فصل پنجم - پیچش

Figure: 05-01-COC
The torsional stress and angle of twist of this soil auger depend upon the output of the machine turning the bit as well as the resistance of the soil in contact with the shaft.

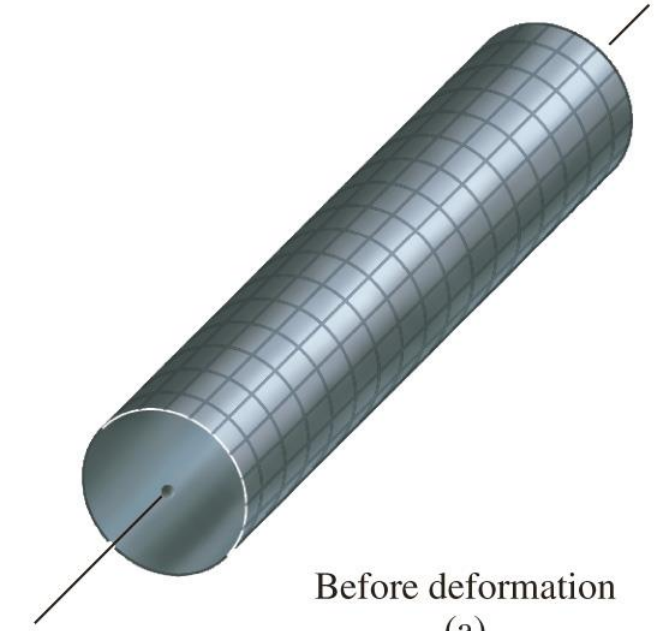
Copyright ©2011 Pearson Education, publishing as Prentice Hall

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

خرابی های پیچشی

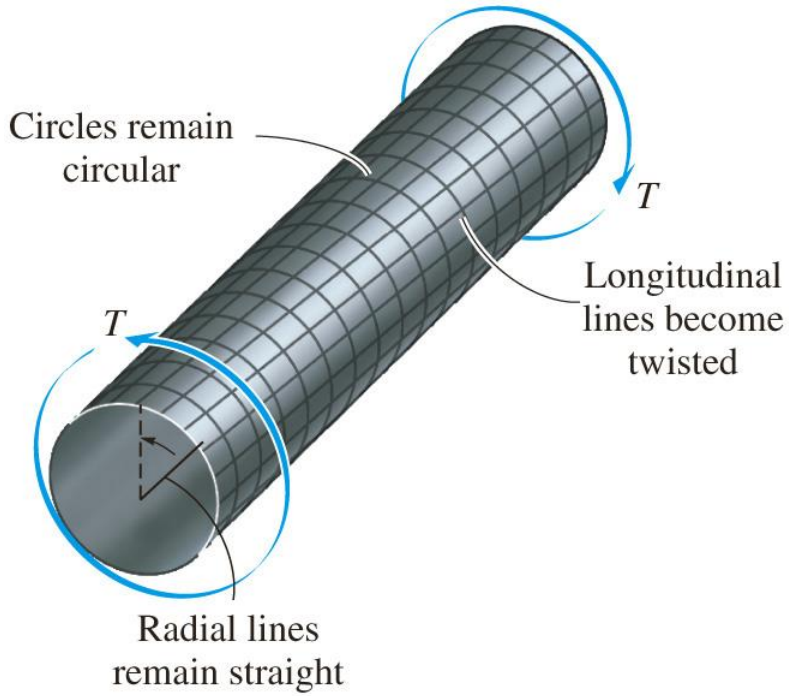
تهیه: میلاد نادری - lecturenote.blog.ir

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

یادآوری: بارهای خارجی، (T)، بارهای داخلی را بوجود می آورند که آنها سبب ایجاد تغییر شکل، کرنش و تنش می گردند.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

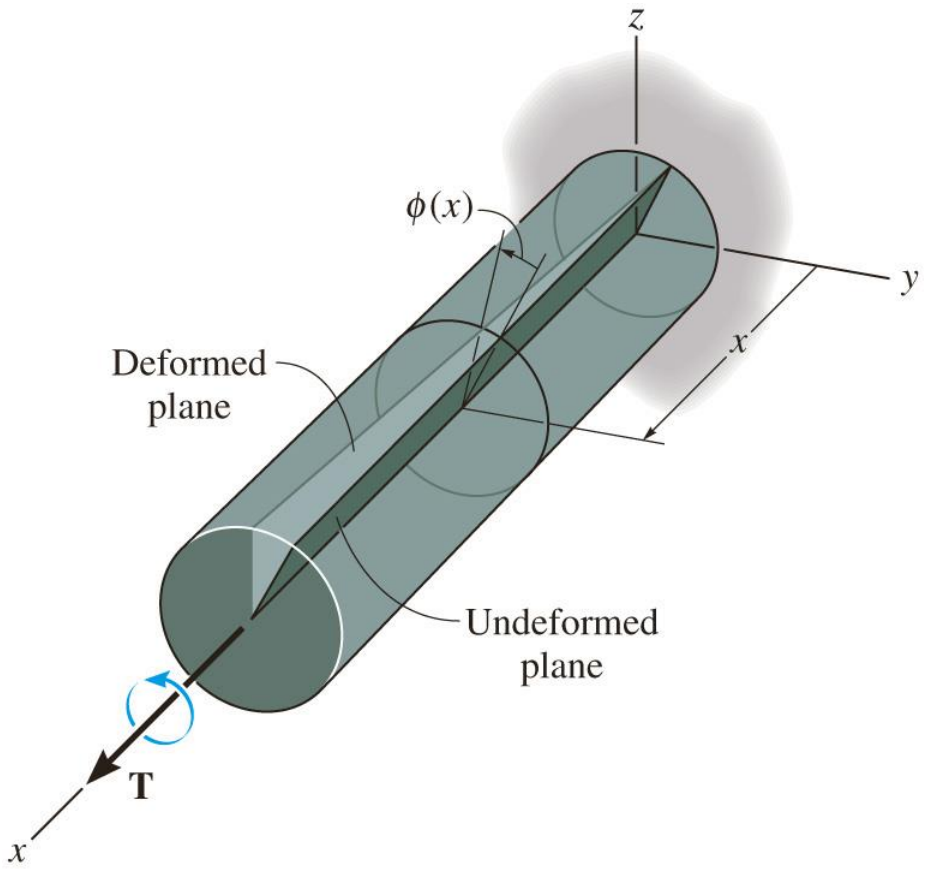
قبل از اعمال گشتاور

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

پس از اعمال گشتاور

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

۵-۱: تغییر شکل پیچشی یک محور دایره ای



The angle of twist $\phi(x)$ increases as x increases.

