جمع بندی ریاضی۱ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ۲۰دی۱۳۹۷

بخش۱-**انتگرال نامعین** (تغییرمتغیر-جزءبه جزء-تجزیه کسر-تغییرمتغیرمثلثاتی)

بخش۲-**کاربرد انتگرال** (معین-سطح-حجم-طول قوس-حدمجموع با انتگرال-قضیه اساسی اول حساب)

بخش۳-**سری** (همگرایی و واگرایی-بازه و شعاع همگرایی)

بخش۱-انتگرال نامعین

تغییرمتغیر: بسیار پرکاربرد - وجود یک تابع و مشتق آن

جزءبه جزء: Ln ، tg^{-1} ، حاصلضرب ، بازگشتی

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

کسری و تجزیه کسر:

درجه صورت > مخرج ← تقسیم دبیرستان

〃 = 〃 ← ایجاد مخرج در صورت

〃 < 〃 ← مربع کامل یا تجزیه کسری

تغییرمتغیرمثلثاتی :

$$x^2+a^2 \begin{cases} x = a\,tg\theta \\ dx = a\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$x^2-a^2 \begin{cases} x = a\sec\theta \\ dx = a\sec\theta \cdot tg\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$a^2-x^2 \begin{cases} x = a\sin\theta \\ dx = a\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg(\frac{x}{2}) = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

math-teacher.blog.ir

سوال ۱–حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

۱) $\int \frac{۱}{tanx(۲+tanx)}dx$ (دی ۹۱)

$$\begin{cases} tgx = u \\ (1+tg^2x)dx = du \end{cases} \to \int \frac{du}{u(2+u)(1+u^2)}$$

$\hookrightarrow (1+u^2)dx = du$

$$\frac{1}{u(u+2)(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2} + \frac{Cu+D}{u^2+1}$$

۲) $\int \frac{sinhx}{\sqrt{e^{coshx}-۱}}dx$ (دی ۸۶)

$$\begin{cases} e^{Coshx}-1 = u^2 \\ Sinhx . e^{Coshx} dx = 2u du \end{cases} \to Sinhx . dx = \frac{2u du}{\cancel{e^{Coshx}}} \to u^2+1$$

$$\to \int \frac{2\cancel{u} du}{\cancel{u}(u^2+1)} = 2\int \frac{du}{u^2+1}$$

۳) $\int \sqrt{\frac{x}{۱-x\sqrt{x}}}dx$ (دی ۸۸)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x\sqrt{x}}} dx \quad \begin{cases} x = u^2 \\ dx = 2u du \end{cases}$$

$$\to \int \frac{u}{\sqrt{1-u^3}} 2u du = 2\int \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^3}} \quad \begin{cases} 1-u^3 = t^2 \\ -3u^2 du = 2t dt \end{cases}$$

$$= 2\int \frac{-\frac{2}{3}\cancel{t} dt}{\cancel{t}} = -\frac{4}{3}\int dt = -\frac{4}{3}t$$

۴) $\int \cos^2(\log_2 x)\,dx$ (دی ۸۸)

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\to \frac{1}{2}\Big(\int 1 + \underbrace{\cos(2\log_2 x)}_{I}\Big)$

$I = \int \cos(2\log_2 x)\,dx \quad \begin{cases} \cos(2\log_2 x) = u \to \sin(2\log_2 x)\frac{2}{x}\cdot\log 2\,dx = du \\ dx = dv \to x = v \end{cases}$

$\overset{\text{جزء به جزء}}{=} x\cos(2\log_2 x) - 2\log 2 \underbrace{\int \sin(2\log_2 x)\,dx}_{*}$

* دوباره جزء به جزء مشابه قبلی

---

۵) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x-x^2}}$ (دی ۸۹)

$\begin{cases} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{cases} \to \int \frac{2t\,dt}{(t+1)\sqrt{t^2-t^4}} \quad \sqrt{t^2(1-t^2)}$

$= 2\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{1-t^2}} \quad \begin{cases} t = \sin\theta \\ dt = \cos\,d\theta \end{cases}$

$= 2\int \frac{\cancel{\cos\theta}\,d\theta}{(\sin\theta+1)\cancel{\cos\theta}} = 2\int \frac{d\theta}{\sin\theta+1} \quad \begin{cases} d\theta = \frac{2du}{1+u^2} \\ \sin\theta = \frac{2u}{1+u^2} \end{cases}$

---

۶) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ (دی ۹۰)

$\xrightarrow{\div \cos^4 x} \int \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x}}{tg^4 x+1}dx \quad \left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \int \frac{tg x\cdot \sec^2 x}{tg^4 x+1}dx \quad \begin{cases} tg^2 x = u \\ 2\,tg x\sec^2 x\,dx = du \end{cases}$

$= \int \frac{du}{u^2+1}$

۷) $\int x\, e^{\arc\sin x} dx$ (دی ۹۲)

$$\begin{cases} \arcsin x = t \to \sin t = x \\ \cos t\, dt = dx \end{cases}$$

$$\to \int \sin t \cdot e^t \cdot \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int e^t \cdot \sin 2t\, dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} \sin 2t = u & 2\cos 2t\, dt = du \\ e^t dt = dv & e^t = v \end{cases}$$

$$= e^t \sin 2t - 2\int \underbrace{e^t \cos(2t)\, dt}_{* \to \text{دوباره جزء به جزء}}$$

---

۸) $\int \frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3x+2} dx$ (دی ۹۲)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4} - 2x^2 + 6 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline -x^4 + 3x^3 - 2x^2 & x^2 + 3x + 5 \\ \hline \cancel{3x^3} - 4x^2 + 6 & \\ -3x^3 + 9x^2 - 6x & \\ \hline \cancel{5x^2} - 6x + 6 & \\ -5x^2 + 15x - 10 & \\ \hline 9x - 4 & \end{array}$$

$$\to \int \Big(x^2 + 3x + 5 + \underbrace{\frac{9x-4}{x^2-3x+2}}_{I}\Big) dx$$

$$I = \int \frac{9x-4}{(x-2)(x-1)} = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

