هدی مکاری زاده e-dmodo.com 4v×nem

* جزوه محاسبات عددی ۲۲ بهمن

خطای برشی: خطایی پدید می‌شود که از فرمول‌های تقریبی ریاضیات استفاده کنیم

خطاها ←

خطای گردشده: به علت محدودیت نمایش عدد x در ماشین پدیدار گردد.

خطای برشی ← تقریبی از $\sqrt{e}$ را بدست آورید

یادآوری بسط تیلور

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1} \\ R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad a < \xi < x \end{cases}$$

M.T

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{e^\xi}{3! \times 8}$$

if $n = 2$

$$TE_{\text{خطای برشی}} = \sqrt{e} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{e^\xi}{3! \times 8}$$

$$TE < \frac{3}{3! \times 8}$$

$$a < \xi < x$$

$$0 < \xi < \frac{1}{2} < 1$$

$$e^\xi < e^1 < 3$$

خطای گرد شده ← نمایش عددی عدد x در پایه دلخواه β: e

علامت مثبت یا منفی

$$x = \sigma \bar{x} \beta^e$$

e ← نما

β ← پایه

$\bar{x}$ ← جزء اعشاری مانتیس

$x = 3.14156$

$x = 0.314156 \times 10^1$

چهار رقم اعشار ←

$fl(x)$ ← نمایش ماشینی عدد x

کلید اضافه نمایش ماشینی عدد x

ماشین به روش قطع کردن 3.141

ماشین به روش گرد کردن 3.142

اگر رقم پنجم بزرگتر $\beta/2$ باشد به بخش یک واحد اضافه می‌شود.

$fl(x)$ → به روش قطع کردن تا t رقم اعشار $\Rightarrow fl(x) = \sigma\,(0/x_1 x_2 x_3 \cdots x_t) \times \beta^e$

→ به روش گرد کردن تا t رقم اعشار $\Rightarrow$

→ $\sigma\,(0/x_1 x_2 x_3 \cdots x_t) \times \beta^e \rightarrow x_{t+1} < \beta/2$

→ $\sigma\,(0/x_1 x_2 \cdots x_t + 0/000\cdots 1) \times \beta^e \Rightarrow x_{t+1} \geq \beta/2$

تعریف خطای مطلق و نسبی

$L_1 = 2.34 \pm \underline{0/01}$ خطای مطلق

$L_2 = 235.14 \pm \underline{0/01}$ خطای مطلق

خطای مطلق ← اگر x_T مقدار واقعی و x_A نشان دهنده مقدار تقریبی x_T باشد

در این صورت $E(x_A) = x_T - x_A$ را خطای مطلق گویند

$$Rel(x_A) = \frac{E(x_A)}{x_T} \simeq \frac{E(x_A)}{x_A}$$ خطای نسبی

$Rel(L_{1A}) = \dfrac{0/01}{2.34}$ $\qquad Rel(L_{2A}) = \dfrac{0/01}{235.14}$

$E(L_1) = 0/01$ $\qquad E(L_2) = 0/01$

نکته: در ماشین به روش قطع کردن تا t رقم اعشار داریم

$|Rel(x_A)| < \beta^{-t+1}$ → حداکثر خطای نسبی در روش قطع کردن

$|Rel(x_A)| < \frac{1}{2}\beta^{-t+1}$ → حداکثر خطای نسبی در روش گرد کردن

- امکان دارد یک عدد موجود باشد و خطای گرد کردن و قطع کردن برابر باشد.

خطای چهار عمل اصلی

خطای جمع

$$E(x_A+y_A)=x_T+y_T-(x_A+y_A)=E(x_A)+E(y_A)$$

$$Rel(x_A+y_A)=\frac{E(x_A+y_A)}{x_T+y_T}=\frac{E(x_A)+E(y_A)}{x_T+y_T}=\frac{x_T}{x_T+y_T}Rel(x_A)$$

$$+\frac{y_T}{x_T+y_T}Rel(y_A)^{*}\leq \max\{Rel(x_A), Rel(y_A)\}$$

فرض کنیم $Rel(x_A)\leq Rel(y_A)$

$$*\leq \frac{x_T}{x_T+y_T}Rel(y_A)+\frac{y_T}{x_T+y_T}Rel(y_A)$$

خطای تفریق

$$E(x_A-y_A)=E(x_A)-E(y_A)$$

همچنین

$$Rel(x_A-y_A)=\frac{E(x_A-y_A)}{x_T-y_T}=\frac{E(x_A)-E(y_A)}{x_T-y_T}=$$

$$\frac{x_T}{x_T-y_T}Rel(x_A)-\frac{y_T}{x_T-y_T}Rel(y_A)$$

تذکر: هرگاه دو عدد x_T و y_T به هم نزدیک باشند باید از عمل تفریق به طور مستقیم استفاده نمود و باید راه حل‌های مورد نظر از عملیات دیگر محاسبه نمود.

مثال: عبارت $\cos x-\sin x$ وقتی x نزدیک $\frac{\pi}{4}$ است را به گونه‌ای محاسبه نمایید که خطای نسبی آن قابل قبول باشد.

$$\cos(p+q)=\cos p.\cos q-\sin p\sin q$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

ریشه‌های چندجمله‌ای $x^2-26x+1=0$ را به گونه‌ای محاسبه کنید که خطای نسبی ریشه‌های تقریبی قابل قبول باشد.

$$r_{1T}=13+\sqrt{168}=13+12,961481$$

$$r_{2T}=13-\sqrt{168}=13-12,9614813$$

$$Rel(r_A') = 1{,}58\times 10^{-5} \qquad Rel(r_A') = 1{,}25\times 10^{-2}$$

$$r_T^2 = 13 - \sqrt{168} = \frac{1}{13+\sqrt{168}} \to \tilde{r}_T \qquad \tilde{r}_A^2 = \frac{1}{13+12{,}961} \qquad Rel(\tilde{r}_A^2) = -1{,}03\times 10^{-5}$$

عمل ضرب :

$$E(x_A y_A) = x_T y_T - x_A y_A = x_T y_T - x_T y_A + x_T y_A - x_A y_A = x_T E(y_A) + y_A E(x_A)$$

دو خطا نیز بزرگتر می‌شود.

$$Rel(x_A y_A) = Rel(x_A) + Rel(y_A) - Rel(x_A)\times Rel(y_A)$$

$$\simeq Rel(x_A) + Rel(y_A)$$

عمل تقسیم :

$$E(x_A/y_A) = \dots$$

$$Rel(x_A/y_A) = \frac{Rel(x_A) - Rel(y_A)}{1 - Rel(y_A)}$$

ـ تذکر: هرگاه $Rel(y_A) \ll 1$ آنگاه

$$Rel(x_A/y_A) \simeq Rel(x_A) - Rel(y_A)$$

پایداری : الگوریتم یا روشی را پایدار گویند اگر در مرحله‌ای خطای نسبتاً کوچکی مانند ε اتفاق افتاد در مراحل بعدی نیز خطا الگوریتم یا روش حداکثر ε باقی بماند (منظور اندازه‌ی خطا)

مثال: مطلوب است محاسبه I_{30} از فرمول زیر

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+5} = \ln 6 - \ln 5 = \underbrace{I_0^*}_{\text{مقدار واقعی}} \pm \varepsilon$$

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx + 5\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+5}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}x^n\Big|_0^1 = \frac{1}{n}$$

$$I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}$$

$n = 1, 2, \ldots, 30$

$I_1 = 1 - 5I_0 = 1 - 5(I_0^* \pm \varepsilon) = 1 - 5I_0^* \pm 5\varepsilon$ الگوریتم پایدار نیست

$I_2 = \frac{1}{2} - 5I_1 = \frac{1}{2} - 5(1 - 5I_0^* + 5\varepsilon) = * \pm 25\varepsilon$

$\vdots$

$I_n = * \pm 5^n \varepsilon$

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \quad (I_n < I_{n-1})$ نزولی (I_n)

$I_n \longrightarrow 0$

$x^3 < x^2 < x$

$I_m \simeq I_{m-1}$

m ای وجود دارد که

برای عطای الگوریتم با این فرض که $I_{50} = I_{49}$ تحصیل می کنیم

$$I_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5} I_n$$

$n = m, m-1, \ldots, 31$

$I_{50} = \frac{1}{50} - 5I_{50} \Rightarrow I_{50} = \frac{1}{6 \times 50}$

$I_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5} I_n$

$n = m, m-1, \ldots, 31$

$50, 49$

$\cancel{I_{32} = \frac{1}{32} - 5 I_{32}}$

$I_{49} = \frac{1}{5 \times 49} - \frac{1}{5} I_{50}$

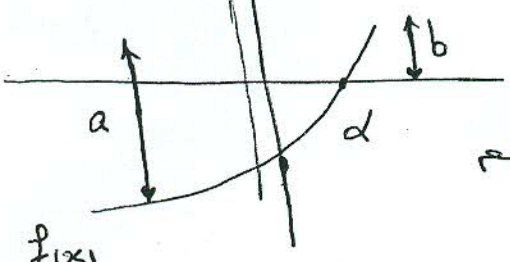
$\vdots$

ریشه یابی $f(x)=0$

$e^{-x}\sin x+\sin e^{x^2}=0$ $\quad f(\alpha)=0$ ⟵ ریشه معادله یا صفر تابع f

روش دو بخشی

$c=\frac{a+b}{2}$ ⟵ تکرار این روند



بازه ای a تا b باید طوری انتخاب کنیم که یک تغییر علامت داشته باشیم

اگر تغییر علامت طرف چپ باشد راستی خودش

و سپس تکرار روش

دنباله روش دو بخشی ⟵ خطی

الگوریتم روش دو بخشی

ابتدا بازه $[a,b]$ را به گونه ای بدست می آوریم که تابع $f(x)$ در این بازه تغییرات باشد

① بالفرض $a_1=a$ و $b_1=b$ و $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$

② اگر $f(a_1)f(c_1)<0$ ⟵ $a_2=a_1$ و $b_2=c_1$

③ اگر $f(a_1)f(c_1)>0$ ⟵ $a_2=c_1$ و $b_2=b_1$

با ادامه روند فوق (① و ②) برای بازه جدید $[a_2,b_2]$ در نهایت دنباله های a_n و b_n و c_n به گونه ای یافت می شود: $c_n\to\alpha$

