# تحلیل ابعادی

**امیر آقامحمدی**

در فیزیک وقتی صحبت از یک کمیتِ مشاهده‌پذیر می‌کنیم منظورِمان آن است که آن کمیت قابلِ سنجشِ است. هر کمیتِ مشاهده‌پذیر بُعد دارد و در یک دستگاهِ واحدهایِ مشخص به آن اندازه هم نسبت می‌دهیم. مثلاً بُعد مکان $x$ که آن را با $[x]$ نشان می‌دهیم، $L$، بُعدِ زمان $T = [t]$، و بُعدِ سرعت $[v] = LT^{-1}$ است. مقدارِ عددیِ هر کمیتِ بُعدداری به دستگاهِ واحدی که انتخاب می‌کنیم بستگی دارد. هر رابطه‌یِ فیزیکی به صورتِ یک تساوی است که دو طرفِ رابطه هم‌بُعد اَند. مثلاً در رابطه‌یِ $x = vt$، هر دو طرف بُعدِ طول دارند. برایِ جسمی که با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند، این رابطه در هر دستگاهِ واحدی درست است. با تغییرِ دستگاهِ واحدها مقدارِ عددیِ هر دو طرف عوض می‌شود ولی تساویِ دو طرف کماکان برقرار است. البته این رابطه را به صورتِ $x/(vt) = 1$ هم می توان نوشت. در این صورت دو طرفِ رابطه بدونِ بُعدند. سمت راستِ معادله‌یِ آخر در هر دستگاهِ واحدی 1 است. اگر دو طرفِ یک تساوی کمیت‌هایی با ابعاد مختلف باشند نتیجه تنها در یک دستگاهِ واحد می‌تواند درست باشد. مثلاً فرض کنید $A$ و $B$ هر دو 10 هستند، ولی $A = 10\,\mathrm{m}$ و $B = 10\,\mathrm{m}^2$ است. اگر کمیت‌هایِ $A$ و $B$ را بر حسبِ $\mathrm{cm}$ و $\mathrm{cm}^2$ بنویسیم $A = 1000\,\mathrm{cm}$ و $B = 100000\,\mathrm{cm}^2$ می‌شود که دیگر با هم مساوی نیستند. اگر بخواهیم رابطه‌ای فیزیکی در هر دستگاهِ واحدهای درست باشد، باید دو طرفِ تساوی در آن رابطه هم‌بُعد باشند.

بزرگی و کوچکی یک کمیتِ بُعددار هم بی‌معناست. مثلاً فاصله‌یِ $d_1 = 1\,\mathrm{m}$ نسبت به ابعاد هسته‌ای یعنی اعدادی از رتبه‌یِ $d_2 = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ بسیار بزرگ، و نسبت به یک سالِ نوری یعنی چیزی حدودِ $d_3 = 10^{16}\,\mathrm{m}$ بسیار کوچک است. از تقسیم دو کمیتِ هم‌بُعد کمیتی بدونِ بُعد به دست می‌آید. حالا می‌توان از بزرگی و کوچکی این کمیت حرف زد. مثلاً $\Pi_1 := d_1/d_2 = 10^{15} \gg 1$ و $\Pi_2 := d_1/d_3 = 10^{-16} \ll 1$. روابطِ اَخیر به دستگاهِ واحد هم بستگی ندارد (اگر مقدارِ $d_1$، $d_2$، و $d_3$ را بر حسبِ $\mathrm{mm}$ هم قرار دهیم همان مقادیرِ عددیِ قبلی برایِ $\Pi_1$ و $\Pi_2$ به دست می‌آید).

اغلب در محاسبه‌ها با کمیت‌هایی با ابعادِ گوناگون سروکار داریم. ببینیم چه کارهایی با کمیت‌هایِ بُعد دار می‌توان انجام داد. دو کمیتِ هم‌بُعد را می‌توان جمع کرد اما جمعِ کمیتی با بُعد طول با کمیتی با بُعدِ مساحت بی‌معناست. مقایسه‌یِ بزرگ‌تری ـ کوچک‌تری نیز برایِ کمیت‌هایی با بُعدهایِ مختلف بی‌معناست. اما دو کمیتِ هم‌بُعد را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد، و کمیتی هم که به دست می‌آید همان بُعد را دارد.

