درس هفتم بردار و ماتریس

تعریف ۱۰۴. به هر شئ که جهت و اندازه داشته باشد بردار گویند. بردار را معمولا با حرف $\overrightarrow{v}$ و nتایی مرتب مانند $\overrightarrow{v}=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ نشان می‌دهند. اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{v}$ را با نماد $|\overrightarrow{v}|$ نشان می‌دهند که برابر است با $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2}$

مثال ۱۰۵. اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{v}=(2,3,4)$ را محاسبه کنید.

حل: $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$

تعریف ۱۰۶. ضرب نقطه‌ای دو بردار $\overrightarrow{v}=(a_1,b_1,c_1)$ و $\overrightarrow{u}=(a_2,b_2,c_2)$ را که با علامت $v\cdot\overrightarrow{u}$ نمایش می دهند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

مثال ۱۰۷. اگر $\overrightarrow{v}=(1,2,3)$ و $\overrightarrow{u}=(4,5,6)$ آنگاه $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=1\times 4+2\times 5+3\times 6=4+10+18=32$$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=4\times 1+5\times 2+6\times 3=4+10+18=32$$

همان‌طور که در مثال بالا می‌بینید همیشه داریم $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ همچنین اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ باشد داریم $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos\theta$

مثال ۱۰۸. زاویه‌ی بین دو بردار $\overrightarrow{v}=(1,2,3)$ و $\overrightarrow{u}=(4,5,6)$ را به دست آوردید.

حل:
$$\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{v}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}\\ |\overrightarrow{u}|=\sqrt{4^2+5^2+6^2}=\sqrt{77}\\ \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}=4+10+18=32\end{array}\right\}\Rightarrow 32=\sqrt{14}\times\sqrt{77}\cos\theta\Rightarrow\Rightarrow\cos\theta=\frac{32}{\sqrt{1078}}=\frac{16}{539}$$

عدد بالا با ماشین‌حساب، ۱۲٫۹۳۳۱ درجه می‌شود.

مثال ۱۰۹. مقدار a را طوری به دست آورید که دو بردار $\overrightarrow{v}=(1,a,3)$ و $\overrightarrow{u}=(4,5,6)$ بر هم عمود باشند.

حل: چون زاویه‌ی θ برابر ۹۰ درجه است پس $\cos\theta=0$ و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos\theta\Rightarrow 1\times 4+5a+6\times 3=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\times 0\Rightarrow 22+5a=0\Rightarrow a=-\frac{22}{5}$$

تعریف ۱۱۰. به هر تابع مانند $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ یک تابع برداری گویند. طول تابع برداری $f(t)$ در بازه‌ی $[a,b]$ برابر $\int_a^b |f'(t)|\,dt$ است.

مثال ۱۱۱. طول تابع برداری $f(t)=(t,\sin t,\cos t)$ را در بازه‌ی $[۲,۵]$ بیابید.

حل

$$f'(t)=(۱,\cos t,-\sin t)\quad\Rightarrow\quad |f'(t)|=\sqrt{۱^۲+\cos^۲ t+\sin^۲ t}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow\quad \int_a^b |f'(t)|\,dt=\int_۲^۵ \sqrt{۲}\,dt=\sqrt{۲}(۵-۲)=۳\sqrt{۲}$$

یادآوری می‌کنیم همیشه $\cos^۲ t+\sin^۲ t=۱$

تعریف ۱۱۲. به هر جدول از اعداد ماتریس گویند. ماتریس را با نماد $M_{n\times m}$ نمایش می‌دهیم که در آن n تعداد سطرها و m تعداد ستون‌های ماتریس است. برای جمع و تفریق دو ماتریس باید تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس برابر باشند. در این صورت مولفه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع و تفریق می‌کنیم. وقتی تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس برابر نباشند جمع و تفریق دو ماتریس تعریف نشده است.

مثال ۱۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۷&۸&۹\\۱۰&۱۱&۱۲\end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس‌های $A+B$، $A-B$ و $۵A$ را بنویسید.