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

زاویه پیچش = $\phi(x)$

این زاویه به صورت خطی در امتداد طول محور تغییر می کند

0 در $x = 0$

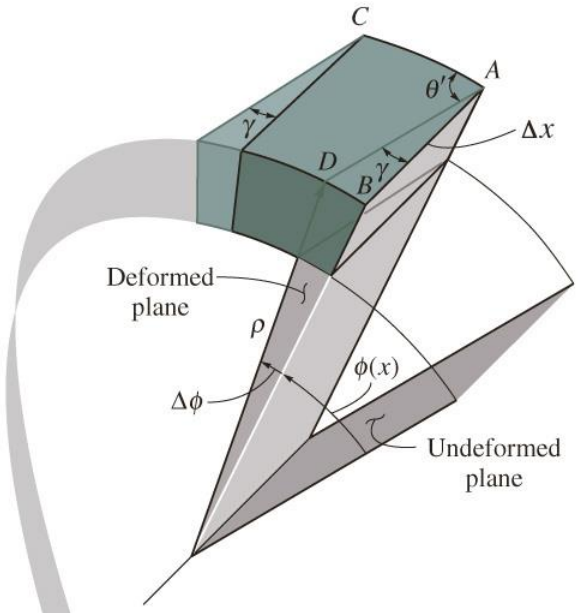
max در $x = L$

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

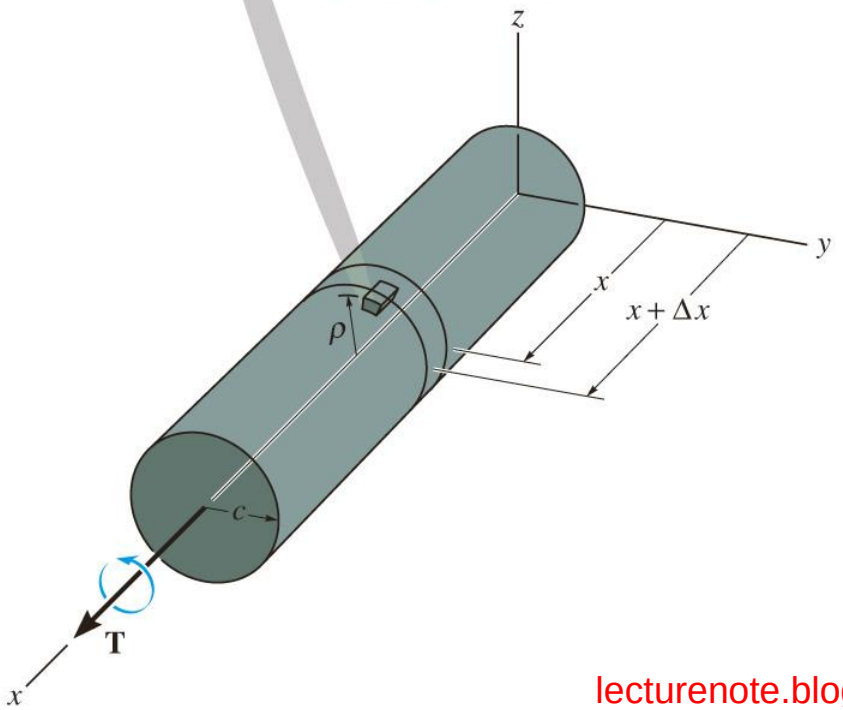
یادآوری:

γ = کرنش برشی (rad)

$$\gamma = \frac{\rho \Delta \phi}{\Delta x} = \rho \frac{d\phi}{dx}$$



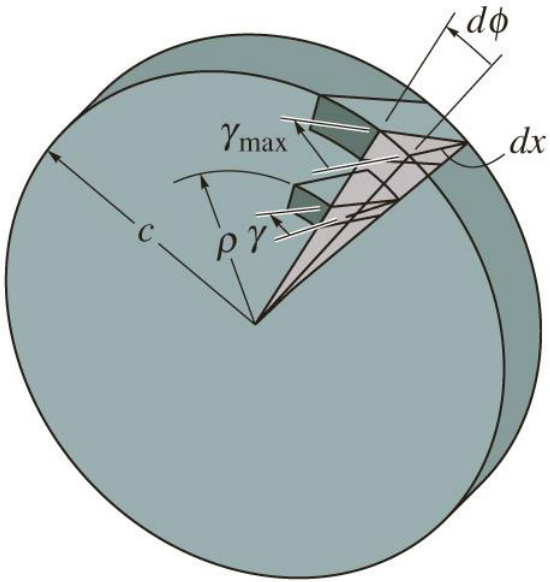
Shear strain of element



توجه کنید که کرنش برشی (γ) به صورت خطی با فاصله شعاعی (ρ) تغییر می کند و مقدار آن روی سطح خارجی بیشینه است.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



The shear strain for the material increases linearly with ρ, i.e., $\gamma = (\rho/c)\gamma_{max}$

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

توجه کنید که کرنش برشی (γ) به صورت خطی با فاصله شعاعی (ρ) تغییر می کند و مقدار آن روی سطح خارجی بیشینه است.

