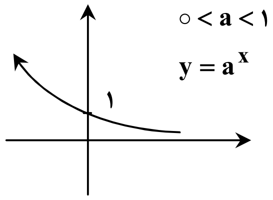
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

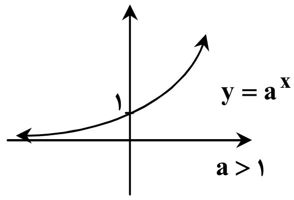
فصل ۴

توابع نمایی:

هر تابع به‌صورت $y = a^x$ که a عددی حقیقی، $a \neq ۱$، $a > ۰$ و x متغیر است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود. دامنه توابع نمایی تمام اعداد حقیقی و برد آن $\mathbb{R}^+$ است.



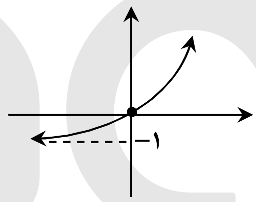
در این حالت اکیداً نزولی است.



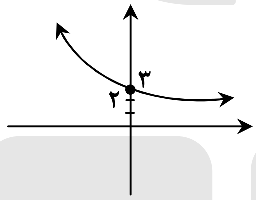
در این حالت اکیداً صعودی است.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

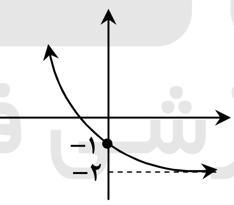
$y = ۲^x - ۱$



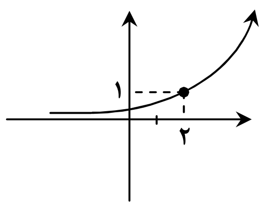
$y = (\frac{۱}{۳})^x + ۲$



$y = ۳^{-x} - ۲$

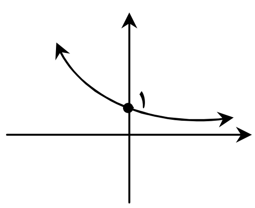


$y = ۳^{x-۲}$



$y = \frac{(\frac{۱}{۶})^x}{۵^{-x}}$

$y = \frac{۶^{-x}}{۵^{-x}} = (\frac{۶}{۵})^{-x} = (\frac{۵}{۶})^x$



خواص تابع نمایی:

۱) $a^x.a^y = a^{x+y}$ ۲) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ۳) $(a^x)^y = a^{xy}$

مثال: اگر سرعت تکثیر سلول‌ها براساس یک تابع نمایی قابل مدل‌سازی باشد، و بعد از ۲ ساعت تعداد سلول‌ها ۱۲ و بعد از ٤ ساعت ٤٨ باشد، تعداد سلول‌ها ۷ ساعت پس از شروع تکثیر چقدر است؟

حل:

اگر سرعت رشد سلول‌ها را با تابع $y = ka^t$ مدل‌سازی کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y(۲) = ka^۲ = ۱۲ \\ y(۴) = ka^۴ = ۴۸ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲ = ۴ \xrightarrow{a>0} a = ۲ \rightarrow k = ۳$$

$$\rightarrow y(t) = ۳\times ۲^t \rightarrow y(۷) = ۳\times ۲^۷ = ۳۸۴$$

دقت کنید که علت استفاده از ضریب k آن است که سلول‌ها با یک مقدار اولیه شروع به افزایش می‌کنند. این مقدار اولیه را در لحظه‌ی $t = 0$، k در نظر گرفتیم.

مثال: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $(\frac{۱}{۵\sqrt{۵}})^x = ۱۲۵^{۲x-۱}$

$$۵^{-\frac{۳}{۲}x} = ۵^{۶x-۳} \Rightarrow ۶x - ۳ = -\frac{۳}{۲}x \Rightarrow ۶x + \frac{۳}{۲}x = ۳ \Rightarrow \frac{۱۵}{۲}x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

ب) $۹^x = ۲\times ۳^{x+۲} - ۴۵$

$$۳^{۲x} - ۲\times ۹\times ۳^x + ۴۵ = 0 \Rightarrow (۳^x)^۲ - ۱۸(۳^x) + ۴۵ = 0 \Rightarrow (۳^x - ۱۵)(۳^x - ۳) = 0 \left\langle \begin{array}{l} ۳^x = ۱۵ \rightarrow x = \log_۳^{۱۵} \\ ۳^x = ۳ \rightarrow x = ۱ \end{array}\right.$$

