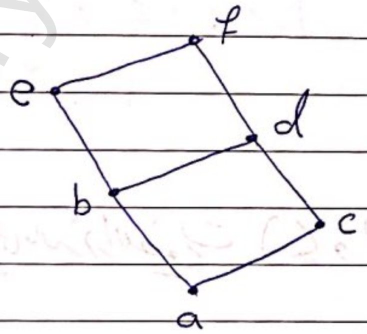
96.1.26

ترتیب توپولوژیکی :

← عناصر را به ترتیب مینیمال بودن sort می کند.

```
i ← 1
s ← A
while (S ≠ ∅) {
 - یک عضو مینیمال مانند a برای s پیدا می کنم
 - sort [i] ← a
 - S ← S - {a}
 - S ← i+1
}
```

Ex : عضو مینیمال را پیدا کنید.



a می شه اولین مینیمال و داخل آرایه sort می ریزیم
مینیمال a حذف و یال های آن حذف
دوباره مینیمال بعدی c سپس حذف می شود
همینطور ادامه می دهیم مینیمال بعدی b و بعدی e و بعدی d
و در آخر f می ماند

a	c	b	e	d	f

→ در آخر این آرایه به ترتیب مینیمال بودن sort شده که به آن ترتیب توپولوژیک می گوییم

تعریف بزرگترین عضو و کوچکترین عضو:

عضو a بزرگترین عضو مجموعه A خواهد بود هرگاه به ازای هر x $(\forall x \in A)$ $x \leq a$ (x با a قابل مقایسه و از آن کوچکتر است)

کوچکترین عضو a می شود هرگاه به ازای تمامی x ها داشته باشیم $a \leq x$ (a با تمامی اعضا مرتبط و از آن ها پایین تر باشد.

96.1.26

EX: $A=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$R = \text{"}\subseteq\text{"}$ رابطه‌ی زیرمجموعه بودن

کوچکترین و بزرگترین عضو؟

$\emptyset$ ← $\{a,b,c\}$ ←

قضیه: یک مجموعه با ترتیب جزئی دارای حداکثر یک بزرگترین عضو و حداکثر یک کوچکترین عضو خواهد بود.

← ممکن است مجموعه‌ای باشد که بزرگترین یا کوچکترین نداشته باشد.

کران بالا و کران پایین: (upper bound) (lower bound)

← مجموعه با ترتیب جزئی A و زیرمجموعه‌ی B آن را در نظر بگیرید یک عضو مانند a را کران بالای B خواهد بود هرگاه به ازای تمامی اعضای زیرمجموعه‌ی B داشته باشیم b با a قابل مقایسه و از آن کوچکتر است.

B , A

$a \in A$

$\forall b \in B \quad b \leq a$

کران پایین

← مجموعه با ترتیب جزئی A و زیرمجموعه‌ی B آن را در نظر بگیرید یک عضو مانند c را کران پایین B خوانده می‌شود هرگاه به ازای تمامی اعضای B داشته باشیم c با B قابل مقایسه و از آن کوچکتر است.

$B , A ,$

$c \in A$

$\forall b \in B \quad c < b$

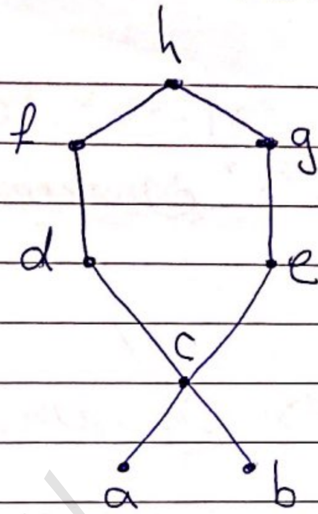
96.7.26

① $B = \{a, b\}$

→ کران بالا: $\{c, d, e, f, g, h\}$

→ کران پایین: $\{\ \}$ وجود ندارد

:EX



② $B = \{c, d, e\}$

→ کران بالا: $\{f, h, g\}$

→ کران پایین: $\{a, b, c\}$

* در این مورد ها هم اعضای خود زیرمجموعه نیز می‌توانند عضو کران پایین باشند مثلاً c با خودش قابل مقایسه، با a و b نیز قابل مقایسه و از آن کوچکتر است.

کوچکترین کران بالا (LUB): مجموعه با ترتیب جزئی A و زیرمجموعه B از آن را در نظر بگیرید عضو a کوچکترین کران بالای B خواهد بود (LUB) هرگاه عضو a یک کران بالای B بوده و اگر عضو a' کران بالای دیگری برای B باشد داشته باشیم a با a' قابل مقایسه و از آن کوچکتر است

$a < a'$

بزرگترین کران پایین (GLB): عضو a بزرگترین کران پایین B خواهد بود هرگاه a یک کران پایین B بوده و اگر a' کران پایین دیگری برای B باشد داشته باشیم a با a' قابل مقایسه و از آن ~~کوچکتر~~ بزرگتر است

:EX برای LUB و GLB بالا EX ؟

① $GLB = \{\ \}$ نداریم

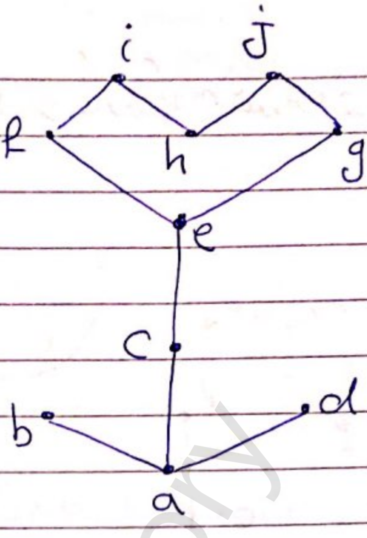
$LUB = \{c\}$

② $GLB = \{c\}$

$LUB = \emptyset$ نداریم

96.1.26

EX:



(7)

$B = \{c, e\}$

کران بالا: $\{e, f, g, h, i, j\}$

کران پایین: $\{a, \cancel{b}, c, \cancel{d}\}$

LUB: $\{e\}$

GLB: $\{c\}$

$B = \{b, i\}$

کران بالا: $\emptyset$

کران پایین: $\{a\}$

LUB: $\emptyset$

GLB: $\cancel{\emptyset}$ $\{a\}$

* وقتی کران بالا و پایین تک عضوی باشد LUB, GLB می‌شود خودش

$(A, \le)$, $(A', \le')$

قضیه: فرض کنید A و A' دو مجموعه با ترتیب جزئی ایزومورف تحت ایزومورفیسم $f: A \to A'$ باشند

الف: اگر عضو a یک عضو ماکسیمال (یا مینیمال) مجموعه A باشد در این صورت $f(a)$ یک عضو ماکسیمال (یا مینیمال) مجموعه A' خواهد بود.

ب: اگر a کوچکترین عضو (یا بزرگترین) مجموعه A باشد در این صورت $f(a)$ کوچکترین (یا بزرگترین) عضو A' خواهد بود.

ج: اگر a یک کران بالا (یا پایین) (GLB, LUB) زیرمجموعه B از مجموعه A باشد در این صورت $f(a)$ یک کران بالا (پایین، GLB، LUB) زیرمجموعه $f(B)$ در مجموعه A' خواهد بود

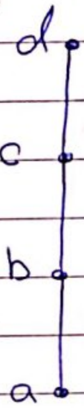
s.a.m

۲/ شبکه (Lattice): یک شبکه مجموعه‌ای است با ترتیب جزئی مانند L که در آن هر زیرمجموعه شامل ۲ عنصر دارای یک LUB و یک GLB باشد.

LUB $a \vee b$ **GLB** $a \wedge b$ ★ از این به بعد

هر دو دوره هم GLB و هم LUB دارد پس شبکه است ✓

EX :



{b, c} دوتاه

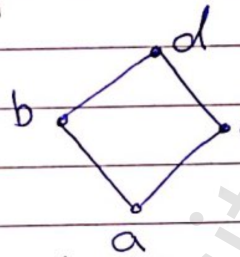
$b \vee c = c$

$b \wedge c = b$

{a, c} دوتاه

$a \vee c = c$

$a \wedge c = a$



{b, c} دوتاه

$b \vee c = d$

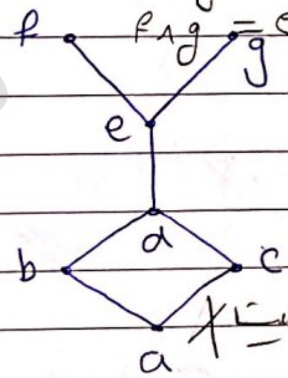
$b \wedge c = a$

{a, d} دوتاه

$a \vee d = d$

$a \wedge c = a$

شبکه است ✓



{f, g} دوتاه

$f \vee g = \varnothing$

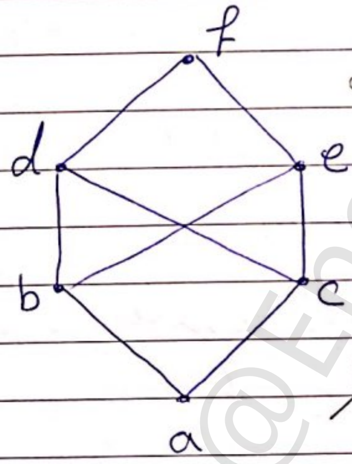
$f \wedge g = e$

شبکه نیست ✗

LUB ⇐ از دوتاه می‌رویم رو به بالا اولین نقطه‌ای مشترک.

GLB ⇐ می‌رویم رو به پایین اولین نقطه‌ای مشترک.

★ لطفاً 1 مثال نقض برای نشان دادن اینکه شکل شبکه نیست کافی می‌باشد.