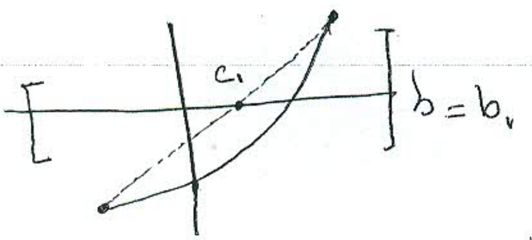
مثال: حداقل تعداد تکرار های لازم برای اینکه روش دو بخشی ریشه تابع $f(x)=x^2+3x-4$ در بازه $[0,2]$ با حداکثر خطای 5×10^{-6} بدست آورید

$$|c_n-\alpha|<\varepsilon$$

$$|c_n-\alpha|<\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2^2}=\cdots=\frac{b_1-a_1}{2^n}<\varepsilon$$

$$\frac{2-0}{2^n}<5\times10^{-6}\longrightarrow n\geq ?$$

روش نابجایی



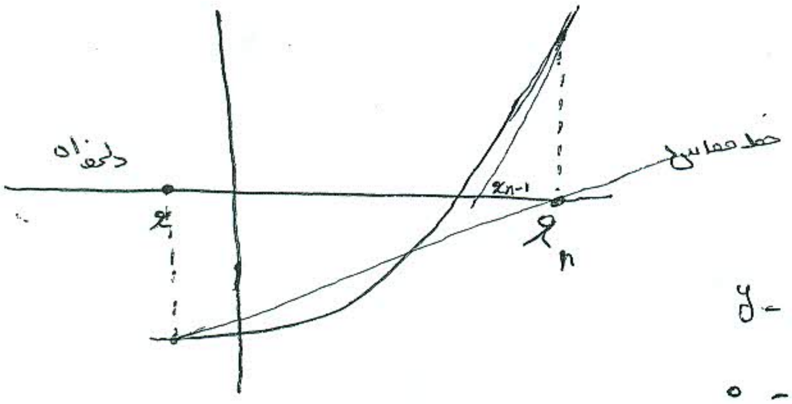
$$c_1=\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}$$

شبیه دو بخشی

هدف ⟵ سرعت همگرایی را بیشتر می کند

روش نیوتن (نیوتن رافسون)

دنباله روش نیوتن



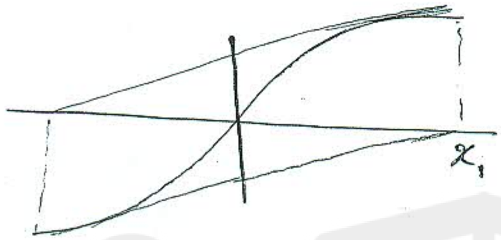
معادله خط مماس در نقطه x_n برای $f(x)$ می نویسیم

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

روش نیوتن $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$

دنباله روش نیوتن ← درجه 2



ایراد روش نیوتن ← به ابتدای بازه وابسته

$y = \sin x$

$x_1 = -x_0$ $\qquad x_1 = x_0 - \tan x_0 \longrightarrow \tan(x_0) = 2x_0$

$\xrightarrow{}$ $-x_1 = x_0$

برای بهبود کار ← حدس اولیه از طریق روش دو بخشی

مرتبه ی همگرایی

گوییم دنباله x_n همگرا از مرتبه ی p به α است هرگاه

$$\exists \lambda > 0 \quad st \quad \lim_{n \to \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p} = \lambda$$

$$|\alpha - x_{n+1}| \simeq \lambda |\alpha - x_n|^p$$

نکته: هرگاه α ریشه ی ساده تابع $f(x)$ باشد ($f'(\alpha) \neq 0$) در این صورت مرتبه همگرایی روش نیوتن حداقل 2 است.

حل:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(s_n)}{2!}(x - x_0)^2 \qquad x < s_n < x_n$$

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(s_n)}{2!}(\alpha - x_n)^2 \qquad x < s_n < x_n$$

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x) \qquad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

$$\longrightarrow -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(x-x_n)^2 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$-\frac{f''(s_n)}{2f'(x_n)}(\alpha-x_n)^2 = \alpha - x_{n+1}$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^2} = \lim \frac{|f''(s_n)|}{2|f'(x_n)|} = \frac{f''(\alpha)}{2|f'(\alpha)|} \qquad \alpha < s_n < x_n$$

روش وتری : بهبود یافته روش نیوتن

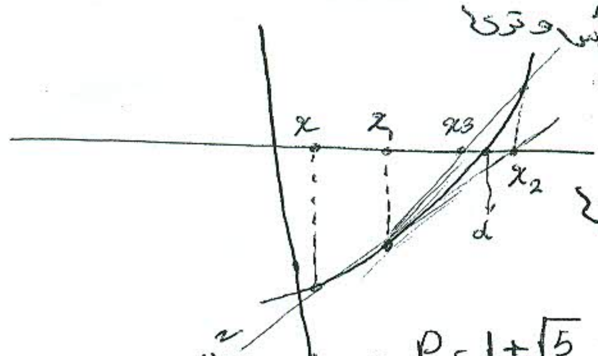
دنباله نیوتن

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow f'(x_n) = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

نیاز به تعیین عبارت مشتق نیست

دلخواه

جایگذاری روش وتری



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

دنباله روش وتری

نکته: مرتبه‌ی همگرایی روش وتری $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عبارت دیگر

$$\lim \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

ریشه‌های تکراری :

تابع $f(x)$ دارای ریشه‌ی تکراری که از مرتبه m است هرگاه

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

به عبارت دیگر هرگاه α که ریشه‌ی تکراری مرتبه m تابع $f(x)$ باشد در این صورت وجود دارد یک تابع مانند $h(x)$ به طوری که $h(\alpha) \neq 0$

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$x\sin x = x^2 h(x)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

تذکر: هرگاه α ریشه تکراری مرتبه $m>1$ تابع $f(x)$ باشد آنگاه روش نیوتن از مرتبه همگرایی ۱ است
اما با همگرایی دادن روش نیوتن به صورت

① $$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

② $$x_{n+1} = x_n - \frac{f^{(m-1)}(x_n)}{f^{(m)}(x_n)}$$

داریم که روش ① و ② برای یافتن α از مرتبه 2 است.

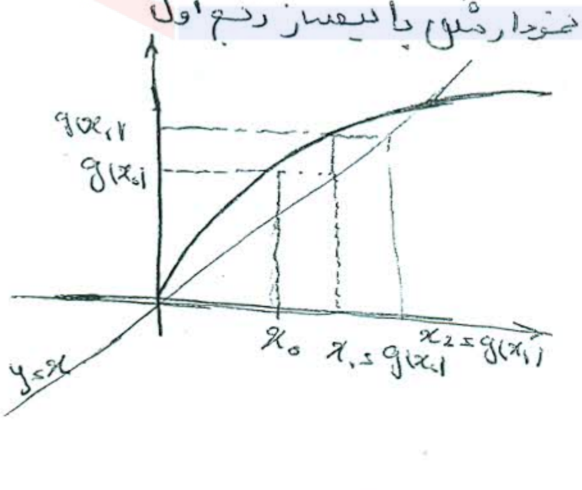
روش تکرار نقطه ثابت

تعریف: نقطه β را نقطه ثابت تابع $f(x)$ گویند هرگاه $f(\beta) = \beta$

حل تقاطع نمودار شکل با نیمساز ربع اول

$$f(x) = 0 \longrightarrow x = g(x)$$

$$\underbrace{x + f(x)}_{g(x)} = x$$



$$x^3 - x - 1 = 0$$

$$x(x^2-1) = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{x^2-1}$$

تعریف: تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را انقباضی گویند هرگاه

$$\exists k<1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < k|x-y| \quad \forall x,y \in D_f$$

تذکر: یکی از شرایط کافی برای انقباضی بودن تابع $f: [a,b] \to [a,b]$ این است که

$$\max_{a \le x \le b} |f'(x)| \le k < 1$$

$$f(x)-f(y)=f'(c)(x-y) \longrightarrow |f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|$$

$$\longrightarrow |f(x)-f(y)|<k|x-y|$$

الگوریتم روش تکرار نقطه ثابت

ابتدا بازه $[a,b]$ را که تابع $f(x)$ در آن ریشه دارد به گونه‌ای می‌یابیم که با تبدیل معادله $f(x)=0$ به $x=g(x)$ روابط زیر برای تابع $g(x)$ برقرار باشد.

1) $g:[a,b]\longrightarrow[a,b]$

2) $\max|g'(x)|=k<1$

در این صورت با تعریف دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ داریم که دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ به نقطه ثابت تابع $g(x)$ (همان ریشه تابع $f(x)$) به ازای هر حدس اولیه $x_0\in[a,b]$ همگراست.

مثال: معادله $f(x)=x^3-x-1$ را توسط روش تکرار نقطه ثابت حل کنید.

$\alpha\in[1,2]$ $\qquad f(x)=0 \longrightarrow x=g(x)$

1) $x=\frac{1}{x^2-1}=g_1(x)$ ✗ دامنه و برد یکی نیست

2) $x=x^3-1=g_2(x)$ برد زیرمجموعه دامنه نیست / به دلیل مشتق

3) $x=\sqrt[3]{x+1}=g_3(x)$ ✓ صعودی

4) $x=\frac{x+1}{x^2}=g_4(x)$ دامنه و برد یکی نیست

5) $x=x^4-x^2=g_5(x)$ مشتق بزرگتر از یک

$$|g_3'(x)|=\left|\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right|<1 \quad \forall x\in[1,2]$$

$$1<g_3(1)=\sqrt[3]{2}, \quad g_3(2)=\sqrt[3]{3}<2 \longrightarrow g_3:[1,2]\longrightarrow[1,2]$$

$\begin{cases} x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+1} \\ n=0,1,2,\dots \quad x_0\in[1,2] \end{cases}$ $\qquad x_1=\sqrt[3]{1.1+1}=a$, $\quad x_2=\sqrt[3]{a+1}=b$

مثال: نشان دهید که در روش نیوتن یکی از شرایط لازم برای همگرایی مناسب برقراری رابطه زیر است $|f(x_0) f''(x_0)| < |f'(x_0)^2|$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$|g'(x)| < 1$$

مثال: معادله $f(x) = 3x - 2e^{-x}$ را توسط روش تکرار نقطه ثابت حل کنید

$$x = \frac{2}{3} e^{-x} \quad [0, 1] \qquad f(x) = 0 \longrightarrow x = g(x)$$

$$g(x) = \frac{2}{3} e^{-x}$$

$$g'(x) = \left|-\tfrac{2}{3} e^{-x}\right| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = \tfrac{2}{3} e^{-x_n}$$

$x_0 \in [0, 1]$

مثال: حداقل تکرارهای لازم برای تقریب ریشه تابع $f(x) = 3x - 2e^{-x}$ را توسط روش تکرار نقطه ثابت با حداکثر خطای 5×10^{-6} بیابید

$$|x_m - \alpha| < 5 \times 10^{-6}$$

$$x_n - \alpha = g(x_{n-1}) - g(\alpha) = g'(c)(x_{n-1} - \alpha)$$

$$|x_n - \alpha| < K|x_{n-1} - \alpha| \qquad |x_{n-1} - \alpha| < K|x_{n-2} - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|x_n - \alpha| \leq K^n |x_0 - \alpha|$$

$$|x_0 - \alpha| \leq |x_1 - x_0| + |x_1 - \alpha|$$

$$|x_0 - \alpha| = |\underbrace{x_0 - x_1}_{a} + \underbrace{x_1 - \alpha}_{b}| \leq |x_1 - x_0| + |x_1 - \alpha|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$x_1-\alpha=g(x_0)-g(\alpha)=g'(c)(x_0-\alpha)$$

$$|x_1-\alpha|<k|x_0-\alpha|$$

$$|x_0-\alpha|\leq|x_1-x_0|+|x_1-\alpha|\leq|x_1-x_0|+k|x_0-\alpha|$$

$$\longrightarrow (1-k)|x_0-\alpha|<|x_1-x_0|$$

$$\longrightarrow |x_0-\alpha|<\frac{1}{1-k}|x_1-x_0|$$

$$|x_n-\alpha|\leq\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|<5\times10^{-6}$$

