دینامیک برخورد کشسان دو میله‌ی سخت با یک دیگر در دو بُعد

محسن یاری فرد، ابراهیم فولادوند

گروه فیزیک، دانشکده‌ی علوم پایه، دانشگاه زنجان، زنجان

برخورد کشسان یک میله‌ی سخت (صلب) با یک میله‌ی دیگر در صفحه بررسی می‌شود. به کمک اصول پایستگی انرژی، پایستگی تکانه خطی و زاویه‌ای، کمیت‌های سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی مرکز جرم میله‌ها را پس از برخورد بر حسب مقادیر همان کمیت‌ها پیش از برخورد پیدا می‌کنیم.

1 مقدمه

مسائل برخورد در مکانیک همواره از اهمیت زیادی برخوردار بوده‌اند. در بیشتر کتابهای دبیرستانی و حتی دانشگاهی از ساختار ذرات برخوردکننده چشم‌پوشی می‌شود و ذرات را بصورت نقطه‌ای می‌انگارند [۱]. اما برای نمایاندن (ارائه‌ی) یک توصیف بهتر، گاهی در نظر گرفتن ساختار داخلی ذرات امری بایسته (ضروری) می‌نماید [۲]. برای نمونه می‌توان به مولکول‌های بیضی‌گونه در بلورهای مایع اشاره نمود [۳].

در این نوشته می‌خواهیم با در نظر گرفتن ساختار هندسی برای ذرات، برخورد آنها را با یک‌دیگر مطالعه کنیم. ذرات را بصورت میله‌های کاملاً سخت به جرم m و طول l می‌گیریم که با یک‌دیگر برخورد می‌کنند. در اینجا برای سادگی مسئله را بصورت دو بُعدی در نظر می‌گیریم و سطحی که میله‌ها روی آن قرار دارند را بدون اصطکاک می‌گیریم. می‌انگاریم (فرض می‌کنیم) در لحظه‌ی نخست، میله‌ی i $(i = 1, 2)$ دارای سرعت زاویه‌ای ω_i باشد و با محور x ها زاویه‌ی θ_i بسازد. همچنین مؤلفه‌های سرعت مرکز جرم میله‌ی i را با v_{xi} و v_{yi} نشان می‌دهیم (شکل ۱). سوی مثبت ω را بصورت گردش به دور محور z ها و در سوی پاد ساعتگرد می‌گیریم. میله‌ها در طول حرکت خود که ترکیبی از حرکتهای ترابردی مرکز جرم و گردش به دور مرکز جرم است ممکن است به یک‌دیگر برخورد کنند. فرض می‌شود شرایط اولیه‌ی میله‌ها به گونه‌ای است که به یک‌دیگر برخورد خواهند نمود. برای

شکل ۱: دو میله با شرایط آغازین دلخواه

یافتن زمان برخورد باید یک معادله‌ی ناخطی را به روش عددی حل نماییم. در اینجا نمی‌خواهیم وارد جزئیات این کار شویم. با فرض معلوم بودن زمان برخورد میله‌ها و مختصات نقطه‌ی برخورد، با کمک اصول پایستگی انرژی و پایستگی تکانه‌های خطی و زاویه‌ای، سرعت‌های زاویه‌ای و نیز سرعت‌های خطی مرکز جرم میله‌ها را پس از برخورد بر حسب مقادیر همان کمیات پیش از برخورد پیدا می‌کنیم.

2 دینامیک برخورد دو میله

هدف ما پیدا کردن سرعت خطی مرکز جرم میله‌ها و نیز سرعت زاویه‌ای گردش آن‌ها به دور محور z گذرنده از مرکز جرم میله‌ها پس از برخورد است. میله‌ای که یک سر آن به بدنه‌ی میله‌ی دیگر برخورد می‌کند c (مخفف collider) و میله‌ی دیگر را p (مخفف partner) می‌نامیم.