{a, f} دوتاه

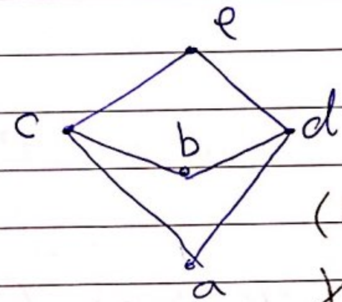
$a \vee f = f$

$a \wedge f = a$

$b \vee c = a$

$b \wedge c = \varnothing$

شبکه نیست ✗



{c, d} دوتاه

$c \vee d = e$

$c \wedge d = \varnothing$

(هم a هم b مشترک)

شبکه نیست ✗

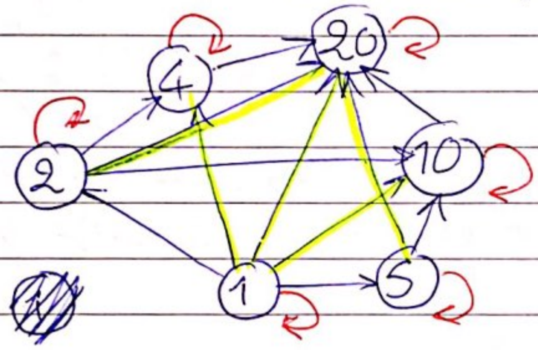
96.1.26

← فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد در اینصورت D_n برابر است با مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های عدد n.

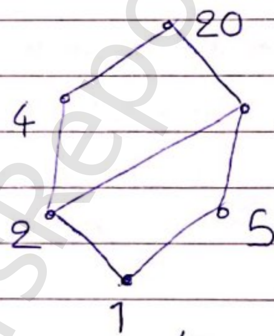
$(D_{20}, |)$

اعدادی که 20 بر آن‌ها بخش پذیر است $\Rightarrow \{1,2,4 \quad , \quad 5,10,20\}$

اعضای رابطه‌ی عادکردن $R = \{(1,1)(1,2)(1,4)(1,5)(1,10)(1,20)(2,2)(2,4)(2,10)(2,20)(4,4)(4,20)(5,5)(5,10)(5,20)(10,10)(10,20)(20,20)\}$



رسم گراف جهت دار ←



نمودار هاس رابطه‌ی D_{20} عاد کردن

میشه ک.م.م ←

$(4 \vee 5) = 20 \qquad (2 \vee 5) = 10$

$(4 \wedge 5) = 1 \qquad (2 \wedge 5) = 1$

میشه ب.م.م ←

$(4 \vee 10) = 20$

$(4 \wedge 10) = 2$

← حالا می‌خواهیم ببینیم مشبکه هست یا نه؟

★ نمودار هاس D_n مشبکه است

و حاصل $\wedge$ میشه ب.م.م و

حاصل $\vee$ میشه ک.م.م

Home EX : D_{30} و رابطه‌ی عادکردن (شکل مطلوب)

$D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

* $P(S)$ می‌شود مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های S !

★ نکته : $P(S)$ و رابطه‌ی زیرمجموعه بودن تشکیل یک شبکه می‌دهند

$(P(S) , \subseteq) \longrightarrow$ شبکه

و مانند D_n ها جوین و مت آن‌ها قاعده دارد :

$$\begin{cases} a\vee b = a\cup b & \text{اجتماع} \\ a\wedge b = a\cap b & \text{اشتراک} \end{cases}$$

★ نکته : مجموعه‌ی اعداد صحیح + و رابطه‌ی عاد کردن تشکیل شبکه می‌دهند و داریم :

$a\vee b = $ ک.م.م b,a

$a\wedge b = $ ب.م.م b,a

$(Z^+ , |) \longrightarrow$ شبکه

زیرشبکه : (sub-lattice)

فرض کنید L یک شبکه باشد $(L, \preceq)$ یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی مانند S از L یک زیرشبکه خواهد بود اگر به ازای هر a و b عضو S حاصل جوین و مت هم داخل خودش باشد.

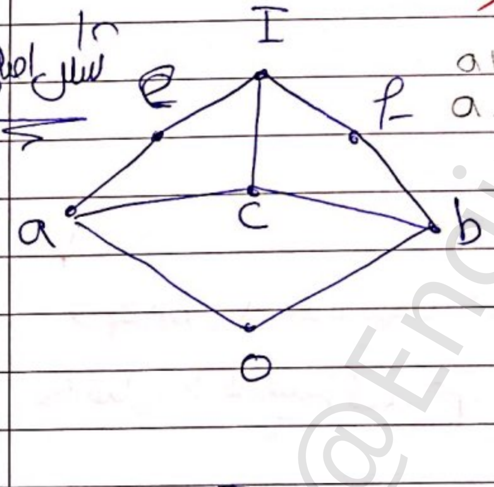
$\forall a,b\in S \quad a\vee b\in S \quad a\wedge b\in S$

★ هر زیرشبکه خودش یک شبکه محسوب می‌شود

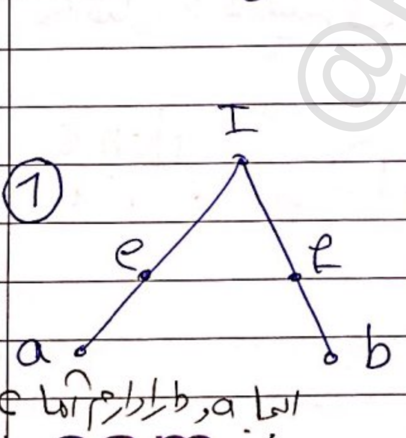
EX : کدام یک از شکل‌ها زیرشبکه‌ای از L است؟

حاصل جوین و مت باید درش باشد تا شبکه باشد!

شکل اصلی

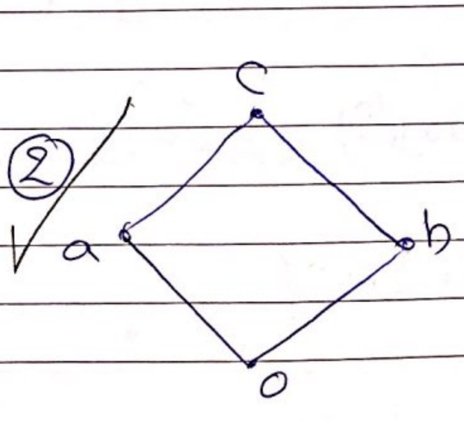


①

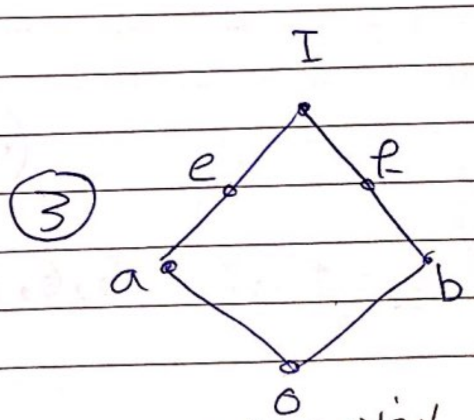


اینجا a و b را داریم اما o و c را نداریم

②



③



اینجا هم c را نداریم

96.1.26

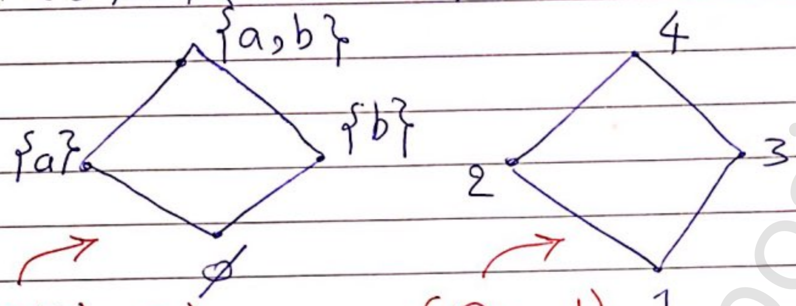
★ نکته: $(D_n, |)$ زیرمشبکه‌ای است برای $(Z^+, |)$

(ایکریخت) شبکه‌های ایزومرف: فرض کنید $f: L_1 \to L_2$ یک ایزومورفیسم از شبکه $(L_1, \le)$ به شبکه $(L_2, \le)$ باشد، L_1 مشبکه است اگر و تنها اگر L_2 مشبکه باشد. درحقیقت اگر a, b عناصر L_1 باشند آنگاه خواهیم داشت

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

Ex:



$(P(S), \subseteq)$ $\quad$ $(D_6, |)$

$S = \{a, b\}$

← دو شکل ایزومرف هستند پس داریم:

$$\underbrace{f(\underbrace{\{a\} \vee \{b\}}_{\{a,b\}})}_{4} = \underbrace{\underbrace{f\{a\}}_{2} \vee \underbrace{f\{b\}}_{3}}_{4}$$ ✓ درست

$$\underbrace{f(\underbrace{\{a\} \wedge \{b\}}_{\emptyset})}_{1} = \underbrace{\underbrace{f\{a\}}_{2} \wedge \underbrace{f\{b\}}_{3}}_{1}$$ ✓ درست

96.2.2

خواص شبکه‌ها:

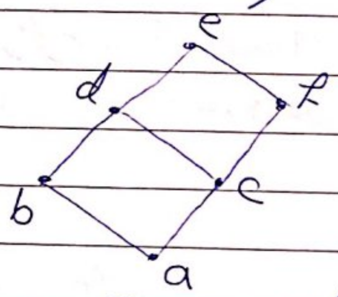
فرض کنید L یک شبکه باشد آنگاه برای هر a و b عضو L خواهیم داشت:

① $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \leq b \rightarrow$ حاصل join عضو بالاتر

② $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \leq b \rightarrow$ حاصل meet عضو پایین‌تر

③ $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \wedge b = a$

EX:



$a \leq f \rightarrow$ a و f قابل مقایسه‌اند

$a \vee f = f$

$a \wedge f = a$

قضیه: فرض کنید L یک شبکه باشد آنگاه خواص زیر را در شبکه خواهیم داشت:

① خاصیت خودتوانی: $a \wedge a = a$ و $a \vee a = a$

② خاصیت جابجایی: $a \vee b = b \vee a$ و $a \wedge b = b \wedge a$

③ خاصیت جذبی: $a \vee (a \wedge b) = a$ و $a \wedge (a \vee b) = a$

④ خاصیت شرکت‌پذیری:

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

شبکه‌های ویژه: ① شبکه محدود: شبکه محدود شبکه‌ای است که دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد.

EX: کدام یک محدود است و کدام یک نیست؟

① $(Z^+, |) \rightarrow$ اعداد مثبت و عاد کردن

شبکه هست ولی محدود نیست

② $(P(S), \subseteq)$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌ها، زیرمجموعه بودن

$S = \{a, b, c\}$

$P(S) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

O ، I

شبکه محدود است زیرا کوچکترین و بزرگترین عضو آن مشخص است.