حل:

$$A+B=\begin{bmatrix}۱+۷&۲+۸&۳+۹\\۴+۱۰&۵+۱۱&۶+۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸&۱۰&۱۲\\۱۴&۱۶&۱۸\end{bmatrix}$$
$$A-B=\begin{bmatrix}۱-۷&۲-۸&۳-۹\\۴-۱۰&۵-۱۱&۶-۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶&-۶&-۶\\-۶&-۶&-۶\end{bmatrix}$$
$$۵A=\begin{bmatrix}۵\times ۱&۵\times ۲&۵\times ۳\\۵\times ۴&۵\times ۵&۵\times ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۱۰&۱۵\\۲۰&۲۵&۳۰\end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس: برای ضرب دو ماتریس باید تعداد ستون‌های ماتریس سمت چپ با تعداد سطرهای ماتریس سمت راست برابر باشد. یعنی $A_{n\times k}\times B_{k\times m}=C_{n\times m}$ برای به دست آوردن حاصل‌ضرب دو ماتریس باید ابتدا سطرهای ماتریس سمت چپ را برابر بردارهای $\overrightarrow{v}_۱,\overrightarrow{v}_۲,\ldots,\overrightarrow{v}_n$ بگیریم و ستون‌های ماتریس سمت راست را برابر بردارهای $\overrightarrow{u}_۱,\overrightarrow{u}_۲,\ldots,\overrightarrow{u}_m$ در نظر بگیریم. سطر iام و ستون jام ماتریس حاصل‌ضرب برابر $\overrightarrow{v}_i\cdot\overrightarrow{u}_j$ است. یعنی حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار $\overrightarrow{v}_i$ و $\overrightarrow{u}_j$ را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۷&۸\\۱۰&۱۱\\-۲&-۵\end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس $A\times B$ را بنویسید.

حل چون $A_{۲\times ۳}$ و $B_{۳\times ۲}$ ضرب امکان‌پذیر است و حاصل‌ضرب یک ماتریس ۲×۲ می‌شود.

$$\overrightarrow{v}_۱=(۱,۲,۳)\qquad \overrightarrow{v}_۲=(۴,۵,۶)\qquad \overrightarrow{u}_۱=(۷,۱۰,-۲)\qquad \overrightarrow{u}_۲=(۸,۱۱,-۵)$$
$$\overrightarrow{v}_۱\cdot\overrightarrow{u}_۱=۷+۲۰-۶=۲۱\qquad \overrightarrow{v}_۱\cdot\overrightarrow{u}_۲=۸+۲۲-۱۵=۱۵$$
$$\overrightarrow{v}_۲\cdot\overrightarrow{u}_۱=۲۸+۵۰-۱۲=۶۸\qquad \overrightarrow{v}_۲\cdot\overrightarrow{u}_۲=۳۲+۵۵-۳۰=۵۷$$
$$A\times B=\begin{bmatrix}۲۱&۱۵\\۶۸&۵۷\end{bmatrix}$$

دترمینان یک ماتریس: دترمینان ماتریس A با نماد $|A|$ نشان داده می‌شود. دترمینان فقط برای ماتریس‌های مربعی یعنی ماتریس‌هایی که تعداد سطرها و ستون‌هایشان برابر هستند تعریف می‌شود.

برای ماتریس ۲×۲

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = a_{۱۱} \times a_{۲۲} - a_{۲۱} \times a_{۱۲}$$

برای ماتریس ۳×۳

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = a_{۱۱} \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - a_{۱۲} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

و همین‌طور برای ماتریس ۴×۴ و مرتبه‌ی بالاتر

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \\ a_{۴۱} & a_{۴۲} & a_{۴۳} & a_{۴۴} \end{vmatrix} = a_{۱۱} \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \\ a_{۴۲} & a_{۴۳} & a_{۴۴} \end{vmatrix} - a_{۱۲} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \\ a_{۴۱} & a_{۴۳} & a_{۴۴} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{۱۳} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۴} \\ a_{۴۱} & a_{۴۲} & a_{۴۴} \end{vmatrix} - a_{۱۴} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \\ a_{۴۱} & a_{۴۲} & a_{۴۳} \end{vmatrix}$$

مثال ۱۱۵. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۱ \times ۴ - ۲ \times ۳ = ۴ - ۶ = -۲$$

مثال ۱۱۶. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = ۱ \begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{vmatrix} - ۲ \begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۷ & ۹ \end{vmatrix} + ۳ \begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ ۷ & ۸ \end{vmatrix} = ۱ \times (۵ \times ۹ - ۶ \times ۸) - ۲ \times (۴ \times ۹ - ۶ \times ۷) + ۳ \times (۴ \times ۸ - ۷ \times ۵) = ۰$$

چند کاربرد از دترمینان ماتریس

۱) حل دستگاه n معادله n مجهول:

مثال ۱۱۷. دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول $\begin{cases} ۳x+۴y=۵ \\ ۶x+۷y=۸ \end{cases}$ را حل کنید.