براساس قضیه داشتیم

$k=2/3$

قضیه: هرگاه α نقطه‌ی ثابت تابع $g(x)$ باشد و داشته باشیم که

$$g'(\alpha)=g''(\alpha)=\dots=g^{(p-1)}(\alpha)=0,\quad g^{(p)}(\alpha)\neq0$$

در این صورت دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ از مرتبه p به α همگراست

$$g(x)=g(\alpha)+g'(\alpha)(x-\alpha)+\dots+\frac{g^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x-\alpha)^{p-1}+\frac{g^{(p)}(\delta_x)}{p!}(x-\alpha)^p$$

$x\leq\delta_x\leq\alpha$

$$x_{n+1}=g(x_n)=\alpha+\frac{g^{(p)}(\delta_n)}{p!}(x-\alpha)^p$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{|g^{(p)}(\delta_n)|}{p!}=\frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!}$$

مثال: فرمول تکراری $x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3r)}{3x_n^2+r}$ در نظر بگیرید

الف) حد دنباله در صورت وجود:

ب) نشان دهید مرتبه همگرایی همواره برابر است با 3

$n \longrightarrow \infty$

$x_n , x_{n+1} \longrightarrow L$

$$L = \frac{L(L^2+3r)}{3L^2+r} \Rightarrow 3L^3 + Lr = L^3 + 3Lr \longrightarrow L^2 = r$$

$$L = \pm\sqrt{r}$$

$$L = 0$$

چون رفته رفته از صفر بزرگتر می‌شود پس به $\sqrt{r}$ همگراست .

$$g(x) = \frac{x(x^2+3r)}{3x^2+r}$$

حداقل ← یکبار مشتق

دقیقاً ← $g'(x)$ در $\sqrt{r}$ غیرصفر است

$$g'(x)\Big|_{\sqrt{r}} = 0$$

حل دستگاه‌های غیرخطی

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f(x) = 0$

$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

$f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$

$\vdots$

$f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$

روش نیوتن برای حل دستگاه‌های غیرخطی

$X_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^n)$

$$f(x) = f(x_n) + Df(x_n)(x - x_n) + O(\|x - x_n\|^2)$$

از توان‌های بزرگتر از 2 صرف‌نظر می‌کنیم

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$ نرم اقلیدسی

$$\|x - x_n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x - x_n^i)^2}$$

$$Df(x_n) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\Big|_{x = x_n}$$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (\underbrace{x^2+y^2-1}_{f_1} \,,\, \underbrace{e^{-x}+y-1}_{f_2}) \qquad Df(x_0) = \left.\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -e^{-x} & 1 \end{pmatrix}\right|_{x_0(x_0,y_0)}$$

حال برای یافتن x_{n+1} با جایگذاری در رابطه زیر داریم که

$$f(x) = f(x_n) + Df(x_n)(x-x_n)$$

$$0 = f(x_{n+1}) = f(x_n) + Df(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$

$$\longrightarrow x_{n+1} = x_n - (Df(x_n))^{-1} f(x_n)$$

حال با معرفی تصحیح کننده $h_n = -(Df(x_n))^{-1} f(x_n)$ داریم که

$$\begin{cases} Df(x_n)h_n = -f(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + h_n \end{cases}$$

دستگاه روش نیوتن برای حل دستگاه غیر خطی

مثال: دستگاه غیرخطی
$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ e^{-x}+y-1=0 \end{cases}$
را در نظر بگیرید

مطلوبست محاسبه دو تکرار اول روش نیوتن برای حل دستگاه غیرخطی فوق ($x=(0,1)$)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -e^{-x} & 1 \end{pmatrix}$$

تکرار اول

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_0^1 \\ h_0^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow h_0^1 = \alpha \,,\, h_0^2 = \beta \\ x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\beta \end{pmatrix} \end{cases}$$

تکرار دوم

$$\begin{cases} Df(x_1)h_1 = -f(x_1) \\ x_2 = x_1 + h_1 \end{cases}$$

جواب مسأله

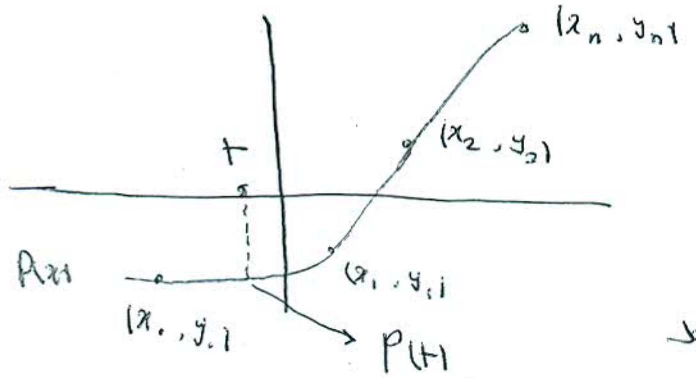
درونیابی:

اعداد تغییر آزمایشی

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

$y(x)=?$

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$



بسط تیلور حول یک نقطه

$f(x) : f(3)$

ولی درونیابی برای ~~همه~~ نقاط

$P(x_i) = y_i$

تعریف درونیاب

تابع $S(x)$ را تابع درونیاب نقاط $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\}$ گویند هرگاه $S(x_i)=y_i$ و هرگاه $S(x)$ یک چندجمله‌ای باشد به آن چندجمله‌ای درونیاب نقاط فوق گویند $i=0,\dots,n$

قضیه: هرگاه داده‌های $\{(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)\}$ به گونه‌ای باشند که x_iها متمایز باشند آنگاه یک و فقط یک چندجمله‌ای درونیاب از درجه حداکثر n مانند $P_n(x)$ وجود دارد به طوری که $P_n(x_i)=y_i$

مثال: واضح است که داده‌های

x	-1	0	1
y	-1	0	1

توسط چندجمله‌ای های $f_1(x)=x$ و $f_2(x)=x^3$ درونیابی می‌شوند آیا این مسئله با قضیه قبل در تناقض است

پاسخ: خیر

تعریف چندجمله‌ای های لاگرانژ: برای داده‌های $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ چندجمله‌ای های لاگرانژ از درجه حداکثر n به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \qquad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$L_i(x_j) = \delta_{ij}$ دلتای کرونکر

مثال: چندجمله های لاگرانژ داده‌های

رابطه $\begin{Bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0, & 1, & 3, & 7 \end{Bmatrix}$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-7)}{(1-0)(1-3)(1-7)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-7)}{(3-0)(3-1)(3-7)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(7-0)(7-1)(7-3)}$$

نکته: چند جمله ای لاگرانژ $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)\}$ یک مجموع مستقل خطی است:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i L_i(x) = 0 \longrightarrow c_i = 0$$

$$\longrightarrow c_0 L_0(x_0) + c_1 L_1(x_0) + c_n L_n(x_0) = 0$$

$$\longrightarrow c_0 = 0$$

$$q_n(x) = 0$$

تعریف چندجمله ای درونیاب لاگرانژ

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

مثال: چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ داده‌های

رابطه $\{(0,2),(1,4),(3,6),(7,12)\}$

$$q_3 = 2L_0(x) + 4L_1(x) + 6L_2(x) + 12L_3(x)$$

قضیه: خطای چندجمله ای درونیاب:

اگر تابع f مشتق پذیر از مرتبه $n+1$ باشد در این صورت اگر $P_n(x)$ چندجمله ای درونیاب تابع $f(x)$ در نقاط $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ باشد داریم که:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

بطوریکه

$$\min_{0 \le i \le n}\{x_i\} < \xi_x < \max_{0 \le i \le n}\{x_i\}$$

مثال: مطلوب است نشان دهید که $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$ که در آن $L_i(x)$ چندجمله ای لاگرانژ داده های $\{x_1, x_2, \dots\}$ است:

حل تابع $f(x) = 1$ را در نظر بگیرید در این صورت واضح است که چندجمله ای درونیاب لاگرانژ تابع $f(x)$ در نقاط اختیاری $\{x_0, \dots, x_n\}$ عبارت است از

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} 1 \times L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$$

از طرفی طبق قضیه چندجمله ای درونیاب داریم که

$$f(x) - q_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$1 - \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 0 \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

درونیاب نیوتن ← فقط یک درونیاب برای تعدادی داده وجود دارد.

تعریف تفاضلات منقسم: تفاضلات منقسم مرتبه صفر تا n تابع $f(x)$ در نقاط $\{x_0, \dots, x_n\}$ به صورت زیر معرفی می شود.

$$f[x_j] = f(x_j)$$ مرتبه صفر

$$f[x_i\, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}$$ تفاضلات منقسم مرتبه اول

$$\vdots$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

به همین طریق تفاضلات منقسم مرتبه‌ی n بصورت تعریف می‌شود.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

جدول تفاضلات منقسم

	ستون صفر	ستون اول	ستون دوم	ستون n ام
x_0	$f[x_0]$	*	*	
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	*	*
			قطر اصلی	*
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, \ldots, x_n]$

چند جمله‌ای درونیاب نیوتن

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n})$$

تذکر: واضح است که اگر داده‌ی x_{n+1} به مجموعه درونیابی اضافه گردد درونیاب جدید داده‌ها $[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]$ به صورت زیر است 12

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x-x_0)\dots(x-x_n)$$

*هر دو درونیاب لاگرانژ و نیوتن با هم برابرند

مثال: چندجمله‌ای درونیاب داده‌های $\{-1, 2, 3, 4\}$ تابع $f(x) = x^3 + x - 1$ را بیابید

ب) اگر داده‌ی $x_4 = 5$ را به مجموع درونیاب‌ها اضافه کنیم چندجمله‌ای درونیاب را بدست آورید

	ستون صفر	ستون یک	ستون دوم	ستون سوم	
-1	-3	*	*	*	*
2	9	4	*	*	*
3	29	20	4	*	*
4	67	~~46~~ 38	9	1	*
5	129	62	12	1	0

چون تنها یک چندجمله‌ای درونیاب از حداکثر درجه n وجود دارد. پس از جمله‌ی ستون n+1 به بعد صفر است

$$P(x) = -3 + 4(x+1) + 4(x+1)(x-2) + 1(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$P_4(x) = P_3(x)$$

تذکر:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!}$$

$$\min\{x_i\} \leq \mu \leq \max\{x_i\}$$
$$0 \leq i \leq n$$

مثال: فرض کنید $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ باشد و نقاط درونیاب $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ موجود است مطلوب است محاسبه ستون nام و n+1 ام جدول تفاضلات منقسم تابع $f(x)$ در نقاط فوق؟

حل: واضح است nام آن برابر است با a_n زیرا در ستون nام مقادیر
ستون

تفاضلات منقسم مرتبه n وجود دارد. که طبق تذکر قبل با مشتق مرتبه nام

تابع $f(x)$ ارتباط دارد.

$$f^{(n)}(x) = a_n n!$$

$$\longrightarrow f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{a_n n!}{n!} = a_n$$

