

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## بیست و هفتمین المپیاد ریاضی ایران مرحله اول – چهارم بهمن ماه هشتاد و هفت

ویرایش و پاسخ :

مهندس احمد نوری رنجبر

**توضیح:** متن تمام سوالات دوباره حروف چینی ویرایش و بازبینی شده اما امکان هرگونه اشتباه وجود دارد و لذا از تمام اساتید محترم و دانش آموزان عزیز درخواست می شود اشتباهات این متن را از طریق قسمت «تماس با ما» در سایت [www.IRYSC.com](http://www.IRYSC.com) اعلام فرمایند تا در اسرع وقت تصحیح شود.

با تشکر فراوان : خلینا- ۱۳۸۷/۱۱/۵

- (۱) ارقام ستاره‌دار در حاصل ضرب روبه‌رو نامعلوم اند و لزوماً برابر نیستند. مجموع ارقام حاصل ضرب چه قدر است؟ (اعداد کوچک سطر بالا از ده بریک حاصل شده‌اند).

$$\begin{array}{r} 2 \ 2 \ 8 \\ * \ * \ * \ * \\ \times \phantom{0000} 9 \\ \hline 1 \ * \ 0 \ * \ * \end{array}$$

۳۶ (ه)

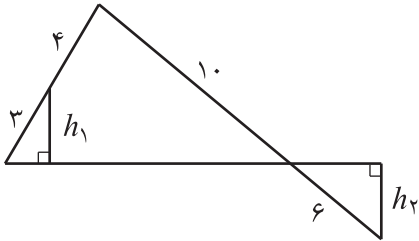
۲۷ (د)

۱۸ (ج)

۹ (ب)

۵ (الف)

- (۲) در شکل روبه‌رو، نسبت  $h_1$  به  $h_2$  چه قدر است؟



۲ (ه)

۱/۴ (د)

۱/۲ (ج)

۱ (ب)

۰٫۸ (الف)

- (۳) طول سه میانه‌ی مثلثی ۵، ۵ و ۸ سانتی متر است. کوتاه‌ترین ضلع مثلث چند سانتی متر است؟

۴ (ه)

۲/۳ (د)

$\frac{\sqrt{89}}{3}$  (ج)

$3\sqrt{7}$  (ب)

۲ (الف)

- (۴) چند سه‌تایی  $(a, b, c)$  از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر ۷۰۰۰ باشد؟

۹۵۸۳ (ه)

۵۴۸۸ (د)

۵۱۰۳ (ج)

۲۱۸۷ (ب)

۱۰۰۸ (الف)

- (۵) چند عدد پنج رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و مجموع رقم اول و رقم پنجم آن با مجموع رقم دوم و رقم چهارم آن برابر باشد؟

۳۶ (ه)

۲۴ (د)

۱۶ (ج)

۱۲ (ب)

۸ (الف)

- (۶) در بسط  $(1 + x^3 + x^6)^{50}$  چند جمله با ضریب ناصفر وجود دارد؟

۳۰۱ (ه)

۲۰۱ (د)

۱۵۱ (ج)

۱۰۱ (ب)

۵۱ (الف)

- (۷) تعداد مقسوم‌علیه‌های  $(1387! + 1430)$  برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های  $1430 + 1387!$  است؟

۲۰۰ (ه)

۱۰ (د)

۸ (ج)

۵ (ب)

۴ (الف)

- (۸) برای دو عدد مثبت  $a$  و  $b$ ،  $M$  و  $G$  را به ترتیب میانگین حسابی  $\left(\frac{a+b}{2}\right)$  و میانگین هندسی  $(\sqrt{ab})$  در نظر می‌گیریم. کوچک‌ترین عدد  $k$  را بیابید که نابرابری زیر برای هر  $a$  و  $b$  حقیقی مثبت برقرار باشد.

$$|M - G| \leq k|a - b|$$

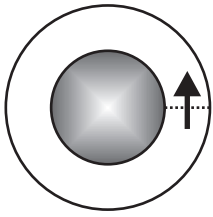
۱ (ه)

۱/۳ (د)