ج) $(۳-\sqrt{۸})^{x^۲} \ge (۳+\sqrt{۸})^x$

$$(۳-\sqrt{۸})\times\frac{(۳+\sqrt{۸})}{۳+\sqrt{۸}} = \frac{۱}{۳+\sqrt{۸}}$$

$$(\frac{۱}{۳+\sqrt{۸}})^{x^۲} \ge (۳+\sqrt{x})^x \Rightarrow (۳+\sqrt{۸})^{-x^۲} \ge (۳+\sqrt{۸})^x$$

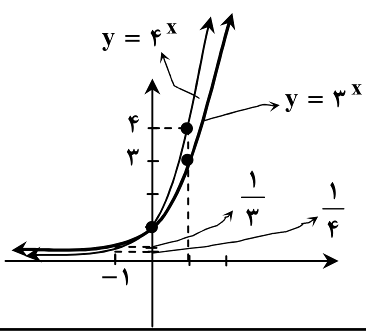
چون $۱ < ۳+\sqrt{۸}$ است، پس این تابع صعودی است، لذا لازم است:

$$-x^۲ \ge x \Rightarrow x^۲ + x \le 0 \Rightarrow -۱ \le x \le 0$$

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{۳^x - ۴^x}$ کدام است؟

حل:

باید $۳^x - ۴^x \ge 0$ باشد، پس باید $۳^x \ge ۴^x$ باشد. چون $۳ < ۴$ است، پس تابع ۴^x برای $x \ge 0$ سریع‌تر از تابع ۳^x بزرگ می‌شود و برای $x < 0$ سریعتر از تابع ۳^x کوچک می‌شود.



پس برای $x \le 0$، $۳^x \ge ۴^x$ است، لذا دامنه‌ی تابع $D = (-\infty, 0]$ است.

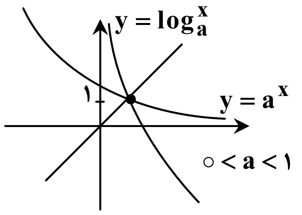
توابع لگاریتمی:

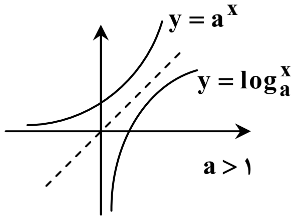
چون تابع نمایی $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ تابعی یک به یک است، لذا معکوس‌پذیر است. معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتمی نامیده می‌شود.

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

دامنه تابع لگاریتمی: $D_f = \{x > 0 \mid a > 0, a \neq 1\}$

برد توابع لگاریتمی $\mathbb{R}$ است.

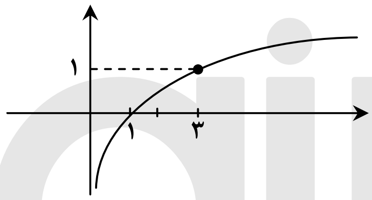




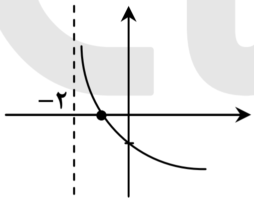
اگر پایه لگاریتم را ذکر نکردند، آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم.

☜مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

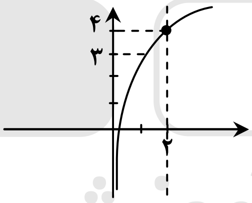
الف) $y = \log_3 x$



ب) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x+2)$



ج) $y = \log_2 x + 3$



☜مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

✍حل:

الف) $f(x) = \sqrt{\log \dfrac{5x - x^2}{4}}$

$$\log \frac{5x - x^2}{4} \ge 0 \Rightarrow \frac{5x - x^2}{4} \ge 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \le 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \le 0 \Rightarrow 1 \le x \le 4$$

دقت کنید که شرط $\dfrac{5x - x^2}{4} \ge 1$، شرط $\dfrac{5x - x^2}{4} > 0$ را هم تأمین می‌کند.