ستون nام

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}$$

ستون n+1ام تفاضلات منقسم

$$= 0$$

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0)$$

بسط تیلور در دنباله نقاط x_0 حول نقطه x_0 به تعداد n+1.

$$f[x_0, x_0, x_0] = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$\vdots$$

تمرین:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}} (x_j - x_i)}$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \sin x + \cos x$ همچنین می‌دانیم که

$x_i = \frac{i}{5}$ $(i=0,\dots,5)$ و (معلوم A) $f[x_0, x_1, \dots, x_5] = A$

$f[x_2, x_3, x_5, x_4, x_1]$ مطلوب است محاسبه

تذکر: اگر δ یک تابع جایگشت باشد

$\delta(0)=2$
$\delta(1)=0$
$\delta(2)=3$
$\delta(3)=5$
$\delta(4)=4$
$\delta(5)=1$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{\delta(0)}, x_{\delta(1)}, \dots x_{\delta(n)}]$$

- تفاضلات پیشرو و پسرو ($f(x_i)=f_i$)

$\Delta^0 f_i = f_i$

$\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i$ تفاضل پیشرو مرتبه اول

$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$ تفاضل پیشرو مرتبه دوم

$\vdots$

$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$

تفاضلات پسرو:

$\nabla^0 f_i = f_i$ پسرو مرتبه صفر

نبا $\nabla^1 f_i = f_i - f_{i-1}$

$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$

$\vdots$

$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$

$$\Delta^k f_0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i$$

$$\Delta^k f_j = ?$$

نمایش درونیاب نیوتن برحسب تفاضلات پیشرو

قضیه، فرض کنید داده‌های درونیابی به گونه‌ای باشند که $x_i - x_{i-1} = h$ $\forall i$

(متساوی الفاصله) در این صورت

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{h^n n!}$$

$n=1$ $$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$
$$f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$(x - x_0) = th$ $\qquad$ $(x - x_2) = (t-2)h$

$(x - x_1) = (t-1)h$ $\qquad \vdots$

$(x - x_0 + x_0 - x_1)$ $\qquad$ $(x - x_n) = (t-n)h$

$$= \Delta^0 f_0 + \frac{\Delta f_0}{h} th + \frac{\Delta^2 f_0}{h^2 2!} t(t-1)h^2 + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n} t(t-1)\dots(t-n+1)h^n$$

$$= \Delta^0 f_0 + \Delta f_0 \binom{t}{1} + \Delta^2 f_0 \binom{t}{2} + \dots + \Delta^n f_0 \binom{t}{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{t}{i} \Delta^i f_0 = P_n(t)$$

مثال: مطلوب است محاسبه چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = x^3 + 1$ در نقاط درونیاب

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$$

سپس مقدار چندجمله‌ای درونیاب نقاط فوق از نقطه‌ی $x = 2/7$ محاسبه نمایید

برای حل گام های مساوی

$0 \quad 1 = \Delta^0 f_0$

$\overset{1}{\cancel{\Delta^1} f_0} \quad \overset{6}{\cancel{\Delta^2} f_0} \quad \overset{6}{\cancel{\Delta^3} f_0}$

$1 \quad 2 = \Delta^0 f_1$

$\overset{7}{\cancel{\Delta^1} f_1} \quad \overset{12}{\cancel{\Delta^2} f_1}$

$2 \quad 9 = \Delta^0 f_2$

$\overset{19}{\cancel{\Delta^1} f_2}$

$3 \quad 28 = \Delta^0 f_3$

$$P_3(t) = \sum_{i=0}^{3} \binom{t}{i} \Delta^i f_0$$

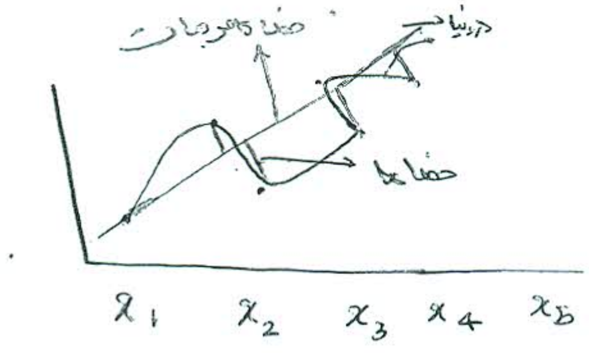
$h = 1 \qquad x - x_0 = th$

$x_0 = 0 \longrightarrow 2, 7 - 0 = t$

$$P_3(t) = \Delta^0 f_0 + \Delta^1 f_0 t + \Delta^2 f_0 \frac{t(t-1)}{2!} + \Delta^3 f_0 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}$$

$$= 1 + t + 3t(t-1) + t(t-1)(t-2)$$

حداقل مربعات



$y = ax + b$

فرض کنیم داده‌های (x_n, y_n) . . . . . , (x_1, y_1) در دست باشد

یک چندجمله مانند $P(x)$ از درجه حداکثر m به گونه‌ای است که تابع

$$E(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_m x_i^m)^2$$

کمترین مقدار ممکن

$$p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_mx^m$$

از ریاضیات معرفی داریم که

$$\frac{\partial E}{\partial a_0}=0 \longrightarrow -2\sum_{i=1}^{N}(y_i-a_0-a_1x_i-\dots-a_mx_i^m)=0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{N}y_i=\sum_{i=1}^{N}a_0+\sum_{i=1}^{N}x_ia_1+\dots+\sum_{i=1}^{N}x_i^m a_m$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1}=0 \longrightarrow -2\sum_{i=1}^{N}x_i(y_i-a_0-a_1x_i-\dots-a_mx_i^m)=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2}=0 \longrightarrow -2\sum_{i=1}^{N}x_i^2(y_i-a_0-a_1x_i-\dots-a_mx_i^m)=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_m}=0 \longrightarrow -2\sum_{i=1}^{N}x_i^m(y_i-a_0-a_1x_i-\dots-a_mx_i^m)=0$$

ماتریس $AX=b$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N}1 & \sum_{i=1}^{N}x_i & \dots & \sum_{i=1}^{N}x_i^m \\ \sum_{i=1}^{N}x_i & \sum_{i=1}^{N}x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{N}x_i^{m+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N}x_i^m & & & \sum_{i=1}^{N}x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N}y_i \\ \sum_{i=1}^{N}x_iy_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N}x_i^m y_i \end{pmatrix}$$

$$f_{xx}>0 \qquad D=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}>0$$

داده های مفروض هستند

x	0	1	3	6
y	6	2	-5	1

الف) مطلوب است یافتن بهترین خط راست که داده های زیر را برازش می کند

ب) مطلوب است بهترین تابع هموگرافیک $y=\frac{x}{ax+b}$ که داده های فوق را برازش کند

ج - داده‌های

x	1	3	-1	-2
y	2	5	4	7

مفروض است مطلوب است یافتن بهترین بهترین تابع ممایی به فرم $y = a e^{bx}$ را برازش کنید

الف)

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 15 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_0, a_1 \checkmark$$

ب)

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{4} \left(y_i - \frac{x_i}{a x_i + b_i} \right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

از طریق ۱۱ ⟵ (۰,۰) اشکال دارد

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{Y} = \frac{ax+b}{x} = a + b \underbrace{\frac{1}{x}}_{X} \qquad Y = a + bX$$

$$y = \frac{x}{ax+b} \qquad (0,0) \longrightarrow \text{صدق می‌کند}$$

$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$1/y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{5}$	1

ج - تغییر جدول [illegible] مناسب

$$\underbrace{\ln y}_{Y} = \underbrace{\ln a}_{A} + bx \qquad Y = A + bx$$

روش کلی حل : تبدیل تابع داده شده به یک خط یا چند جمله ای

- انتگرال گیری عددی

قضیه : هرگاه T_N روش ذوزنقه‌ای مرکب به طوری که $N = 2^n$ باشد در این حالت

با فرض اینکه f به اندازه کافی مشتق پذیر باشد در این صورت داریم :

$$I(f) = T_N + c_2h^2 + c_4h^4 + c_6h^6 + \dots$$

به طوری که c_i ها فقط به f بستگی دارند

با استفاده از قضیه، فرض هرگاه تعداد نقاط را از N به $2N$ افزایش دهیم (یا اینکه h را به $h/2$) تغییر دهیم آنگاه داریم که

$$① \quad I(f) = T_N + c_2h^2 + c_4h^4 + c_6h^6 + \dots$$

$$② \quad I(f) = T_{2N} + c_2\frac{h^2}{4} + c_4\frac{h^4}{16} + c_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots$$

$$4 \times ② - ① \longrightarrow 3I(f) = 4I_{2N} - I_N + c_4\left(\frac{h^4}{4} - h^4\right) + \dots$$

$$\longrightarrow I(f) = \frac{4I_{2N} - T_N}{3} + O(h^4)$$

جدول رامبرگ : اساس جدول رامبرگ روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای است که به این طریق که ابتدا برای $h = 2^n$ روش ذوزنقه‌ای مرکب را بدست می‌آوریم $O(h^2)$

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$n=0$	T_1			
$n=1$	T_2	T_2^1		
$n=2$	T_4	T_4^1	T_4^2	
$n=3$	T_8	T_8^1	T_8^2	T_8^3

$$T_{2k}^{m} = \frac{4^m T_{4k}^{m-1} - T_{2k}^{m-1}}{4^m - 1} \qquad k = 2^{m-1}, 2^m, \dots$$

مثال :

تقریب $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ را توسط جدول رامبرگ با $n=2$ بدست آورید

T_1

$T_2 \quad T_2^1$

$T_4 \quad T_4^1 \quad T_4^2$

$$T_1 = \frac{f(0)+f(1)}{2}$$

$$T_2 = \frac{1}{4}\left[f(0)+2f(\tfrac{1}{2})+f(1)\right]$$

$x_i = a+ih$
$\hookrightarrow n=0,\dots$
$h=\frac{1}{2}$

$$T_4 = \frac{1}{6}\left[f(0)+2f(\tfrac{1}{3})+2f(\tfrac{2}{3})+f(1)\right]$$

$$T_2^1 = \frac{4T_2 - T_1}{3} \qquad T_4 = \frac{4T_4 - T_2}{3}$$

$$T_4^2 = \frac{16T_4^1 - T_2^1}{15}$$

مثال : مطلوب است یافتن ضرایب α، β و γ به گونه ای که

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx = \alpha f(0) + \beta f(\tfrac{1}{2}) + \gamma f(1)$$ برای تمام چندجمله ای ها از درجه حداکثر 2 دقیق باشد

فضای تمام چندجمله ای ها از درجه حداکثر 2

$$P_2(x) = \{a+bx+cx^2 \ \ s.t\ \ a,b,c\in\mathbb{R}\} = \langle 1, x, x^2\rangle$$

پایه استاندارد $P_2(x)$ است

$f(x) = a+bx+cx^2$

باید برای پایه ها بررسی شود بدون اشکال که تابع خطی است .