---

۹) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$ (دی ۹۴)

$$\underbrace{\underbrace{x^3 + x^2}_{x^2(x+1)} + x + 1}_{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\to \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

۱۰) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (دی ۹۱)

$$\begin{cases} x = tg\,\theta \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases} \longrightarrow \int \frac{\sec^{\cancel{2}}\theta}{tg^4\theta \cdot \cancel{\sec\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}}\, d\theta = \int \frac{\cancel{\cos^3\theta}^{\;\cos^2\theta\cdot\cos\theta}}{\sin^4\theta}\, d\theta = \int \frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta}{\sin^4\theta}\, d\theta \quad \begin{cases} \sin\theta = u \\ \cos\theta\, d\theta = du \end{cases}$$

$$= \int \frac{(1-u^2)}{u^4}\, du$$

---

۱۱) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$ (دی ۹۳)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \, \cos^4 x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x\, dx}{\sin^4 x \cos^4 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x \cos^4 x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} + \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$$

$$\xrightarrow{\text{تکرار}} \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x} + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}\cos^4 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x} + \int \frac{\sin^2 x}{\sin^4 x \cos^2 x}$$

$$+ \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x \cos^2 x}\, dx$$

و ادامه ...

---

۱۲) $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$ (دی ۹۲)

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2t-(1-t^2)} = \int \frac{dt}{1+t^2} = tg^{-1} t$$

۱۳) $\int \frac{cotx}{cosx+1}dx$ (دی۹۷)

$$\int \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\cos x+1}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x\cos x+\sin x}dx$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{(1-t^2)}{\underbrace{2t(1-t^2)+2t(1+t^2)}_{\cancel{2}t(1\cancel{-t^2}+1\cancel{+t^2})}}\cancel{2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{t}dt$$

۱۴) $\int (\frac{lnx}{x})^2 dx$ (دی۸۴)

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx \quad \begin{cases} \ln^2 x = u \rightarrow \frac{2\ln x}{x}dx = du \\ \frac{dx}{x^2} = dv \rightarrow -\frac{1}{x} = v \end{cases}$$

$$-\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\underbrace{\int \frac{\ln x}{x^2}dx}_{I}$$

$$I \begin{cases} \ln x = u \rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ \frac{dx}{x^2} = dv \rightarrow -\frac{1}{x} = v \end{cases} \rightarrow -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}$$

۱۵) $\int x\, ln^2(1+x^2)dx$ (دی۸۹)

$$\begin{cases} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2}\int \ln^2 t\,dt \quad \begin{cases} \ln^2 t = u \rightarrow \frac{2\ln t}{t}dt = du \\ dt = dv \rightarrow t = v \end{cases}$$

$$= t\ln^2 t - 2\underbrace{\int \ln t\,dt}_{I}$$

$$I \begin{cases} \ln t = u \rightarrow \frac{dt}{t} = du \\ dt = dv \rightarrow t = v \end{cases} \rightarrow t\ln t - \int dt$$

$$\to \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx = du \xrightarrow{\text{ساده سازی}} \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2}\,\cancel{(x+\sqrt{1+x^2})}}\,dx = du$$

۱۶) $\int \ln(x+\sqrt{۱+x^۲})dx$ (دی ۹۰)

$$\begin{cases} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = u \\ dx = dv \to x = v \end{cases}$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\begin{cases} 1+x^2 = t^2 \\ \cancel{2}x\,dx = \cancel{2}t\,dt \end{cases} \to \int \frac{dt}{t} = \ln t$$

---

۱۷) $\int \tan^{-۱}(\sqrt{۱+x})dx$ (دی ۹۱)

$$\begin{cases} 1+x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{cases} \to 2\int t \cdot tg^{-1} t\,dt \quad \begin{cases} tg^{-1} t = u \to \frac{dt}{1+t^2} = du \\ t\,dt = dv \to \frac{t^2}{2} = v \end{cases}$$

$$= \frac{t^2}{2} tg^{-1} t - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt}_{I}$$

$$I = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = \int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}$$

---

۱۸) $\underbrace{\frac{۱}{x^۲-۱}\int \ln(\frac{۱+x}{۱-x})dx}_{I}$ (دی ۹۳)

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = u \to \cancel{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\frac{2}{(1-x)^2}dx = du \\ \frac{dx}{x^2-1} = dv \to v = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \underbrace{\int \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{dx}{1-x^2}\right)}_{\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{1}{x^2-1}\,dx} \to I$$

۱۹) I_2? $\quad I_n=\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+\pi}}dx$ (دی ۸۸)

$$I_n=\int \frac{x^{n-1}\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2+\pi}}$$

$$\begin{cases} x^{n-1}=u \longrightarrow (n-1)x^{n-2}dx=du \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+\pi}}dx=dv \longrightarrow \begin{cases} x^2+\pi=t^2 \\ \cancel{2}x\,dx=\cancel{2}t\,dt \end{cases} \longrightarrow \int \frac{\cancel{t}dt}{\cancel{t}}=t \longrightarrow \sqrt{x^2+\pi}=v \end{cases}$$

$$=x^{n-1}\sqrt{x^2+\pi}-(n-1)\underbrace{\int x^{n-2}\sqrt{x^2+\pi}\,dx}_{\int x^{n-2}\frac{x^2+\pi}{\sqrt{x^2+\pi}}=\int\frac{x^n+x^{n-2}\pi}{\sqrt{x^2+\pi}}} \longrightarrow \boxed{I_n=x^{n-1}\sqrt{x^2+\pi}-(n-1)[I_n+I_{n-2}]}$$