قضیه: فرض کنید $L=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ یک شبکه‌ی متناهی باشد در این صورت L با محدود می‌باشد.

بزرگترین عضو L (جوین کل اعضاء) $I=a_1\vee a_2\vee\dots\vee a_n$

کوچکترین عضو L (میت کل اعضاء) $0=a_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_n$

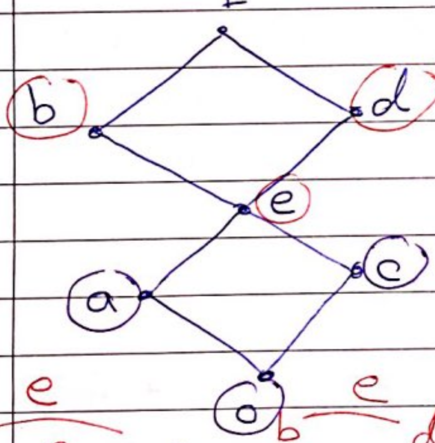
② شبکه‌ی پخش‌پذیر یا توزیع‌پذیر: شبکه‌ی L را پخش‌پذیر خواهیم گفت هرگاه به ازای $a,b,c\in L$ خواص پخش‌پذیری زیر را داشته باشیم:

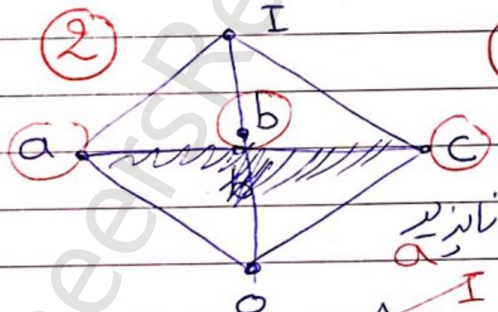
← هر سه عضو دلخواه

$$\begin{cases} a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\\ a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)\end{cases}$$

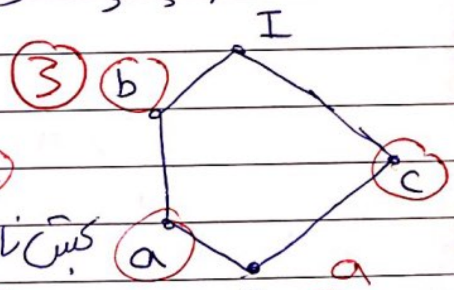
← اگر شبکه‌ی L پخش‌پذیر نباشد پخش‌ناپذیر می‌باشد!

Ex: کدام یک پخش‌پذیر و کدام یک پخش‌ناپذیر است؟





پخش ناپذیر



① $e\vee(b\wedge d)\overset{?}{=}(e\vee b)\wedge(e\vee d)$ ✓

$e\wedge(b\vee d)\overset{?}{=}(e\wedge b)\vee(e\wedge d)$ ✓

① $a\vee(0\wedge c)=(a\vee 0)\wedge(a\vee c)$ ✓

$a\wedge(0\vee c)=(a\wedge 0)\vee(a\wedge c)$ ✓

شبکه پخش‌پذیر می‌باشد

③ $a\wedge(b\vee c)\overset{?}{=}(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ ✓

$a\vee(b\wedge c)\overset{?}{=}(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ ✗

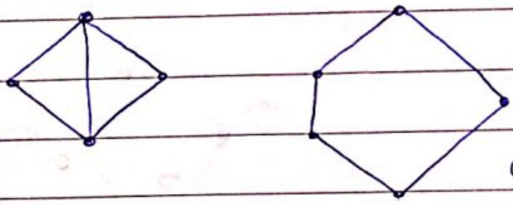
② $a\vee(b\wedge c)\overset{?}{=}(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ $a\neq I$ ✗

$a\wedge(b\vee c)\overset{?}{=}(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ $a\neq 0$ ✗

شبکه پخش‌ناپذیر می‌باشد

برای هر شبکه ۳ عضو دلخواه رو در نظر گرفته و قوانین بالا را بررسی کردیم.

قضیه: شبکه‌ی L را پخش ناپذیر خواهیم گفت اگر و تنها اگر شامل زیرشبکه‌ای ایزومرف با یکی از شبکه‌های زیر باشد:



اگر در داخل شکلی بزرگ شکل‌ها مثل این ۲ شکل را یافتید به این قضیه استناد کرده و می‌گویید شبکه پخش ناپذیر است!

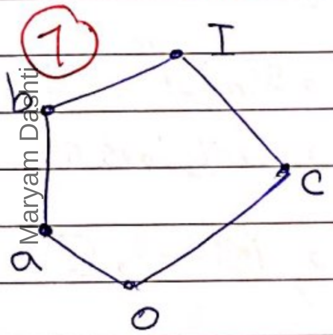
مکمل: فرض کنید L یک شبکه‌ی محدود با بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو 0 باشد در این صورت عضو a' مکمل یا complement عضو a خوانده می‌شود هرگاه حاصل جوین a و a'، I شود و حاصل میت آن 0 شود.

$a \vee a' = I$ → join → بزرگترین

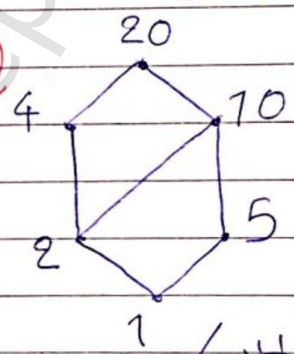
$a \wedge a' = 0$ → meet → کوچکترین

$I' = 0$
$0' = I$

EX:



(اینها دارای مکمل در شکل‌ها)



$a' = c \quad (a \vee c = I), (a \wedge c = 0)$

$b' = c \quad (b \vee c = I), (b \wedge c = 0)$

$c' = a$ و $b \quad (c \vee a = I), (c \wedge a = 0)$

$2' =$ مکمل ندارد!

$5' = 4 \quad (5 \vee 4 = 20), (5 \wedge 4 = 1)$

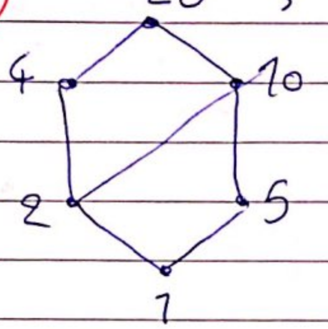
$10' =$ مکمل ندارد!

ممکن است عضوی در شکل باشد که مکمل نداشته باشد!

قضیه: فرض کنید L یک شبکه‌ی محدود و پخش‌پذیر باشد اگر یک مکمل برای عضوی وجود داشته باشد آنگاه آن مکمل منحصر به فرد است.

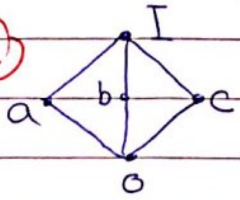
96.2.2

شبکه‌ی مکمل پذیر: یک شبکه مکمل پذیر گفته می‌شود هرگاه محدود بوده و کلیه عضوها دارای مکمل باشند.

① 

$(D_{20}, |)$

مکمل پذیر نیست!

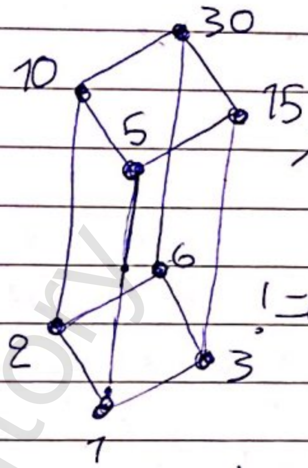
② 

$a' = b \,\&\, c$

$b' = c \,\&\, a$

$c' = a \,\&\, b$

مکمل پذیر است!

③ 

$(D_{30}, |)$

$5, 6$ مکمل اند

$10, 3$ 〃

مکمل پذیر است!

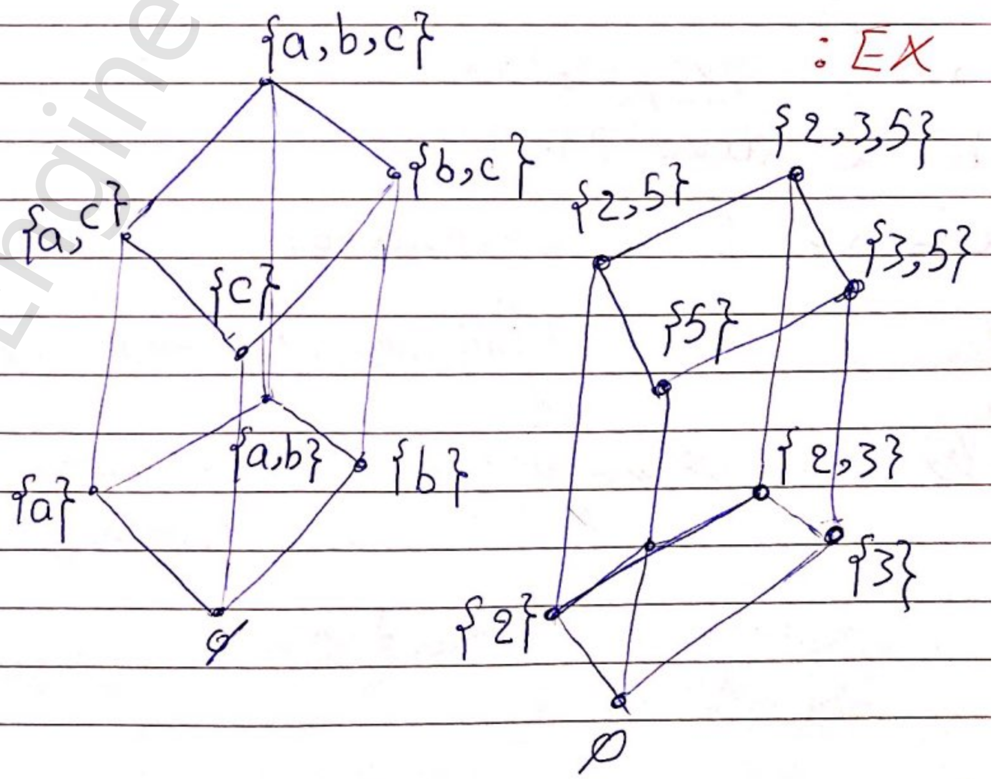
جبر دودویی یا جبر بول:

قضیه: اگر $S_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $S_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ دو مجموعه‌ی دلخواه و متناهی با n عضو باشند در اینصورت $(P(S_1), \subseteq)$ و $(P(S_2), \subseteq)$ ایزومورف هستند.