برخورد را به صورت کاملاً کشسان و بدون میرایی می‌گیریم. بردارهای مرکزجرم c و p را با $\vec{R}_c = (X_c, Y_c)$ و $\vec{R}_p = (X_p, Y_p)$ نشان می‌دهیم. سرعت خطی مرکز جرم میله‌ها پیش از برخورد را با $\vec{v}_c$ و $\vec{v}_p$، و پس از برخورد را با $\vec{v}'_c$ و $\vec{v}'_p$ نشان می‌دهیم. همچنین سرعت زاویه‌ای میله‌ها به دور محور z گذرنده از مرکز جرم میله‌ها را، پیش و پس از برخورد به ترتیب با ω_c، ω_p و ω'_c، ω'_p نشان می‌دهیم. جرم هر میله m است (که بصورت یکنواخت در طول میله پخش شده)، و گشتاور ماند هر میله به دورِ محوری عمود بر میله که از مرکزِ جرمِ آن می‌گذرد I است. طول هر میله l است. مختصات نقطه‌ی برخورد نیز با $x^\star$ و $y^\star$ نشان داده می‌شود (شکل ۲). بنا بر اصل پایستگی تکانه‌ی خطی داریم:

$$\vec{v}_c + \vec{v}_p = \vec{v}'_c + \vec{v}'_p, \tag{1}$$

و بنا بر اصل پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_p^2+\frac{1}{2}I\,\omega_p^2+\frac{1}{2}\,m\,v_c^2+\frac{1}{2}\,I\,\omega_c^2=\frac{1}{2}\,m\,v_p'^2+\frac{1}{2}\,I\,\omega_p'^2+\frac{1}{2}\,m\,v_c'^2+\frac{1}{2}\,I\,\omega_c'^2. \quad (2)$$

اینک پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای را نسبت به محور عمود بر صفحه‌ی $x-y$ و گذرنده از نقطه‌ی $(x^\star, y^\star)$ می‌نویسیم:

$$m\,\vec{r}_c\times\vec{v}_c+I\,\omega_c\,\hat{k}+m\,\vec{r}_p\times\vec{v}_p+I\,\omega_p\,\hat{k}=m\,\vec{r}_c\times\vec{v}_c'+I\,\omega_c'\,\hat{k}+m\,\vec{r}_p\times\vec{v}_p'+I\,\omega_p'\,\hat{k}, \quad (3)$$

که در آن $\vec{r}_c$ و $\vec{r}_p$ به صورت بردارهایی از نقطه‌ی برخورد به مرکز جرم c و p تعریف می‌شوند. روی هم شش مجهول داریم: مولفه‌های x و y ی $\vec{v}_c'$، مولفه‌های x و y ی $\vec{v}_p'$، ω_c'، و ω_p'. اما شمار معادله‌های بالا چهار تا است ـــ معادله‌ی (1) دو معادله، معادله‌های (2) و (3) هر کدام یک معادله. پس به دو معادله‌ی دیگر نیاز داریم. یکی از این معادله‌ها با دانستن سوی نیروی برخوردی به دست می آید. در واقع می‌دانیم اگر از اصطکاک بین دو میله چشم‌پوشی شود، وقتی دو میله به هم برخورد می‌کنند نیرو در راستای عمود بر میله‌ی p است، بنابراین مؤلفه‌های تکانه خطی میله‌ها در سوی موازی با این راستا تغییر می‌کنند، و مؤلفه های تکانه‌ی خطی میله‌ها در امتداد عمود بر این راستا ثابت می‌مانند. چارچوب مرجع $x'-y'$ را به گونه‌ای می‌گیریم که سوی مثبت y' از نقطه‌ی برخورد به مرکز جرم p باشد. سوی مثبت x' از راستگرد بودن چارچوب $(\hat{x}'\times\hat{y}'=\hat{k})$ بدست می آید. (توجه کنید که $\hat{x}'$ می‌تواند هم‌سو یا در خلاف سوی نیروی برخوردی باشد.) بردارهای $\vec{v'}_c$، $\vec{v'}_p$، $\vec{v}_p$، $\vec{v}_c$، $\vec{r}_p$، و $\vec{r}_c$ را در دستگاه پریم‌دار، که از این پس به آن دستگاه برخوردی می‌گوییم، تجزیه می‌کنیم. مولفه‌های در راستای x' را با $r_{c\parallel},...,v_{p\parallel}'$ و مولفه‌های در راستای y' را با $r_{c\perp},...,v_{p\perp}'$ نشان می دهیم.