به طورِ خلاصه:

۱) تنها کمیت‌هایِ هم‌بُعد را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد.

۲) کمیت‌هایِ مختلف را می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. لزومی ندارد که این کمیت‌ها بُعدِشان یکی باشد. بُعدِ کمیتِ نهایی نیز از ضرب و تقسیمِ اَبعادِ همان کمیت‌ها به دست می‌آید.

تابعیِ مثلِ

$$f(x) = a\ x^2 + b\ x^3, \tag{1}$$

تنها در صورتی از لحاظِ اَبعادی صحیح است که بُعدِ $ax^2$ و $bx^3$ یکی باشد. بنا بر این در یک چندجمله‌ای تمامِ جملات می‌توانند بُعددار باشند ولی تمامِ جملاتِ آن باید هم‌بُعد باشند . تابعی مثلِ

$$f(x) = \sin\ ax, \tag{2}$$

تنها در صورتی از لحاظِ اَبعادی صحیح است که $ax$ بدونِ بُعد باشد. زیرا در بسطِ $\sin\ ax$ جملاتِ $ax$ و $a^3x^3$ ظاهر می‌شوند. در واقع برایِ چنین توابعی آرگومانِ تابع باید بی‌بُعد باشد.

فرض کنید رابطه‌یِ فیزیکیِ موردِ نظرِ ما به صورتِ رابطه‌ای بینِ کمیت‌هایِ $Q_1$، $Q_2$، $Q_3$، $\cdots$، $Q_N$ باشد.

$$Q_1 = f(Q_2, \cdots Q_N). \tag{3}$$

با تغییرِ دستگاهِ واحدها هر یک از کمیت‌هایِ $Q_1$، $Q_2$، $\cdots$، $Q_N$ بنا به آن که چه بُعدی داشته باشند به صورتِ زیر عوض می‌شوند

$$Q_i \to \lambda_i Q_i. \tag{4}$$

در این صورت برقراریِ رابطه‌یِ (3) به این معنی است که

$$\lambda_1 Q_1 = f(\lambda_2 Q_2, \cdots \lambda_N Q_N), \tag{5}$$

و در نتیجه داریم،

$$f(Q_2, \cdots Q_N) = \lambda_1^{-1} f(\lambda_2 Q_2, \cdots \lambda_N Q_N). \tag{6}$$

بنا بر این تابعی از کمیت‌هایِ بُعدارِ باید خاصیتِ مقیاس‌بندیِ فوق را داشته باشد.

فرض کنید $Q_1$ و $Q_2$ دو کمیتِ بُعددار باشند و رابطه‌یِ

$$Q_1 = f(Q_2), \tag{7}$$

بینِ آن‌ها برقرار باشد. بُعدِ $Q_1$ و $f(Q_2)$ باید یکی باشد. اگر بستگیِ $[Q_1]$ به بُعدِ $L$ مثلِ $L^\alpha$ باشد، بستگیِ $[f(Q_2)]$ به بُعدِ $L$ هم مثلِ $L^\alpha$ خواهد شد و بنا بر این $[Q_2]$ هم باید به $L$ بستگی داشته باشد،

مثلاً $L^\beta$. با عوض کردنِ دستگاهِ واحدها مقدارِ عدديِ $Q_1$ و $Q_2$ عوض می‌شوند. فرض کنید، با تغییرِ واحد مثلاً مقدارِ عدديِ طول به اندازه‌ي $b$ عوض شود (براي تبدیل از m به cm، $b = 100$ است.) در این صورت رابطه‌ي (7) به صورت زیر در می آید.

$$Q_1\ b^\alpha = f(Q_2\ b^\beta). \tag{8}$$

که با جای‌گذاريِ $Q_1$ نتیجه می‌شود.

$$f(Q_2)\ b^\alpha = f(Q_2\ b^\beta). \tag{9}$$

می‌خواهیم ببینیم رابطه‌ي فوق چه شرطی رويِ $f(Q_2)$ می‌گذارد.