EX:

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 \{2, 3, 5\}$



ادامه قضیه ← اگر عنصرهای مجموعه‌ای مربوط به شبکه‌ای با n عنصر را به وسیله رشته‌های از صفر و یک به طول n برچسب بزنیم شبکه حاصل را B_n می‌نامیم.

← ویژگی‌های ترتیب جزئی در B_n را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

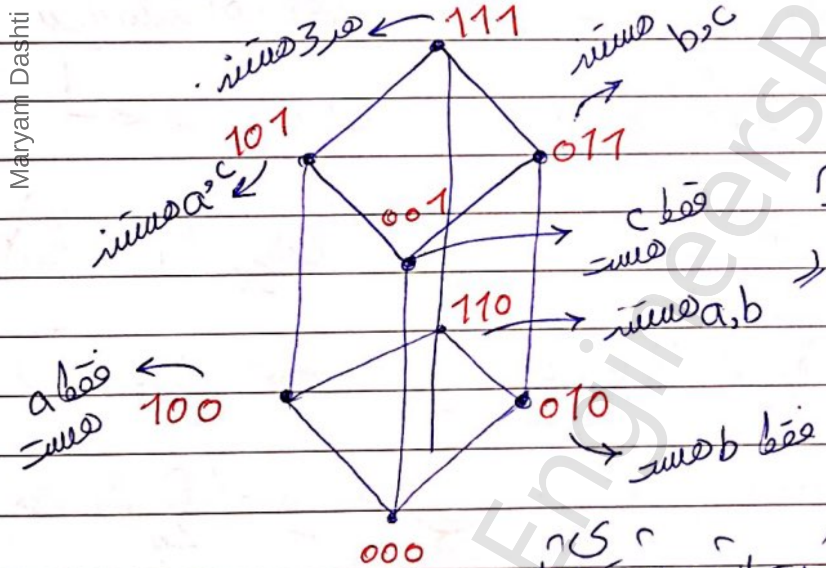
اگر $x=a_1a_2\dots a_n$ و $y=b_1b_2\dots b_n$ را داریم اگر این دو عضو B_n باشند در این صورت: (1) $x \le y$ اگر و تنها اگر $a_k \le b_k$ $(k=1,\dots,n)$

(2) اگر $c = x \wedge y$ در این صورت $c = c_1, c_2, \dots, c_n$ که $c_k = \min\{a_k, b_k\}$

(3) اگر $c = x \vee y$ در این صورت $c = c_1 c_2 \dots c_n$ که $c_k = \max\{a_k, b_k\}$

(4) x دارای مکمل مانند x' می‌باشد که در آن $x' = z_1 z_2 \dots z_n$

$$\begin{cases} z_k = 0 & \text{if } a_k = 1 \\ z_k = 1 & \text{if } a_k = 0 \end{cases}$$



کد برچسب زدن EX قبلی

اصطلاحاً به شکل B_3 می‌گوییم

3 عضو دارد

می‌ریم سراغ حل کردن قضیه بالا:

(1) اگر دو نقطه x و y با هم قابل مقایسه و کوچکتر باشند رشته‌های آن‌ها هم حالشون همان گونه است.

(2) برای به دست آوردن حاصل meet، x و y می‌توانید min رشته‌ی آن‌ها را بگیرید.

(3) برای به دست آوردن حاصل join کافی است max رشته‌های آن‌ها را بگیرید.

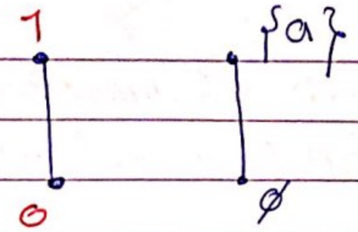
(4) برای به دست آوردن مکمل یک نقطه کافی است رشته‌ی آن را معکوس کنید.

s.a.m

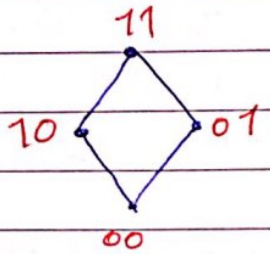
B1

$S_1 = \{a\}$

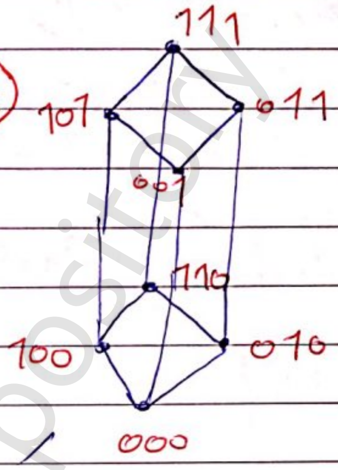
$P(S) = \varnothing , \{a\}$



B2



B3



home

EX ← B_4 را رسم کنید.

تعریف جبر بولین یا دودویی :

یک مشبکه متناهی را جبر دودویی گوییم هرگاه ایزومورف با B_n برای یک n صحیح و مثبت باشد.

پس تمام این B ها را جبر دودویی می‌گوییم.

EX : آیا ~~D~~ $(D_{30}, |)$ مشبکه جبر دودویی هست یا خیر؟

نمودار هاسی D_{30} با B_3 ایزومورف است پس مشبکه جبر دودویی هست

حالا $(D_{20}, |)$ چطور؟ خیر جبر دودویی نیست چون با B ها ایزومورف نیست

خواص جبر دودوئی:

1) خودتوانی ← $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$

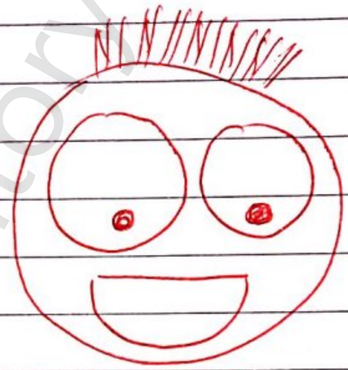
2) جابجایی ← $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$

3) شرکت‌پذیری ← $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

4) جذب ← $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$

5) توزیع‌پذیری ← $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$



6) هر عضو دلخواه هم با O و هم با I قابل مقایسه است
از O بزرگتر و از I کوچکتر

$\forall\, x \in L$ $\quad O \leq x \leq I$

7) هر عضو مانند x دارای مکمل منحصر به فردی می باشد (x') به طوری که تساوی زیر برقرار باشد
$x \vee x' = I$
$x \wedge x' = 0$

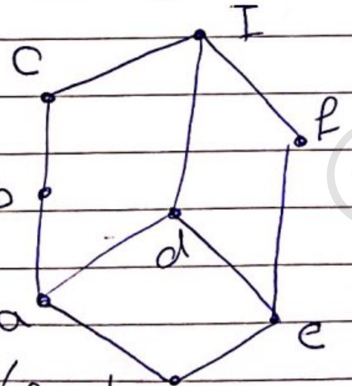
8) $O' = I$
$I' = O$
$(x')' = x$ ← دو بار مکمل گیری میشه خودش

9) خاصیت دمورگان ←
$(x \vee y)' = x' \wedge y'$
$(x \wedge y)' = x' \vee y'$

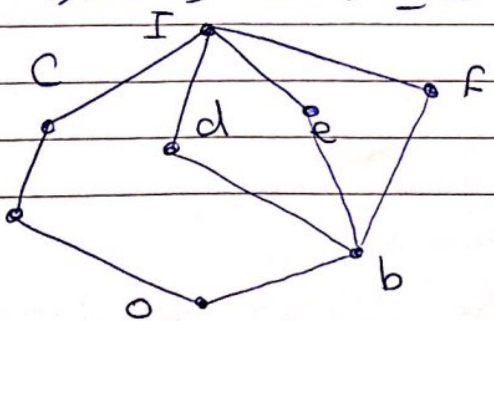
نکته: (ممکن است شکلی در امتحان داده شود و بخواهند اثبات کنید که شکل معرف جبر دودوئی نیست)

1) تعداد عناصر جبر دودوئی باید توانی از 2 باشد

2) برای اثبات اینکه شکلی جبر دودوئی نیست کافی است نشان دهید یکی از خواص فوق را ندارد



f ← مکمل منحصر به فرد ندارد
d و c و a و b مکمل آن می توانند باشند



عضو d مکمل های نظیر c و a دارد
پس مکمل d منحصر به فرد نیست

96 . 2 . 9

متغیر دودویی (بولی boolean) : متغیری که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی ۰ و ۱ باشد.

لیترال (term) : یک متغیر دودویی و یا مکمل آن است.

جمله‌ی min (min term) : روی n متغیر مانند $x_1, x_2, \dots, x_n$ عبارت دودویی به فرم $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n$ است که در آن هر لیترال $\bar{x}_i$ یا برابر متغیر دودویی x_i و یا برابر مکمل آن یعنی x_i' می‌باشد.

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i \\ x_i' \end{cases}$$

MNE

عبارت متعارف min : (Minterm normal ~~x~~expersion) یا ~~MNE~~

یک عبارت دودویی را عبارت متعارف min می‌نامیم اگر به صورت join‌هایی از جملات min روی n متغیر باشد.

EX :

~~x~~	~~y~~	~~f~~

$$(x' \wedge y') \overset{\text{join}}{\vee} (x \wedge y')$$

جمله‌ی مینیمم min

توابع روی جبر دودویی : تابع $f: B_n \to B$ که دامنه‌ی آن B_n و برد آن $B=\{0,1\}$ است تابع دودویی خواهد بود.