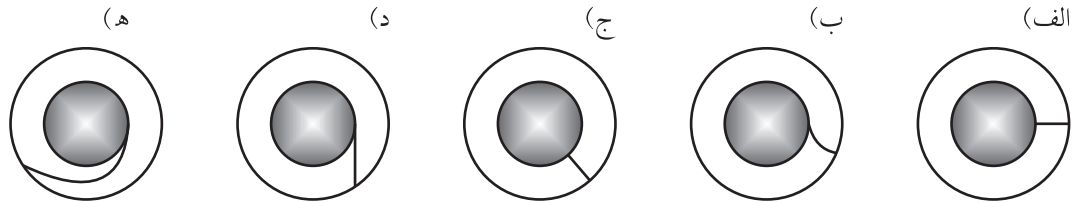
۱/۴ (ج)

۱/۶ (ب)

۱/۶ (الف)



(۹) IRYSC.COM در پیست دایره‌ای روبه‌رو، دونده‌ها روی دایره‌های متحد‌المركز می‌دوند. خط شروع مسابقه و جهت حرکت در شکل مشخص شده است. نقطه‌ی پایان مسابقه روی کدام یک از خم‌های زیر باشد تا طول مسیری که دونده‌های مختلف تا رسیدن به خط پایان طی می‌کنند، با هم برابر باشد؟



(۱۰) IRYSC.COM ده نفر با شماره‌های یک تا ده، به ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور میز نشسته‌اند. در ابتدا هر کس ۱۰۰ مهره دارد. با شروع از نفر شماره یک، هر نفر ۲ مهره از سمت راست خود می‌گیرد و ۱ مهره به نفر سمت چپ خود می‌دهد و نوبت به نفر سمت چپ منتقل می‌شود. پس از انجام ۸۷ مرحله، نفر هشتم چند مهره خواهد داشت؟

(الف) ۹۸ (ب) ۹۹ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۰۱ (ه) ۱۰۲

(۱۱) IRYSC.COM کاغذی مربع شکل را از روی قطر آن تا می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به دست آید. سپس مثلث را از روی محور تقارن آن تا می‌کنیم و مثلث دیگری به دست می‌آوریم و این کار را ۱۱ بار انجام می‌دهیم. سپس دو گوشه‌ی غیر قائمه‌ی مثلث حاصل را می‌بریم. اکنون اگر کاغذ را باز کنیم، چند سوراخ در آن می‌بینیم؟ (توجه کنید که در مجموع ۱۲ بار عمل تا کردن انجام شده است.)

(الف) ۸۴۱ (ب) ۹۰۰ (ج) ۹۶۱ (د) ۱۰۲۴ (ه) ۱۰۸۹

(۱۲) IRYSC.COM شانزده نقطه در یک شبکه‌ی مربعی  $4 \times 4$  قرار گرفته‌اند. از این نقاط حداکثر چند نقطه می‌توان انتخاب کرد که هیچ سه‌تایی هم‌خط نباشند؟

(الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰

(۱۳) IRYSC.COM هرمی مربع‌القاعده در نظر بگیرید که وجوه جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ هستند. طول بزرگ‌ترین مکعبی که در این هرم جا می‌شود چه قدر است؟

(الف)  $\sqrt{3} - 1$  (ب)  $2 - \sqrt{3}$  (ج)  $2\sqrt{3} - 3$  (د)  $\sqrt{3} - 1$  (ه)  $2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(۱۴) IRYSC.COM دو ماتریس  $A$  و  $B$  را هم‌توان گوئیم اگر اعداد طبیعی  $m$  و  $n$  وجود داشته باشند که  $A^m = B^n$ . کدام گزینه نادرست است؟

(الف) اگر  $A$  و  $B$  هم‌توان و  $C$  هم‌توان باشند، آن‌گاه  $A$  و  $C$  نیز هم‌توان‌اند.

(ب) اگر  $A$  و  $I$  هم‌توان باشند، آن‌گاه  $A$  وارون‌پذیر است.

(ج)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  هم‌توان‌اند.

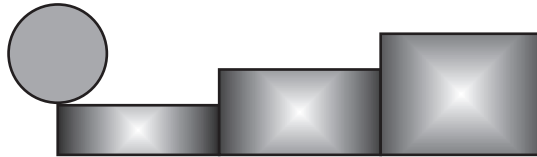
(د)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  هم‌توان‌اند.

(ه)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  هم‌توان‌اند.