$$f(Q_2) = f(\frac{Q_2}{c}\,c) = f\left([(\frac{Q_2}{c})^{1/\beta}]^\beta\,c\right) = f(c)(\frac{Q_2}{c})^{\alpha/\beta}. \tag{10}$$

در قسمتِ آخر از رابطه‌ي (9) استفاده کرده‌ایم. پس

$$Q_1 = f(Q_2) = Q_2^{\alpha/\beta} g(c). \tag{11}$$

در ضمن کمیتِ $Q_1/Q_2^{\beta/\alpha}$ نیز بدونِ بُعد است. پس

$$\Pi := \frac{Q_1}{Q_2^{\alpha/\beta}} = C \tag{12}$$

که در آن $C$ ثابتی بی‌بُعد است. بنا بر این دو کمیتِ بُعددار تنها وقتی می توانند به هم مربوط باشند که یکی تابعی توانی از دیگری باشد.

فرض کنید در مسئله‌ای $N$ کمیتِ بُعددار دخیل باشند. برای تحلیل مسئله، ابتدا کمیت‌هايِ بی‌بُعدی مثلِ $\Pi_i,\ i = 1, \cdots M$ را که از این مجموعه می‌توان ساخت به دست می‌آوریم. واضح است که $M < N$ است. فرض کنید در پدیده‌ي موردِ نظرِ ما، فقط سه کمیتِ $Q_1$، $Q_2$ و $Q_3$ دخیل باشند. قانونِ فیزیکی‌ای بین این سه کمیّت حاکم است:

$$Q_1 = f(Q_2, Q_3). \tag{13}$$

اگر از این سه کمیت تنها یک کمیتِ بدونِ بُعد مثلِ $\Pi$ بتوان ساخت، معادله‌ي بالا به صورتِ

$$F(\Pi) = 0, \tag{14}$$

یا

$$\Pi = C, \tag{15}$$

در می‌آید. اگر از این سه کمیت بتوان دو کمیتِ بدونِ بُعد مثلِ $\Pi_1$ و $\Pi_2$ ساخت، معادله‌ي (13) به صورتِ

$$G(\Pi_1, \Pi_2) = 0, \tag{16}$$

در می‌آید.

فرض کنید در مسئله‌ای $N$ کمیتِ بُعددار دخیل باشند، و کمیت‌هایِ $\Pi_i,\ i=1,\cdots M$ بی‌بُعد باشند. قانونِ فیزیکی، رابطه‌ای بین این $M$ کمیتِ بدونِ بُعد است.

$$G(\Pi_1,\cdots,\Pi_M)=0. \tag{17}$$

یا

$$\Pi_1=G(\Pi_2,\cdots,\Pi_M). \tag{18}$$

بنا بر این

۱) ابتدا لازم است که کمیت‌هایِ فیزیکیِ دخیل در مسئله را بشناسیم.

و سپس

۲) کمیت‌هایِ بدونِ بُعدِ مسئله را بسازیم.

بندِ اول معمولاً سخت‌ترین بخشِ مسئله است. اگر تنها یک کمیت را در نظر نگیریم جواب ما می‌تواند کاملاً غلط باشد. در صورتی که تمامِ کمیت‌هایِ بُعددارِ مسئله مثلاً $Q_i,\ i=1,\cdots N$ را بشناسیم، ساختنِ کمیت‌هایِ بدونِ بُعدِ مسئله $\Pi_i,\ i=1,\cdots M$ کاری ساده است. ابتدا ترکیبی مثلِ