حل: در تمامی این دستگاه‌ها مخرج دترمینال ضرایب یعنی $\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۶ & ۷ \end{vmatrix} = ۳\times ۷ - ۶\times ۴ = ۲۱ - ۲۴ = -۳$ می‌شود.

برای به دست آوردن x و y به ترتیب به جای ضرایب x و y طرف راست دستگاه را قرار می‌دهیم و عدد به دست آمده را بر مخرج تقسیم می‌کنیم یعنی

$$x = \frac{\begin{vmatrix} ۵ & ۴ \\ ۸ & ۷ \end{vmatrix}}{-۳} = \frac{۳۵-۳۲}{-۳} = \frac{۳}{-۳} = -۱ \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۶ & ۸ \end{vmatrix}}{-۳} = \frac{۲۴-۳۰}{-۳} = \frac{-۶}{-۳} = ۲$$

مثال ۱۱۸. دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول $\begin{cases} ۳x+۴y+۹z=۵ \\ ۶x+۷y+۲z=۸ \\ ۱۱x+۱۰y+z=۰ \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

$$\text{مخرج} = \begin{vmatrix} ۳ & ۴ & ۹ \\ ۶ & ۷ & ۲ \\ ۱۱ & ۱۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱۲۸ \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} ۵ & ۴ & ۹ \\ ۸ & ۷ & ۲ \\ ۰ & ۱۰ & ۱ \end{vmatrix}}{-۱۲۸} = \frac{۶۲۳}{-۱۲۸} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۹ \\ ۶ & ۸ & ۲ \\ ۱۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}}{-۱۲۸} = \frac{۶۸۸}{-۱۲۸} = -\frac{۴۳}{۸}$$

بر دانشجو لازم است که مقدار $z = \frac{۲۷}{-۱۲۸}$ را خودش محاسبه کند.

۲) ضرب خارجی دو بردار:

ضرب خارجی یا برداری دو بردار $\vec{v} = (a_۱, b_۱, c_۱)$ و $\vec{u} = (a_۲, b_۲, c_۲)$ را که با علامت $\vec{v}\times\vec{u}$ نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$

که در آن i، j و k بردارهای یکه محورهای x، y و z هستند یعنی $\mathbf{i}=(۱,۰,۰)$، $\mathbf{j}=(۰,۱,۰)$ و $\mathbf{k}=(۰,۰,۱)$

حاصل ضرب برداری یک بردار می‌شود که بر دو بردار اولیه عمود است. بر خلاف ضرب نقطه‌ای، ضرب برداری خاصیت جابجایی ندارد و هنگام جابجایی قرینه می‌شود یعنی $\vec{v}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{v}$ همچنین اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشد داریم $\vec{v}\times\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\sin\theta$

مثال ۱۱۹. اگر $\vec{v}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{u}=(۴,۵,۶)$ آن‌گاه $\vec{v}\times\vec{u}$ و $\vec{u}\times\vec{v}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} ۲ & ۳\\ ۵ & ۶\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} ۱ & ۳\\ ۴ & ۶\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} ۱ & ۲\\ ۴ & ۵\end{vmatrix}=(۱۲-۱۵,۱۲-۶,۵-۸)=(-۳,۶,-۳)$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۱ & ۲ & ۳\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} ۵ & ۶\\ ۲ & ۳\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} ۴ & ۶\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} ۴ & ۵\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}=(۱۵-۱۲,۶-۱۲,۸-۵)=(۳,-۶,۳)$$

همان‌طور که انتظار داشتیم بردارهای $\vec{v}\times\vec{u}$ و $\vec{u}\times\vec{v}$ قرینه یکدیگرند. دقت کنید که این دو بردار بر بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عمودند یعنی داریم:

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=(۱,۲,۳)\cdot(۳,-۶,۳)=۳-۱۲+۹=۰$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=(۴,۵,۶)\cdot(۳,-۶,۳)=۱۲-۳۰+۱۸=۰$$

دقت بفرمایید که اگر این حاصل‌ضرب‌ها صفر نشد معنای آن این است که در محاسبه اشتباه شده است.