فاصله از مرکز تا نقطه مورد نظر

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right)\gamma_{max}$$

فاصله از مرکز تا رویه خارجی (شعاع خارجی)

مطالبی که تاکنون آموختیم:

- ϕ = زاویه پیچش است که از صفر در تکیه گاه ثابت تا مقدار ماکزیممم در انتها تغییر می کند.
- γ = کرنش برشی است که از صفر در مرکز تا مقدار ماکزیممم در رویه خارجی می کند.

تهیه: میلاد نادری - lecturenote.blog.ir

در مورد تنش ....

- تغییر شکل ⇔ کرنش
- کرنش⇔ تنش

- اگر تغییر شکلی درجسم مشاهده کردید، تنش نیز وجود دارد.
- در مسائل پیچش، تنش از نوع تنش برشی است!!

تهیه: میلاد نادری - lecturenote.blog.ir

۵-۲: فرمول پیچش

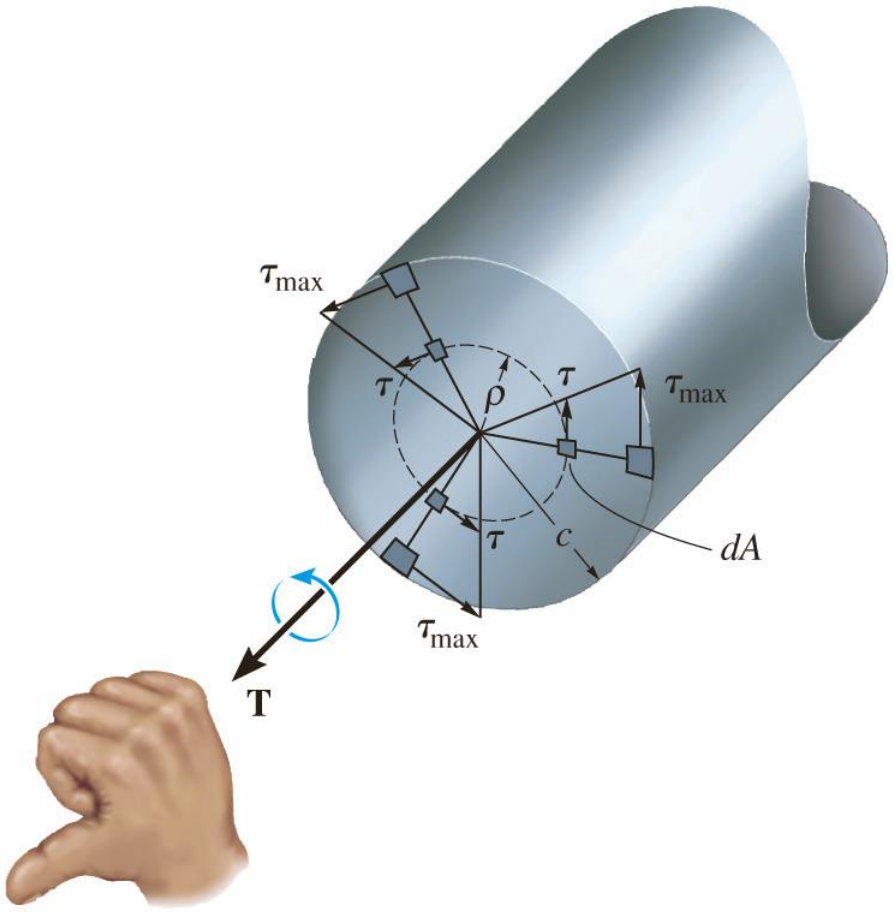
در ناحیه الاستیک خطی، مشابه قانون هوک در برش خواهیم داشت:

$$\tau = G\gamma$$

G= مدول یانگ برشی

بنابراین تنش رفتاری مشابه کرنش دارد.

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{\max}$$



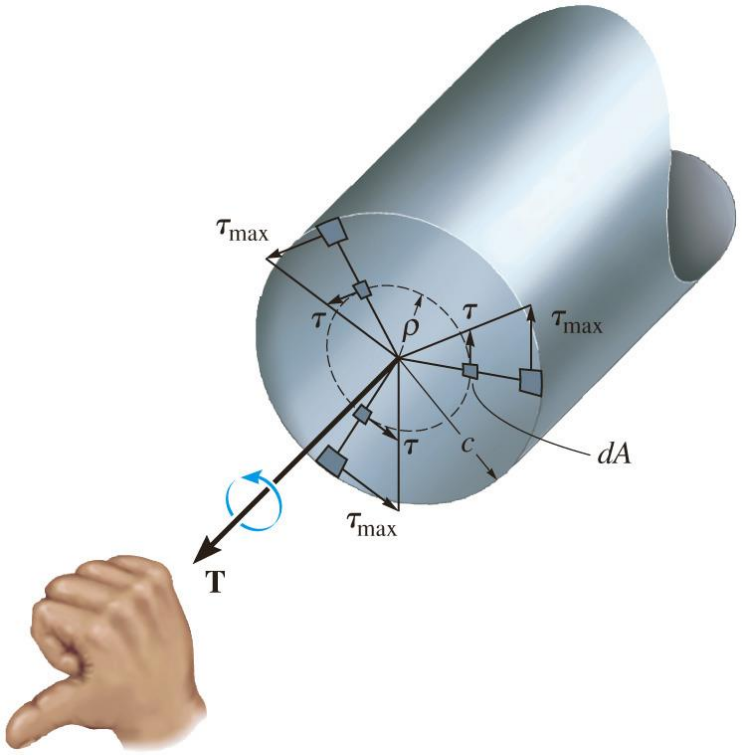
Shear stress varies linearly along each radial line of the cross section.

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

استخراج رابطه تنش برشی ناشی از پیچش با استفاده از بالانس گشتاور ساده

گشتاور تولید شده ناشی از توزیع تنش روی کل سطح مقطع باید با گشتاور برآیند داخلی برابر باشد



Shear stress varies linearly along each radial line of the cross section.