Ex :

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

چون 2 متغیر داریم $\to f: B_2 \to B$

$$f(x, y) = (x' \wedge y') \vee (x \wedge y')$$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	0	~~1~~ 0	1
1	1	0	0
1	1	1	1

چون 3 متغیر داریم $\to f: B_3 \to B$

$$f(x, y, z) = (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z')$$
$$\vee (x \wedge y \wedge z)$$

s.a.m

96.2.9

تبدیل یک عبارت دودویی به فرم MNE :

$(x)\wedge(y\vee z') \xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} (x\wedge y)\vee(x\wedge z') = (x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')$

$(x\wedge y)$ — $(x\vee z')$

$(x\wedge y)\vee(x\wedge y\wedge 1)$ برابر اولی متغیر

جز دومی متغیر، برابر

$(x\wedge y\wedge(z\vee z'))$

$(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')$ توزیع پذیری

$(x\wedge z'\wedge 1) = (x\wedge z'\wedge(y\vee y'))$

$(x\wedge z'\wedge y)\vee(x\wedge z'\wedge y')$

EX : $(x'\wedge y)'\wedge(x\vee z)$

دمورگان $\longrightarrow (x\vee y')\wedge(x\vee z) \xrightarrow[\text{از x فاکتور می گیریم}]{\text{توزیع پذیری کلی}} (x)\vee(y'\wedge z) \longrightarrow$

$(x\wedge 1\wedge 1)\vee(1\wedge y'\wedge z) \longrightarrow ((x\wedge(y\vee y')\wedge(z\vee z'))\vee((x\vee x')\wedge y'\wedge z)$

توزیع پذیری $\longrightarrow ((x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z'))$ برابر اولی — برابر دومی $(\vee(x\wedge y'\wedge z)$

$\vee(x'\wedge y'\wedge z))$

مشابه ها حذف می شود

به فرم MNE رسیدیم !

نکته: ~~ساده سازی~~ دو عبارت دودویی را هم ارز خواهیم گفت اگر و تنها اگر دارای حالات مینیمم کلی باشند (MNE)

ساده سازی عبارات دودویی : (از جدول یا نقشه کارنو استفاده می کنیم)

x \ y	y'	y
x'	$x'\wedge y'$ 00	$x'\wedge y$ 01
x	$x\wedge y'$ 10	$x\wedge y$ 11

سطرها توصیف کننده x → اولی خود x، دومی y'

حالت 2 متغیره

ستون ها توصیف کننده y

اولی خود y

دومی y'

(جدول کارنو دو متغیره)

96.2.9

Ex:

$x \backslash y$	y'	y
x'	1	1
x	0	0

← برای ساده سازی در جدول کارنو 1 های مجاور باهم (یعنی یا در یک ستون اند یا در یک سطر) را جدا می کنیم باید توجه کنیم تعداد یک های جدا شده باید توانی از 2 باشد.

← ما در گروه ها می توانیم 1 های مشترک داشته باشیم

$$f(x, y) = x'$$

$$f(x, y) = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

$$\xrightarrow[\text{عکس توزیع پذیری}]{\text{فاکتور از } x'} = x' \wedge \underbrace{(y' \vee y)}_{1} = x'$$

Ex:

حوزش

$x \backslash y$	y'	y
x'	1	1
x	1	0

$$f(x,y) = x' \vee y'$$

با جدول $\longrightarrow (f(x,y)) = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$

قل دسته ی اول در ناحیه x' می باشد ← $\xrightarrow[\text{در جمله 1 و 2}]{\text{فاکتور از } x'}$ $x' \wedge \underbrace{(y' \vee y)}_{1}$ ~~$\vee (x \wedge y')$~~ → x'

اما کششی از آن در y نمی شود، y' است

که کنار می گذاریم ← x'

قل دسته دوم در ناحیه y' می باشد $\longrightarrow$

اما کششی از آن در x' و x است $\xrightarrow{\text{جمله ی 1 و 3}}$ $y' \wedge \underbrace{(x' \vee x)}_{1}$ → y'

که کنار می گذاریم ← y'

$\longrightarrow x' \vee y'$

✱ ما می توانیم حالات را تکرار کنیم در جبر دودویی

96.2.9

حالت ۳ متغیره :

$x \backslash yz$		z		
x'	$x' \wedge y' \wedge z'$ (000)	001	011	010
x	100	101	111	110
			y	

Ex :

$x \backslash yz$				
	1	0	0	0
	1	0	0	0

$z' \wedge y' = f(x, y, z)$

Ex :

$x \backslash yz$				
	0	0	0	1
	0	0	1	0

$f(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z')$

ساده سازی انجام نمیشود زیرا دسته ای از ۱ وجود ندارد

Ex :

$x \backslash yz$				
	1	1	1	0
	1	0	1	0

$(z' \wedge y') \vee \cancel{(x' \wedge y')}$

$\vee (z \wedge x') \vee (y \wedge z)$

هر یک یکبار پوشش داده شود کافی است نیازی به تکرار نیست

Ex :

$x \backslash yz$				
	1	0	0	1
	0	0	0	0

☆ دو لبه ی جدول باهم مجاور محسوب می شوند
پس این ۲ تا یک مجاور محسوب می شوند

$f(x,y,z) = x' \wedge z'$

96.2.9

حالت 4 متغیره :

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Ex :

$xy \backslash zw$				
	1	0	0	1
	0	1	1	0
	0	1	1	0
	1	0	0	1

$(x' \wedge y \wedge w) \vee (x \wedge y \wedge w)$

این راه اشتباه است زیرا باید بزرگترین گروه ممکن را در نظر بگیریم که در اینجا 4 تایی است

* اطراف جدول هم مجاور در نظر گرفته می‌شوند که گروه 4 تایی داریم

$(w \wedge y) \vee (y' \wedge w')$

Ex :

$xy \backslash zw$				
	1	1	1	1
	0	0	0	0
	0	0	1	0
	1	1	0	0

$(x' \wedge y \wedge z' \wedge w)$
$\vee (x' \wedge y') \vee (x y' \wedge z')$

تمرین های فصل 4 :

3, 4, 6, 7, 8, 9, 21, 25
28, 31, 35

96.2.9

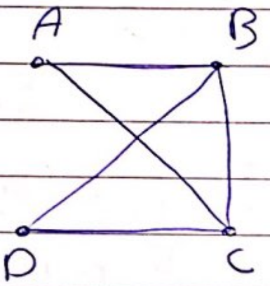
(فصل 6)

تئوری گراف :

گراف ← یک گراف مانند G شامل ۲ آیتم است (1) مجموعه‌ی V که اعضای آن گره، نقطه یا رأس نامیده می‌شوند → vertex (2) مجموعه‌ی E که شامل مجموعه‌های ۲تایی از اعضای مجموعه‌ی V است که به عنوان لبه → Edge یا یال شناخته می‌شود.

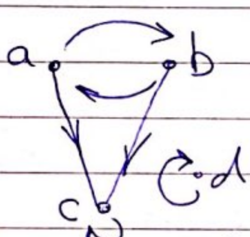
$G=(V,E)$ بدین صورت گراف G به صورت زوج مرتب (V,E) توصیف می‌شود.

EX :

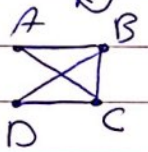


$V=\{A,B,C,d\}$ → گره‌ها

$E=\{(A,B)(A,C)(B,C)(B,D)(C,D)\}$ → یال‌ها

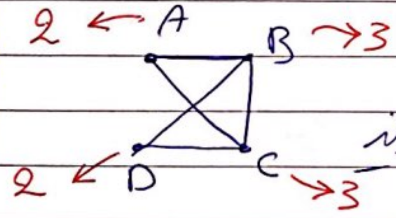


جهت‌دار (سودار)



بدون جهت (بی‌سو)

} ~~نوع~~ گراف



درجه : تعداد یال‌هایی که به یک رأس (گره) متصل می‌باشد را درجه گویند. deg

$d^+=1$, $d^-=2$

deg^+ ورودی

deg^- خروجی

} برای گراف‌های جهت‌دار درجه

$d^+=2$, $d^-=1$

گره ایزوله (منفرد) گره‌ای که درجه‌ی آن صفر می‌باشد

حلقه : یالی که از رأسی خارج می‌شود به همان رأس وارد می‌شود

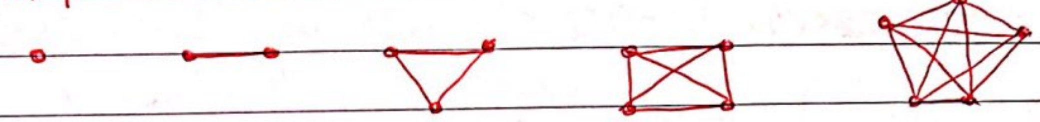
96.2.9

مجاور: دو رأس مجاور نامیده می شوند هرگاه بوسیله ی یالی بهم متصل شوند.

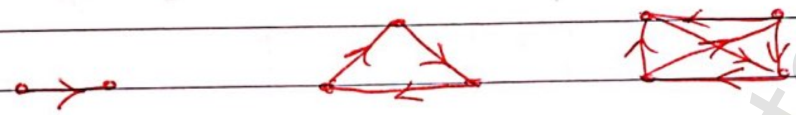
گراف کامل: گرافی که بین هر دو رأس دلخواه آن یالی وجود دارد. Coplete

$K(n)$ ← تعداد رئوس

K_1 K_2 K_3 K_4 K_5



گراف کامل سودار: با n رأس گرافی است که بین هر دو رأس دلخواه و متمایز آن یک یال موجود باشد

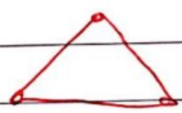


گراف منتظم: گرافی که تمامی رئوس آن هم درجه باشند

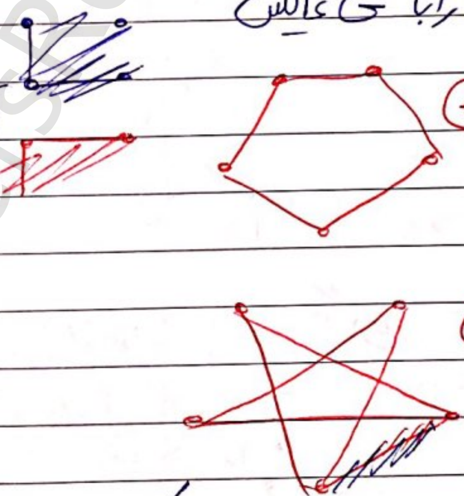
k-regular ←

0-regular

2-regular



مکمل گراف: مکمل گراف G با n رأس مکمل آن نسبت به K_n می باشد و آن را با $\bar{G}$ نمایش می دهیم



G

$\bar{G}$

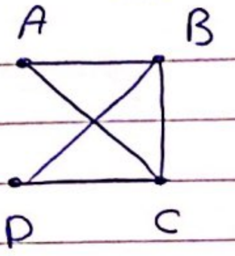
این دو شکل روی هم باید گراف کامل تشکیل دهند.

