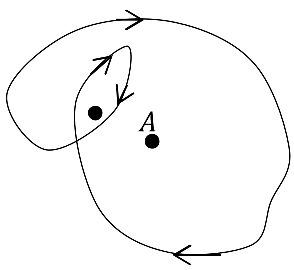
$$\omega = 0 \rightarrow Re[G_p(j0)] = -\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad Im[G_p(j0)] = 0$$

ω	$Re[G_p(j\omega)]$	$Im[G_p(j\omega)]$
0	$-2/3$	0
1	0	0.5
3.32	0.25	0
$+\infty$	0	0



مسئله پایداری از دیدگاه معیار نایکوییست

در برگرفتگی یک نقطه (یک ناحیه) :



یک نقطه یا یک ناحیه را در صفحه اعداد مختلط محاط شده و یا $Encircled$ نامیده می شود توسط یک مسیر بسته Γ اگر در درون آن مسیر بسته قرار بگیرد .

فرض کنید N تعداد دفعاتی باشد که آن نقطه یا ناحیه احاطه شود بر طبق تعریف اگر در جهت خلاف ساعت احاطه شود N مثبت و در جهت عقربه های ساعت N منفی است .

برای مثال نقطه B $\qquad$ $N_B = -2$

و نقطه A $\qquad$ $N_A = -1$

اصل آرگومان (اصل زاویه)

فرض کنید $\Delta(s)$ یک تابع تک مقداره ای است که دارای تعداد محدودی صفر و قطب در صفحه s است همچنین مسیر بسته Γ_s در صفحه s طوری انتخاب شده است که از هیچ یک از صفرها و قطب های $\Delta(s)$ نمی گذرد . تصویر Γ_s تحت نگاشت $\Delta(s)$ که با Γ_Δ نمایش داده می شود مبدا را به تعداد اختلاف صفر ها و قطب های $\Delta(s)$ که توسط مسیر بسته $\Gamma(s)$ احاطه شده اند ، احاطه می کند .

$$N = Z - P$$

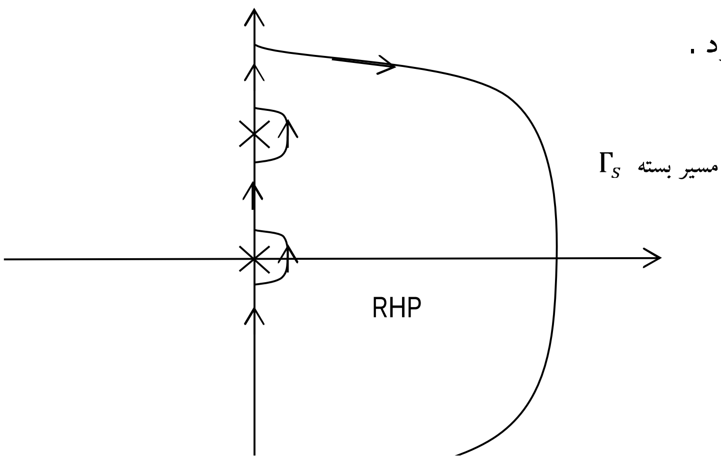
N: تعداد احاطه شدن های مبدا توسط مسیر بسته Γ_Δ تحت نگاشت $\Delta(s)$ است . به طور معادل از آنجاییکه $\Delta(s) = 1 + L(s)$ (که $L(s)$ بهره حلقه فیدبک است) N معادل است با تعداد احاطه شدن های نقطه $(-1,0)$ توسط مسیر بسته Γ_l در صفحه $L(s)$.

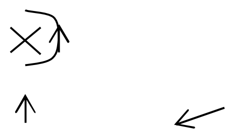
Z : تعداد صفرهای $\Delta(s)$ است که توسط مسیر بسته Γ_s در صفحه s احاطه می شود .دقت کنید که صفر های $\Delta(s)$ ریشه های معادله مشخصه $\Delta(s) = 0$ و یا ریشه های سیستم حلقه بسته است .