ب) $f(x) = \log_{1+x} (9 - x^2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 9 - x^2 > 0 \Rightarrow -3 < x < 3 \\ 1 + x > 0, 1 + x \neq 1 \Rightarrow x > -1, x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D = (-1, 3) - \{0\}$

ج) $f(x) = \sqrt{\log \log \log (x-2)}$

$$\log \log \log (x-2) \ge 0 \rightarrow \log \log (x-2) \ge 10^0 = 1 \Rightarrow \log (x-2) \ge 10^1 = 10$$

$$\Rightarrow x - 2 \ge 10^{10} \Rightarrow x \ge 10^{10} + 2 \Rightarrow D = [10^{10} + 2, \infty)$$

د) $f(x)=\sqrt{۱+۲\log_۴[x]}$

$[x]>۰ \Rightarrow x\geq ۱$

$۱+۲\log_۴[x]\geq ۰ \Rightarrow ۱+\log_۲[x]\geq ۰ \Rightarrow \log_۲[x]\geq -۱ \Rightarrow [x]\geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow x\geq ۱ \Rightarrow D_f=[۱,+\infty]$

خواص لگاریتم:

۱) $\log_a^x=\log_a^y \Rightarrow x=y$

۲) $\log_a^۱=۰$ و $\log_a^a=۱$

۳) $\log_a^x+\log_a^y=\log_a^{xy}$

۴) $\log_a^x-\log_a^y=\log_a^{\frac{x}{y}}$

۵) $\log_{a^n}^{x^m}=\frac{m}{n}\log_a^x$

۶) $\log_y^x=\frac{\log_z^x}{\log_z^y}$

در حالت کلی: $\log_b^a\times\log_c^b\times\log_d^c=\log_d^a$

این قضیه به هر تعداد لگاریتم قابل تعمیم است:

$\log_{a_۲}^{a_۱}\times\log_{a_۳}^{a_۲}\times\cdots\times\log_{a_n}^{a_{n-۱}}=\log_{a_n}^{a_۱}$

نتیجه: $\log_y^x=\frac{۱}{\log_x^y}$

۶) $x^{\log_a^y}=y^{\log_a^x}$

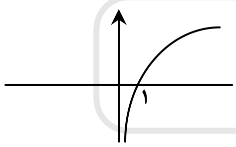
اگر لگاریتم دو عدد باهم برابر باشند، خود دو عدد نیز برابرند. تساوی فوق با لگاریتم گرفتن از دو طرف اثبات می‌شود.

۷) $a^{\log_a^x}=x$

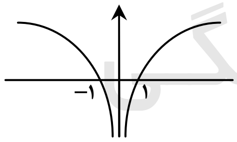
۸) $\log_a^x>y:\begin{cases} x>a^y & a>۱ \\ x<a^y & ۰<a<۱ \end{cases}\quad (x>۰, y\in\mathbb{R})$

مثال: اگر $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\log_۴ x^۲$، نمودار f و g نسبت به‌هم چگونه‌اند؟

حل:



$f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{x}=\log_{۲^{-۱}}x^{-۱}=\log_۲ x$



$g(x)=\log_۴ x^۲=\log_{۲^۲}x^۲=\log_۲|x|$

نمودار f بخشی از نمودار g است.

مثال: اگر $\log_{۱۲}^۳=a$ آن‌گاه $\log_{\sqrt{۳}}^{۱۶}$ را بیابید.

حل:

$\log_{۱۲}^۳=a \rightarrow \log_۳^{۱۲}=\frac{۱}{a}=\log_۳^{۳\times۴}=\log_۳^۳+\log_۳^۴=۱+\log_۳^۴=\frac{۱}{a} \Rightarrow \log_۳^۴=\frac{۱}{a}-۱$

$\log_{\sqrt{۳}}^{۱۶}=\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{۴^۲}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\log_۳^۴=۴\log_۳^۴=۴(\frac{۱}{a}-۱)=\frac{۴(۱-a)}{a}$

مثال: اگر $\log^۲=۰/۳۰۱$ باشد، $\log^{۲۵}$ چقدر است؟

حل:

$\log^{۵^۲}=۲\log^۵=۲\log^{\frac{۱۰}{۲}}=۲(\log ۱۰-\log ۲)=۲(۱-\log ۲)=۲(۱-۰/۳۰۱)=۱/۳۹۸$

☜مثال: لگاریتم عددی در پایه ۹ از لگاریتم عکس مجذور آن در پایه ۹ به اندازه‌ی ۴/۵ واحد بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟

✍حل:

$$\log_{۹}^{x} = \log_{۹}^{\frac{۱}{x^{۲}}} + ۴/۵ \Rightarrow \log_{۹}^{x} - \log_{۹}^{\frac{۱}{x^{۲}}} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow \log_{۹}^{\frac{x}{\frac{۱}{x^{۲}}}} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \log_{۳^{۲}}^{x^{۳}} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_{۳}^{x} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \log_{۳}^{x} = ۳ \Rightarrow x = ۳^{۳} = ۲۷$$

☜مثال: اگر $\log_{b}^{a} = \frac{۳}{۲}$، آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^{۲}}$ را بیابید.