$f(x)=1 \longrightarrow \int_0^1 e^x\,dx = \alpha+\beta+\gamma$

$f(x)=x \longrightarrow \int_0^1 xe^x\,dx = \frac{1}{2}\beta+\gamma$

$xe^x - e^x$

$f(x)=x^2 \longrightarrow \int_0^1 x^2e^x\,dx = \frac{1}{4}\beta+\gamma$

$x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$

$$\int_0^1 e^x(a+bx+cx^2)\,dx = a\int_0^1 e^x\,dx + b\int_0^1 xe^x\,dx + c\int_0^1 x^2e^x\,dx$$

$$e-1=\alpha+\beta+\gamma$$
$$1=\frac{1}{2}\beta+\gamma$$
$$e-2=\frac{1}{4}\beta+\gamma$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{pmatrix}$$

- انتگرال‌گیری گوس

$$G_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{w_i}_{\text{وزن}}\,\underbrace{f(x_i)}_{\text{گره}}$$

$n=1$ گوس یک‌نقطه‌ای

$n=2$ گوس دونقطه‌ای

ذوزنقه $\{x=a\ ,\ x=b\}$

سیمسون $\{x=a\ ,\ x=\frac{a+b}{2}\ ,\ x_2=b\}$

میانی $\{x=\frac{a+b}{2}\}$

$$T(f)=\sum_{i=1}^{2}w_i f(x_i) \qquad w_1=w_2=\frac{b-a}{2}$$

$$S(f)=\sum_{i=1}^{3}w_i f(x_i) \qquad w_1=\frac{b-a}{6}$$
$$w_2=\frac{4}{6}(b-a)$$
$$w_3=\frac{b-a}{6}$$

- تذکر: تمام روش‌های قبلی به غیر از روش انتگرال‌گیری گوسی مرتبه دقت n هم باشند.

- تذکر: تمام فرمول‌ها برای انتگرال برای حدود $[-1,1]$ است $\int_{-1}^{1}f(x)dx$

اما اگر هدف تقریب $\int_a^b f(x)dx$ توسط روش انتگرال‌گیری گوسی باشد داریم که:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{-1}^{1}f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)dt$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \xrightarrow{\text{تبدیل به } [-1,1]}$$

فرمول گوس تک نقطه $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \omega_1 f(x_1)$

$= 2f(0)$

$f(x)=1 \longrightarrow 2=\omega_1$

$\underbrace{f(x)=x}_{\text{پارامتر درجه ۱}} \longrightarrow 0=W_1x_1 \longrightarrow x_1=0$

فرمول گوس دو نقطه

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

$f(x)=1 \longrightarrow W_1+W_2=2$

$f(x)=x \xrightarrow{\times 2\ (*)} 0=W_1x_1+W_2x_2 \longrightarrow x_1=-x_2$

$f(x)=x^2 \longrightarrow \frac{2}{3}=\omega_1x_1^2+\omega_2x_2^2 \longrightarrow \omega_1=\omega_2 \longrightarrow W_1=W_2=1$

$f(x)=x^3 \xrightarrow{\text{کم}\ (*)} 0=W_1x_1^3+W_2x_2^3 \longrightarrow x_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = W_1f(x_1)+W_2f(x_2) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

فرمول گوس دو نقطه

فرمول گوس n نقطه

در حالت کلی ثابت می‌شود، که اگر ریشه‌های چندجمله‌ای های لژاندر که به صورت زیر تعریف می‌شود را بدست آوریم همان x_i ها از روش انتگرال گیری گوس است

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \quad n=0,1,\ldots$$

$L_0(x)=1$

$L_1(x)=x$

$$L_2(x) = \frac{1}{4\times 2}\left[(x^2-1)^2\right]'' = \frac{1}{8}\left[2\times 2x(x^2-1)\right]' = \frac{1}{2}\left[(x^2-1)+2x^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[3x^2-1\right]$$

همچنین برای محاسبه ی وزن ها نیز داریم

$$w_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2 (L_{n-1}(x_i))^2} \qquad i=1,2,\dots,n$$

برای محاسبه ی گوس n نقطه همواره از (*) استفاده پس توسط را نقطه ی فوق وزن ها را می یابیم

مثال : نشان دهید که در روش انتگرال گیری گوس همواره $\sum_{i=1}^{n} w_i = 2$

$$G_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$$G_n(f) = I(f) \quad st \quad f \in P_{2n-1}(x)$$

$$f(x) \equiv 1 \in P_{2n-1}(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \longrightarrow \int_{-1}^{1} dx = \sum_{i=1}^{n} w_i \to \sum_{i=1}^{n} w_i = 2$$

$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = 0$ تعمیم مطالعه

$f(x) = x^n + 1$ تقریب درونیاب

$x_i = \frac{1}{2n} \quad i=1,\dots,2n$ گوش ـــ

$P(x) - q(x) =$

— تمرین

همواره روش های انتگرال گیری عددی (به غیر گوس) داریم که

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = b-a$$

$[x_1, x_2, x_3, x_4]$ دادن چهار نقطه

سوال

$P_3(x)$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_3(x)dx = \sum_{i=1}^{4} \omega_i f(x_i)$$

$$P_3(x) = \sum_{i=1}^{4} (f(x_i) L_i(x)) dx = \sum f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_a^b L_i(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} L_i(x) \right) dx = \int_a^b dx = b-a$$

مهم

در مسائل در رونیابی ← یکتا بودن درونیاب اهمیت دارد

مثال: مطلوب است محاسبه $\int_0^1 e^{x^2}dx$ توسط روش گاوس دو نقطه

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \qquad \int_0^1 e^{x^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2} dt = \frac{1}{2}\int [g(t)]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]$$

پارامتر مجهول $\leftarrow 2n$

$\leftarrow 2n-1$

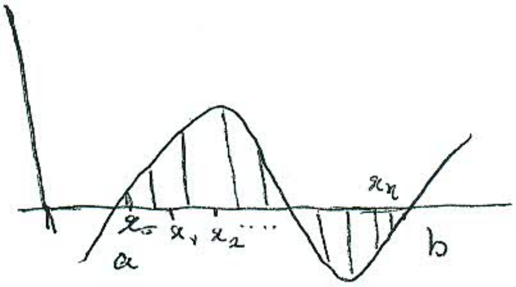
← بیشترین دقت

- حل عددی معادلات دیفرانسیل

$$y' + P(x)y = q(x)$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$$

$$* \begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



در این بخش هدف یافتن مقدار تقریبی تابع مجهول y در نقطه $x=x_{i+1}$ (y_{i+1})

البته با استفاده از مقدار از قبل تعیین شده تابع مجهول در نقطه ی $x=x_i$

روش تیلور مرتبه p

روش رانگ کوتای مرتبه دوم و چهارم

روش تیلور مرتبه p :

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x-x_i) + y''(x_i)\frac{(x-x_i)^2}{2!} + \dots + y^{p}(x_i)\frac{(x-x_i)^p}{p!}$$

$$+ \frac{y^{p+1}(\xi x_i)}{(p+1)!}(x-x_i)^{p+1}$$

صرف نظر می شود

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + y''_i \frac{h^2}{2!} + \dots + y^{p}_i \frac{h^p}{p!}$$

$$y' = f(x,y)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y} + y'\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

- تذکر: اگر روش تیلور مرتبه ی p هرگاه h یک عدد کوچک قابل قبول باشد آنگاه خطای برشی روش $O(h^p)$

تذکر: هرگاه $p=1$ باشد به روش تیلور مرتبه اول ، روش اویلر گویند و به صورت زیر معرفی می شود:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad O(h)$$

y_i

مثال: معادله دیفرانسیل
$$\begin{cases} y' = xy+1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$
را در نظر بگیرید

مطلوب است محاسبه ی $y(0.1)$ به روش اویلر، $y(0.2)$ توسط روش تیلور مرتبه 2 با فرض اینکه طول گام $h=0.1$ است.

حل:

$$y_1 = y(0) + 0.1\, f(0,1) \Rightarrow y(0.1) = 1 + 0.1(1) = 1.1$$

$$y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 \longrightarrow y(0.1) = 1 + 0.1 \times (1) + \frac{0.01}{2}(1) = a$$

$$y' = xy+1$$
$$y'' = y + xy' = y + x(xy+1) = y + x + x^2 y$$

$$y(0.2) = y_1 + h y'_1 + \frac{h^2}{2} y''_1$$
$$= a + 0.1 \times (0.1a+1) + \frac{0.01}{2}(a + 1 + 0.1a)$$

مثال:
معادله ی دیفرانسیل $y'' + xy' + y = 1$ در نظر بگیرید مطلوب است محاسبه ی $y(0.1)$ توسط روش اویلر و $y(0.2)$ توسط روش تیلور مرتبه دوم

$$y'' + xy' + y = 1$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

برای حل مسائل مشابه بالا باید $y' = z$ استفاده شود.

$$y' = z \Rightarrow y'' = z'$$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \longrightarrow$$ قادر به حل چنین مسائلی هستیم

$$\begin{cases} y' - z = 0 \Rightarrow y' = z \\ z' = 1 - xy - y \end{cases} \Longrightarrow Y' = F(x, Y)$$

به طوریکه $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ و $F(x, Y) = AY + b$ که در آن

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y'(0) = \frac{3}{2}$

$y(0) = 1$

$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$$Y(0.1) = Y(0) + 0.1\, F\left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + 0.1 \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$Y(0.1) = ?$

$Y(0.2) = ?$

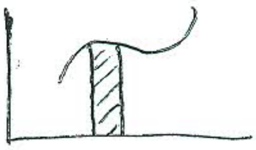
در صورت دادن معادله y''' ⟵ تبدیل 3 معادله مرتبه اول

روش اویلر پیراسته

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} - y_i \Leftarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx$$

$$= f(x_i, y_i) h$$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{norm \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y) \Rightarrow y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

روش اویلر بهبود یافته
$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \sim \text{حدس براساس این} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right] \sim \text{تصحیح براساس این} \end{cases}$$

- می توان نشان داد که خطای برشی اویلر بهبود یافته $O(h^2)$ است

$f(x) \simeq g(x) + O(h^s) \rightarrow$ کلا هرچه دادیم
h^s هستند هر مقدار s بزرگتر بهتر

روش رانگ کوتای مرتبه دوم و چهارم
(مرتبه ی ۱و۳ معمولا ندارند)

روش رانگ کوتای مرتبه دوم

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = h f(x_i, y_i) \\ k_2 = h f(x_i + h, y_i + k_1) \end{cases}$$

همان اویلر بهبود یافته

روش رانگ کوتای مرتبه چهارم

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h f(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$
$$k_3 = h f(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$
$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3)$$

حل دستگاه‌های خطی $AX = b$ s.t. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

روش‌های مستقیم (حذفی گوس)

روش‌های تکراری (ژاکوبی، گوس، سایدل، SOR)

روش‌های تجزیه LU، QR

متعامد $QQ^T = Q^TQ = I$

روش حذفی گوس

$$AX = b \rightsquigarrow \tilde{A}X = \tilde{b}$$

به طوری که $\tilde{A}$ یک ماتریس ~~بالا مثلثی یا~~ پایین مثلثی باشد

$BX = d$ ← ماتریس بالا مثلثی

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n\times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = \frac{d_n}{b_{nn}} \qquad x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - b_{n-1\,n}x_n}{b_{n-1\,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \cdots \qquad \cdots \quad x_1 =$$

روش حذفی گوس حداکثر $n-1$ مرحله دارد.