$$\Pi_1=Q_1^{\alpha_1}\cdots Q_N^{\alpha_N} \tag{19}$$

را می‌سازیم. مجموعه‌یِ $\alpha_i$ ها را باید به گونه‌ای باشند که $\Pi_1$ بدونِ بُعد باشد. به همین صورت ادامه می‌دهیم و بقیه‌یِ $\Pi_i$ ها را می‌سازیم. اگر اَبعادی که در همه‌یِ $Q_i$ ها ظاهر می‌شوند $m$ تا باشد، $m$ معادله از شرطِ بی‌بُعد بودنِ $\Pi_i$ ها به دست می‌آید. در صورتی که $m$ معادله مستقل باشند، تعدادِ کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ مستقلِ مسئله $M=N-m$ تاست. اگر تنها یک کمیتِ بی‌بُعد داشته باشیم، در جوابِ نهایی یک ثابتِ بی‌بُعد می‌ماند که تنها با تحلیلِ اَبعادی چیزی راجع به آن نمی‌توان گفت. اگر کمیت‌هایِ بی‌بُعد بیش از یک باشد، در جوابِ نهایی توابعی از کمیت‌هایِ بی‌بُعد باقی می‌ماند که تنها با تحلیلِ اَبعادی چیزی راجع به آن‌ها نمی‌توان گفت.

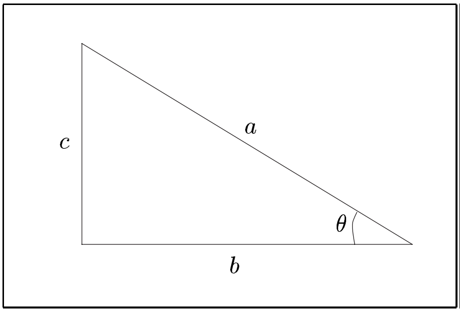
**مثال ۱**— می‌خواهیم پریودِ نوسانِ یک آونگ را به دست آوریم. کمیت‌هایِ دخیل در مسئله احتمالاً پریودِ آونگ $\tau$، جرمِ آونگ $m$، طولِ آونگ $l$، ثابتِ گرانش $g$ و دامنه‌یِ اولیه‌یِ آونگ $\theta_0$ است. $\Pi_1=\theta_0$ بی‌بُعد است. پس کافی است که با $\tau$، $m$، $l$و $g$ کمیتِ بی‌بُعد دیگری بسازیم.

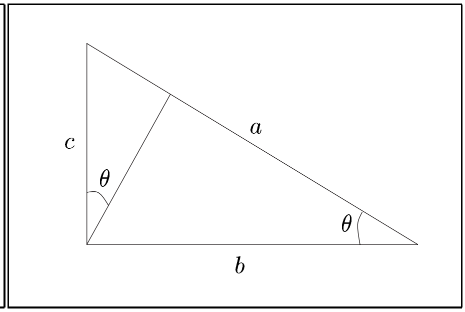
$$\Pi_2=m^\alpha g^\beta l^\gamma \tau^\delta. \tag{20}$$

بنا بر این

$$[\Pi_2]=M^\alpha(LT^{-2})^\beta L^\gamma T^\delta \tag{21}$$

باید بی‌بُعد باشد. پس




$$\alpha = 0, \quad \gamma = -\beta, \quad \delta = 2\beta. \tag{22}$$

یعنی کمیتِ $(\frac{g\tau^2}{l})^\beta$ یا $\frac{g\tau^2}{l}$ بی‌بُعد است. در این مثال دو کمیتِ بی‌بُعدِ مستقلِ $\theta_0$ و $\frac{g\tau^2}{l}$ را داریم. پس

$$\frac{g\tau^2}{l} = f(\theta_0) \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{l f(\theta_0)}{g}}. \tag{23}$$

با استفاده از این که در حالتِ خاصی که دامنه‌ی آونگ کوچک است، پریود مستقل از دامنه‌ی اوّلیّه است، باید داشته باشیم

$$\tau = C\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad C := \sqrt{f(0)}. \tag{24}$$

$C$ ثابت و بی‌بُعد است. تحلیلِ ابعادی هیچ اطلاعی در موردِ مقدارِ $C$ نمی‌دهد، ولی با محاسبه‌یِ مستقیم مقدارِ آن به دست می‌آید ($C = 2\pi$).

اگر تحلیلِ ابعادی با اطلاعِ دیگری در موردِ مسأله همراه شود ممکن است بتوان مسأله را به طورِ کامل حل کرد. مثلاً در مرجعِ [1] برایِ اجسامی که شکلِ‌شان تقارنِ هندسیِ خاصی دارد، با استفاده از قضیه‌یِ محورهایِ موازی و روشِ تحلیلِ ابعادی، لختیِ دورانیِ بعضی اجسام به طور دقیق به دست آمده است.

