

1- با استفاده از قضیه مانده ها. انتگرال های زیر را به دست آورید.

(a)

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^c + 1}$$

$$2) \int_0^{\infty} \frac{x^c dx}{(x^c + 1)(x^c + 4)}$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^c + 1)^r}$$

$$1) \int_0^{\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^r}$$

$$, \frac{a\pi}{(a^2 - b^2)^{c/r}}$$

$$2) \int_0^{\pi} \frac{\cos r x dx}{1 - 2a \cos x + a^2}$$

$$, \frac{a^r \pi}{1 - a^2}$$

$$3) \int_0^{\pi} \sin^{2n} x dx$$

$$, \frac{(2n)!}{r^{2n} (n!)^2} \pi$$

(b)

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x+a^2)(x+b^2)} \quad , \quad \frac{\pi}{a^2 b^2} \left( \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right) \quad (c)$$

$$2) \int_0^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + c} \, dx \quad , \quad \frac{\pi}{c} \exp(-2\sqrt{c})$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \quad (d)$$

۲- فرض کنید  $m$  و  $n$  اعداد صحیح باشند که  $0 < m < n$  فرمول اشتراک زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{x^n + 1} \, dx = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{m+1}{n}\pi\right)}$$

الف) نشان دهید صفرهای صند جمله  $z^n + 1$  نقاط واقع در بالای محور حقیقی عبارتند از:

$$c_k = \exp\left(i \frac{(k+1)\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ب) نشان دهید که:

$$\text{Res}_{z=c_k} \frac{z^m}{z^n + 1} = -\frac{1}{n} \exp(i(k+1)\alpha)$$

$$\alpha = \frac{m+1}{n} \pi$$

$c_k = z^n + 1$  صفرهای صند جمله

پا با استفاده از فرمول مجموع جیبی  $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$  رابطه زیر را بدست آورید:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}_{z=c_k} \frac{z^m}{z^n + 1} = \frac{1}{ni} \frac{\pi}{n \sin \alpha}$$

ت) با عبارت بدست آمده حاصل اشتراک را بدست آورید.