مرحله ۱: فرض $a_{11} \neq 0$ (عنصر محوری)

if $a_{11} = 0 \longrightarrow$ uper determain $\longrightarrow x_1 =$ زاید است

تعداد معادلات بیشتر از مجهولات

ابتدا ماتریس افزوده

افزودن ستون آخر

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1\cancel{n+1}}^{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{\cancel{2n+1}}^{b_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n\cancel{n+1}}^{b_n} \end{array}\right)$$

$$B \to B_1$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a'''_{22} & \cdots & a'_{2n} & a'_{2n+1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} & a'_{nn+1} \end{pmatrix}$$

$$a'_{21} = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11}$$

$$\text{st. } a'_{ij} = a_{ij} - m_{i1} a_{ij}$$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

$$i = 2, \ldots, n$$

$$B_1 \to B_2$$

مرحله دوم $a'_{22} \neq 0$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & a'_{2n+1} \\ 0 & 0 & a^2_{33} \cdots & a^2_{3n} & a^2_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a^2_{n3} \cdots & a^2_{nn} & a^2_{nn+1} \end{pmatrix}$$

$$a^2_{ij} = a'_{ij} - m_{i2} a'_{2j}$$

$$m_{i2} = \frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$$

$$i = 3, \ldots, n$$

با ادامه این روش حداکثر n-1 مرحله

$$B_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & a'_{2n+1} \\ 0 & 0 & a^2_{33} \cdots & a^2_{3n} & a^2_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & a^{n-1}_{nn} & a^{n+1}_{nn+1} \end{pmatrix}$$

$$a^t_{ij} = a^{t-1}_{ij} - m_{it} a^{t-1}_{tj}$$

$$m_{it} = \frac{a_{it}}{a^{t-1}_{ij}} \qquad i = t+1, \ldots, n$$

مهم

- دستگاه ناسازگار ← در یک مرحله یک سطر کلاً صفر ولی آن آرایه افزوده شده صفر نباشد.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{1n} \\ & & & & \vdots & \end{pmatrix}$$ ناسازگار

-

چگونه می‌توان دترمینان یک ماتریس را توسط روش حذفی گوس بدست آورد؟

$$|\det A| = |a_{11}\, a'_{22} \cdots a^{n-1}_{nn}|$$ اندازه

دترمینان $(-1)^n$ n تعداد جابجایی سطرها

روش حذفی گوس زمانی درست است که دترمینان صفر نباشد.

- نکته: برای پایداری روش حذفی گوس معمولاً قبل از شروع مرحله‌ی k در هر مرحله بزرگترین داده از لحاظ قدر مطلق به عنوان عنصر محوری انتخاب می‌شود.

زیر قطر اصلی

در این حالت $m < 1$ منجر به بزرگتر می‌شود.

سوال امتحان ← دارای نکته ۱ (4×4)

سوال اول (حذف ← اثبات)

روش‌های تکراری }

$$AX = b \longrightarrow X = MX + C$$

$$\boxed{AX + X = b + X \qquad (A+I)X = b + X \Rightarrow X = MX + C}$$

$$F(x) = AX - b \longrightarrow X = G(x)$$

$\|X^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$ شرط توقف $\qquad X^{k+1} = G(x^k)$

دو نرم

تعریف نرم $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

روش ژاکوبی

با فرض درایه های قطر غیر صفر

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

حالت کلی

$$\Rightarrow x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k)$$

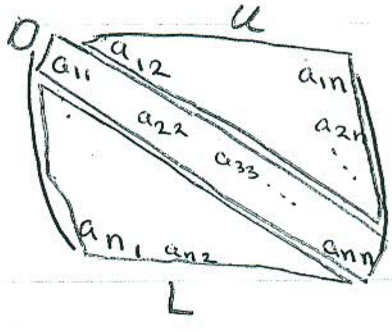
$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k)$$

$X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ حدس اولیه $\longrightarrow x_1^1 = \bigcirc x_2^0 + \bigcirc x_3^0$

اگر درست باشد x_1^0 باید برقرار باشد

$$x_1^2 = \bigcirc x_2^1 + \bigcirc x_3^1$$

قبل از هر مرحله باید $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$ چک شود.

$A = L + D + U$. st. $\quad A =$ 

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_j = -D^{-1}(L+U) \qquad C_j = D^{-1}b$$

$$X^{k+1} = -D^{-1}(L+U)X^{k} + D^{-1}b$$

روش گوس سایدل با ژاکوبی فرقی ندارد

← در گوس سایدل در هر مرحله هنگام پیدا کردن مقدار جدید از

مراحل دیگر استفاده می‌شود.

روش گوس سایدل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad AX = b$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{k} - a_{13}x_3^{k}\right) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^{k}\right) \\ x_3^{k+1} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}\right) \end{cases}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$DX^{k+1} = b - UX^{k} - LX^{k+1}$$

$$x^{k+1} = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} \Rightarrow (D+L)X^{k+1} = b - Ux^{k}$$

$$\Rightarrow x^{k+1} = -\overbrace{(D+L)^{-1}U}^{M_{GS}}X^{k} + \overbrace{(D+L)^{-1}b}^{C_{GS}}$$

دترمینان ماتریس مخالف صفر است چون در اینجا روی قطر اصلی صفر نیست

$$X^{k+1} = Mx^{k} + c$$

تعریف: ماتریس غالب قطری اکید سطری

ستونی برعکس $\boxed{۹۰}$

$$A = |a_{ij}| \quad i,j = 1, \dots, n$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{4} & 0 & -1 \\ 5 & \underline{-11} & 3 \\ 7 & 6 & \underline{19} \end{pmatrix}$$ اندازه

قضیه: هرگاه A یک ماتریس غالب قطری اکید سطری باشد آنگاه برای حل دستگاه $Ax=b$ روش های تکراری ژاکوبی و گوس-سایدل با هر حدس اولیه دلخواهی همگراست

سوال: آیا ماتریس غالب قطری اکید سطری A وارون پذیر است؟

سوال: هر ماتریس غالب قطری اکید سطری با روش ژاکوبی دارای جواب است: وارون پذیر

حل: برهان خلف فرض کنید وارون پذیر نباشد

$AX = 0$ ⟶ زمانی هم جواب غیر بدیهی دارد که دترمینان A صفر است.

حل: تشکیل روش سطری گوس

تشکیل ماتریس افزوده

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 12 \\ 5 & 4 & 9 & 1 \\ -2 & -8 & -16 & 15 \end{array}\right)$$

صفر

$$B_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & -16 & -31 & -59 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & 39 \end{array}\right)$$

صفر　　　غیرصفر

پس دستگاه ناسازگار

5×5 یا 4×4 ← سوال

۳- اگر حداکثر خطای نسبی اعداد x و y و z، $\underline{M}$ باشد آنگاه مطلوب است محاسبه‌ی حداکثر خطای نسبی تابع

$$f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$$

حل: رابطه کلی

$$Rel(f)\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|Rel(x)+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|Rel(y)+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|Rel(z)$$

اندازه $\sin$ ، $\cos x$ برابر یک

$$\leq 3M$$

$f(x_1,\dots,x_n)$

$$Rel(f)\leq\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|Rel(x_i)\qquad f:R^n\to R$$

همین شکل کلی تابع فرق می‌کند

اگر ~~[illegible]~~ ماتریس وارون پذیر باشد ممکن است ها دارای جواب باشد

از روش حذفی مرتبات

مسائل

1. مطلوب است محاسبه تقریبی انتگرال $\int_0^1 e^{x^2}dx$ به گونه‌ای خطای روش $O(h^4)$ باشد

$f(x)$

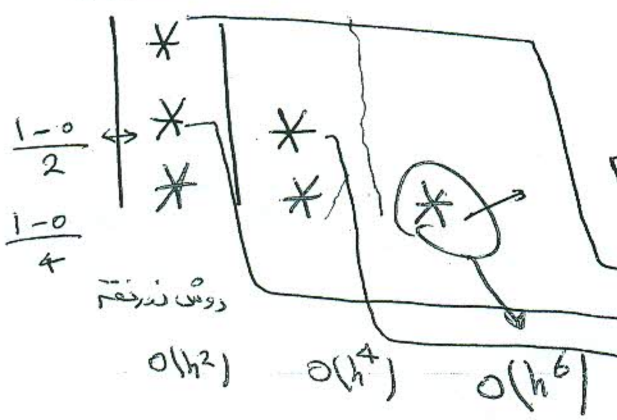
روش عالی که دارای خطای ah^4 هستند

2 حالت سیمپسون

جدول رامبرگ

$$S(f) = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1)\right)$$

$h = 1-0$



$$T_1(f) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right)$$

$$T_2(f) = \frac{1}{4}\left[f(0) + 2f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2^k} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$A = \frac{4T_2(f) - T_1(f)}{4-1}$$

جواب

جدول رامبرگ ← مهم

2. نشان دهید که دستگاه زیر ناسازگار است

$3x + 4y + 8z = 12$

$3x + 4y + 9z = 1$

$-2x - 8y - 16z = 15$

۴. مثال: مطلوب است یافتن بهترین تابع به فرم

$$y = a_0 + a_1 \cos 2x + a_2 \cos x$$

برای برازش داده‌های

x	0	2	5	4
y	1	3	-6	12

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^m}$$ ← فرم کلی

باید به این فرم باشد

$$\cos X = X$$

$$\cos 2x = 2X^2 - 1$$

$$y = a_0 + 2a_1 x^2 - a_1 + a_2 X$$

$$y = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{A_0} + \underbrace{a_2}_{A_1} X + \underbrace{2a}_{A_2} x^2$$

$$y = A_0 + A_1 X + A_2 X^2$$

X	$\cos 0$	$\cos 2$	$\cos 5$	$\cos 4$
y	1	3	-6	12

۵- فرض کنید $P_2(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع $f(x)$ در نقاط $\{x_0, x_1, x_2\}$ باشد.

مطلوب است

$$h(x) = \begin{array}{cccc} \text{درجه 2} & \text{حداکثر 2} & \text{حداکثر 2} & \text{حداکثر 2} \\ \end{array}$$

$$h(x) = \begin{vmatrix} P_2(x) & 1 & x & x^2 \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ f_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

$dg(h(x)) \leq 2$

تعریف درونیاب

فضای درونیاب

$P_2(x_i) = f(x_i)$

با جایگذاری نقطه ی صفر

$f_0 \quad 1 \quad x_0 \quad x_0^2$

$f_0 \quad 1 \quad x_0 \quad x_0^2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

نقطه 1

$f_1 \quad 1 \quad x_1 \quad x_1^2$

$f_0 \quad 1 \quad x_0 \quad x_0^2$

$f_1 \quad 1 \quad x_1 \quad x_1^2$

نقطه 2

$h(x_0) \,,\, h(x_1) \,,\, h(x_2) \longleftarrow$ در هر سه نقطه صفر

پس دترمینان آن باید صفر باشد.