---

۲۰) $n\neq 1$ $\quad I_n=\int sec^n x\,dx$ (دی ۸۹)

$$I_n=\int Sec^{n-2}x\cdot Sec^2x\,dx \quad \begin{cases} Sec^{n-2}x=u \longrightarrow (n-2)Sec^{n-2}x\cdot tgx\,dx=du \\ Sec^2x\,dx=dv \longrightarrow tgx=v \end{cases}$$

$$=tgx\cdot Sec^{n-2}x-(n-2)\underbrace{\int Sec^{n-2}x\,\underbrace{tg^2x}_{(Sec^2x-1)}\,dx}_{\int Sec^n x-Sec^{n-2}x} \longrightarrow \boxed{I_n=tgx\cdot Sec^{n-2}x-(n-2)[I_n-I_{n-2}]}$$

---

۲۱) $I_{10}=?$ ، $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ $\quad n>2$ $\quad I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n x\,dx$ (دی ۹۳)

$$I_n=\int Sin^{n-1}x\cdot Sinx\,dx \quad \begin{cases} Sin^{n-1}x=u \longrightarrow (n-1)Cosx\cdot Sin^{n-2}x\,dx=du \\ Sinx\,dx=dv \longrightarrow -Cosx=v \end{cases}$$

$$=\cancel{-Cosx\cdot Sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}\,0+(n-1)\underbrace{\int \underbrace{Cos^2x}_{(1-Sin^2x)}\cdot Sin^{n-2}x\,dx}_{\int Sin^{n-2}-Sin^n}$$

$$\boxed{\rightarrow I_n=0+(n-1)(I_{n-2}-I_n)}$$

بخش۲-کاربرد انتگرال

معین: ——

سطح: ——

حجم:

دوران حول محور x : $V=\pi\int f^2_{(x)}\,dx$

حول y 〃 〃 : $V=2\pi\int x\,f_{(x)}\,dx$

طول قوس:

دکارتی : $l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

پارامتری (برحسب t) : $l=\int_a^b\sqrt{x'^2_{(t)}+y'^2_{(t)}}\,dt$

حدمجموع با انتگرال:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}f_{(\frac{i}{n})}=\int_0^1 f_{(x)}\,dx$$

قضیه اساسی اول حساب:

کاربرد : $\left(\int_{v_{(x)}}^{u_{(x)}}f_{(t)}\,dt\right)'=u'f_{(u)}-v'f_{(v)}$

سوال۱-**اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال** را بیان و اثبات کنید . (دی۸۵)

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \longrightarrow F'(x)=f(x)$$

اگر f تابعی پیوسته در بازه $[a,b]$ باشد درانصورت تابع $F(x)$ برای هر x در این بازه بصورت یک پادمشتق f تعریف می شود.

$$\xrightarrow{\text{اثبات}} F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overbrace{\int_a^{x+\Delta x}}^{\int_a^x+\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x}=\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x},\ldots$$

سوال۲-قضیه **مقدار میانگین در انتگرال ها** را بیان نموده و آن را اثبات کنید . (دی۸۶) (دی۸۸)

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه مقداری مانند c وجود دارد که: $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$$\xrightarrow{\text{اثبات}} \underset{\text{مینیمم}}{m}\leq f(x)\leq \underset{\text{ماکسیمم}}{M} \longrightarrow \underbrace{\int_a^b m\,dx}_{m(b-a)}\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\underbrace{\int_a^b M\,dx}_{M(b-a)} \longrightarrow m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq M$$

$$\longrightarrow\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\underbrace{f(x_0)}_{\text{مقدار مینیمم}}\Big)\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\underbrace{f(x_1)}_{\text{مقدار ماکسیمم}}\Big)<0$$ طبق بولتزانو ✓

سوال۳- حدود زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x\to\infty} x\int_x^{x+1}\frac{arc\,tant}{t^2}dt$ (دی۸۸)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_x^{x+1}\frac{arctgt}{t^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم!}\ \xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{arctg(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{arctg(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}-\frac{x^2}{(x+1)^2}arctg(x+1)+arctg(x)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\boxed{0}$$

۲) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{\sqrt{x}}e^{t^2}dt}{2\sqrt{x}}$ (دی۹۷)

$$\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x}-e^{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}-\sqrt{x}e^{x^2}$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}}$$

سوال۴-فرض کنید $f:[۰,۱] \to (۰,۱)$ تابعی پیوسته باشد . نشان دهید معادله $\int_۰^{x^۲} f(t)dt =$ $۱-۲x$ در فاصله $[۰,۱]$ دارای جواب است و این جواب منحصر به فرد است . (دی۸۵)

$$g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt - 2x + 1 \qquad \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt - 1 \end{cases}$$

$Max = \int_0^1 1\,dt = 1$

$= 0$ آنگاه $g(1) > 0$

$g(0)g(1) < 0 \longrightarrow$ حداقل یک ریشه در بازه $(0,1)$ دارد.

سوال۵-کنید $f:[۰,۱] \to (۰,۱)$ تابعی پیوسته باشد . نشان دهید معادله $۲x - \int_۰^x f(t)dt = ۱$ در فاصله $[۰,۱]$ دقیقا یک جواب دارد . (دی۹۲)

$$g(x) = 2x - \int_0^x f(t)\,dt - 1 \qquad \begin{cases} g(0) = -1 \\ g(1) = 2 - \int_0^1 f(t)\,dt - 1 \end{cases}$$

$Max = \int_0^1 1\,dt = 1$

$0 < f(x) < 1$

$= 0$ آنگاه $g(1) > 0$

$g(0)g(1) < 0 \longrightarrow$ حداقل یک ریشه دارد در بازه $(0,1)$

$Max = 1$

$g'(x) = 2 - f(x) > 0 \longrightarrow$ ~~صعودی~~ $\longrightarrow$ قطعا ریشه

سوال۶-فرض کنید $f: R \to R$ تابعی پیوسته باشد به طوریکه برای هر $x \in R$, $f(x) \neq ۰$.