✍حل:

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^{۲}} = \log_{\sqrt{b}}^{a} + \log_{\sqrt{b}}^{b^{۲}} = \log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{a} + \log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{b^{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_{b}^{a} + \frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\log_{b}^{b} = ۲\log_{b}^{a} + ۴\log_{b}^{b} = ۲\log_{b}^{a} + ۴ = ۲\times\frac{۳}{۲} + ۴ = ۷$$

☜مثال: اگر $A = \log_{۴} ۲\sqrt[۳]{۱/۲۵}$، حاصل $\frac{۴}{۶A}$ کدام است؟

✍ حل:

$$A = \log_{۴} ۲\sqrt[۳]{۱/۲۵} = \log_{۲^{۲}} ۲\sqrt[۳]{\frac{۱۲۵}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۲}\log_{۲}\sqrt[۳]{۱۰} = \frac{۱}{۶}\log_{۲} ۱۰ \Rightarrow ۶A = \log_{۲} ۱۰ \Rightarrow \frac{۴}{۶A} = \frac{\log_{۲} ۱۶}{\log_{۲} ۱۰} = \log_{۱۰} ۱۶ = ۴\log_{۱۰} ۲$$

☜مثال: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $۵^{(۲\log_{۵}^{۲} + ۳\log_{۵}^{۳})}$

$$۵^{\log_{۵}^{۴} + \log_{۵}^{۲۷}} = ۵^{\log_{۵}^{۴\times۲۷}} = ۴\times۲۷ = ۱۰۸$$

ب) $[\log_{۶}^{۲}] + [\log_{۲}^{۶}]$

$$\left.\begin{array}{l}\log_{۶}^{۱} = ۰\\ \log_{۶}^{۶} = ۱\end{array}\right\} \Rightarrow ۰ < \log_{۶}^{۲} < ۱ \Rightarrow [\log_{۶}^{۲}] = ۰$$

$\log_{۲}^{۴} = ۲$ و $\log_{۲}^{۸} = ۳ \Rightarrow ۲ < \log_{۲}^{۶} < ۳ \Rightarrow [\log_{۲}^{۶}] = ۲ \Rightarrow [\log_{۲}^{۶}] + [\log_{۶}^{۲}] = ۲$

ج) $(۰/۲)^{-۲+\log_{\sqrt{۵}}^{۱۰}}$

$$(۰/۲)^{-۲+\log_{۵^{\frac{۱}{۲}}}^{۲\times۵}} = (۰/۲)^{-۲+\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_{۵}^{۲\times۵}} = (۰/۲)^{-۲+۲\log_{۵}^{۲\times۵}} = (۰/۲)^{-۲+۲(\log_{۵}^{۲}+\log_{۵}^{۵})} = (۰/۲)^{-۲+۲\log_{۵}^{۲}+۲} = (۰/۲)^{\log_{۵}^{۴}}$$

$$= \left(\frac{۱۰}{۲}\right)^{-\log_{۵}^{۴}} = ۵^{\log_{۵}^{۴^{-۱}}} = ۴^{-۱} = \frac{۱}{۴}$$

د) $|\log_{\frac{۱}{۲}}^{۸}| + \log_{۸}^{\sqrt{۲}}$

$$|\log_{۲^{-۱}}^{۲^{۳}}| + \log_{۲^{۳}}^{۲^{-\frac{۱}{۲}}} = |\frac{۳}{-۱}\log_{۲}^{۲}| + \frac{-\frac{۱}{۲}}{۳}\log_{۲}^{۲} = ۳ - \frac{۱}{۶} = \frac{۱۷}{۶}$$

ه) $\log_{x^{۲}\sqrt{x}}^{x\sqrt[۳]{x^{۲}}}$

$$\log_{x^{۲+\frac{۱}{۲}}}^{x^{۱+\frac{۲}{۳}}} = \log_{x^{\frac{۵}{۲}}}^{x^{\frac{۵}{۳}}} = \frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۲}}\log_{x}^{x} = \frac{۲}{۳}$$

مثال: مجموعه جواب معادلات و نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $5^x = 3^{1-x}$

از دو طرف در پایه ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_3^{5^x} = \log_3^{3^{1-x}} \Rightarrow x\log_3^5 = (1-x)\log_3^3 = (1-x) \Rightarrow x(\log_3^5 + 1) = 1 \rightarrow x(\log_3^5 + \log_3^3) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log_3^{15}} = \log_{15}^3$$

ب) $\log \frac{x+3}{5} < -1$

$$\frac{x+3}{5} < 10^{-1} = \frac{1}{10} \Rightarrow x+3 < \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

ج) $\log^{x-1} + \log^{x+1} = \log^3$

$$\log^{(x-1)(x+1)} = \log^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

با توجه به دامنه $\log x$، فقط $x = 2$ قابل قبول است.