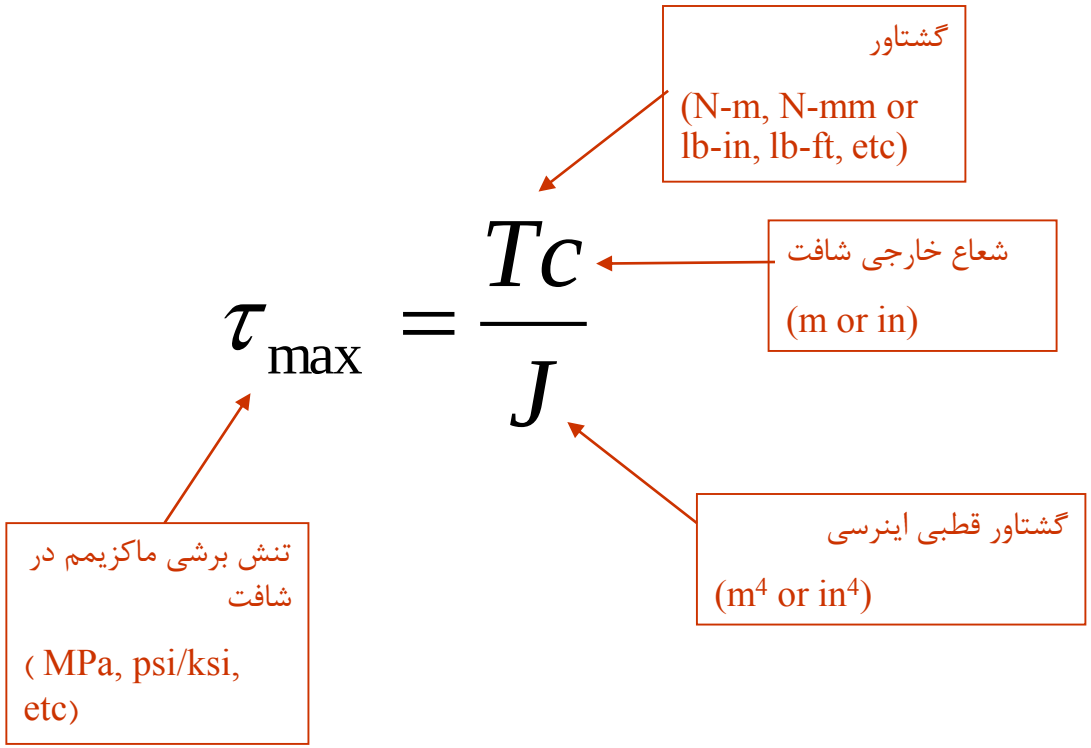
Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$T = \int_A \rho(\tau dA) = \int_A \rho\left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{max}\, dA$$

$$T = \frac{\tau_{max}}{c}\int_A \rho^2 dA$$

این عبارت گشتاور قطبی اینرسی J است که خاصیتی از سطح مقطع می باشد.

فرمول پیچش:



$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

گشتاور قطبی اینرسی = J

- محور تو خالی

$$J = \frac{\pi}{2}\left(c_o^4 - c_i^4\right)$$

- محور توپر

$$J = \frac{\pi}{2}c^4$$

تهیه: میلاد نادری - lecturenote.blog.ir

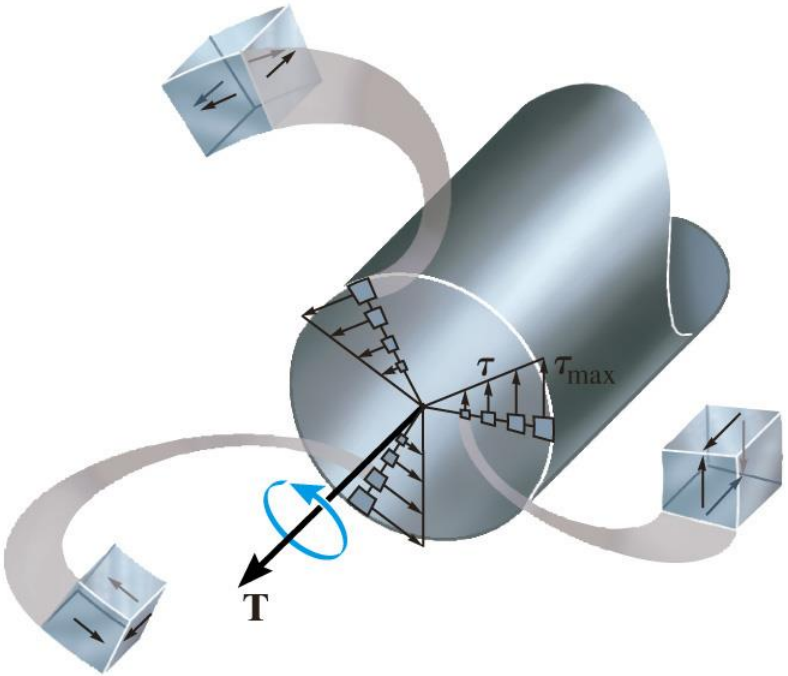
پروفیل های تنش

پروفیل تنش برشی

شما باید موارد زیر را درک کنید:

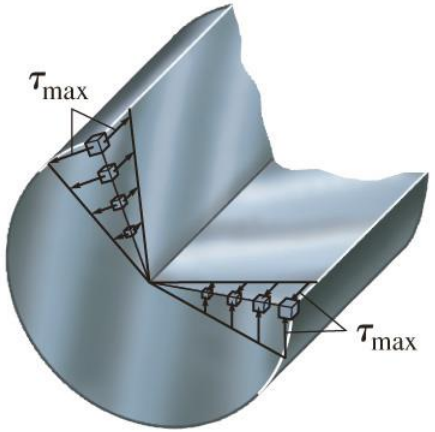
کجا تنش برشی بیشینه است؟

تنش برشی در امتداد طول و شعاع چگونه تغییر میکند؟



(a)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



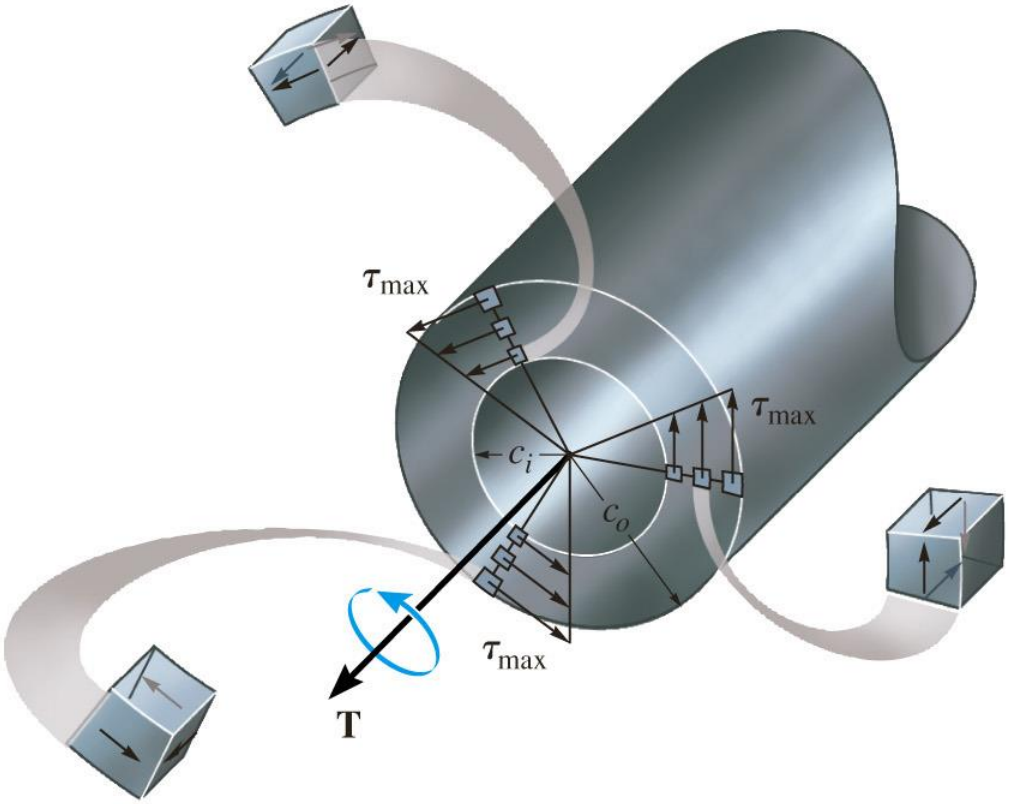
تنش برشی به صورت خطی در امتداد هر خط شعاعی از سطح مقطع تغییر می کند.

(b)

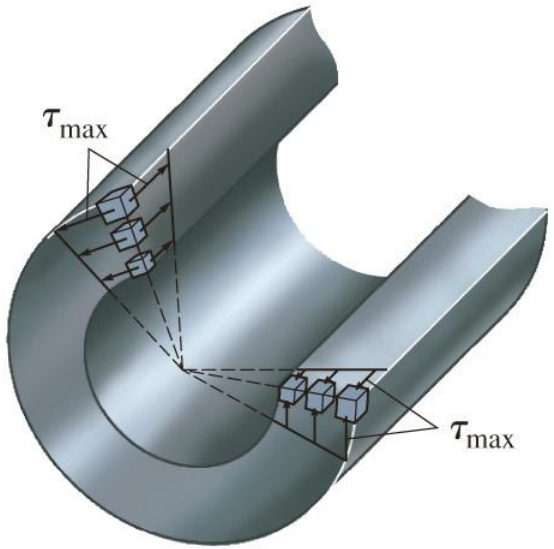
Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

پروفیل های تنش



(a)



(b)

تنش برشی به صورت خطی در امتداد هر خط شعاعی از سطح مقطع تغییر می کند.

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

مثال ها:

1. تحلیل: $\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$ می خواهیم $\tau_{allow} >>$

2. طراحی: $\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{allow}}$ یافتن هندسه (سطح مقطع)

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

EXAMPLE 5.3

The shaft shown in Fig. 5–12*a* is supported by two bearings and is subjected to three torques. Determine the shear stress developed at points *A* and *B*, located at section *a*–*a* of the shaft, Fig. 5–12*b*.