اگر $f(x)$ در معادله $(f(x))^۲ = \int_۰^x f(t)\frac{e^t}{۱+e^{۲t}}dt$ صدق کند ، آن را بیابید . (دی۹۳)

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2\cancel{f(x)}\cdot f'(x) = \cancel{f(x)}\cdot\frac{e^x}{1+e^{2x}} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} f(x) = \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\,tg^{-1}t = \frac{1}{2}\,tg^{-1}(e^x) + c$$

سوال۷–به کمک انتگرال معین حدود زیر را بیابید .

۱) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^۳}{(n^۲+۱^۲)^۲}+\frac{n^۳}{(n^۲+۲^۲)^۲}+\cdots+\frac{n^۳}{(n^۲+n^۲)^۲})$ (دی۹۳)

$$\underbrace{(n^2(1+\frac{1^2}{n^2}))^2}_{n^4(1+(\frac{1}{n})^2)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+(\frac{i}{n})^2)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx \quad \begin{cases}x=\tan\theta\\ dx=\sec^2\theta d\theta\end{cases}$$

۲) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[۳]{\frac{۲+۴n}{n^۴}}+\sqrt[۳]{\frac{۴+۴n}{n^۴}}+\cdots+\sqrt[۳]{\frac{۲n+۴n}{n^۴}})$ (دی۹۲)

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sqrt[3]{\frac{2+4n}{n}}}_{\frac{1}{n}\sqrt[3]{\frac{2}{n}+4}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\sqrt[3]{2(\frac{i}{n})+4}$$

$$=\int_0^1\sqrt[3]{2x+4}\,dx$$

۳) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh(\frac{۱}{n})+\sinh(\frac{۲}{n})+\cdots+\sinh(\frac{n}{n})}{\cosh(\frac{۱}{n})+\cosh(\frac{۲}{n})+\cdots+\cosh(\frac{n}{n})}$

$$\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sinh(\frac{1}{n})+\cdots+\sinh(\frac{n}{n}))}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\cosh(\frac{1}{n})+\cdots+\cosh(\frac{n}{n}))}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\sinh(\frac{i}{n})}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\cosh(\frac{i}{n})}=\frac{\int_0^1\sinh(x)dx}{\int_0^1\cosh(x)dx}$$

۴) $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}(\sin\frac{\pi}{n}+۲\sin\frac{۲\pi}{n}+\cdots+(n-۱)\sin\frac{(n-۱)\pi}{n})$ (دی۹۴)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1 x\sin\pi x$$

۵) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}((n+1)(n+2)\dots(n+n))^{\frac{1}{n}}$ (دی ۹۰)

اول سعی می‌کنیم عبارت ضرب به جمع تبدیل شود.

$$\xrightarrow{\text{از } Ln \text{ گرفتن}} LnA = Ln\frac{1}{n}\big(\underbrace{(n+1)\cdots(n+n)}_{\text{فاکتور}\left[n(1+\frac{1}{n})\cdots n(1+1)\right]^{1/n} \;=\; \left[n^n((1+\frac{1}{n})\cdots(1+1))\right]^{1/n}}\big)^{1/n} = Ln\,\cancel{\frac{1}{n}}\big(\cancel{n}((1+\frac{1}{n})\cdots(1+1))^{1/n}\big)$$

$$\to LnA = \frac{1}{n}Ln\left((1+\frac{1}{n})\cdots(1+1)\right) = \frac{1}{n}\left(Ln(1+\frac{1}{n})+\cdots Ln(1+1)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum Ln(1+\frac{i}{n})$$

$$LnA=\int_0^1 Ln(1+x)dx$$

$$\boxed{A=e^{\int_0^1 Ln(1+x)dx}}$$

۶) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n})^{\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}}$ (دی ۸۵) (نماد $\prod$ به معنای حاصلضرب است)

$$A=\left[(1+\frac{1}{n})^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdots(1+\frac{n}{n})^{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\xrightarrow{\text{از } Ln \text{ گرفتن}} LnA = \frac{1}{n}Ln\left((1+\frac{1}{n})^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdots(1+\frac{n}{n})^{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(Ln(1+\frac{1}{n})^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\cdots+Ln(1+\frac{n}{n})^{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right) = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\,Ln(1+\frac{1}{n})+\cdots\right)$$

$$\to LnA=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\,Ln(1+\frac{i}{n}) = \int_0^1\sqrt{1+x}\,Ln(1+x)$$

$$\boxed{\to A=e^{\int_0^1\sqrt{1+x}\,Ln(1+x)dx}}$$

۷) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ (دی ۸۴)

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{(1\times2\times\cdots\times n)^{1/n}}{n} \xrightarrow{\text{از } Ln \text{ گرفتن}} LnA = Ln(1\times2\times\cdots\times n)^{1/n} - Ln\,n$$

$$=\frac{1}{n}Ln(1\times2\times\cdots\times n) - Ln\,n \qquad \frac{1}{n}Ln\,n^n$$

$$\to LnA = \frac{1}{n}\left(\cancel{Ln(1\times2\times\cdots\times n)-Ln\,n^n}\right) \quad Ln\left(\frac{(1\times\cdots\times n)}{n^n}\right)$$

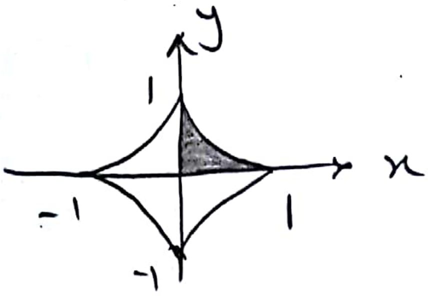
$$=\frac{1}{n}Ln\left(\frac{1\times2\times\cdots\times n}{n\times n\times\cdots\times n}\right) = \frac{1}{n}Ln\left(\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\frac{n}{n}\right)$$