د) $x^{\log_5^x} = 625$

از ۲ طرف در پایه ۵ لگاریتم می‌گیریم: $\log_5^{(x^{\log_5^x})} = \log_5^{625} = \log_5^{5^4} = 4$

$$\log_5^x \times \log_5^x = (\log_5^x)^2 = 4 \Rightarrow \log_5^x = \pm 2 \left\langle \begin{array}{l} x = 25 \\ x = \frac{1}{25} \end{array} \right.$$

ه) $\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{x-1}{3}} < \log_{\frac{1}{2}}^2$

$$\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{x-1}{3}} < \log_{2^{-1}}^2 = -1 \Rightarrow \frac{x-1}{3} > (\frac{1}{9})^{-1} = 9 \Rightarrow x-1 > 27 \Rightarrow x > 28$$

و) $\log(3x-1) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2$

$$\log^{3x-1} = (\log^5 - \log^2)(\log^5 + \log^2) = (\log^{\frac{5}{2}} \times \log^{10}) = \log^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 3x - 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{6}$$

ن) $\log_x^3 + \log_x^{2x+9} = 2$

$$\log_x^{3(2x+9)} = 2 \Rightarrow 6x + 27 = x^2 \rightarrow x^2 - 6x - 27 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -3 \\ x = 9 \end{array} \right.$$

با توجه به دامنه‌ی $\log^x$ که باید $x > 0$ باشد، فقط $x = 9$ قابل قبول است.

ی) $x^{1+\log_{10}^x} = 10^2$

از دو طرف لگاریتم می‌گیریم: $\log^{x^{(1+\log_{10}^x)}} = \log 10^2 = 2$

$$(1+\log_{10}^x)\log_{10}^x = 2 \rightarrow (\log^x)^2 + (\log^x) - 2 = 0 \rightarrow (\log^x + 2)(\log^x - 1) = 0 \Rightarrow \log x = -2, 1 \Rightarrow x = 10^{-2}, 10$$

مثال: کدام عبارت صحیح است؟

۱) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^{100}$ ۲) $\log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_3^2$ ۳) $\log_5^3 > \log_3^5$ ٤) $\log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_{\frac{1}{2}}^2$

حل: توابع لگاریتمی برای پایه‌های بزرگ‌تر از ۱ صعودی و برای پایه‌های کوچک‌تر از ۱ نزولی‌اند. پس عبارت زیر به‌علت نزولی بودن لگاریتم صحیح است: (به همین دلیل گزینه ٤ غلط است) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^{100}$

در گزینه‌ی ۲، $1 > \log_3^2 > 0$ و $-2 < \log_{\frac{1}{2}}^3 = -\log_2^3 < -1$ است و در گزینه‌ی ۳: $1 < \log_3^5$ و $1 > \log_5^3$ است.

مثال: اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ باشد، عدد $۵^{۳۰}$ چند رقمی است؟

حل:

برای آن‌که بدانیم عدد چند رقمی است، ابتدا از آن لگاریتم می‌گیریم:

$$\log ۵^{۳۰} = ۳۰ \log ۵ = ۳۰ \log \frac{۱۰}{۲} = ۳۰(\log ۱۰ - \log ۲) = ۳۰(۱ - \log ۲) = ۲۰/۹۷$$

عدد $۱۰^{n-۱}$، عددی n رقمی است. حال کلیه اعداد n رقمی بین $۱۰^{n-۱}$ و ۱۰^{n} قرار دارند، لذا لگاریتم یک عدد n رقمی بین n و $n-۱$ است. لذا: اگر عدد A، n رقمی باشد، $[\log A]+۱ = n$ می‌باشد.

پس برای یافتن تعداد ارقام یک عدد پس از آن که از آن لگاریتم گرفتیم، از حاصل براکت گرفته و با یک جمع می‌کنیم. لذا این عدد، $[۲۰/۹۷]+۱ = ۲۱$ رقمی است.