ریاضیات مهندسی :

①

احمد پاکباز
AHMAD . PAKBAZ

- هرگاه کره صلب همگن بوده و انتقال گرما در شرایط پایا صورت گیرد تغییرات در جهت θ و ϕ صفر است و فقط تغییرات شعاعی داریم
- هرگاه استوانه صلب همگن باشد تغییرات در جهت θ صفر است
- الف) اگر شعاع استوانه خیلی کوچک باشد انتقال گرما را می توان یک بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفت

ب) اگر سطح مقطع استوانه عایق باشد انتقال گرما در جهت شعاعی صورت می گیرد.

ج) اگر سطح جانبی استوانه عایق باشد و نسبت طول به شعاع بزرگ باشد. انتقال گرما را می توان یک بعدی در جهت محوری

د) هرگاه طول استوانه زیاد باشد می توانیم از انتقال گرما در جهت طول (Z) صرف نظر کنیم

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

- در مدل سازی سیستم کروی در جهت r ، در صورت وجود مشتق دوم نسبت به r باید یکی از عبارات زیر وجود داشته باشد:

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}$
- $r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\dfrac{\partial u}{\partial r}$
- $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$
- $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$

- در معادله حالت پایدار غلظت ماده واکنش دهنده در کاتالیست یا انتقال گرما برای پره هایی با مقطع متغیر بروش زیر عمل می کنیم:

- $x = 0 \Rightarrow k_0(0) \to \infty \Rightarrow C_2 = 0$ و $C_1 \neq 0$
- حالت کلی : $C_1 I_0(ax^{\beta}) + C_2 k_0(ax^{\beta})$ یا $C_2 k_0\left(r\sqrt{k/D}\right) + C_1 I_0\left(r\sqrt{k/D}\right)$

کاه سری فوریه :

- سری فوریه $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

- اگر تابع زوج باشد، b_n صفر است.
- اگر تابع فرد باشد، a_0 و a_n صفر است.

- در برخی موارد با انجام اعمال جبری و مثلثاتی می توان سری فوریه را حاصل کرد.

$f(x) = (\sin x + \cos 2x)^2 \quad , \quad -\pi < x < \pi$

$\sin^2 x + \cos^2 2x + 2\sin x\cos 2x = \underbrace{\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \sin 3x - \sin x}_{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)}$

• اگر سری فوریه در نقطه‌ای ناپیوسته باشد برای محاسبه باید میانگین چپ و راست را حساب کرد.

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

$a_0 = 0 \ , \ a_n = 0 \ , \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$ • بسط نیم دامنه سینوسی (فرد)

$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \ , \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \ , \ b_n = 0$ • بسط نیم دامنه کسینوسی (زوج)

• تساوی پارسوال در مواردی که مخرج سری فوریه 2L باشد:

$$\frac{1}{L}\|f\|^2 = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\rightarrow \|f\| = \left[\int_a^b f(t)^2\,dt\right]^{1/2}$$

✓• مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه:

هرگاه f' در بازه $[-L, L]$ قطعه‌ای پیوسته و $f(-L) = f(L)$ باشد:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}t + b_n \sin \frac{n\pi}{L}t\right)$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L}\left(-a_n \sin \frac{n\pi}{L}t + b_n \cos \frac{n\pi}{L}t\right)$$

$$\int_0^t f(t)\,dt = a_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{\pi n}\left(a_n \sin \frac{n\pi}{L}t - b_n \cos \frac{n\pi}{L}t\right) \rightarrow$$ برای توابع متناوب

✓• سری فوریه مختلط:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$\checkmark\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}t} \qquad \checkmark\ c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t) e^{-\frac{in\pi}{L}t}\,dt$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

✓• انتگرال فوریه:

- تابع غیرمتناوب

$$\checkmark\ f(t) = \int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right] d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

- انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی :

- اندازه صورت تابع نگاه می‌کنیم اگر t در کنار $\sin$ آمده انتگرال سینوسی و اگر t در کنار $\cos$ آمده ، انتگرال کسینوسی است .