از آنجایی که راستای نیروی برخوردی همواره عمود بر راستای y' است و تکانه در راستای عمود بر نیرو ثابت می‌ماند داریم:

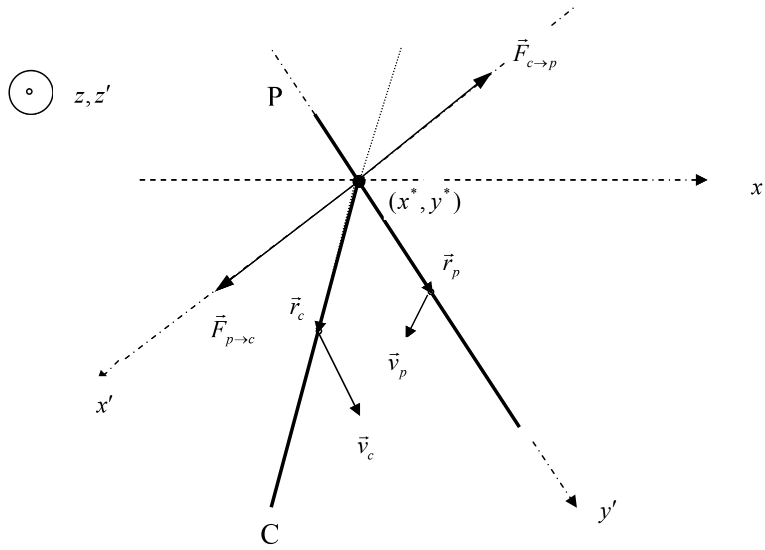
$$v_{c\perp}'=v_{c\perp} \qquad\qquad v_{p\perp}'=v_{p\perp}. \quad (4)$$

بنابراین دو مجهول $v_{c\perp}'$ و $v_{p\perp}'$ پیدا می‌شوند و معادله‌ی (1) تبدیل به یک معادله نابسته (مستقل) بصورت زیر می‌شود:

$$v_{p\parallel}+v_{c\parallel}=v_{p\parallel}'+v_{c\parallel}'. \quad (5)$$

اکنون سه معادله و چهار مجهول داریم. برای یافتن معادله بعدی از مفاهیم ضربه‌های خطی و زاویه‌ای استفاده می‌کنیم . ضربه‌ی خطی وارد بر میله‌ی c از سوی p را با $\vec{\eta}_{p\to c}$ نشان می‌دهیم:

$$\vec{\eta}_{p\to c}=\int\vec{F}_{p\to c}\,dt=\Delta\vec{P}_c. \quad (6)$$



شکل ۲: برخورد دو میله

$\Delta\vec{P}_c$ تغییر تکانه‌ی خطی میله‌ی c در اثر برخورد است. به همین گونه برای ضربه‌ی زاویه‌ای داریم:

$$\vec{J}_{p\to c} = \int \vec{\tau}_{p\to c}\, dt = \Delta\vec{L}_c. \tag{7}$$

$\Delta\vec{L}_c$ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای میله‌ی c در اثر برخورد، و $\vec{\tau}_{p\to c}$ گشتاور اعمالی بر روی میله‌ی c از سوی میله‌ی p است. بنا بر معادله‌ی (7) تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای c به دور محور z گذرنده از مرکز جرم آن به صورت زیر در می‌آید:

$$\vec{L}'_c - \vec{L}_c = -\int \vec{r}_c \times \vec{F}_{p\to c}\, dt \tag{8}$$