15) IRYSC.COM چند سه تایی  $(a, b, c)$  از اعداد تک رقمی ناصفر وجود دارد که  $b \neq c$  و مجموعه‌ی ارقام دو عدد  $a \times b$  و  $a \times c$  یک سان باشند؟

- (الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۱۰ (ه) ۱۲

16) IRYSC.COM چرخ‌ی به شعاع یک متر در ابتدای پلکانی قرار دارد که ارتفاع آن نیم متر و طول هر پله‌ی آن ۲ متر است. وقتی چرخ از دو پله بالا رفت، در ابتدای پله، چند رادیان چرخیده است؟



- (الف) ۵ (ب)  $2 + \pi$  (ج)  $2 + \frac{4}{3}\pi$  (د)  $2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$  (ه)  $4 - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$

17) IRYSC.COM یک جدول  $8 \times 8$  که هر خانه‌ی آن به ضلع یک است در نظر بگیرید. مجموع مساحت همه‌ی مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها در این جدول دیده می‌شود چند است؟

- (الف) ۱۲۹۶ (ب) ۴۰۹۶ (ج) ۱۴۴۰۰ (د) ۱۶۴۰۰ (ه) ۲۴۳۸۴

18) IRYSC.COM  $x_1, \dots, x_{10}$  جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو است.  $x_5$  چند است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 \\ x_2 + x_4 = 2x_5 \\ \vdots \\ x_8 + x_{10} = 2x_9 \\ x_9 + x_1 = 22 \\ x_{10} + x_2 = 26 \end{cases}$$

- (الف) ۰ (ب) ۵ (ج) ۹ (د) ۱۱ (ه) ۱۶

19) IRYSC.COM سه رقم سمت راست  $216^4$  کدام است؟

- (الف) ۶۸۱ (ب) ۸۸۱ (ج) ۴۸۱ (د) ۲۲۱ (ه) ۳۸۱

20) IRYSC.COM نمودار تابع  $y = x^3$  را نسبت به خط  $y + 5x = 0$  قرینه می‌کنیم. در مورد شکل حاصل کدام درست است؟

- (الف) نمودار یک تابع پوشا است. (ب) نمودار یک تابع یک‌به‌یک است. (ج) نمودار یک تابع صعودی است. (د) نمودار یک تابع نزولی است. (ه) نمودار یک تابع نیست.

21) IRYSC.COM جسمی سه‌بعدی را بر روی صفحات  $x - y$  و  $y - z$  تصویر کرده‌ایم و

دو شکل روبه‌رو به دست آمده است. حداکثر حجمی که جسم سه‌بعدی می‌تواند داشته باشد چه قدر است؟



- (الف) ۶ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۲ (ه) ۲۰

22) IRYSC.COM مجموع ارقام کدام یک از اعداد زیر بیش‌تر است؟

- (الف)  $21^{100} + 20$  (ب)  $21^{100} + 12$  (ج)  $21^{100} + 8$  (د)  $21^{100} + 4$  (ه)  $21^{100}$

23) IRYSC.COM معادله‌ی  $a = b^2 + 2^{b-a}$  در اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

- (الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۴ (ه) بی‌نهایت

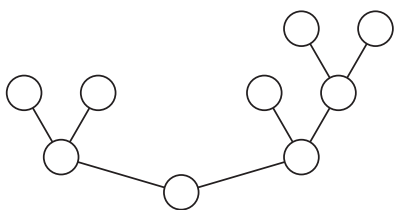
(۲۴) **IRYSC.COM**  $x$  و  $y$  و  $z$  جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو در بازه‌ی  $(-\pi, \pi)$  هستند.  $x^2 + y^2 + z^2$  کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 0 \\ \cos x + \cos y + \cos z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(الف) ۰ (ب)  $\frac{\pi^2}{4}$  (ج)  $\frac{3\pi^2}{4}$  (د)  $\frac{8\pi^2}{9}$  (ه)  $\frac{27\pi^2}{4}$

(۲۵) **IRYSC.COM** مثلث به رأس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  دارای این خاصیت است که فواصل رأس‌های آن تا نقطه‌ی ثابت  $P$  به ترتیب برابر با  $7$ ،  $10$  و  $14$  است و در بین مثلث‌های با این خاصیت بیش‌ترین مساحت را دارد. نسبت فاصله‌ی  $P$  از ضلع  $AB$  به فاصله‌ی  $P$  از ضلع  $BC$  چه قدر است؟

(الف) ۱ (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج) ۲ (د)  $\frac{2}{3}$  (ه)  $\frac{7}{10}$



(۲۶) **IRYSC.COM** به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را، بدون تکرار، در دایره‌های شکل روبه‌رو قرار داد به طوری که هر دایره از دو عددی که در بالای آن قرار دارد کم‌تر باشد؟