**مثال ۲** — می‌خواهیم قضیه‌یِ فیثاغورث را با استفاده از تحلیلِ اَبعادی اثبات کنیم. می‌دانیم یک مثلثِ قائم‌الزاویه، با طولِ وتر $a$ و اندازه‌یِ یک زاویه‌ی حادّه‌یِ آن $\theta$ به طورِ یک‌تا مشخص می‌شود. مساحت مثلث را $S$ می‌نامیم. دو کمیتِ بدونِ بُعد داریم، $\theta$ و $S/a^2$، که طبق رابطه‌یِ زیر به هم مربوط‌اَند.

$$S/a^2 = f(\theta) \quad \Rightarrow \quad S = a^2 f(\theta). \tag{25}$$

تحلیلِ ابعادی هیچ اطلاعی در موردِ تابعِ $f(\theta)$ به ما نمی‌دهد.

حالا اگر ارتفاعِ مثلث را بکشیم، دو مثلثِ قائم‌الزاویه با وترهایِ $b$ و $c$ و با همان زاویه‌یِ حادّه‌یِ $\theta$ داریم. مساحتِ این مثلث‌ها را $S_1$ و $S_2$ می‌نامیم. در این صورت $S_1 = b^2 f(\theta)$ و $S_2 = c^2 f(\theta)$. حال اگر اضافه بر تحلیلِ اَبعادی، از جمع‌پذیریِ مساحت‌ها هم استفاده کنیم، به رابطه‌یِ زیر می‌رسیم.

$$S = S_1 + S_2, \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2. \tag{26}$$

**مثال ۳**— جسمی در حضورِ مقاومتِ هوا سقوط می‌کند. در گستره‌ای از سرعت‌ها، اندازه‌یِ نیرویِ مقاومتِ هوا $f = b\,v^2$ است. می‌خواهیم سرعتِ حدّ ِجسم را به دست آوریم. کمیت‌هایِ دخیل در این مسئله $b$، $m$، $g$، و $v$ هستند. با کمی محاسبه می‌توان نشان داد تنها کمیتِ بی‌بُعدِ مسئله $\Pi = b\,v^2/(mg)$ است. پس

$$b\,v^2/mg = C \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Cmg}{b}}. \tag{27}$$

اگر مسئله را با روشِ مستقیم حل کنیم، ضریبِ $C = 1$ به دست می آید.

**مثال ۴**— قطره‌یِ مایعی را در نظر بگیرید که به شکلِ کره‌ای به شعاعِ $R$ است. چگالیِ مایع $\rho$ (با بُعدِ $(M, L^{-3}$) و کششِ سطحیِ آن $\sigma$ (با بُعدِ $M\ T^{-2}$) است. اگر این قطره را به ارتعاش در آوریم شکلِ آن دیگر کره نمی‌ماند، نوسان می‌کند. دوره‌یِ تناوبِ این نوسان‌ها، $\tau$، به شعاعِ قطره، $R$، چگالیِ قطره، $\rho$، و کشش سطحی مایع، $\sigma$، بستگی دارد. با استفاده از تحلیلِ ابعادی رابطه‌ای بینِ این کمیت‌ها به دست می‌آوریم. ابتدا فرض می کنیم کمیتِ بی‌بُعد

$$\Pi := \tau^\alpha R^\beta \rho^\gamma \sigma^\delta \tag{28}$$

باشد. در این صورت

$$[\Pi] = T^\alpha L^\beta (ML^{-3})^\gamma (MT^{-2})^\delta \tag{29}$$

باید بی‌بُعد باشد، یعنی

$$\alpha - 2\delta = 0 \qquad \beta - 3\gamma = 0 \qquad \gamma + \delta = 0. \tag{30}$$

پس $[R^3\rho/(\tau^2\sigma)]^\gamma$ بی‌بُعد است. بنا بر این

$$\tau = C\sqrt{\frac{R^3\rho}{\sigma}}, \tag{31}$$

که در آن $C$ ثابتی بی‌بُعد است.