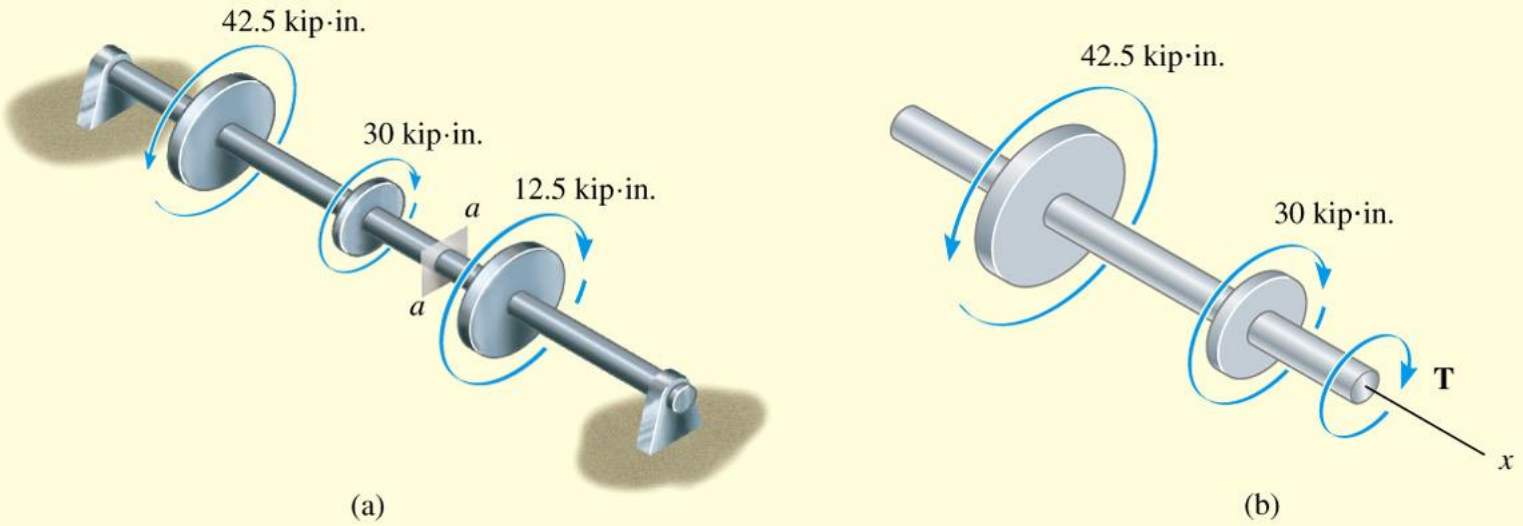


Fig. 5–12

Solution

Internal Torque. The bearing reactions on the shaft are zero, provided the shaft's weight is neglected. Furthermore, the applied torques satisfy moment equilibrium about the shaft's axis.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

The internal torque at section a–a will be determined from the free-body diagram of the left segment, Fig. 5–12b. We have

$$\Sigma M_x = 0; \quad 42.5 \text{ kip} \cdot \text{in.} - 30 \text{ kip} \cdot \text{in.} - T = 0 \qquad T = 12.5 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

Section Property. The polar moment of inertia for the shaft is

$$J = \frac{\pi}{2}(0.75 \text{ in.})^4 = 0.497 \text{ in}^4$$

Shear Stress. Since point A is at $\rho = c = 0.75$ in.,

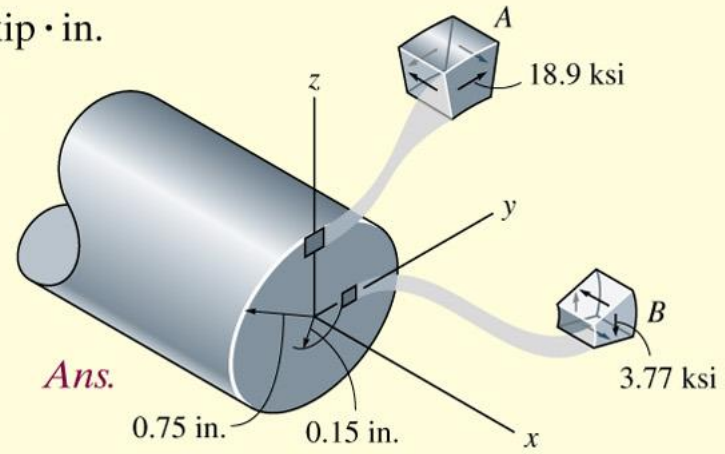
$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(12.5 \text{ kip} \cdot \text{in.})(0.75 \text{ in.})}{(0.497 \text{ in}^4)} = 18.9 \text{ ksi}$$ *Ans.*

Likewise for point B, at $\rho = 0.15$ in., we have

$$\tau_B = \frac{T\rho}{J} = \frac{(12.5 \text{ kip} \cdot \text{in.})(0.15 \text{ in.})}{(0.497 \text{ in}^4)} = 3.77 \text{ ksi}$$ *Ans.*

The directions of these stresses on each element at A and B, Fig. 5–12c, are established from the direction of the resultant internal torque **T**, shown in Fig. 5–12b. Note carefully how the shear stress acts on the planes of each of these elements.

Fig. 5–12



(c)

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

EXAMPLE 5.4

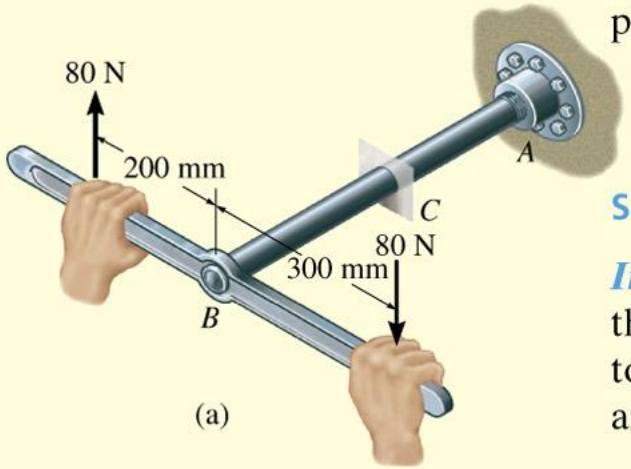


Fig. 5–13

The pipe shown in Fig. 5–13*a* has an inner diameter of 80 mm and an outer diameter of 100 mm. If its end is tightened against the support at *A* using a torque wrench at *B*, determine the shear stress developed in the material at the inner and outer walls along the central portion of the pipe when the 80-N forces are applied to the wrench.