- $f(t) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t \, d\omega$

  $A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt$

- $f(t) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega t \, d\omega$

  $B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$

- تبدیل فوریه :

- $F\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
- $F^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$
- $F_c\{f(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt$ — تبدیل فوریه کسینوسی
- $F_s\{f(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$ — تبدیل فوریه سینوسی

- خواص تبدیل فوریه :

- $F\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\omega/a)$
- $F\{e^{iax} f(t)\} = F(\omega - a)$
- $F\{f(t-a)\} = e^{-ia\omega} F(\omega)$
- $F\{t^n f(t)\} = i^n F^{(n)}(\omega)$

- نرم تابع :

- $\| f \| = \left[\int_a^b f^2(t) \, dt \right]^{1/2}$

- مجموعه‌های $\{1, \cos \frac{n\pi}{l}\}$ ، $\{\sin \frac{n\pi}{l}\}_{n=1}^{\infty}$ روی فاصله $[-\pi, \pi]$ متعامدند .
- مجموعه‌های $\{\sin \frac{2n\pi}{l} t\}$ و $\{1, \cos \frac{2n\pi}{l} t\}$ روی فاصله $[0, \pi]$ متعامدند .

• تعامد چندجمله‌ای لژاندر :

- چندجمله لژاندر در بازه [-1,+1] متعامدند .

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ \frac{2}{2n+1} & n = 1 \end{cases}$$

- توابع متعامد :

$$\bullet\ \langle \varphi_n , \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0$$

نکته : مقادیر معادله دیفرانسیل $y'' + \lambda y = 0$ برابر است با :

الف) هرگاه $y(0) = y(L) = 0$ یا $y'(0) = y'(L) = 0$ باشد بصورت $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ است .

ب) هرگاه $y(0) = y'(L) = 0$ یا $y'(0) = y(L) = 0$ باشد بصورت $\lambda_n = \left(\frac{2n \pm 1}{2L}\pi\right)^2$ است .

• معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول :

① $P\,\partial z/\partial x + Q\,\partial z/\partial y = R \rightarrow P z_x + Q z_y = R$

② $dx/P = dy/Q = \frac{dZ}{R}$

$P = x$, $Q = -y$, $R = 0$; $dx/x = dy/-y \rightarrow \ln x = -\ln y + c_1$; $c_1 = xy$

$x\,\partial u/\partial x - y\,\partial u/\partial y = 0 \longrightarrow u = f(x,y)$

- مرتبه دوم :

① $A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + u = G$

- شکل کانونی

② $\Delta = B^2 - 4AC$

1) $\Delta > 0 \rightarrow$ هذلولی‌گون

2) $\Delta = 0 \rightarrow$ سهمی‌گون

3) $\Delta < 0 \rightarrow$ بیضی‌گون

1) معادلات هذلولی‌گون : (Z_{xy})

2) معادلات سهمی‌گون : (Z_{yy})

3) معادلات بیضی‌گون : (Z_{xx})

- شرایط مرزی :

- تعداد شرایط مرزی لازم مربوط به یک متغیر مستقل عبارت است از مرتبه معادله دیفرانسیل نسبت به آن متغیر

- تعداد شرایط اولیه لازم عبارت است از مرتبه معادله دیفرانسیل نسبت به زمان

مثال) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\,\partial u/\partial t$ ← دو شرط مرزی و یک شرط اولیه لازم است

- شرط مرزی نوع اول $T(0,t) = t_s$ ← همگن نوع اول در $x_{(0)} = 0$
- شرط مرزی نوع دوم $\partial T/\partial x|_{x=0}$ ← همگن نوع دوم در $x_{(0)} = 0$
- شرط مرزی نوع سوم $\partial T/\partial x|_{x=L}$

نکته: برای تعیین جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (معادله رسانا):

1) هرگاه دو شرط مرزی از نوع اول یا هر دو از نوع دوم باشد مقادیر ویژه $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ و هرگاه یکی از شرایط مرزی نوع اول و دیگری نوع دوم باشد، مقادیر ویژه $\lambda_n = \frac{2n\pm1}{2L}\pi$ می‌باشند.