اکنون اگر دو طرف رابطه‌ی (8) را در $\hat{r}_p$ (بردار یکه در سوی بردار $\vec{r}_p$، که همان $\hat{y}'$ است) ضرب خارجی کنیم خواهیم داشت:

$$\vec{\eta}_{p\to c} = \int \vec{F}_{p\to c}\, dt = \frac{I(\omega'_c - \omega_c)}{r_c \cos(\vec{r}_p, \vec{r}_c)}\hat{x}'. \tag{9}$$

منظور از $\cos(\vec{r}_p, \vec{r}_c)$ کسینوس زاویه میان بردارهای $\vec{r}_c$ و $\vec{r}_p$ است. به همین ترتیب برای میله‌ی p نیز داریم:

$$\vec{L}'_p - \vec{L}_p = -\int \vec{r}_p \times \vec{F}_{c\to p}\, dt. \tag{10}$$

بنابراین با توجه به قانون سوم نیوتن می‌توان نوشت:

$$\vec{\eta}_{p\to c} = \int \vec{F}_{p\to c}\, dt = -\frac{I(\omega_p' - \omega_p)}{r_p}\hat{x}'. \tag{11}$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی (11) با رابطه‌ی (9) و این که در لحظه‌ی برخورد $r_c = \frac{l}{2}$ است داریم:

$$\frac{\omega_c^{'} - \omega_c}{\omega_p' - \omega_p} = -\frac{l}{2r_p}\cos(\vec{r}_p, \vec{r}_c). \tag{12}$$

معادله‌ی (12) همان معادله‌ی آخری است که لازم داریم. پس چهار مجهول داریم : $v_{c\|}^{'}$، $v_{p\|}^{'}$، $\omega_c^{'}$، و $\omega_p^{'}$ که با معادله‌های (2، 3، 5، 12) تعیین می‌شوند. با تجزیه‌ی بردارهای $\vec{r}_p, \vec{r}_c$ در راستاهای عمودی و هم‌راستا در دستگاه برخوردی و با کمک معادله‌های (3) و (4) داریم:

$$m\,\vec{r}_{c\perp}\times\vec{v}_{c\|} + I\,\omega_c\hat{k} + m\,\vec{r}_{p\perp}\times\vec{v}_{p\|} + I\,\omega_p\hat{k} = m\vec{r}_{c\perp}\times\vec{v}_{c\|}' + I\,\omega_c'\hat{k} + m\,\vec{r}_{p\perp}\times\vec{v}_{p\|}' + I\,\omega_p'\hat{k} \tag{13}$$

با توجه به راستگرد بودن دستگاه برخوردی $(\hat{e_\|}\times\hat{e_\perp} = \hat{k})$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$I\,\omega_c + I\,\omega_p - m\,r_{c\perp}\,v_{c\|} - m\,r_{p\perp}\,v_{p\|} = I\,\omega_c^{'} + I\,\omega_p^{'} - m\,r_{c\perp}\,v_{c\|}^{'} - m\,r_{p\perp}\,v_{p\|}^{'}. \tag{14}$$

پیش از جلو بردن محاسبه پارامترهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta v_{c\|} = v_{c\|}^{'} - v_{c\|}, \\ \Delta v_{p\|} = v_{p\|}^{'} - v_{p\|}, \\ r_{cp\perp} = r_{c\perp} - r_{p\perp}, \\ A = \frac{l}{2\,r_p}\,\cos(\vec{r}_p, \vec{r}_c) - 1. \end{cases} \tag{15}$$

با جایگذاری پارامترهای بالا در معادله‌ی (14) داریم:

$$\omega_c^{'} - \omega_c = \omega_p - \omega_p^{'} + \frac{m}{I}\,r_{cp\perp}\,\Delta v_{c\|}. \tag{16}$$

از حل معادله‌های (12) و (16) خواهیم داشت:

$$\omega_c^{'} = \omega_c + \frac{m(A+1)}{IA}\,r_{cp\perp}\,\Delta v_{c\|}, \qquad \omega_p^{'} = \omega_p - \frac{m}{IA}\,r_{cp\perp}\,\Delta v_{c\|}. \tag{17}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$v_{c\|}^{'} = v_{c\|} + \Delta v_{c\|}, \qquad v_{p\|}^{'} = v_{p\|} - \Delta v_{c\|}. \tag{18}$$