**مثال ۵**— وقتی دو لایه‌یِ شاره رویِ هم می‌لغزند و سرعتِ‌شان با هم فرق دارد، نیرویی بینِ آن دو لایه وارد می‌شود. این نیرو برابر است با مساحتِ سطحِ تماسِ لایه‌ها ضرب‌در اختلافِ سرعتِ لایه‌ها، تقسیم بر فاصله‌یِ لایه‌ها، ضرب در یک ضریب به اسمِ ضریبِ گران‌روی $\mu$. ابتدا بُعدِ گرانروی $[\mu]$ را به دست می آوریم.

$$M\,L\,T^{-2} = [\mu] \times L^2 \times L\,T^{-1}/L \quad \Rightarrow \quad [\mu] = M\,L^{-1}\,T^{-1}. \tag{32}$$

شاره‌ای با چگالیِ $\rho$، گران‌رویِ $\mu$، و سرعتِ $v$ را در نظر بگیرید که در لوله‌ای به قطرِ $D$ در حرکت است. اُفتِ فشارِ شاره در واحدِ طولِ آن را $E$ بگیرید.

$$\Pi = \rho^a \mu^b v^c D^d E^e. \tag{33}$$

در این صورت

$$[\Pi] = (ML^{-3})^a (ML^{-1}T^{-1})^b (LT^{-1})^c L^d (ML^{-2}T^{-2})^e. \qquad (34)$$

با صفر قرار دادنِ توان‌هایِ $M$، $L$، و $T$ به روابطِ زیر می‌رسیم.

$$a + b + e = 0, \quad -3a - b + c + d - 2e = 0, \quad -b - c - 2e = 0, \qquad (35)$$

که 3 معادله برایِ 5 مجهول است. بنا بر این 2 پارامتر آزاد می‌ماند و 2 کمیتِ بی‌بُعدِ مستقل داریم. با انتخاب‌هایِ مختلف برایِ این 2 پارامتر شکل‌هایِ مختلفی برایِ این کمیت‌هایِ بی‌بُعد به دست می‌آید، ولی 2 تا را می‌توان انتخاب کرد و کمیت‌هایِ بی‌بُعد را به دست آورد. انتخاب‌هایِ دیگر کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ دیگری می‌دهند. اما این‌ها جدید نیستند و از ترکیب همان دو تا به دست می‌آیند. با انتخابِ $b$ و $e$، $\Pi_1 = (DE)/(\rho v^2)$، و $\Pi_2 = \mu/(\rho v D)$ به دست می‌آیند. پس رابطه‌یِ فیزیکی باید

$$\frac{DE}{\rho v^2} = f(\frac{\mu}{\rho v D}), \qquad (36)$$

باشد.

تا این‌جا با استفاده از تحلیلِ اَبعادی تا جایی‌که امکان داشت معادلاتِ حاکم بر پدیده‌هایِ فیزیکی را به دست آوردیم. حالا فرض کنید کسی می‌خواهد پدیده‌ای را در آزمایش‌گاه بررسی کند. فرض کنید کمیت‌هایِ دخیلِ در پدیده $Q_1, \cdots, Q_N$ باشند. یک راه که معمولاً گفته می‌شود آن است که $N-2$ کمیت را ثابت نگه داریم و تغییراتِ یکی بر حسبِ دیگری را بررسی کنیم. در این صورت باید تمام زوج‌هایِ دوتایی را از بینِ $N$ تا جدا و آزمایش کنیم یعنی $N(N-1)/2$ بار باید این کار را انجام دهیم. اما با استفاده از تحلیلِ اَبعادی کافی است ابتدا $M$ کمیتِ بی‌بُعد مسئله را به دست آوریم، و $M(M-1)/2$ بار بررسی را انجام دهیم. $M$ از $N$ کم‌تر است. مثلاً در مثالِ بالا کافی است به جای 10 مورد بررسی و رسم منحنیِ تغییراتِ زوج‌هایِ متغیر فقط 1 مورد بررسی صورت گیرد.