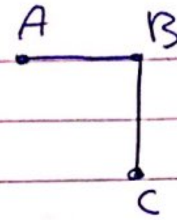
زیرگراف: subgraph فرض کنید $G(V, E)$ یک گراف باشد و V' زیر مجموعه ای از V و E' زیر مجموعه ای از E $(V' \subseteq V, E' \subseteq E)$ بطوری که نقاط موجود در E' همگی متعلق به V' باشند بنابراین $G' = (V', E')$ زیرگرافی از G محسوب می شود

96.2.9

گراف (G) — زیرگراف گراف (G)

EX:





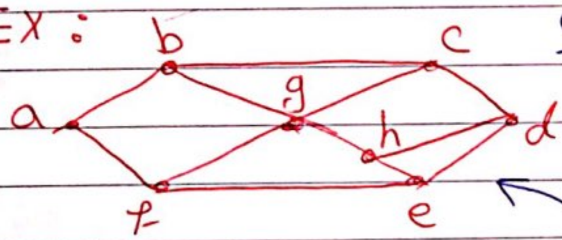
$V=\{A,B,C,D\}$

$E=\{AB,AC,BC,BD,CD\}$

$V'=\{A,B,C\}$

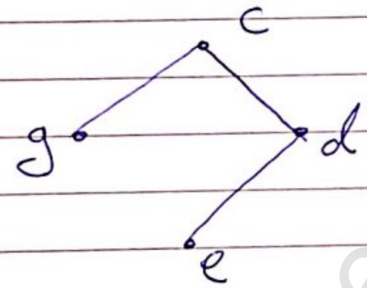
$E'=\{AB,BC\}$

EX:



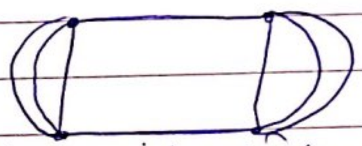
زیرگراف القایی: زیرگراف $G_1=(V_1,E_1)$ زیرگراف القایی خواهیم گفت هرگاه E_1 شامل تمام یال‌هایی باشد که تمامی رئوس انتهایی آن‌ها در V_1 وجود دارد.

برای مجموعه $V_1=\{c,d,e,g\}$ زیرگراف القایی بدست آورید!

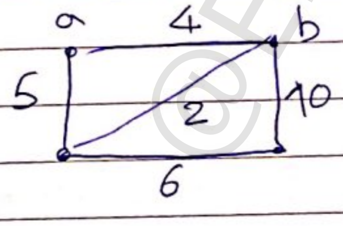


گراف چندگانه: گرافی است که هیچ محدودیتی برای تعداد یال‌ها از یک نقطه به نقطه دیگر وجود ندارد

← جهت دار هم موجود است

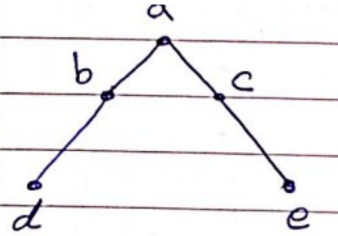


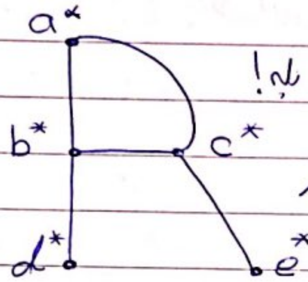
گراف وزن دار: گرافی است که مجموعه وزن‌ها را به یال‌های آن انتساب خواهیم داد.



مثلاً ← هزینه جابجایی از a به b، 4 می باشد

انزومورف هستند.

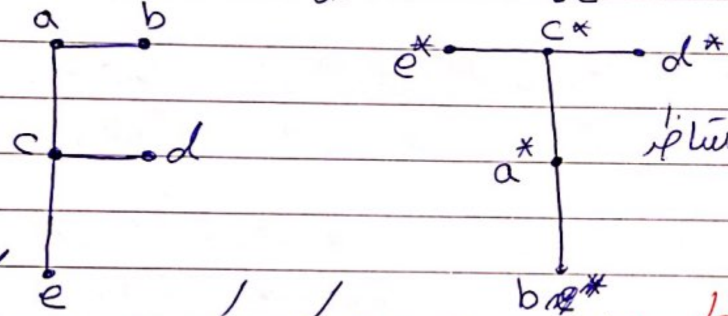




EX : آیا دو گراف زیر انزومورف هستند؟ بله!

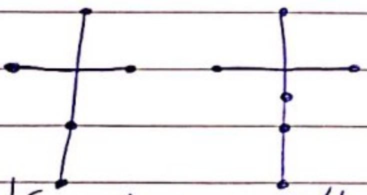
* گاهی شکل ظاهری گراف ها یکسان نیستند اما در حکم لم متوجه می شویم رئوس و الگوها یکسان اند.

EX :



Final آیا دو شکل زیر انزومورف اند رئوس متناظر را مشخص کنید.

گراف های همومورف (هومورفیک، هم شکل) : گراف هایی هستند که ممکن است در تعداد گره ی یال ها که ممکن است روی یک یال باشند تفاوت دارند ولی از نظر شکل ظاهری شبیه به هم هستند.

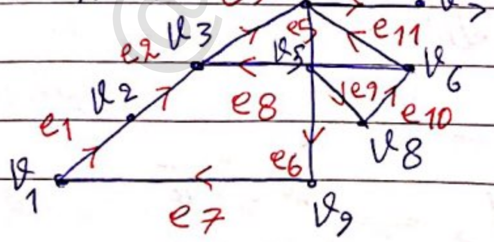


* گراف ها انزومورف، همومورف هم در نظر گرفته می شوند!

مسیر : رشته ای از یال ها مانند e_1 و e_2 و ... و e_n می باشد به گونه ای که رأس انتهای e_i بر رأس ابتدای e_{i+1} باید منطبق باشد (پیوستگی باید حفظ شود!)

مسیر ساده : مسیری است که هیچ یالی در آن تکرار نشود.

مسیر ابتدایی : مسیری که هیچ رأسی در آن دو بار ملاقات نشود.



③ $e_1e_2e_3e_5e_9e_{10}e_{11}e_4$
ساده

① $e_1e_2e_3e_4$
ساده و ابتدایی

② $e_1e_2e_3e_5e_8e_3e_4$
هیچ کدام

s.a.m

96.2.16

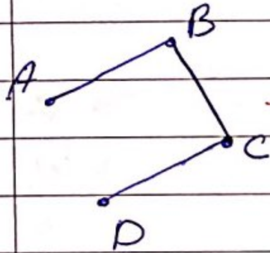
مدار : مسیری که در آن رأس ابتدایی و انتهایی منطبق باشد.

EX) مدارهای شکل قبل بررسی شود!

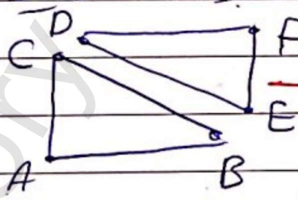
$v_1 v_2 v_3 v_4 v_7$ مدار ✗

$v_4 v_5 v_8 v_6 v_4$ مدار ✓

گراف همبند (یک پارچه، متصل) : گرافی است که بین هر 2 رأس دلخواه آن مسیری موجود باشد در غیر این صورت گراف را ناهمبند گوییم.



اگر A را از روی کاغذ بلند کنیم کل گراف بلند می‌شود پس همبند می‌باشد



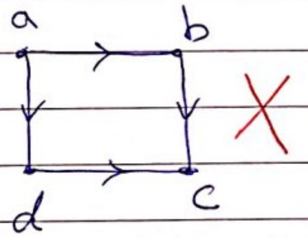
ناهمبند ← یک تکه نیست

← در مورد گراف های ناهمبند به قسمت هایی که به تنهایی همبند هستند مؤلفه یا تکه می‌گوییم. مثلاً گراف سمت راست گراف ناهمبندی با 2 مؤلفه می‌باشد.

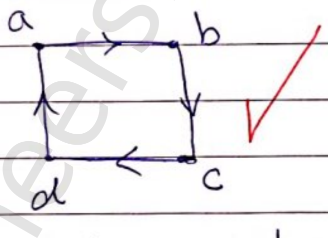
گراف همبند قوی : گراف جهت داری همبند قوی گفته می‌شود که به ازای هر 2 رأس دلخواه a و b هم مسیری از a→b و هم مسیری از b→a موجود باشد ~~قوی~~

← در مورد گراف های جهت دار بررسی می‌شود!

EX : همبند قوی؟



✗



✓

(a,b) : از a به b مسیر هست ولی از b به a نداریم

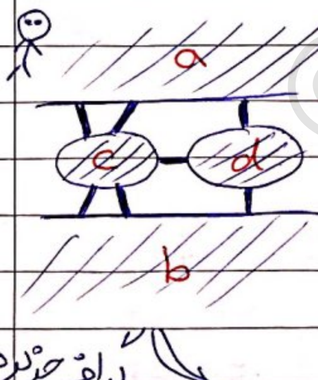
(a,b) : هم از a→b هم b→a مسیر وجود دارد

(d,c) : ״

(a,d) : ״

(b,c) : ״

همه را باید چک کنیم

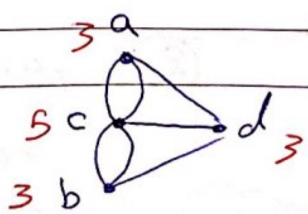


گراف جزیره

s.a.m

مسیر و مدار اویلری :

مسیر اویلری : به مسیری گفته می‌شود که از هر یال از یال‌های گراف تنها و تنها یک بار عبور کند



⇐ تمام درجات فرد است نه مدار داریم نه مسیر

96 . 2 . 16

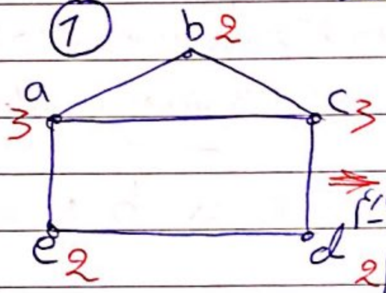
مدار اویلری: به مداری گفته می‌شود که از همه‌ی یال‌های گراف فقط و فقط ۱ بار عبور کنیم و به نقطه شروع نیز برگردیم (طبق تعریف مدار)

① **قضیه:** گراف $G=(V,E)$ دارای مدار اویلری است اگر و فقط اگر همبند بوده و رأسی با درجه فرد نداشته باشد. (صرفاً برای گراف‌های بدون جهت)

② **قضیه:** گراف بدون جهت $G(V,E)$ دارای مسیر اویلری است اگر و فقط اگر همبند بوده و حداکثر ۲ رأس از درجه فرد داشته باشد.