مثال:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^{k} + k a x_n}{k x_n^{n-1} + a}$$

اولاً مرتبه همگرائی این روش، ثانیاً k را طور بیابید که مرتبه همگرائی حداقل 2 باشد

1 درجه تکرار اول

2 حداقل مرتبه همگرائی

وقتی اسم همگرایی می‌آید تعیین همگرا هست

۱) تعریف حد برای دنباله‌های همگرا

متغیرها رو وابسته به $x \longrightarrow L$

x_n

x_{n+1}

$\lim \sim$

$$L = \frac{L^k + kaL}{kL^{k-1} + a} \Rightarrow kL^k + La = L^k + kaL$$

$$(k-1)L^k = L(ka-a)$$

$$L^k = aL$$

$$\boxed{L = \sqrt[k-1]{a}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

به صورت دنباله‌ای نقطه ثابت

$$x_{n+1} = \boxed{\frac{x_n^k + kax_n}{kx_n^{k-1} + a}} \quad g(x)$$

تا جایی مشتق صفر شود

$$\left.\begin{array}{l} g'(L) = 0 \\ g''(L) = 0 \\ g'''(L) \neq 0 \end{array}\right\} \text{درجه همگرایی } \underline{3}$$

$g'(L) = 0 \longrightarrow k = ?$

ب) حداقل $\underline{2}$

$g'(L) = 0 \,,\, g''(L) \neq 0$

دقیقاً 2

m_aliakbari@aut.ac.ir

rrabedian@gmail.com

« سؤالات امتحان پایان ترم درس محاسبات عددی »

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دانشجویان کارشناسی رشته های مختلف مهندسی)

زمان: اول تیرماه ۱۳۹۰ — مدت: ۱۲۰ دقیقه (۶ سؤال)

توجه۱: استفاده از ماشین حساب بلامانع است.

توجه۲: کلیه محاسبات دقیقاً با ۴ رقم اعشار انجام پذیرد.

سؤال۱- مرتبه همگرایی روش نیوتن-رفسون برای ریشه های تکراری چگونه است؟ سپس با روش نیوتن اصلاح شده (تعمیم‌یافته) تنها ریشه معادله $Cos(x) = x^2 + 1$ را با تقریب اولیه $x_0 = 0.5$، به گونه ای تقریب بزنید که:

$$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$$

سؤال۲- تابع جدولی زیرمفروض است.

x_i	0	1	9	16
f_i	1	2	4	5

الف) با کمک درون یابی تفاضلات تقسیم شده نیوتن تقریبی از $f(0.5)$ را به دست آورید.

ب) با افزودن نقطه (۴،۳) به جدول فوق، چند جمله ای درون یاب تابع f را مبتنی بر ۵ نقطه به دست آورید.

سؤال۳- تقریب کمترین مربعات داده های جدولی زیر به شکل $y = e^{a+bx}$ را به دست آورید.

x_i	0	1	9	16
y_i	1	2	4	5

سؤال۴- در فرمول انتگرال گیری عددی زیر، وزن های w_0، w_1، w_2 را به گونه ای به دست آورید که مرتبه دقت فرمول، ۳ شود

$$\int_0^1 f(x)\,dx = w_0 f(0) + \omega_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + \omega_2 f(1)$$

ادامه

« سؤالات امتحان پایان ترم درس محاسبات عددی »

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دانشجویان کارشناسی رشته های مختلف مهندسی)

زمان: اول تیرماه ۱۳۹۰ — مدت: ۱۲۰ دقیقه (۶ سؤال)

سؤال ۵- مسأله مقدار اولیه زیر مفروض است.

با استفاده از روش رانگ - کوتای مرتبه ۲ (به عنوان مثال روش پیراسته اویلر) تقریبی از $y(0.1)$ با $h = 0.1$ به دست آورید.

$$y'' + xy = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

سؤال ۶- دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 10x - y + z = 10 \\ 2x + 20y - z = 21 \\ x - 2y + 40z = 39 \end{cases}$$

با بررسی شرط همگرایی:

الف) با روش تکراری گاوس- سایدل و با تقریب اولیه $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \end{bmatrix}$ جواب تقریبی را با ۲ تکرار به دست آورید.

ب) با روش توانی، بزرگترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن را برای ماتریس ضرایب دستگاه فوق را با تقریب اولیه $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، با ۲ تکرار را به دست آورید.

موفق باشید

نام :	به نام خدا	تاریخ : ۸۹/۴/۲
نام خانوادگی :	سوالات درس محاسبات عددی	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
شماره دانشجویی :	**دانشگاه صنعتی امیرکبیر**	ساعت : ۹ صبح
نام استاد درس :	دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	نوع امتحان : پایان ترم

قبل از پاسخ به سوالات به نکات زیر توجه فرمایید :

۱- استفاده از ماشین حساب علمی کاملاً آزاد است.

۲- تمام محاسبات لازم را تا سه رقم بعد اعشار انجام دهید.

۳- فهم صورت سوال هم اهمیت دارد، لذا به هیچ سوالی در این جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود.

۱- تابع $y = f(x)$ را در نقطه تقریبی $\bar{x}$ با خطای نسبی r_x (یا δ_x) در نظر می‌گیریم :

الف : کمیتی که دقت نسبی ورودی x را به دقت نسبی خروجی y مرتبط می‌کند چه نام دارد؟

ب : انباشتگی خطای نسبی تابع $f(x) = e^{2x}$ که x با تقریب $\bar{x}$ جانشانی می‌شود را تخمین بزنید.

۲- تابع جدولی زیر را درنظر بگیرید.

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
f_i	0.55	0.82	1.15	1.54	1.95

الف : چندجمله‌ای درون‌یاب را برحسب x بنویسید و به کمک آن مقدار $f(0.1)$ را بیابید.

ب : خطای درونیابی را به چه صورتی می‌توان کاهش داد.

۳- ثابت‌های a و b را طوری تعیین کنید که $y = \frac{a}{x} + b$ بهترین منحنی از دید کمترین مربعات خطا برای داده‌های جدول زیر باشد (*راهنمایی : از خطی‌سازی استفاده کنید*).

x	۰/۲۵	۰/۵	۱
y	۳	۲	۱

---

۴ - به کمک روش ضرایب نامعین فرمول انتگرالگیری‌ای به فرم

$$\int_0^1 \ln x \, f(x)\, dx \simeq w_0 f(0) + w_1 f(1)$$

آورید و درجه دقت آن را تعیین کنید. سپس به کمک آن تقریبی از انتگرال $\int_0^1 e^x \ln x \, dx$ بدست آورید.

ادامه سوالات پشت صفحه ←

ادامه سوالات محاسبات عددی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر	تاریخ ۸۹/۴/۲

۵ - دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید ابتدا شرط لازم همگرایی را بررسی کنید، سپس با روش تکرار گوس- سایدل حل کنید. محاسبات را تا دقت سه رقم با معنای انجام دهید.

$$\begin{cases} -x + y + 4z = 3 \\ 2x + 8y - z = 11 \\ 5x - y + z = 10 \end{cases}$$

۶- مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با یک روش رونگه-کوتای مرتبه دوم برای بدست آوردن $y(0.2)$ با طول گام $h = 0.1$ حل کنید . سپس فقط شرح دهید که اگر طول گام نصف شود خطای جامع (کل) چقدر کاهش می‌یابد.

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

فقط به دو سوال از سه سوال زیر پاسخ هید

۷- معادله $2x = 7 + \ln(x)$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا بازه‌ای به طول 0.5 بیابید که شامل ریشه بزرگتر معادله باشد سپس به روش تکرار نقطه ثابت تقریبی از این ریشه را تا سه رقم اعشار محاسبه کنید.

~~۸~~- تقریبی از جواب دستگاه غیرخطی زیر را با دو تکرار روش نیوتن و نقطه آغازین $(x_0, y_0) = (2, 0.25)^T$ به‌دست آورید.

$$\begin{cases} x^2 + 0.5 = 2x + y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

---

۹ - فرمول زیر موسوم به تفاضل مرکزی برای تقریب مشتق مرتبه اول داده شده است

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

به کمک این فرمول و با $h = 0.1$ مشتق تابع $f(x) = \sin(x)$ را در نقطه $x = 0$ تقریب بزنید. اگر طول گام نصف شود خطای این تقریب چقدر تغییر می‌کند؟ با استفاده از بسط تیلر نشان دهید مرتبه دقت این فرمول برابر $O(h^2)$ است.

موفق باشید

دانشگاه صنعتی امیرکبیر – دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

« سؤالات پایان ترم درس محاسبات عددی ترم اول ۹۰-۸۹ »

زمان : چهارشنبه ۸۹/۱۰/۲۲ مدت : ۱۲۰ دقیقه (۷ سؤال)

توجه۱ : استفاده از ماشین حساب بلامانع است.

توجه۲ : کلیه محاسبات دقیقاً با ۴ رقم اعشار انجام پذیرد.

سؤال ۱- به یکی از دو سوال به دلخواه پاسخ دهید:

الف: نشان دهید که در تفاضل دو عدد نزدیک به هم، انتشار خطای عمل تفریق بسیار زیاد می باشد. سپس رابطه زیر را برای x های منفی بزرگ طوری اصلاح کنید که باعث جلوگیری از فرآینده خطای محاسباتی گردد.

$$y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

ب: با استفاده از روش توانی با $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ، مقدار ویژه غالب و بردار ویژه نظیر ماتریس $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ را بطور تقریبی به دست آورید به گونه ای که $\left(\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-3}\right)$

سؤال ۲- با روش نیوتن رافسون الگوریتم تکرار معکوس عدد $a>0$ را تعیین و تقریبی از معکوس عدد 7 را با نقطه شروع $x_0 = 0.25$ تا 4 تکرار محاسبه کنید.

سؤال ۳- تابع f مفروض است.

$$f(x) = \operatorname{Sin} x \qquad 0 < x < 1$$

فرض کنید $P_n(x)$ چند جمله ای درونیاب f مبتنی بر نقاط $x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0,1,\dots,n$ باشد. نشان دهید که :

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \operatorname{Sin} x$$

سؤال ۴- برازش مجموع نقاط جدول زیر را به فرم $y = \frac{1}{(ax+b)^2}$ را به دست آورید.

x_i	0	1	2
y_i	0	0.04	0.01

راهنمایی : (از خطی سازی استفاده نمایید)

ادامه در صفحه بعد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر– دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

« سؤالات پایان ترم درس محاسبات عددی ترم اول ۹۰-۸۹ »

زمان : چهارشنبه ۸۹/۱۰/۲۲ مدت : ۱۲۰ دقیقه (۷ سؤال)

سؤال ۵– انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

$$I = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{Cos}x}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

الف: با استفاده از روش رامبرگ دو مرحله ای $\left(O(h^6)\right)$ مقدار I را تقریب بزنید.

ب : با روش گاوس دونقطه ای I را تقریب بزنید.

ج : با ذکر دلیل بیان کنید کدام یک از دو تقریب فوق دقت بالاتری دارد.

سؤال۶– دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -21 \\ 7 \end{pmatrix}$$

با روش تجزیه دلخواه LUاین دستگاه را حل کنید و پیچیدگی محاسبات روش را بررسی کنید.