آخرین موردی که به آن می‌پردازیم، مدل‌سازی و یا تشابه است. حتماً صحنه‌هایی از فیلم‌هایی را به یاد دارید که مثلاً شعله‌یِ آتشی و یا موج و توفانی و یا غرق شدنِ یک کشتی را نشان می‌دهد ولی کاملاً تصنعی به نظر می‌رسد. یا بر عکس فیلم‌هایی را دیده‌ایم که چنین صحنه‌هایی خیلی واقعی هستند. چرا اولی تصنعی و دومی واقعی بود؟ لابد فکر نمی‌کنید در آن فیلم‌هایی که به نظر واقعی می‌رسند یک کشتیِ واقعی غرق می‌شود. گاهی اوقات وقتی قرار است پولِ هنگفتی صرف ساختنِ وسیله‌ای شود، ابتدا مدلی کوچک‌تر ساخته می‌شود و آزمایش‌هایی رویِ این مدلِ کوچک صورت می‌گیرد. با این آزمایش‌ها اطلاعاتی در موردِ سیستمِ بزرگ به دست می‌آید. فرض کنید در سیستمِ اصلی کمیت‌هایِ بدونِ بُعد $\Pi_1, \cdots, \Pi_N$ باشند. اگر چه ممکن است ما دقیقاً نتوانیم مسئله‌یِ اصلی را مستقیماً تحلیل کنیم، ولی از بحث‌هایِ قبلی واضح است که

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \cdots, \Pi_N). \qquad (37)$$

سیستمی شبیهِ سیستم اصلی ولی در ابعادی کوچکتر می‌سازیم. فیزیکِ حاکم بر هر دو سیستم یکی است، بنا بر این هر چند تابعِ $F$ را نمی‌شناسیم برایِ سیستمِ مدل هم داریم

$$\Pi_{1m} = F(\Pi_{2m}, \cdots, \Pi_{Nm}). \tag{38}$$

که $\Pi_{im}$، $i$ اُمین کمیتِ بی‌بُعدِ مدل است. چون رویِ سیستمِ مدل کنترلِ بیش‌تری داریم مدل را جوری می‌سازیم که

$$\Pi_{2m} = \Pi_2, \cdots, \Pi_{Nm} = \Pi_N. \tag{39}$$

پس سمتِ راستِ روابطِ (37) و (38) یکی می‌شوند. در نتیجه سمتِ چپِ آن‌ها هم باید یکی باشند. با اندازه‌گیریِ $\Pi_{1m}$ در واقع مثلِ آن است که $\Pi_1$ را اندازه گرفته باشیم.

**مثال ۶**— صفحه‌یِ مستطیلی‌شکلی با ابعادِ $l$ و $l'$ را درونِ شاره‌ای گذاشته‌ایم. سرعتِ شاره در فاصله‌ی دور عمود بر صفحه است و اندازه‌یِ آن $v$ است. چگالیِ شاره $\rho$ و گران‌رویِ آن $\mu$ است. نیرویی که از طرفِ شاره بر مستطیل وارد می‌شود به پارامترهایِ $\mu$، $\rho$، $l'$، $l$، و $v$ بستگی دارد.

برایِ به دست آوردنِ این نیرو، مستطیلِ مدلی با ابعادِ $l_0$ و $l'_0$ را درونِ شاره‌ای با همان سرعت قرار می‌دهیم. ابعادِ مدل 100 برابر کوچک‌تر از مستطیلِ اصلی است. چگالیِ شاره $\rho_0 = 10\rho$، و گران‌رویِ آن $\mu_0 = 0.1\mu$ است. نیرویِ وارد بر مستطیلِ مدل $F_0$ شده است. نیرویِ وارد بر مستطیلِ بزرگ چه‌قدر است؟

برایِ به دست آوردنِ نیرویِ وارد بر مستطیل لازم است کمیت‌هایِ فیزیکیِ دخیل در مسأله را در نظر بگیریم. آن‌ها عبارت‌اَند از $\mu$، $\rho$، $v$، $l'$، $l$، و $F$. حال از این کمیت‌ها کمیتی بی‌بُعد مثلِ $\Pi$ می‌سازیم.

$$\Pi := F^a\, l^b\, {l'}^{b'}\, v^c\, \rho^d\, \mu^e.$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که کمیتِ زیر باید بی‌بُعد باشد.