۸) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n\sqrt[n]{n!}}$ (دی ۸۶)

X

$$=\frac{1}{n}\left(Ln(\frac{1}{n})+Ln(\frac{2}{n})+\cdots\right)$$

$$LnA=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}Ln(\frac{i}{n}) = \int_0^1 Ln\,x\,dx \to A=e^{\int_0^1 Ln\,x\,dx}$$



$$x^{2/3}+y^{2/3}=1 \longrightarrow y^{2/3}=1-x^{2/3}$$

$$\xrightarrow{(\ )^3} y^2=(1-x^{2/3})^3$$

سوال۸–ناحیه محدود بین محورهای مختصات و آستروئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ را حول محور x ها دوران می دهیم حجم حاصل را به دست آورید . (دی۸۶)

$$V=\pi\int f^2(x)\,dx$$

$$=2\left(\pi\int_0^1(1-x^{2/3})^3\,dx\right)=2\pi\int_0^1(1-3x^{2/3}+3x^{4/3}-x^2)\,dx$$

سوال۹–سطح محدود به محور x ها ویک طاق سیکلوئید به معادله $\begin{cases}x=a(t-sint)\\y=a(1-cost)\end{cases}$ را که در آن $0\le t\le 2\pi$، حول محور y ها دوران می دهیم حجم جسم حاصل را به دست آورید . (دی۸۸)

$$V=2\pi\int x f(x)\,dx=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\,a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\underbrace{\cancel{(1-\cos t)^2}}_{1-2\cos t+\cos^2 t}dt=2\pi a^3\int_0^{2\pi}t-2t\cos t+t\cos^2 t-\sin t$$
$$+2\sin t\cos t-\sin t\cos^2 t)\,dt$$

سوال ۱۰– سیکلوئید به معادله $\begin{cases}x=a(t-sint)\\y=a(1-cost)\end{cases}$ را در نظر بگیرید . (دی۸۵)

الف) طول قوس یک طاق سیکلوئید ($0\le t\le 2\pi$)، را بیابید .

$$l=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

ب) مساحت یک طاق را حول محور x ها دوران می دهیم حجم جسم حاصل را کنید .

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\underbrace{(a(1-\cos t))^2+(a(\sin t))^2}_{a^2(1-2\cos t+\underbrace{\cos^2+\sin^2}_{1})}}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt2\,a\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$=\sqrt2\,a\int_0^{2\pi}\underbrace{\cancel{\sqrt{1-\cos t}}}_{(\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2})^2}\,dt$$

$$V=\pi\int_0^{2\pi}(a(1-\cos t))^2\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt$$

سوال۱۱-مطلوب است حجم حادث از دوران منحنی $y=\frac{1}{3}(x^2-2)^{\frac{3}{2}}$ از $x=2$ تا $x=4$ حول محور xها (دی ۹۲)

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$=\pi\int_2^4 \frac{1}{9}(x^2-2)^3\,dx = \frac{\pi}{9}\int_2^4 (x^6-6x^4+12x^2-8)\,dx$$

سوال۱۲-طول قوس منحنی $r=\frac{2}{1+\cos\theta}$ را در فاصله $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ محاسبه . (دی ۸۶)

$$l=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta \qquad r'=\frac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\to r'^2=\frac{4\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4}$$

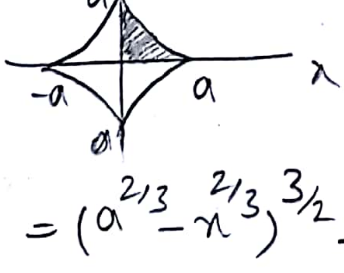
$1+2\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{4}{(1+\cos\theta)^2}+\frac{4\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{4(1+\cos\theta)^2+4\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4}}=\int\frac{\sqrt{8+8\cos\theta}}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\int\frac{\sqrt{8}\sqrt{1+\cos\theta}}{(1+\cos\theta)^2}=\sqrt{8}\int\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^{3/2}}$$

سوال۱۳-محیط آستروئید $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{a})^{\frac{2}{3}}=1$ را محاسبه کنید. (دی ۸۴)

$\rightsquigarrow x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$



محیط = 4 طول قوس

روش اول: $l=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\to y'=-x^{-\frac{1}{3}}(a^{2/3}-x^{2/3})^{\frac{1}{2}}\to y'^2=x^{-2/3}(a^{2/3}-x^{2/3})=x^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}-1$$

$$\to l=\int_0^a\sqrt{\cancel{1}+x^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}\cancel{-1}}\,dx=\int_0^a a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a=\boxed{\frac{3}{2}a}$$

و محیط می‌شود $4\times\frac{3}{2}a$ یعنی $6a$

روش دوم: سوال ۱۸ صـ ۱۷

math-teacher.blog.ir

سوال۱۴-مطلوب است طول قوس منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ ، $x \geq 0 , y \geq 0$. (دی ۹۱)

مشابه سوال ۱۳ صفحه ۱۵ که کافیست در آن $a=1$ قرار دهیم.

$$l = \frac{3}{2}a = \boxed{\frac{3}{2}}$$

سوال۱۵-طول خمی که توسط نمودار تابع $y = \ln(\coth(x/2))$ در بازه $[2,4]$ تعریف میشود را به دست آورید . (دی ۸۹)

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$y = \ln(\coth(\tfrac{x}{2})) \longrightarrow y' = \frac{-\frac{1}{2}\operatorname{csch}^2(\frac{x}{2})}{\coth(\frac{x}{2})} \longrightarrow y'^2 = \frac{\frac{1}{4}\operatorname{csch}^4(\frac{x}{2})}{\coth^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\cosh^2(\frac{x}{2})\sinh^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sinh^2(x)}$$

$$l = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{1}{\sinh^2(x)}}\, dx = \int_2^4 \frac{\cancel{\sqrt{\sinh^2 x+1}}^{\cosh x}}{\sinh x} = \ln|\sinh x|\Big|_2^4$$