P : تعداد قطب های $\Delta(s)$ است که توسط مسیر بسته Γ_s در صفحه s احاطه می شود . دقت کنید که قطب های $\Delta(s)$ همان قطب های $L(s)$ هستند زیرا $\Delta(s) = 1 + L(s)$.

مسیر نایکوییست و معیار پایداری نایکوییست :

برای تعیین پایداری سیستم مسیر بسته و یا کانتور Γ_s را در نظر بگیرید به طوری که Γ_s تمام نیم صفحه راست صفحه s را در بر بگیرد .





برای آنکه Γ_S هیچ یک از قطب ها و یا صفرهای $\Delta(s)$ روی محور $j\omega$ را در بر نگیرد از مسیرهای نیم دایره کوچک استفاده می گردد . برای تعیین پایداری یک سیستم نیازمند پیدا کردن وضعیت نسبی صفرهای $\Delta(s)$ (یا به طور معادل قطب های حلقه بسته $\Delta(s)$) نسبت به محور موهومی هستیم . همان طور که قبلا بیان شد : Γ_Δ تصویر مسیر Γ_S تحت نگاشت $\Delta(s)$ است و P و N و Z نیز در بالا تعریف شد .

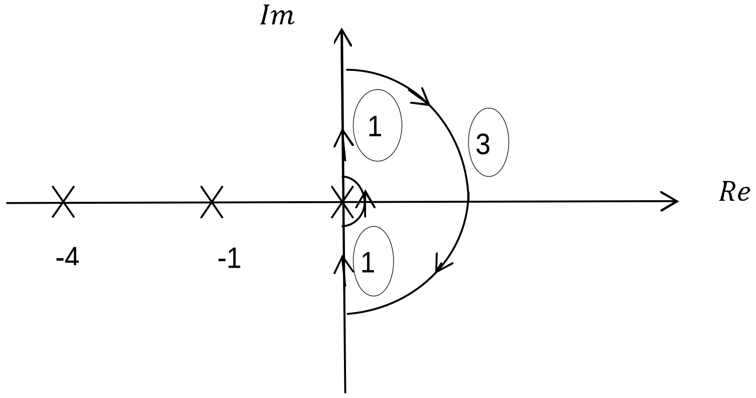
سیستم پایدار است اگر $\Delta(s)$ هیچ صفری در RPH (نیم صفحه راست صفحه s) نداشته باشد یعنی :

$Z = 0$

که از آن جا که $Z = N - P$ است سیستم پایدار است اگر $N = -P$ باشد یعنی مسیر Γ_Δ مبدا را به تعداد $-P$ بار احاطه کند .

مثال : سیستم حلقه بسته ای با بهره حلقه زیر در نظر بگیرید . ابتدا نمودار نایکوییست $\Delta(s)$ را رسم کنید و سپس محدوده ای از K را که به ازای آن سیستم حلقه بسته پایدار باشد را به دست آورید .

حل: مسیر بسته Γ_S را به صورت زیر در نظر بگیرید:



حال باید تصویر Γ_S را تحت نگاشت $L(s)$ می یابیم.

$$\frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

تصویر ناحیه 1 و $1'$ در این ناحیه $s = j\omega$ است .

تصویر ناحیه $1'$:

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 4)}$$

$$= \frac{1}{\omega(-5\omega + j(4-\omega^2))} = \frac{-5\omega - j(4-\omega^2)}{\omega(25\omega^2 + (4-\omega^2)^2)}$$

$$Re[L(j\omega)] = \frac{-5}{25\omega^2 + (4-\omega^2)^2}$$

$$Im[L(j\omega)] = \frac{\omega^2 - 4}{5(25\omega^2 + (4-\omega^2)^2)}$$

الف)

$$\omega = 0^+ \rightarrow Re[L(j0)] = -0.3125$$

$$\rightarrow Im[L(j0)] = -\infty$$

$$\omega = +\infty \rightarrow Re[L(j\infty)] = 0$$

$$\rightarrow Im[L((j\infty)] = 0$$

ب)

$$Im[L(j\omega)] = 0 \rightarrow \omega = \pm 2$$

و در $\omega = 2$ داریم:

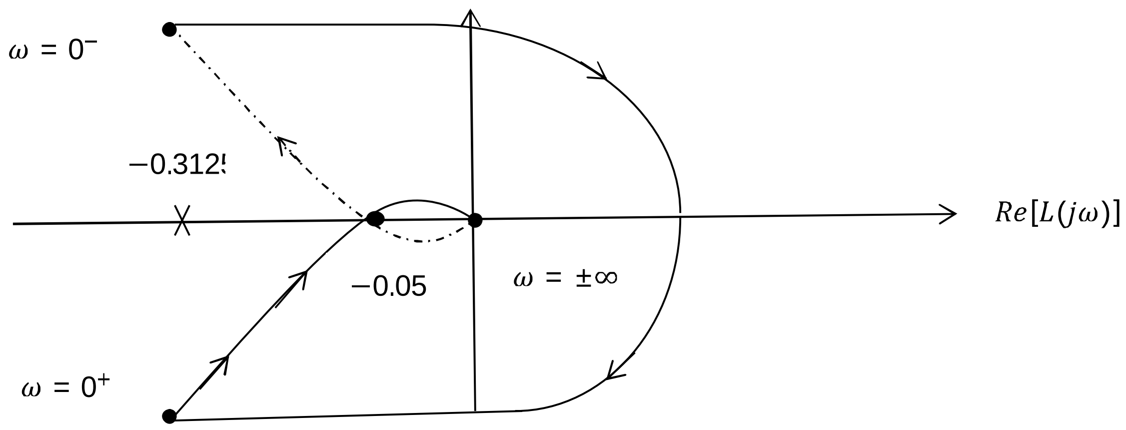
$$Re[L(j2)] = -0.05$$

پ)برای تمام ω ها :

$$Re[L(j\omega)] < 0$$

پس :

ω	$Re[L(j\omega)]$	$Im[L(j\omega)]$
0^+	-0.3125	$-\infty$
2	-0.05	0
$+\infty$	0	0



تصویر ناحیه 2 : در این ناحیه مسیر بسته یک ناحیه نیم دایره ای بسیار کوچک است .

$$s = \varepsilon e^{j\theta}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{و} \qquad 0 < \varepsilon < 1 \qquad (\text{نیم دایره})$$

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)} = \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta}+1)(\varepsilon e^{j\theta}+4)}$$

$$L(\varepsilon e^{j\theta}) \cong \frac{1}{4\varepsilon e^{j\theta}} \cong Re^{-j\theta}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < -\theta < -\frac{\pi}{2}$$

تصویر ناحیه 3:

$$s = Re^{j\theta} \qquad R \to \infty$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2}$$

$$L(s = Re^{j\theta}) = \frac{1}{Re^{j\theta}(Re^{j\theta}+1)(Re^{j\theta}+4)}$$

$$\to \ L\left(s = \ Re^{j\theta}\ \right) \approx \frac{1}{R^3 e^{j\theta}} \cong \varepsilon e^{-j\theta}$$

$$L\left(Re^{j\theta}\right) \approx \varepsilon e^{-j\theta} \qquad \varepsilon \to 0$$

سیستم پایدار است اگر $Z\ =\ 0$ باشد از آنجائیکه $P\ =\ 0$ است (Γ_s هیچ یک از قطب های $L(s)$ را احاطه نمی کند)برای پایداری طبق رابطه $N = Z - P$ ،N باید صفر باشد .

در محور حقیقی بین $(-\infty, -0.05)$ ،$N\ =\ 0$ است.

در محور حقیقی بین $(-0.05,0)$ ،$N\ =\ 2$ است .

د محور حقیقی بین $(0, +\infty)$ ، $N = -1$ است .

پس اگر $-0.05 < -\frac{1}{k} < 0$ باشد سیستم پایدار است .

$$\frac{1}{k} > 0.05 \to 0.05K\ < 1$$

$$k\ < \frac{1}{0.05}$$

$$k\ =\ 20$$

از معیار پایداری راث نیز می توان به این نتیجه رسید.

پایان