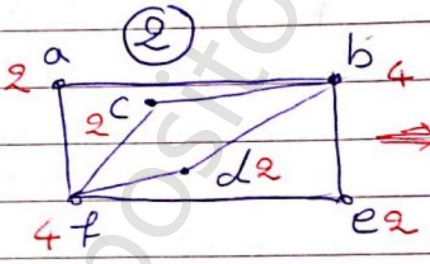
EX :

①

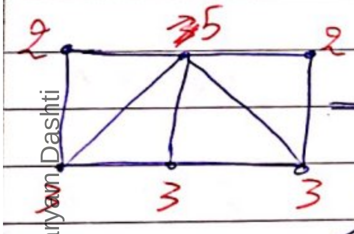


⟸ هم زوج
مسیر مدار نداریم
ولی مسیر داریم

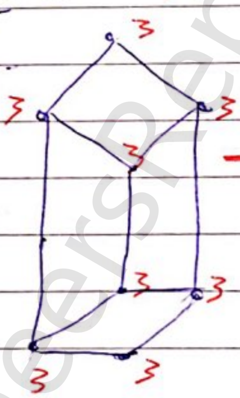
②



⟸ هم زوج
مدار داریم
مسیر هم داریم



⟵ ۴ رأس فرد
داریم نه مدار
داریم نه مسیر



⟵ درجه تمام رئوس فرد
است نه مدار داریم
نه مسیر

$a \to e \to d \to c \to a \to b \to c$ — ① مسیر اویلری برای مثال

a b e f d b c f a — ② "

a b c f d b e f a — ② مدار اویلری برای مثال

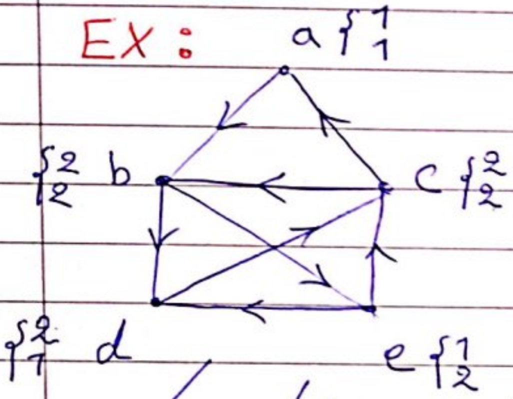
★ مدار اویلری می‌تواند یک مسیر اویلری نیز باشد.

Alidoran@Gmail 96.2.16

قضیه: گراف سودار (جهت دار) دارای مدار اویلری است اگر و تنها اگر همبند بوده و برای هر رأس $v \in V$ داشته باشیم $deg^+(v) = deg^-(v)$ (درجه ورودی و خروجی برابر باشد!) ؛ گراف جهت دار G دارای مسیر اویلری خواهد بود اگر و تنها اگر همبند بوده و به استثنای دو رأس a,b برای هر رأس دیگری مانند v داشته باشیم $deg^+(v)=deg^-(v)$

← دو رأس را چنانچه درجه ورودی خروجی نابرابر دارند تغییر یابد برابر باشد.

EX:

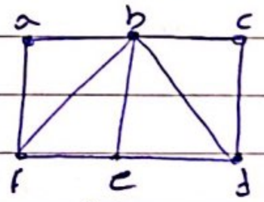


⟹ به استثنای 2 رأس بقیه رئوس درجه ورودی - خروجی یکسان دارند پس مسیر داریم ولی مدار نداریم

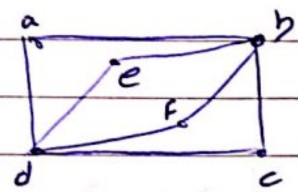
⟹ مسیر: e c b d c a b e d

مسیر همیلتونی: به مسیری گفته می‌شود که از هر رأس گراف فقط یکبار عبور کند

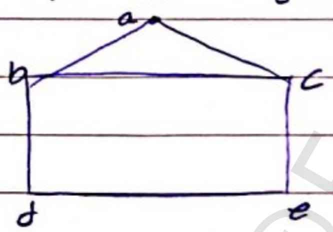
مدار همیلتونی: از هر رأس فقط و فقط یک بار عبور کند و به اول مسیر برگردد.



✓ مدار
✓ مسیر

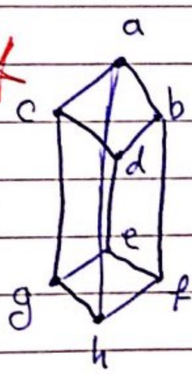


✗ مدار
✗ مسیر

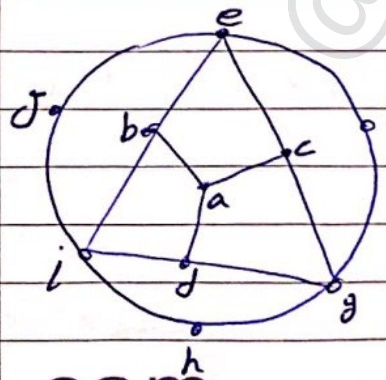


✓ مدار
✓ مسیر

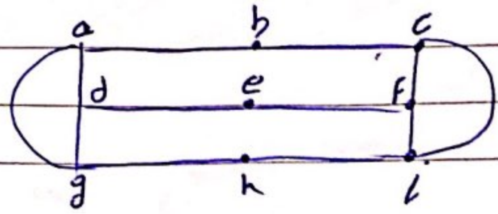
✗



✓ مدار
مسیر



مدار
مسیر



✗ مدار
✓ مسیر

96.2.16

قضیه: فرض کنید $G(V,E)$ یک گراف ساده بدون حلقه با n رأس باشد، اگر برای هر دو رأس $x,y \in V$ رابطه‌ی $deg(x)+deg(y) \geq n-1$ برقرار باشد G دارای مسیر همیلتونی است.

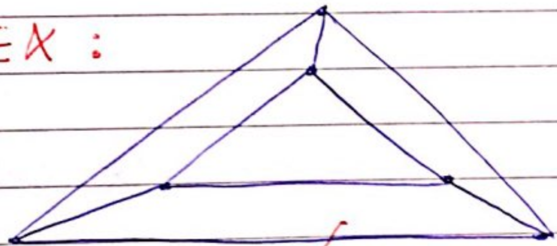
↲ اگر برای همه‌ی رئوس این برقرار بود می‌توانیم بگوییم همیلتونی است اما اگر برقرار نبود نمی‌توانیم بگوییم همیلتونی نیست!

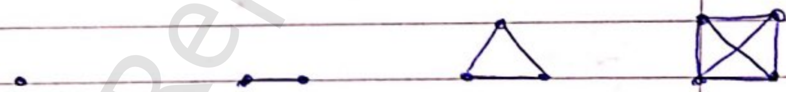
قضیه: فرض کنید $G(V,E)$ یک گراف ساده بدون حلقه با n $(n \geq 3)$ باشد، اگر برای هر دو رأس دلخواه غیر مجاور x,y رابطه‌ی $deg(x)+deg(y) \geq n$ برقرار باشد آنگاه G یک دور یا یک مدار همیلتونی دارد.

↲ اگر برقرار نبود به این معنا نیست که وجود ندارد

گراف مسطح (planar) (هامنی): گراف G را مسطح خواهیم گفت هرگاه بتوان در یک صفحه به نحوی که بتوانیم رسم کنیم که یال‌های آن فقط در رئوس آن متقاطع باشند.

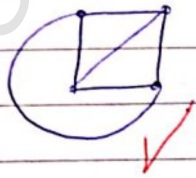
EX :



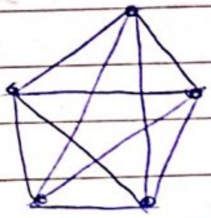


K_1 ✓ K_2 ✓ K_3 ✓ K_4 ✓

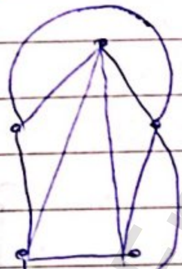
↲ K_4 را می‌توانیم به شکلی رسم کنیم که تقاطعی نباشد



* گراف‌های کامل K_1 و K_2 و K_3 و K_4 مسطح اند



K_5 ✗



K_5 ✗

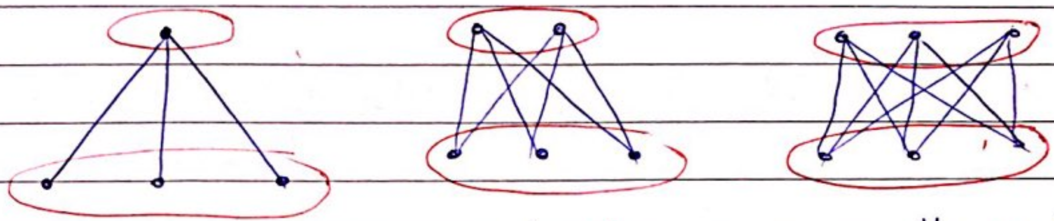
* هر جوری بکشیم تقاطع دارد پس K_5 و K_6 و K_n غیر مسطح هستند

گراف دوقطبی: یا دوبخشی، در این گراف رأس‌ها را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد که رئوس درون‌های هر بخش ارتباطی نیست اما با گره‌های بخش دیگر ارتباط وجود دارد. اگر هر کدام از اعضای یک مجموعه با تمامی اعضای مجموعه‌ی دوم در ارتباط باشند گراف دوبخشی کامل است و آن را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