سوال۱۶-طول قوس منحنی $y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}$ را در فاصله $[1,4]$ محاسبه کنید . (دی ۹۰)

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} \qquad y' = \sqrt{x^3-1} \longrightarrow y'^2 = x^3-1$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1+x^3-1}\, dx = \int_1^4 \sqrt{x^3}\, dx$$

سوال۱۷-مطلوب است طول خم منحنی $y = \frac{۱}{۳}(x^{۲} - ۲)^{\frac{۳}{۲}}$ از $x = ۲$ تا $x = ۴$. (دی ۹۲)

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}$$

$$y' = \cancel{\frac{1}{3}} \times \cancel{\frac{3}{2}} \times 2x \times (x^2-2)^{\frac{1}{2}} = x(x^2-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'^2 = x^2(x^2-2)$$

$$l = \int_2^4 \sqrt{1+x^4-2x^2} = \int_2^4 \sqrt{(x^2-1)^2} = \int_2^4 (x^2-1)\,dx$$

سوال۱۸– طول قوس منحنی بسته با معادلات پارامتری زیر را بیابید . (دی۹۲)

$x = a\cos^{۳} t \qquad , \qquad y = a\sin^{۳} t$

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$\begin{cases} x'_{(t)} = -3a\cos^2 t \cdot \sin t \\ y'_{(t)} = 3a\sin^2 t \cdot \cos t \end{cases}$$

تلاقی $x=y \longrightarrow a\cos^3 t = a\sin^3 t \rightarrow \boxed{t=\frac{\pi}{4}}$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\underbrace{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}_{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1})}}\,dt = \int_0^{\pi/4} 3a\sin t\cos t\,dt$$

$$= \frac{3a}{2}\int_0^{\pi/4} \sin 2t\,dt$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}a}$$

ر.ک به سوال ۱۳ صفحه ۱۵

بخش۳-سری

همگرایی و واگرایی :

۱- آزمون مقایسه

$$f > g \begin{cases} f \text{ همگرا} \longrightarrow g \text{ همگرا} \\ g \text{ واگرا} \longrightarrow f \text{ واگرا} \end{cases}$$

۲- آزمون تناوب $\left((-1)^n\right)$

$$\left.\begin{matrix} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ a_n \text{ نزولی} \end{matrix}\right\rangle \longrightarrow \text{همگرا}$$

۳- آزمون انتگرال (به شرط ۱) پیوسته ۲) + ۳) نزولی) $\quad \Sigma \longrightarrow \int$

بازه و شعاع همگرایی:

۱) آزمون نسبت $\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

۲) یافتن بازه برای x

۳) بررسی نقاط ابتدا و انتهای بازه $\longrightarrow$ تعیین همگرایی و واگرایی $\left\langle \begin{matrix} \text{آزمون انتگرال} \\ \text{آزمون تناوب} \end{matrix} \right.$

سوال۱-همگرایی یا واگرایی انتگرال های ناسره زیر را بررسی کنید. (۲۰نمره)

۱) $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ (دی۸۴)

$\begin{cases} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{cases} \to \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\cancel{t}}2\cancel{t}dt = 2\int_1^\infty e^{-t}dt$

$= -2e^{-t}\Big|_1^\infty = -2(\cancel{e^{-\infty}}-e^{-1})$

math-teacher.blog.ir

عدد ← همگرا

۲) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cot x}\,dx$ (دی۹۲)

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

$\begin{cases} \sin x = t^2 \\ \cos x dx = 2tdt \end{cases}$ تغییر بازه $= \int_0^1 \frac{2\cancel{t}dt}{\cancel{t}} = 2\int dt = 2t\Big|_0^1 = \boxed{2}$ همگرا

۳) $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x}dx$ (دی۹۱)

جزء به جزء $\begin{cases} \frac{1}{x}=u \to -\frac{dx}{x^2}=du \\ \cos x dx = dv \to \sin x = v \end{cases} \to \underbrace{\frac{\sin x}{x}\Big|_{\pi/2}^\infty}_{\underbrace{\cancel{\frac{\text{عدد}}{\infty}} - \frac{1}{\pi/2}}_{\text{عدد}}} + \underbrace{\int \frac{\sin x}{x^2}dx}_{I}$

$I: \int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x^2} < \int_{\pi/2}^\infty \frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}\Big|_{\pi/2}^\infty = \text{عدد}$ ⟶ پس همگراست

۴) $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ (دی۹۱)

$= \underbrace{\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}}_{\text{هم ارزی}} + \int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$

e^{-x^2} در بی نهایت به صفر می رسد

$= \int_0^1 \frac{-(-x^2)}{x^2} = \int_0^1 dx = 1$ همگرا

$< \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = \text{عدد}$ همگرا

$\boxed{e^x \sim x+1 \to -x \sim 1-e^x}$

پس مجموع دو عبارت همگراست.