Solution

Internal Torque. A section is taken at an intermediate location *C* along the pipe's axis, Fig. 5–13*b*. The only unknown at the section is the internal torque **T**. Force equilibrium and moment equilibrium about the *x* and *z* axes are satisfied. We require

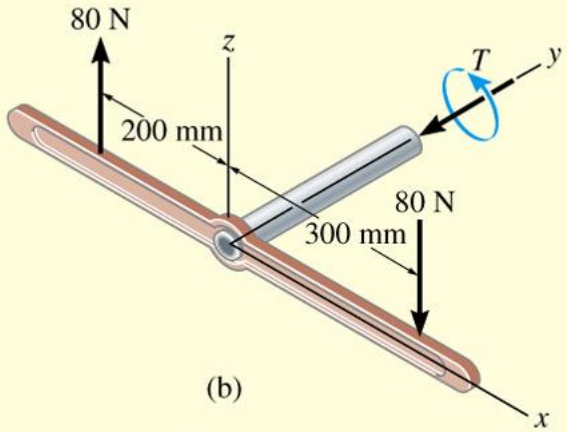
$$\Sigma M_y = 0; \qquad 80\ \text{N}(0.3\ \text{m}) + 80\ \text{N}(0.2\ \text{m}) - T = 0$$

$$T = 40\ \text{N}\cdot\text{m}$$

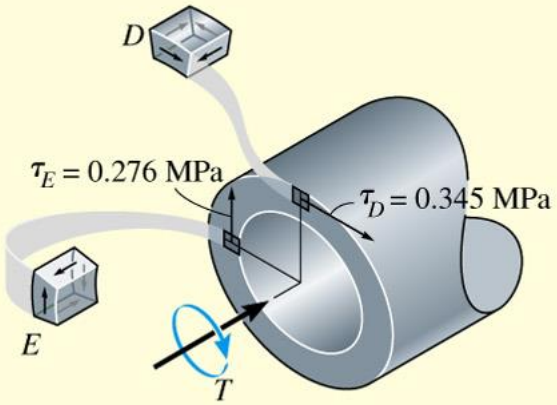
Section Property. The polar moment of inertia for the pipe's cross-sectional area is

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.05\ \text{m})^4 - (0.04\ \text{m})^4] = 5.80(10^{-6})\ \text{m}^4$$

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری



(b)



(c)

Fig. 5–13

Shear Stress. For any point lying on the outside surface of the pipe, $\rho = c_o = 0.05$ m, we have

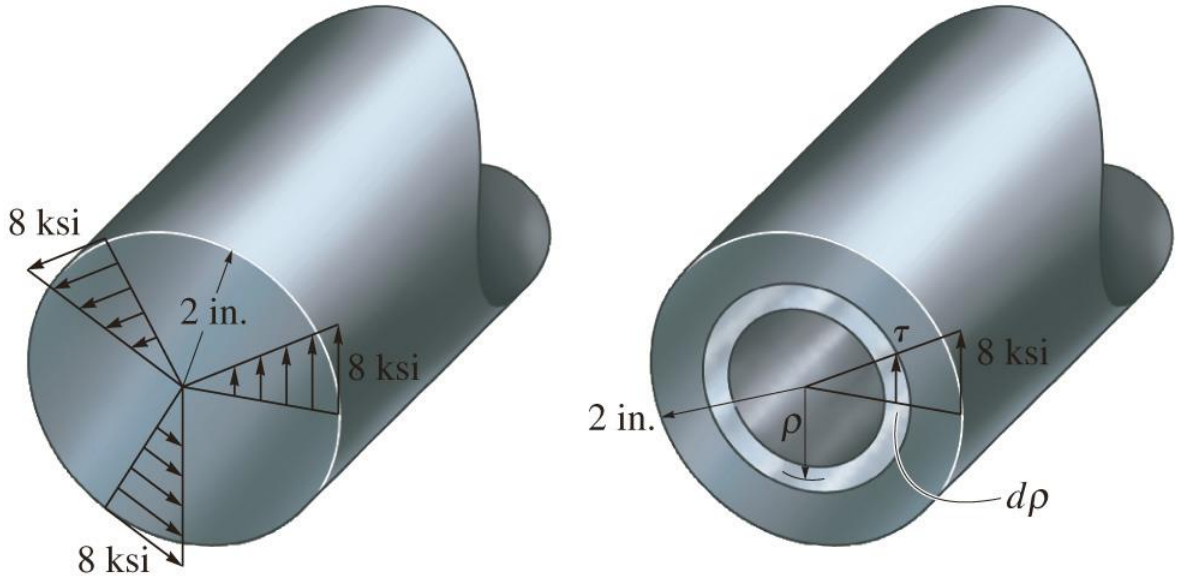
$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40\ \text{N}\cdot\text{m}(0.05\ \text{m})}{5.80(10^{-6})\ \text{m}^4} = 0.345\ \text{MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

And for any point located on the inside surface, $\rho = c_i = 0.04$ m, so that

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40\ \text{N}\cdot\text{m}(0.04\ \text{m})}{5.80(10^{-6})\ \text{m}^4} = 0.276\ \text{MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

To show how these stresses act at representative points D and E on the cross-sectional area, we will first view the cross section from the front of segment CA of the pipe, Fig. 5–13*a*. On this section, Fig. 5–13*c*, the resultant internal torque is equal but opposite to that shown in Fig. 5–13*b*. The shear stresses at D and E contribute to this torque and therefore act on the shaded faces of the elements in the directions shown. As a consequence, notice how the shear-stress components act on the other three faces. Furthermore, since the top face of D and the inner face of E are in stress-free regions taken from the pipe's outer and inner walls, no shear stress can exist on these faces or on the other corresponding faces of the elements.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری



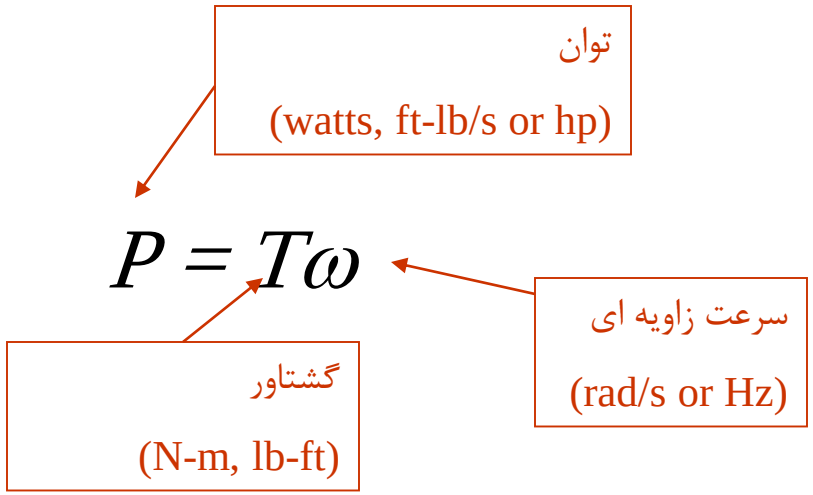
(a) (b)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

۵-۳: انتقال توان

- مطلب جدیدی نیست. تنها گشتاور T را از معادله توان محاسبه می کنیم.