البته از معادله‌ی (5) که $\Delta v_{p\|} = -\Delta v_{c\|}$ را نتیجه می‌دهد استفاده شده است. بنابراین اگر $\Delta v_{c\|}$ را برحسب کمیات پیش از برخورد بدست آوریم همه‌ی مجهول‌ها بر حسب کمیات پیش از برخورد به دست می‌آیند. تنها معادله‌ای که تا کنون از آن استفاده نشده معادله‌ی (2) است. اگر کمیات پریم‌دار، به

جز $v'_{c\|}$ را برحسب کمیات بدون پریم (پیش از برخورد) که در معادله‌های (4، 17، 18) به دست آمده اند را در (2) بگذاریم به یک معادله‌ی درجه دوم برای $v'_{c\|}$ می‌رسیم . پاسخ‌های این معادله عبارتند از:

$$v'_{c\|} = v_{c\|}. \tag{19}$$

$$v'_{c\|} = v_{c\|} - \frac{v_{c\|} - v_{p\|} + \frac{r_{cp\perp}}{A}(\omega_c + A\omega_c - \omega_p)}{1 + \frac{m}{2IA^2}(A^2 + 2A + 2)r^2_{cp\perp}}. \tag{20}$$

از میان این دو پاسخ اولی پذیرفتنی نیست، زیرا در این صورت $\Delta v_{c\|} = 0$ می‌شود که با توجه به معادله‌های (4، 17، 18) بدین معنی است که هیچ تغییری در وضعیت میله‌ها رخ نمی‌دهد. بنابراین پاسخ درست (20) است و در نتیجه داریم:

$$\Delta v_{c\|} = \frac{v_{p\|} - v_{c\|} + \frac{r_{cp\perp}}{A}(\omega_p - \omega_c - A\omega_c)}{1 + \frac{m}{2IA^2}(A^2 + 2A + 2)r^2_{cp\perp}}. \tag{21}$$

اینک همه‌ی کمیات پس از برخورد را بر حسب کمیات پیش از برخورد پیدا کردیم ولی در دستگاه مختصات برخوردی که لحظه‌ای است و در شکل (2) بصورت $x' - y'$ نشان داده شده است. در واقع باید بتوانیم کمیات مورد نظر را در دستگاه ساکن $x - y$ بنویسیم. چون مسئله دو بُعدی است ω'_p و ω'_c در دستگاه $x - y$ تفاوتی با مقدارشان در دستگاه $x' - y'$ ندارند. در مورد بردارهای $\vec{v}'_c, \vec{v}'_p$ با توجه به چگونگی تبدیل بردارها داریم:

$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} r_{c||} \\ r_{c\perp} \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} r_{cx} \\ r_{cy} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

که در آن $R(\theta)$ ماتریس چرخش بین دستگاه برخوردی $x' - y'$ و دستگاه ساکن $x - y$ است:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{23}$$

در رابطه‌های بالا θ زاویه میان محور x دستگاه ساکن و محور x' دستگاه چرخش‌یافته (برخوردی) در سوی پادساعتگرد می‌باشد.

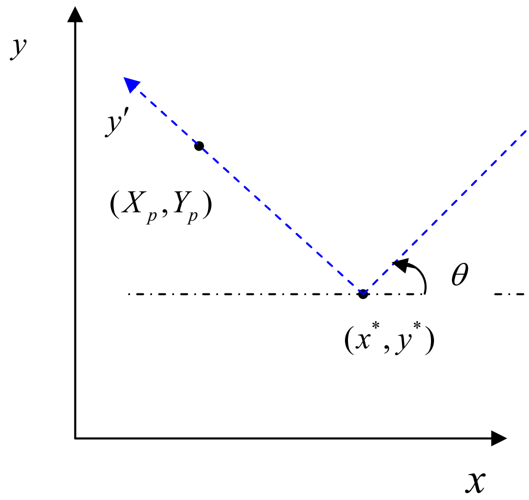
از شکل (3) پیدا است که

$$\cos\theta = \frac{Y_p - y^\star}{\sqrt{(Y_p - y^\star)^2 + (X_p - x^\star)^2}}, \ \sin\theta = -\frac{X_p - x^\star}{\sqrt{(Y_p - y^\star)^2 + (X_p - x^\star)^2}}. \tag{24}$$