۵) $\int_0^{\infty} \frac{1+4\sin^2 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (دی ۹۳)

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{1+4\sin^2 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1+4\sin^2 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} < \int_0^1 \frac{5}{\sqrt[3]{x}} = 5\int_0^1 x^{-1/3}dx = \frac{15}{2}x^{2/3}\Big|_0^1 = \text{عدد}$$

$$\mathrm{II} < \int_1^{\infty} \frac{5}{x^3} = \frac{-5}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_1^{\infty} = \text{عدد}$$

پس در کل همگراست

---

۶) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ (دی ۹۴)

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3+\sqrt{x}}}_{\mathrm{II}}$$

دلخواه (فقط مطمئن باشیم بزرگتر شد)

$$\mathrm{II} \longrightarrow < \int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+\sqrt{x}} < \int_1^{\infty} \frac{x}{x^3} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x}\Big|_1^{\infty} = \text{عدد}$$

هم ارزی I

$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+\sqrt{x}} < \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}} = \int_0^1 x^{1/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \text{عدد}$$

پس در کل همگراست

---

۷) $\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{c}{3x+1}\right) dx$ (دی ۹۰)

به روش ساده انتگرال بگیر

$$= \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad \begin{cases} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{cases} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{c}{3x+1}\,dx \quad \begin{cases} 3x+1 = u \\ 3\,dx = du \end{cases} = \frac{c}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{c}{3}\ln u = \frac{c}{3}\ln(3x+1)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{(3x+1)^{c/3}}\right)\Big|_0^{\infty} = \underbrace{\ln\left(\frac{x}{x^{c/3}}\right)}_{\text{حد در بی‌نهایت}} - \cancel{\ln 1}$$

برای همگرایی کافیست $c/3 = 1$ شود $\longrightarrow$ $\boxed{C=3}$ و در $\mathbb{R}-\{3\}$ واگراست

سوال ۲-همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید . (۲۰نمره)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1}(n)}}{1+n^2}$ (دی ۸۵)

$f(x) = \frac{e^{tg^{-1}(x)}}{1+x^2}$ آزمون انتگرال $\begin{cases} + \\ \text{پیوسته} \\ \text{نزولی} \end{cases}$

$= \int_1^{\infty} \frac{e^{tg^{-1}x}}{1+x^2} dx \begin{cases} tg^{-1}x = t \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt \end{cases} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^t dt = e^t \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$ عدد

تغییر متغیر

همگراست

---

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch} n$ (دی ۹۰)

$f(x) = \operatorname{csch} x$ آزمون انتگرال $\begin{cases} + \\ \text{پیوسته} \\ \text{نزولی} \end{cases}$

$= \int_1^{\infty} \operatorname{csch} x = \int_1^{\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} dx = \int_1^{\infty} \frac{2e^x}{e^{2x}-1} dx \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}$

$= 2\int_e^{\infty} \frac{dt}{t^2-1} = -\operatorname{Ln}\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\Big|_{t=e}^{\infty} = \cancel{\operatorname{Ln} 1}^{\,0} - \operatorname{Ln}\left|\frac{1-e}{1+e}\right| =$ عدد

تغییر متغیر

همگراست

---

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ (دی ۹۲)

آزمون متناوب

$a_n = \frac{1}{n \operatorname{Ln} n}$ $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \checkmark \\ f(x) = \frac{1}{x \operatorname{Ln} x} \to f'(x) = \frac{-(\operatorname{Ln} x + 1)}{(x \operatorname{Ln} x)^2} < 0 \end{cases}$ نزولی ✓

بنابراین طبق آزمون متناوب همگراست

آزمون مقایسه

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$ (دی ۹۱)

$$a_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} \overset{\text{مزدوج}}{\times} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$$

$$a_n=\frac{\cancel{n}+\sqrt{n}-\cancel{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=1\neq 0 \longrightarrow$$ واگراست

---

۵) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\ln n}$ (دی ۹۱)

$$e^{-n\ln n}=e^{\ln n^{-n}}=n^{-n}=\frac{1}{n^n}$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^n} \xrightarrow{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\boxed{0}$$

پس همگراست

---

۶) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{\ln(\ln n)}}{n(\ln n)}$ (دی ۹۴)

آزمون انتگرال $\begin{cases} + \\ \text{نزولی} \\ \text{پیوسته} \end{cases}$

$$f(x)=\frac{2^{\ln(\ln x)}}{x(\ln x)}$$

$$=\int_2^{\infty}\frac{2^{\ln(\ln x)}}{x(\ln(x))}dx \quad \begin{cases}\ln(\ln(x))=t\\ \frac{dx}{x\ln x}=dt\end{cases} \quad =\int_{\ln(\ln 2)}^{\infty}2^t\,dt$$

تغییر کند

$$=2^t.\ln 2\Big|_{\ln(\ln 2)}^{\infty}$$

$=$ $\boxed{\text{واگرا}}$

math-teacher.blog.ir

سوال۳-بازه همگرایی سری های زیر را تعیین کنید . (۲۰نمره)

۱) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{n\ln(n)}$ (دی ۸۶)

$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{(-1)^{n+1}}(x-3)^{n+1}}{\cancel{(n+1)\ln(n+1)}}}{\frac{\cancel{(-1)^n}(x-3)^n}{\cancel{n\ln n}}}\right| = |x-3|$

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} |x-3|<1 \to -1<x-3<1 \to \boxed{2<x<4}$

$\xrightarrow{\text{بررسی } x=2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ $\begin{cases} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{cases}$ $= \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t} = \ln t$ ← واگرا

$\xrightarrow{\text{بررسی } x=4} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n} \xrightarrow{\text{مشابه سوال ۳ اصل ۲۱}}$ همگرا

پس $\boxed{2<x\leq 4}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n+1}$ (دی ۸۵)

$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{(\frac{5}{4})^{n+2}}\cancel{(x-1)^{n+1}}}{\cancel{n+2}}}{\frac{\cancel{(\frac{5}{4})^{n+1}}\cancel{(x-1)^n}}{\cancel{n+1}}}\right| = \frac{5}{4}|x-1|$

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} \frac{5}{4}|x-1|<1 \to -\frac{4}{5}<x-1<\frac{4}{5} \to \boxed{\frac{1}{5}<x<\frac{9}{5}}$

$\xrightarrow{\text{بررسی } x=\frac{1}{5}} \sum_{1}^{\infty}\frac{(\frac{5}{4})^{n+1}(-\frac{4}{5})^n}{n+1} = \frac{5}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow{\text{آزمون لایب‌نیتز}} a_n=\frac{1}{n+1}$ $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \checkmark \\ \text{نزولی} \ \checkmark \end{cases}$ ← همگرا