$$M^{a+d+e}\, L^{a+b+b'+c-3d-e}\, T^{-2a-c-e},$$

که این به معنای صفر بودنِ نماهاست. که از این جا

$$d = -a - e, \quad c = -2a - e, \quad b = -(2a + e) - b'.$$

سه پارامترِ مستقل داریم. در این‌جا $a$، $b'$ و $e$ را به عنوانِ پارامترهایِ مستقل گرفته‌ایم. در این صورد سه کمیتِ بی‌بُعدِ $\Pi_1 := F/(\rho v^2 l^2)$، $\Pi_2 := \mu/(\rho v l)$، و $\Pi_3 := l'/l$ را به دست می‌آوریم. با انتخاب پارامترهایِ دیگری به عنوانِ پارامترِ مستقل، کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ دیگری را به دست خواهیم آورد، که البته توابعی از $\Pi_1$، $\Pi_2$ و $\Pi_1$ هستند. رابطه‌یِ فیزیکیِ نهایی باید رابطه‌ای بینِ کمیت‌هایِ بی‌بُعد باشد، پس

$$\frac{F}{\rho v^2 l^2} = f(\frac{\mu}{\rho v l}, \frac{l'}{l}). \tag{40}$$

برایِ مستطیلِ مدل هم داریم

$$\frac{F_0}{\rho_0 v_0^2 l_0^2} = f(\frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 l_0}, \frac{l'_0}{l_0}). \qquad (41)$$

اما با توجه به این که $l = 100 l_0$، $l' = 100 l'_0$، $\rho = 10^{-1}\rho_0$، $v = v_0$، و $\mu = 10\mu_0$

$$\frac{\mu}{\rho v l} = \frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 l_0}, \qquad \frac{l'}{l} = \frac{l'_0}{l_0}. \qquad (42)$$

چون سمت راستِ روابطِ (40) و (41) یکی است، پس سمتِ چپِ آن‌ها هم باید مساوی باشد. بنا بر این

$$\frac{F}{\rho v^2 l^2} = \frac{F_0}{\rho_0 v_0^2 l_0^2}, \qquad (43)$$

که با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$F = 10^3\, F_0. \qquad (44)$$

**قدردانی و مؤخره**— لازم می‌دانم از محمدِ خرمی و احمدِ شریعتی برای پیش‌نهادهایِ مفیدی که در موردِ این مقاله داشتند تشکر کنم. در ضمن مرجعِ [2] که در موردِ تحلیلِ ابعادی است، مقاله‌یِ آموزنده‌ای برایِ من بود. مثال‌هایِ متنوعی را می‌توانید در آن پیدا کنید. به خواننده‌یِ آشنا با مباحثِ پیش‌رفته‌ترِ فیزیک، پیش‌نهاد می‌کنم حتماً نگاهی به مرجعِ [3] بیندازد.

## مراجع

[1] امیرِ آقامحمدی؛ تحلیلِ ابعادی و لختیِ دورانی: مجله‌ی فیزیک (۱۳۷۷) ۱۷۶ تا ۱۷۸.

[2] محمّدِ خرّمی؛ تجزیه و تحلیلِ ابعادی: گنجینه ۲، ۳ (بهمن و اسفندِ ۱۳۷۰) ۳۳۶ تا ۳۴۱.

[3] Migdal, A. B.: *Qualitative Methods in Quantum Theory*, Benjamin, Reading, 1977.

**مسئله ی ِ 3 )** نیم‌حلقه‌ای به جرمِ $M$ به طورِ قائم رویِ میزی اُفقی ایستاده است. فرض کنید صفحه‌یِ نیم‌حلقه هم‌واره قائم بماند. مطابقِ شکل دو دانه‌یِ تسبیح هر یک به جرمِ $m$ به طورِ متقارن از بالایِ نیم‌حلقه با اختلالی کوچک به پایین لغزیده‌اند. نیرویی که میز به حلقه وارد می‌کند ثابت نیست.

الف) چه شرطی برقرار باشد که در زاویه‌ایِ مثلِ $\theta_0$ این نیرو صفر شود؟

ب) فرض کنید این شرط برقرار باشد؛ آیا حلقه از میز جدا می‌شود؟