توجه : 1 hp = 550 ft-lb/s

$$\omega = 2\pi f$$

f = Hz یا rev/s

مثال (سیستم انگلیسی)

- یک موتور الکتریکی که در دور ۱۰ هرتز میچرخد، توانی معادل ۵ اسب بخار را از طریق شافت منتقل میکند. مطلوبست محاسبه گشتاور در شافت.
- حل:

5 hp (550 ft-lb/s/hp) = 2,750 ft-lb/s 10 Hz (2π rad/rev) = 62.83 rad/s

- $P = T\omega$

$$T = \frac{2750 \text{ ft-lb/s}}{62.83 \text{ rad/s}} = 43.76 \text{ lb-ft}$$

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

مثال (سیستم SI)

- یک موتور الکتریکی که در دور ۱۰ هرتز میچرخد، توانی معادل ۵۰۰ وات را از طریق شافت منتقل میکند. مطلوبست محاسبه گشتاور در شافت.
- حل:

10 Hz (2π rad/rev) = 62.83 rad/s

- $P = T\omega$

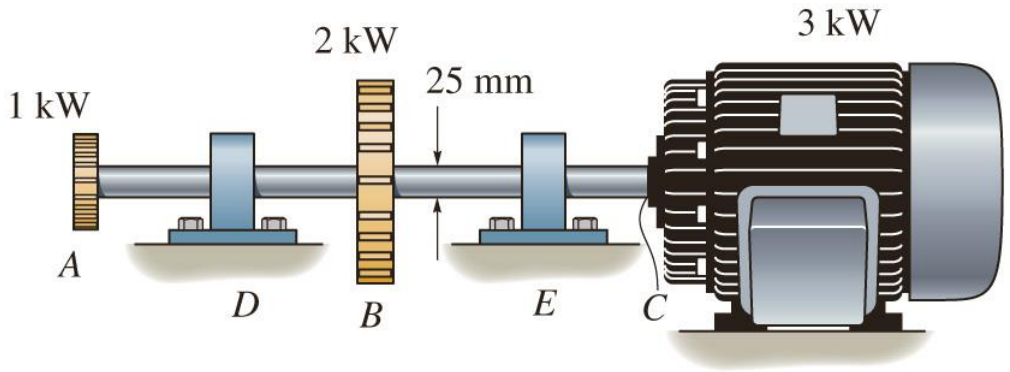
$$T = \frac{500 \text{ N-m/s}}{62.83 \text{ rad/s}} = 7.96 \text{ N-m}$$

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری

تمرین: مسئله ۵-۳۹ کتاب: تنش را در سرتاسر شافت نشان داده شده بیابید.

فرکانس موتور ۵۰ دور بر ثانیه است.

اگر چرخ دنده ها در نقاط B و A حذف شوند، به ترتیب ۲ و ۱ کیلووات توان در نقاط B و A وجود دارد.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

مراحل:

۱. گشتاور را در سرتاسر شافت بیابید.

۲. تنش را سپس در سرتاسر شافت محاسبه کنید

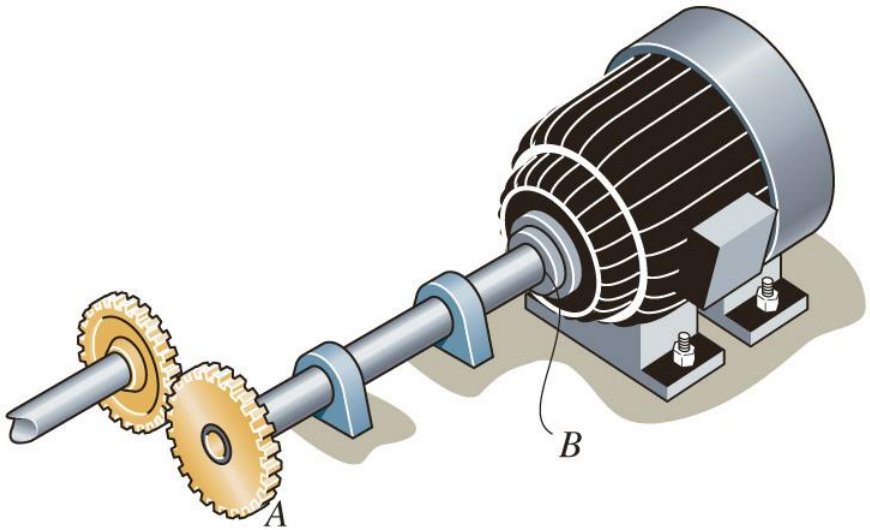
تهیه: میلاد نادری - lecturenote.blog.ir

مسئله ۵-۴۲: موتور ۵۰۰ اسب بخار را به شافت فولادی توخالی AB با قطر داخلی ۱,۸۴ اینچ و قطر بیرونی ۲ اینچ تحویل می دهد. مطوبست کمترین سرعت زاویه ای شافت ($\tau_{allow} = 25\ ksi$)

مراحل:

۱) گشتاور مجاز را بیابید.

۲) سرعت زاویه ای را با استفاده از $P = T\omega$ *بیابید*.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

lecturenote.blog.ir - تهیه: میلاد نادری