سؤال۷– مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y' = e^{-x^2}(x+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

الف: با $h = 0.5$ با روش اویلر معمولی مقدار تقریبی $y(1)$ را به دست آورید.

ب: با روش اویلر پیراسته (یارانگ – کوتا مرتبه دوم) جواب $y(1)$ را تقریب بزنید.

موفق باشید

« به نام خدا »

دانشگاه صنعتی امیرکبیر – دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

« سؤالات درس محاسبات عددی »

زمان : ۲۴ دی ماه ۱۳۸۸ — مدت : ۱۲۰ دقیقه (۶ سؤال)

توجه ۱ : استفاده از ماشین حساب مجاز است.

توجه ۲ : در مواردی که دقت محاسبه مشخص نگردیده است ، محاسبات تا سه رقم اعشار انجام گیرد.

سؤال۱- همانطور که می دانیم در روش نقطه ثابت معادله $f(x)=0$ به صورت $g(x)=x$ نوشته می شود که تحت شرایطی از g دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ با x_0 معلوم همگرا به ریشه معادله مذکور است. حال فرض کنید معادله فوق را به صورت $g(x)=ax+b$ که در آن a,b ثابت و $a\neq 0$ است بنویسیم . a را چگونه انتخاب کنیم که سریعتر از دنباله تکرار ساده به ریشه همگرا باشد؟

سؤال ۲- جدول داده ای زیر را در نظر بگیرید:

x_i	0/1	0/2	0/3	0/4
f_i	5	-6	4	3

تابع درونیاب $P_3(x)$ را بیابیدو مقدار $P_3(0/25)$ را حساب کنید.

سؤال ۳-

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1/1	1/9	a

به ازای چه مقداری از a نقطه $(3,a)$ روی خط کمترین مربعات داده های مذکور قرار دارد.

سؤال۴- معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر را با روش رانگ کوتای مرتبه ۲ با طول گام $h=0/1$ در نقطه $x=0/1$ پیدا کنید.

$$y''+xy=0 \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$$

سؤال۵- انتگرال $I=\int_0^1 x^{\frac{9}{2}}dx$ مفروض است برای محاسبه انتگرال با روش سیمسون و حداکثر طول گام h را چقدر انتخاب کنیم تا خطای انتگرال از 10^{-6} کمتر باشد.

سؤال ۶- از دو سؤال زیر تنها به یک سؤال بطور اختیاری پاسخ داده شود.

الف) شرط همگرایی روش ژاکوبی- گاوس سایدل برای حل یک دستگاه معادلات خطی را بیان کنید.

سپس با اعمال شرط مذکور جواب دستگاه ذیل را با تقریب اولیه $X^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ به گونه ای برآورد کنید که :

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|\le 10^{-3}$$

$$\begin{cases}30x_1+2x_2-x_3=31\\5x_1-2x_2+50x_3=53\\2x_1+40x_2-x_3=41\end{cases}$$

ب) فرمول انتگرال گیری ذیل را در نظر بگیرید:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong a\,f(b)+b\,f(a)$$

مقادیر a , b را طوری تعیین کنید که درجه دقت این فرمول یک باشد.

موفق باشید

دانشگاه صنعتی امیرکبیر– دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر — **زمان: سه شنبه ۹۱/۱۰/۱۹**

امتحان پایان ترم درس محاسبات عددی نیمسال اول ۹۲-۹۱ — **مدت: ۱۲۰ دقیقه (۷ سؤال)**

توجه۱: استفاده از ماشین حساب بلامانع است.

توجه۲: کلیه محاسبات دقیقاً با ۴ رقم اعشار با روش گردکردن صورت پذیرد.

سؤال ۱- فرض کنید a, b به ترتیب تقریب هایی از A, B باشند که همگی این اعداد مثبت اند.

نشان دهید $r(a+b) \le \max\{r(a), r(b)\}$

که در آن $r(a)$ خطای نسبی ناشی از تقریب A با a است.

سؤال ۲- با استفاده از روش تکرار ساده با انتخاب $g(x)$ مناسب ریشه معادله $10x - Cosx = 0$ روی بازه $[0,1]$ با شروع اولیه $x_0 = 0.5$ را تقریب بزنید به طوری که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$.

سؤال ۳- جواب دستگاهی خطی زیر را با روش حذفی پسرو گاوس و با محورگیری جزئی تقریب بزنید.

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_{10} \end{array} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - 4y + 4z = 1 \end{cases}$$

سؤال ۴- فرض کنید $0 \le x \le 1$ ، $f(x) = Cosx$ ، $p_n(n)$ چندجمله ای درونیاب f مبنی بر نقاط $x_i = \frac{i}{n}$ ، $i=0,1,\dots,n$ باشد، نشان دهید:

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = Cos(x)$$

باید اثبات کنی خطاشون ۰

سؤال ۵- برای داده های جدولی زیر تقریب کمترین مربعات به صورت $y = \frac{x}{Ax+B}$ را پیدا کنید.

x_k	-1	1	2	3
y_k	6/62	2/17	1/35	0/89

سؤال ۶- با استفاده از روش سیمپسون با $n = 10$ و روش گاوس دونقطه ای جواب $I = \int_0^1 \left(2 + Sin(2\sqrt{x})\right)dx$ را تقریب بزنید.

f

سؤال ۷- مسأله مقدار اولیه زیر مفروض است. با $h = 0.1$ جواب معادله را در فاصله $[0, 0.2]$ با روش اویلر پیراسته به دست آورید. (محاسبه تقریب $y(0.1)$ و $y(0.2)$ مورد نظر است).

$$y'(x) = \begin{cases} \dfrac{xy + Sin(x^2)}{x} & , \quad x \ne 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$y(0) = 0$$

موفق باشید

« به نام خدا »

دانشگاه صنعتی امیرکبیر – دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

« سؤالات پایان ترم درس محاسبات عددی »

زمان : تیرماه ۱۳۸۸ **مدت : ۱۲۰ دقیقه (۷ سؤال)**

توجه۱ : استفاده از ماشین حساب بلامانع است .

توجه۲ : انجام محاسبات تا چهار رقم اعشار انجام صورت پذیرد.

سؤال ۱- دنباله $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$ را درنظر بگیرید ($a>0$) نشان دهید برای هر $x_0>0$ دنباله فوق همگراست و حد آن را بدست آورید. ضمناً مرتبه همگرایی آن را با ذکر دلیل مشخص کنید. (۳ نمره)

سؤال ۲- فرض کنید $f(x)=Cos(\pi x)\ ,\ x\in[0,1]$ و $x_i=\frac{i}{n}, i\ , 0\ ,1,\dots,n$ و $P_n(x)$ چند جمله ای درونیاب f مبتنی بر x_iها باشد نشان دهید. (۳ نمره)

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x)=f(x)$$

سؤال ۳- تقریب کمترین مربعات (برازش) به فرم $y=\frac{1}{(a_0+a_1x)^3}$ را برای مجموعه نقاط جدولی زیر به دست آورید. (۳ نمره)

x_i	0	1	2	4
y_i	1	0/064	0/008	0/001

سؤال ۴- ضرایب w_i در فرمول انتگرال گیری زیر را به گونه ای بدست آورید که فرمول برای توابع چند جمله ای حداکثر از درجه دو دقیق باشد. (۳ نمره)

$$\int_0^h f(\sqrt{x})\,dx \cong W_1 f(0)+W_2 f'(0)+W_3 f(h)$$

سؤال ۵- تقریبی از $\int_0^1 x\,Sin\,x\,dx$ را با روش ذوزنقه ای به گونه ای بدست آورید که خطای آن از 10^{-2} کمتر باشد سپس با بزرگترین h ممکن تقریبی از انتگرال یاد شده را حساب کنید.

(۳ نمره)

سؤال ۶- جواب مسأله مقدار اولیه مرتبه اول زیر را با روش پیراسته اویلر با $h=0/1$ در نقطه $0/1$ تقریب بزنید. (۳ نمره)

$$\begin{cases} y'=xe^y+e^x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

سؤال ۷- دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} -2x+y+20z=19 \\ x+10y-z=10 \\ 8x+y-z=8 \end{cases}$$

با اعمال شرط کافی همگرایی و با نقطه شروع $X^{(0)}=(0,0,0)^T$ و با روش ژاکوبی با سه تکرار بدست آورید.

(۳ نمره)

« سؤالات امتحان پایان ترم درس محاسبات عددی »

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - (دانشجویان مقطع کارشناسی)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

زمان: سه شنبه ۶ تیرماه ۱۳۹۱

مدت: ۱۲۰ دقیقه (۸ سؤال)

توجه: استفاده از ماشین حساب بلامانع است

سؤال۱- تابع $f(x,y)=xy$ مفروض است. حداکثر خطای مطلق $f(\frac{1}{3},\frac{2}{7})$ را مشخص کنید، وقتی که $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}$ را تا سه رقم اعشار گرد می کنیم.

سؤال۲- معادله $4x^2-e^{-x}=0$ دربازهٔ $[-1,0]$ مفروض است. با روش تکرار ساده (نقطه ثابت) وانتخاب $g(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{e^{-x}}$ و $x_0=-0.5$ ریشهٔ این معادله در این بازه را طوری تقریب بزنید که $|x_n-x_{n-1}|<10^{-4}$. بررسی مناسب بودن g، الزامی است.

سؤال۳- تابع $f(x)=x^3$ در بازه $[0,1]$ را با نقاط $x_0=0$ ، $x_1=1$ درون یابی می کنیم. حداکثر خطای درون یابی در بازه مفروض چقدر است.

سؤال۴- جدول زیر مفروض است.

x_i	0	1	2	4
f_i	0	-1	4	56

با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن، چند جمله ای درون یاب تابع f را به دست آورده وتقریبی از $f(0.5)$ ارائه دهید.

سؤال۵- تقریب کمترین مربعات داده های جدولی زیر به فرم $y=\frac{1}{(a_0+a_1x)^3}$ را به دست آورید.

x_i	0	1	2	4
y_i	1	0.064	0.008	0.001

« سؤالات امتحان پایان ترم درس محاسبات عددی »

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر – (دانشجویان مقطع کارشناسی)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

زمان: سه شنبه ۶ تیرماه ۱۳۹۱

مدت: ۱۲۰ دقیقه (۸ سؤال)

توجه۱: استفاده از ماشین حساب بلامانع است.

سؤال۶-انتگرال $I=\int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2}dx$ مفروض است. با روش سیمپسون وبا $h=0.25$، وهمچنین روش گاوس یک نقطه ای و دونقطه ای I را تقریب بزنید(محاسبات تا ۳ رقم اعشار با روش گردکردن انجام پذیرد).

سؤال۷– معادله دیفرانسیل معمولی $y''+xy=0$ با شرایط اولیه $y(0)=1$, $y'(0)=0$ را با روش اویلر پیراسته (رانگ– کوتای مرتبه دو) با انتخاب $h=0.1$ حل کرده و تقریبی از $y(0.1)$ به دست آورید.

سؤال ۸– با یکی از روش های تجزیه LU ، دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ -x+y-2z=-6 \\ x-y+10z=22 \end{cases}$$

موفق باشید.