پاسخ تمرین سری چهارم "آنالیز بردار"

سوال اول)

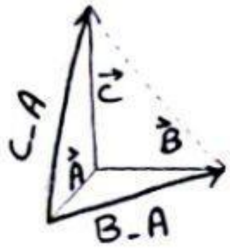
$$1)\ |\vec{A}\pm\vec{B}|^2=(\vec{A}\pm\vec{B}).(\vec{A}\pm\vec{B})=|\vec{A}|^2\pm\vec{A}.\vec{B}\pm\vec{B}.\vec{A}+|\vec{B}|^2$$

$$=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2\pm 2\,\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2\pm 2\,AB\cos\theta$$

$$2)\ |\vec{A}\times\vec{B}|^2=(|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)^2=|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\sin^2\theta=|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$=|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\cos^2\theta=|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-(\vec{A}.\vec{B})^2$$

سوال دوم)



$$\vec{A}=\hat{i}\quad,\ \vec{B}=2\hat{j}\quad,\ \vec{C}=3\hat{k}$$

$$\vec{B}-\vec{A}=-\hat{i}+2\hat{j}\quad,\quad \vec{C}-\vec{A}=-\hat{i}+3\hat{k}$$

$$\vec{D}=(\vec{B}-\vec{A})\times(\vec{C}-\vec{A})=6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\Rightarrow\ \hat{n}=\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}$$

$$|\vec{D}|=\sqrt{36+9+4}=7$$

سوال سوم) ۱) معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از دو بردار $i+j$ و $j+k$:

$\hat{n}$ = بردار نرمال صفحه = $(i+j)\times(j+k)$

$$\hat{n}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

معادله صفحه با در نظر گرفتن نقطه $(1,1,0)$ = $1(x-1)-1(y-1)+1(z-0)=x-y+z=0$

ضرب خارجی این بردار و بردار مورد نظر خواسته مسئله است:

$$D=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\hat{i}+(-2)\hat{k}$$

$$\Rightarrow\ \hat{D}=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

$$|\vec{D}|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

سوال چهارم)

$$\vec{D} = b\vec{B} + c\vec{C}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot(b\vec{B} + c\vec{C}) = 0$$

$$b\,\vec{A}\cdot\vec{B} + c\,\vec{A}\cdot\vec{C} = 0 \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = -1$$

$$-b - c = 0 \qquad \vec{A}\cdot\vec{C} = -1$$

$$\Rightarrow -b = c$$

$$\vec{D} = b\vec{B} - b\vec{C} = b(\vec{B} - \vec{C})$$

$$= b(\hat{j} + \hat{k})$$

$$|\vec{D}| = 1 = \sqrt{b^۲ + b^۲} = \sqrt{۲b^۲}$$

$$۲b^۲ = ۱ \Rightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{1}{\sqrt{۲}}(\hat{j} + \hat{k})$$

سوال پنجم)

الف) $\vec{A} = (۶, ۳, -۲)$ $\qquad |\vec{A}| = \sqrt{۳۶ + ۹ + ۴} = ۷$

$A_x = A\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{۶}{۷} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{۶}{۷}\right)$

$A_y = A\cos\beta$

$A_z = A\cos\theta \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{۳}{۷}\right)$

$$\cos\theta = \frac{A_z}{A} = \frac{-۲}{۷} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{۲}{۷}\right)$$

ب) هر بردار $\vec{B}$ ای که مضربی از بردار $\vec{A}$ باشد، با بردار $\vec{A}$ موازی است. $\qquad \vec{B} = a\vec{A}$

وخطوط موازی با بردار $\vec{A}$ توسط معادله خط زیر تعریف می‌شوند که از نقاط (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد.

$$\frac{x - x_0}{A_x} = \frac{z - z_0}{A_z} = \frac{y - y_0}{A_y}$$

ج)

$\vec{A} = (۱, ۱, ۱, \dots, ۱)$

$\vec{B} = (۱, ۲, ۳, \dots, n)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{۱ + ۲ + ۳ + \dots + n}{(۱+۱+۱+\dots+۱)^{\frac{۱}{۲}} \, (۱ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + n^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$= \frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\sqrt{n} \, \left(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}\right)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\lim \frac{n(n+۱)}{۲\sqrt{n} \, \left(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}\right)^{\frac{۱}{۲}}} \simeq \frac{n^۲}{۲n^{\frac{۱}{۲}} \left(\frac{۲n^۳}{۶}\right)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{n^۲}{۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}} n^۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}$$

د)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos\theta$$

$$\theta = \alpha - \beta \quad \Rightarrow \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$|\vec{A}| = |\vec{B}| = ۱$$