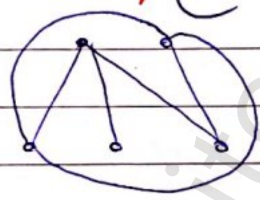
s.a.m

★ معمولا در $K_{m,n}$ ← $(m \leq n)$ 96.2.16

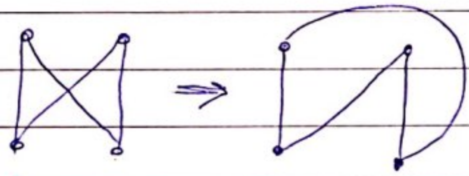
EX : $K_{1,3}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$



مسطح ✓ ⇓ مسطح ✓ ⇓ مسطح ✗



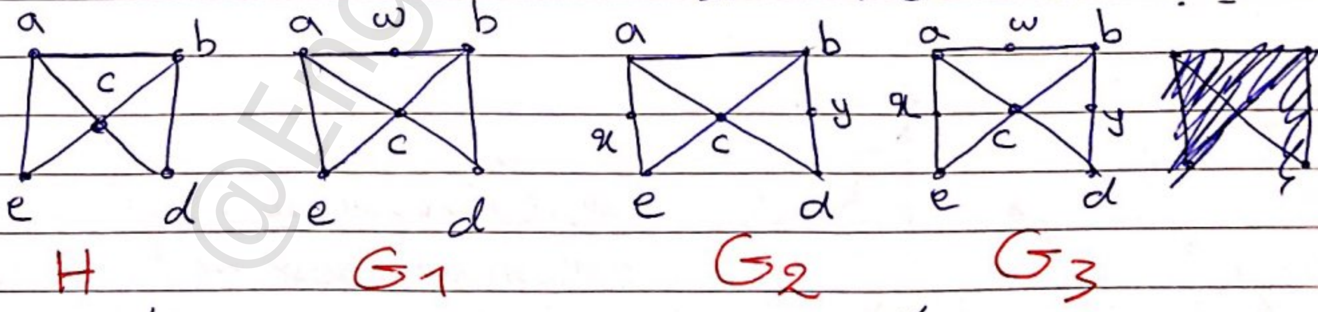
$K_{2,2}$



مسطح ✓

قضیه: (کوراتوسکی) گراف G غیر مسطح می باشد اگر و تنها اگر دارای زیرگرافی همومورف (هم ریخت، هم شکل) با یکی از گراف های K_5 و یا $K_{3,3}$ باشد.

تعریف: گراف های بی سو و بدون حلقه‌ی $G_1(V_1,E_1)$ و $G_2(V_2,E_2)$ و $G_3=(V_3,E_3)$ را هم ریخت یا همومورف گوییم هرگاه یا یک ریخت باشند (ایزومورف) و یا آن ها را بتوان از یک گراف بی سو و بدون حلقه‌ی H به وسیله‌ی یک رشته از زیربخش های مقدماتی به دست آورد.

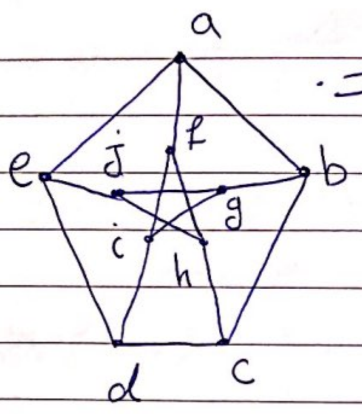


این اشکال (گراف ها) همومورف هستند یعنی از نظر شکل ظاهری یکسان اند

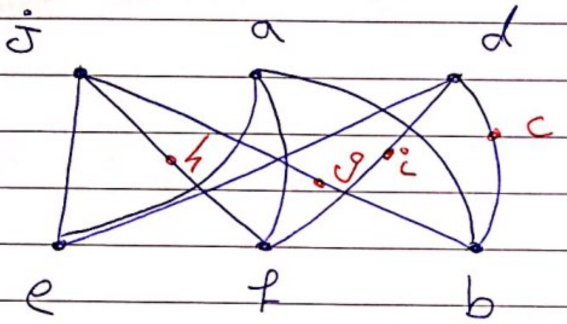
s.a.m

96.2.16

EX: می خواهیم ثابت کنیم که گراف زیر غیر مسطح است.



← باید نشان دهیم زیرگرافی در این گراف همومورف با K_5 یا $K_{3,3}$ وجود دارد (طبق قضیه)



زیرگرافی یافتیم شبیه $K_{3,3}$ پس ثابت کردیم غیرمسطح می باشد.

96.2.23

الگوریتم پیدا کردن کوتاه ترین مسیر بین دو گره a, b در G (دایکسترا) :

① فرض کنید $i=0$ و $S_i = \{a\}$ و برچسب $(-, 0)$ برای گره a و مابقی رئوس با برچسب $(-, \infty)$

② برای هر $v \in \bar{S}_i$ مقدار $L(v)$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می شود:

$$L(v) = \min\{L(v), L(u) + w(u,v)\}$$

L ← lenght طول

w ← weight وزن

حال فرض کنید u که جزو S_i است باعث شود که $L(v)$ جدید کوچکتر از $L(v)$ قبلی شود در این صورت برچسب گره v به صورت $(u, L(v))$ تغییر می یابد

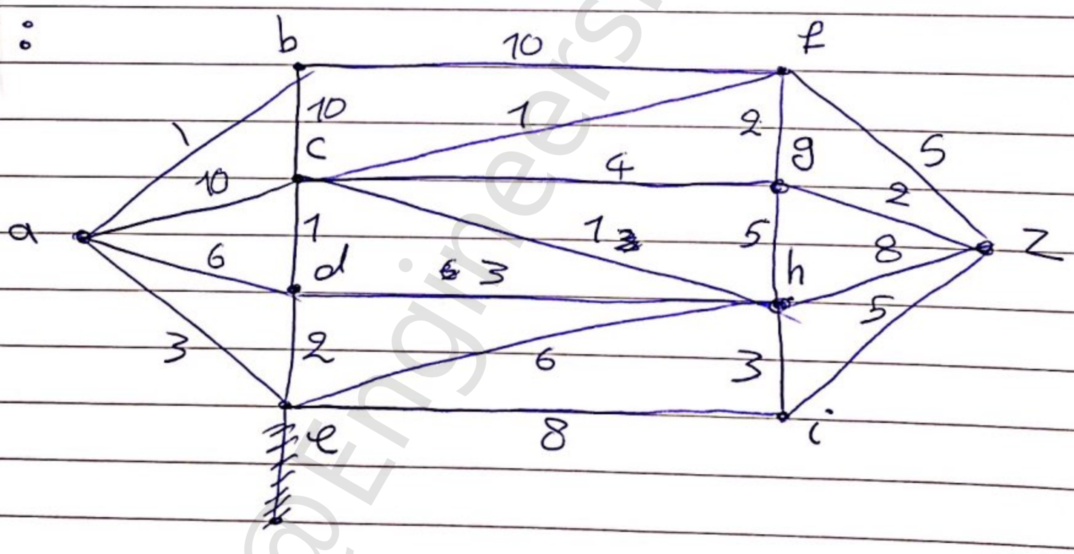
③ در انتهای هر مرحله‌ی i از میان $v \in \bar{S}_i$ آن یکی را که دارای $\min L(v)$ است به عنوان گره جدید در مسیر مورد نظر انتخاب کرده و آن را به S_i می افزاییم بنابراین :

$$S_{i+1} = S_i \cup \{v\}$$

n ← مقدار رئوس گراف

④ حال $i \leftarrow i+1$ ($i+1$ را مقدار می دهیم در i) اگر i برابر با $n-1$ یا $v = b$ (یعنی گره‌ی b به عنوان min می شود) آنگاه الگوریتم پایان می پذیرد در غیر اینصورت به مرحله‌ی ② بازگردید

EX :



96.2.23

مرحله اول

$S_0 = \{a\}$

$\overline{S_0} = \{b, c, d, e, f, g, h, i, z\}$

$L(b) = \min\{L(b), L(a) + wt(a,b)\} = \{\infty, 0+1\} = 1$

$L(c) = \min\{L(c), L(a) + wt(a,c)\} = \{\infty, 0+10\} = 10$

$L(d) = \min\{L(d), L(a) + wt(a,d)\} = \{\infty, 0+6\} = 6$

$L(e) = \min\{L(e), L(a) + wt(e,a)\} = \{\infty, 0+3\} = 3$

$L(f) = \min\{L(f), L(a) + wt(a,f)\} = \{\infty, 0, \infty\} = \infty$

$L(g) = \infty \quad L(h) = \infty \quad L(i) = \infty \quad L(z) = \infty$

	برچسب
a	(0, −)
b	~~(∞, −)~~ (1, a)
c	(∞, −) (10, a)
d	(∞, −) ~~(6, a)~~ (5, e)
e	(∞, −) (3, a)
f	~~(∞, −)~~ (11, b)
g	(∞, −)
h	(∞, −) (9, e)
i	(∞, −) (11, e)
z	(∞, −)

مرحله دوم

$S_1 = \{a, b\}$

$\overline{S_1} = \{c, d, e, f, g, h, i, z\}$

$L(c) = \min\{L(c), L(b) + wt(b,c)\} = \{10, 1+10\} = 10$

$L(d) = \min\{L(d), L(b) + wt(b,d)\} = \{6, 1+\infty\} = 6$

$L(e) = \min\{3, 1+\infty\} = 3$

$L(f) = \min\{\infty, 1+10\} = 11$

$L(g) = \min\{\infty, 1+\infty\} = \infty$

$L(h) = \infty \quad L(i) = \infty \quad L(z) = \infty$

جدول از اینجا به بعد تغییر نمی‌کند زیرا یال و مسیر بین آن‌ها نیست

$S_2 = \{a, b, e\}$

$\overline{S_2} = \{c, d, f, g, h, i, z\}$

$L(c) = \min\{L(c), L(e) + wt(c,e)\} = \min\{10, 3, +\infty\} = 10$

$L(d) = \min\{L(d), L(e) + wt(d,e)\} = \min\{6, 3+2\} = 5$

$L(f) = \min\{11, 3+\infty\} = 11$

$L(g) = \min\{\infty, 3+\infty\} = \infty$

$L(h) = \min\{\infty, 3+6\} = 9$

$L(i) = \min\{\infty, 3, 8\} = 11$ $\quad L(z) = \min\{\infty, 3+\infty\} = \infty$