$\xrightarrow{\text{بررسی } x=\frac{9}{5}} \sum_{1}^{\infty}\frac{(\frac{5}{4})^{n+1}(\frac{4}{5})^n}{n+1} = \frac{5}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \int_1^{\infty}\frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\Big|_1^{\infty} =$ واگرا

$\boxed{\frac{1}{5}\leq x<\frac{9}{5}}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{e^n(x-1)^n}$ (دی ۸۴)

$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{\ln(n+1)}}{\cancel{e^{n+1}}\ (x-1)^{n+1}}}{\frac{\cancel{\ln n}}{\cancel{e^n}\ (x-1)^n}}\right| = \frac{1}{e}\left|\frac{1}{x-1}\right|$

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} \frac{1}{e}\left|\frac{1}{x-1}\right|<1 \to |x-1|>\frac{1}{e}$ $\begin{cases} x-1>\frac{1}{e} \to x>1+\frac{1}{e} \\ x-1<-\frac{1}{e} \to x<1-\frac{1}{e} \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{بررسی } x=1+\frac{1}{e}} \sum_{1}^{\infty}\ln n \to \lim_{n\to\infty}\ln n \neq 0 \to$ عدم ارضای شرط اولیه ← واگرا

$\xrightarrow{\text{بررسی } x=1-\frac{1}{e}} \sum_{1}^{\infty}\frac{\ln n}{(-1)^n} \xrightarrow{\text{آزمون تناوب}} \lim_{n\to\infty}\ln n \neq 0 \to$ واگرا

۴) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(x-3)^n$ (دی ۹۲)

$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{(n+1)^2 \cancel{(x-3)^{n+1}}}{\cancel{n^2} \cancel{(x-3)^n}} \right| = |x-3|$

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} |x-3|<1 \to -1<x-3<1 \to \underline{2<x<4}$

$\xrightarrow{x=2 \text{ بررسی}} \sum_{n=0}^{\infty} n^2(-1)^n \xrightarrow{\text{آزمون تشخیص}} a_n=n^2 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ✗ واگراست.

$\xrightarrow{x=4 \text{ بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \to \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \to$ واگرا (چون شرط اولیه همگرایی برقرار نیست

---

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n x^n$ (دی ۹۱)

$\xrightarrow{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|(1+\frac{1}{n})x\right| = |x|$

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} |x|<1 \to \underline{-1<x<1}$

$\xrightarrow{x=-1 \text{ بررسی}} \sum_{1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n (-1)^n \xrightarrow{\text{آزمون تشخیص}} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e \neq 0 \to$ واگرا

$\xrightarrow{x=1 \text{ بررسی}} \sum_{1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n \to \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e \to$ عدم داشتن شرط اولیه واگرا ✗

---

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx^n}$ (دی ۹۴)

$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{\cancel{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)x^{n+1}}}}{\cancel{\frac{(-1)^n}{n x^n}}} \right| = \left|\frac{1}{x}\right|$

$\xrightarrow{\text{اعمال شرط همگرایی}} \left|\frac{1}{x}\right|<1 \to |x|>1 \quad \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases}$

$\xrightarrow{x=1 \text{ بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{\text{آزمون تناوب}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓ ، نزولی $\frac{1}{n}$ ✓ همگرا

$\xrightarrow{x=-1 \text{ بررسی}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \operatorname{Ln} x \Big|_1^{\infty} =$ واگرا $\to \boxed{x \geq 1 \quad x<1}$

---

۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ (دی ۹۰)

$\xrightarrow{\text{آزمون ریشه}} \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{\dfrac{x^{n^2}}{2^n}} \right| = \left|\dfrac{x^n}{2}\right| = \infty$

همواره واگراست.

$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

پیوست

۱-نمایش لگاریتمی تابع $y=sech^{-1}x$ را بیابید .(دی۹۶)

$$y=\text{Sech}^{-1}x \to x=\text{Sech}\,y=\frac{2}{e^y+e^{-y}} \to xe^y+xe^{-y}=2$$

$$\xrightarrow{xe^y} xe^{2y}+x=2e^y \to xe^{2y}-2e^y+x=0 \xrightarrow{e^y=t} t^2x-2t+x=0$$

$$\to t=\frac{2\pm\sqrt{4-4x^2}}{2x}=\frac{2\pm2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=e^y \xrightarrow{\text{لگ گیری Ln}} \boxed{y=Ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|}$$

۲-نمایش لگاریتمی تابع $y=tanh^{-1}x$ را بیابید . (خرداد۹۷)

$$y=tg^{-1}hx \to x=tghy=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}} \to xe^y+xe^{-y}=e^y-e^{-y}$$

$$\xrightarrow{xe^y} xe^{2y}+x=e^{2y}-1 \to xe^{2y}-e^{2y}=-x-1 \to e^{2y}(x-1)=-(x+1)$$

$$e^{2y}=\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{\text{لگ گیری}} 2y=Ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \to \boxed{y=\frac{1}{2}Ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$$

۳-مطلوب است حاصل عبارت $\frac{\cosh(lnx)+\sinh(lnx)}{\cosh(lnx)-\sinh(lnx}$ (خرداد۹۶)

$$=\frac{e^{Lnx}+\cancel{e^{-Lnx}}+e^{Lnx}-\cancel{e^{-Lnx}}}{\cancel{e^{Lnx}}+e^{-Lnx}-\cancel{e^{Lnx}}+e^{-Lnx}}=\frac{\cancel{2}e^{Lnx}}{\cancel{2}e^{-Lnx}}=e^{2Lnx}=e^{Lnx^2}=\boxed{x^2}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی- دی۹۷

کارشناس ارشد مهندسی عمران – دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی: ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی ، محاسبات عددی

Math-Teacher.blog.ir