(الف) ۱۶ (ب) ۹۶ (ج) ۴۴۸ (د) ۸۹۶ (ه) ۳۶۲۸۸۰

(۲۷) **IRYSC.COM** زیرمجموعه‌های  $A_0$ ،  $A_1$ ،  $A_2$  و ... از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده‌اند. کدام یک از اعداد زیر عضو  $A_{100}$  نیست؟ (توجه کنید که  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ )

$$\begin{cases} A_0 = \phi, A_1 = \{1\} \\ A_n = (A_{n-1} \Delta A_{n-2}) \cup \{n\} \end{cases}$$

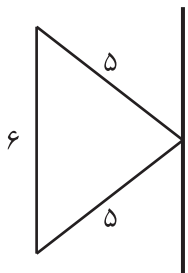
(الف) ۶۹ (ب) ۷۰ (ج) ۷۱ (د) ۷۲ (ه) ۷۳

(۲۸) **IRYSC.COM** چراغ قوه‌ای داریم که به دو باتری نیاز دارد. پنج باتری در اختیار داریم که دقیقاً سه تای آن‌ها سالم است. با دست‌کم چند بار امتحان کردن می‌توانیم حتماً چراغ قوه را روشن کنیم؟ (آخرین باری که چراغ قوه روشن می‌شود نیز یک بار امتحان کردن محسوب می‌شود.)

(الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

(۲۹) **IRYSC.COM** در یک جدول با ۷۲ سطر و ۱۴۰ ستون، مهره‌ای با این قاعده حرکت می‌کند که در هر حرکت ۳۰ واحد به سمت راست و ۲۰ واحد به سمت بالا می‌رود و وقتی به ضلع راست یا ضلع بالای جدول می‌رسد، حرکت را از ضلع مقابل ادامه می‌دهد. مثلاً اگر مهره‌ای در خانه‌ی ۱۲۰ افقی و ۷۰ عمودی باشد در حرکت بعد به خانه‌ی ۱۰ افقی و ۱۸ عمودی می‌رود. اگر این مهره از خانه‌ی گوشه‌ی پایین سمت چپ (۱ افقی و ۱ عمودی) شروع به حرکت کند، به چه نسبتی از خانه‌های جدول می‌تواند برسد؟

(الف)  $\frac{1}{80}$  (ب)  $\frac{1}{40}$  (ج)  $\frac{1}{30}$  (د)  $\frac{1}{20}$  (ه)  $\frac{5}{12}$



(۳۰) **IRYSC.COM** مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده‌ی ۶ و طول ساق‌های ۵ را حول محوری که از رأس آن می‌گذرد و موازی قاعده‌ی آن است دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه قدر است؟

(الف)  $12\pi$  (ب)  $48\pi$  (ج)  $64\pi$  (د)  $72\pi$  (ه)  $96\pi$

کلید اولیه بیست و هفتمین المپیاد ریاضی ایران

مرحله اول – چهارم بهمن ماه هشتاد و هفت

الف	ب	ج	د	هـ	۱۶	الف	ب	ج	د	هـ	۱
الف	ب	ج	د	هـ	۱۷	الف	ب	ج	د	هـ	۲
الف	ب	ج	د	هـ	۱۸	الف	ب	ج	د	هـ	۳
الف	ب	ج	د	هـ	۱۹	الف	ب	ج	د	هـ	۴
الف	ب	ج	د	هـ	۲۰	الف	ب	ج	د	هـ	۵
الف	ب	ج	د	هـ	۲۱	الف	ب	ج	د	هـ	۶
الف	ب	ج	د	هـ	۲۲	الف	ب	ج	د	هـ	۷
الف	ب	ج	د	هـ	۲۳	الف	ب	ج	د	هـ	۸
الف	ب	ج	د	هـ	۲۴	الف	ب	ج	د	هـ	۹
الف	ب	ج	د	هـ	۲۵	الف	ب	ج	د	هـ	۱۰
الف	ب	ج	د	هـ	۲۶	الف	ب	ج	د	هـ	۱۱
الف	ب	ج	د	هـ	۲۷	الف	ب	ج	د	هـ	۱۲
الف	ب	ج	د	هـ	۲۸	الف	ب	ج	د	هـ	۱۳
الف	ب	ج	د	هـ	۲۹	الف	ب	ج	د	هـ	۱۴
الف	ب	ج	د	هـ	۳۰	الف	ب	ج	د	هـ	۱۵

رنگ زرد : سوالات نا مفهوم یا بهترین گزینه

رنگ قرمز : سوالات غلط

WWW.IRYSC.COM