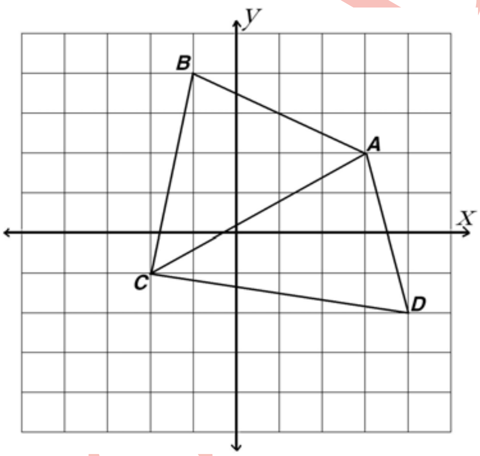
۳) محاسبه مساحت چند ضلعی‌ها در درس قبل دیدیم که یکی از روش‌های محاسبه‌ی مساحت انتگرال است به کمک دترمینان ماتریس نیز می‌توان مساحت را محاسبه کرد.

مثال ۱۲۰. مساحت مثلثی را بیابید که رئوس آن سه نقطه‌ی $A=(۱,۲)$، $B=(۳,۴)$ و $C=(-۵,-۶)$ باشد.

حل: قرار می‌دهیم $\vec{v}=A-B=(۱,۲)-(۳,۴)=(-۲,-۲)$ و $\vec{u}=A-C=(۱,۲)-(-۵,-۶)=(۶,۸)$ و داریم :

$$\text{مساحت}=\frac{\begin{vmatrix} ۶ & ۸\\ -۲ & -۲\end{vmatrix}}{۲}=\frac{-۱۲-(-۱۶)}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

در دترمینان بالا سطرها مولفه‌های بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هستند اگر سطرها جابجا شوند مقدار دترمینان عددی منفی می‌شود در نتیجه همیشه باید پس از به دست آوردن مساحت، قدرمطلق آن را در نظر بگیریم.



مثال ۱۲۱. مساحت چهارضلعی را بیابید که رئوس آن سه نقطه‌ی $A=(۳,۲)$، $B=(-۱,۴)$، $C=(-۲,-۱)$ ، $D=(۴,-۲)$ باشد.

حل: مطابق شکل می‌توانیم چهارضلعی را با رسم یک قطر به دو مثلث تبدیل کنیم. قدرمطلق مساحت مثلث‌ها را به دست می‌آوریم و باهم جمع می‌کنیم.

$$\vec{v}=A-B=(۳,۲)-(-۱,۴)=(۴,-۲)$$

$$\vec{u}=A-C=(۳,۲)-(-۲,-۱)=(۵,۳)$$

$$\vec{w}=A-D=(۳,۲)-(۴,-۲)=(-۱,۴)$$

$$s_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{20+3}{2} = \frac{23}{2} = 11/5 \qquad s_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{12-(-10)}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$s = |s_1| + |s_2| = |11| + |11/5| = 22/5$$

تمرینات

۱. اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v} = (5, 2, 6)$ و $\vec{u} = (8, -1, 2)$ باشد آن‌گاه $\cos\theta$ را بیابید.

۲. مقدار a را طوری بیابید که دو بردار $\vec{v} = (5, 2, 6)$ و $\vec{u} = (a, -1, 2)$ بر هم عمود باشند.

۳. بردار $\vec{w}$ را طوری بیابید که بر دو بردار $\vec{v} = (5, 2, 3)$ و $\vec{u} = (6, -1, 2)$ عمود باشد.

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ -1 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس‌های $B \times A$ و $A \times B$ را بیابید.

۵. دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول $\begin{cases} -3x + 4y - z = 6 \\ x + 7y + 3z = 1 \\ 5x + 9y - 4z = 2 \end{cases}$ را حل کنید.

۶. مساحت چهارضلعی را بیابید که رئوس آن سه نقطه‌ی $A = (-3, 2)$، $B = (-4, 4)$، $C = (-2, -1)$ ، $D = (2, -2)$ باشد.

۷. طول تابع برداری $f(t) = (3t, 4t + t^2, 1 - t^2)$ را در بازه‌ی $[2, 5]$ بیابید.