2) هرگاه شرط مرزی در $x_{(0)} = 0$، همگن نوع اول باشد تابع ویژه بصورت $\sin \lambda_n x$ و هرگاه شرط مرزی در $x_{(0)}$ همگن نوع دوم باشد، بصورت $\cos \lambda_n x$ است.

3) هرگاه $t \to \infty$ آنگاه مقدار θ بالا مقدار محدودی است و باید توان e منفی باشد.

4) هرگاه شرایط مرزی بصورت $T(0,t) = A$ و $T(L,t) = B$ آنگاه جواب $A + \frac{B-A}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} \cdots$

نکته: برای تعیین جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ [معادله لاپلاس (گرمای پایا)]:

1) در این گونه معادلات ابتدا با تغییر متغیر $\theta = T - T_0$ نوع شرایط مرزی را از نظر همگن و غیرهمگن بودن تعیین می‌کنیم

2) $d_1 e^{\lambda_n z} + d_2 e^{\lambda_n z}$ یا $c_1 \sinh \lambda_n z + c_2 \cosh \lambda_n z$: جهت همگن z

جهت ناهمگن z : $c_1 \sin \lambda_n z + c_2 \cos \lambda_n z$

در شرایطی که شرایط مرزی همگن باشد ($z = 0$) در جواب معادله شاهد $\sinh$, $\cosh$ هستیم در صورتی که شرایط مرزی ناهمگن باشد ($z \neq 0$) در جواب معادله شاهد $\sin$ و $\cos$ هستیم

$T_0 \neq T_\infty$

3) در تغییر متغیر $\theta = T - T_0$ ، $T_\infty = 0$ می‌شود.

4) برای حل معادلات لاپلاس (گرما در حالت پایا) باید حداقل یک شرط ناهمگن وجود داشته باشد.

• حل معادلات با روش ترکیب متغیرها:

- برای حل معادله دیفرانسیل جزئی $\partial u/\partial t = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ از تغییر متغیر $\eta = \frac{x}{\sqrt{m \alpha t}}$ استفاده کرده و به معادله دیفرانسیل معمولی $u'' + \frac{m}{2}\eta u' = 0$ می‌رسیم.

✓ $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}} \rightarrow m = 1 , \alpha = 1$

نکته: مناسب‌ترین روش برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی متغیر با زمان روش لاپلاس و دیگری روش ترکیب متغیرها می‌باشد.

• مسائل مقدار مرزی (BVP) و مقدار اولیه (IVP):

- هرگاه مقدار تابع در دو نقطه داده شود، مسائل شرط مرزی (BVP) است.

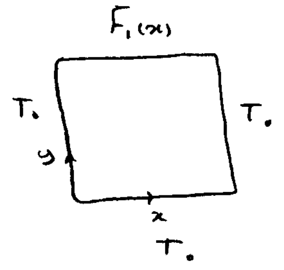
- برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه، می‌توان از روش‌های تیلور، اویلر و رانگ کوتا استفاده کرد.

- برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی می‌توان از روش‌های تفاضل محدود و تیراندازی (Shooting) استفاده کرد.

- برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی یا شرایط اولیه می‌توان از روش‌های لاپلاس و ترکیب متغیرها و... استفاده کرد.

*نکته: هرگاه در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مقدار $t = \infty$ یا $R = \infty$ یا محدود $t = R =$ در آن صورت توان e باید مثبت گردد و اگر شرط $\theta = x = 0$ نیز وجود داشته باشد جواب حاصل به صورت Sin خواهد بود.

*نکته: هرگاه در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مقدار $t = R \rightarrow \infty$ آنگاه توان e باید منفی گردد و اگر شرط $\theta = x = 0$ وجود داشت جواب به صورت Sin و اگر $\frac{d\theta}{dx}_{x=0} = 0$ به صورت Cos خواهد بود.



• سه شرط از شرایط مرزی همگن و تنها یکی از شرایط ناهمگن است.
در جهت x شرط مرزی ناهمگن است؛ بنابراین جواب باید شامل Sin یا Cos باشد و در جهت y همگن است و جواب شامل Sinh و Cosh است.