بنا بر رابطه‌ی (22) می‌توان نوشت:

$$r_{c\|} = \cos\theta\, r_{cx} + \sin\theta\, r_{cy}, \qquad r_{c\perp} = \cos\theta\, r_{cy} - \sin\theta\, r_{cx}. \tag{25}$$

از آن جایی که می‌دانیم رابطه‌های بالا برای هر بردار دلخواهی برقرار است، می‌توانیم رابطه‌های زیر را هم بنویسیم:



شکل ۳: چرخش دستگاه برخوردی نسبت به دستگاه ساکن

$$v_{c\|} = \cos\theta\, v_{cx} + \sin\theta\, v_{cy}, \qquad v_{c\perp} = \cos\theta\, v_{cy} - \sin\theta\, v_{cx}. \tag{26}$$

روابط همانندی را هم می‌توان برای میله‌ی p نوشت. بنابراین همه‌ی کمیت‌های پس از برخورد را در دستگاه برخوردی می‌توان برحسب کمیت‌های پیش از برخورد در دستگاه ساکن نوشت . اما برای پیدا کردن کمیت‌های پس از برخورد در دستگاه ساکن، باید چرخش وارون انجام داد:

$$\vec{v}'_c = \begin{pmatrix} v'_{c||} \\ v'_{c\perp} \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} v'_{cx} \\ v'_{cy} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} v'_{cx} \\ v'_{cy} \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} v'_{c||} \\ v'_{c\perp} \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} v'_{c||} \\ v'_{c\perp} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

بنابراین داریم:

$$v'_{cx} = \cos\theta\, v'_{c\|} - \sin\theta\, v'_{c\perp} \qquad v'_{cy} = \cos\theta\, v'_{c\perp} + \sin\theta\, v'_{c\|}, \tag{29}$$

$$v'_{px} = \cos\theta\, v'_{p\|} - \sin\theta\, v'_{p\perp} \qquad v'_{py} = \cos\theta\, v'_{p\perp} + \sin\theta\, v'_{p\|}. \tag{30}$$

تمام کمیت‌های پریم‌دار در سمت راست برحسب کمیت‌های پیش از برخورد در دستگاه ساکن بدست آمده‌اند. توجه داشته باشید کمیت‌های X_p, Y_p, X_c, Y_c، که در روابط بالا استفاده شده‌اند، کمیاتی در

زمان برخورد $t^\star$ هستند، که بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$X_c = X_c(t^\star) = X_c(0) + t^\star v_{cx}, \qquad Y_c = Y_c(t^\star) = Y_c(0) + t^\star v_{cy}, \tag{31}$$

$$X_p = X_p(t^\star) = X_p(0) + t^\star v_{px}, \qquad Y_p = Y_p(t^\star) = Y_p(0) + t^\star v_{py}. \tag{32}$$

سپاس‌گزاری

از امیر حسین فتح اللهی به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندش، و از یکی از داوران ناشناس مقاله برای یادآوری نکته‌ای که به کوتاه شدن محاسبات انجامید سپاس‌گزاری می‌کنیم.

مراجع

[1] جری ماریون، استیفن تورونتون، دینامیک کلاسیک ذرات و سیستم‌ها، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴، فصل دوم.

[2] برخورد کشسان یک میله‌ی صلب با یک قرص ثابت؛ مهدیه بیگدلو، محمدابراهیم فولادوند، مهدی نیک‌عمل، گاما، شماره‌ی ۱۲، پاییز ۱۳۸۵

[3] W. Goetze in “Liquids, Freezing and the Glass Transition”; Edited by P. Hansen, D. Levesque and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1991).