جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان دانش آموزی شهر تهران
خانه ریاضی تهران

# آزمون انتخابی هجدهمین دوره مسابقات جهانی ریاضی
# IMC 2016

## دفترچه سوال و پاسخ مرحله دوم

ویژه دانش‌آموزان پایه‌های نهم، دوم و سوم دبیرستان

**(متولدین ۱۰ مرداد ۱۳۷۸ به بعد)**

**اردیبهشت ماه ۱۳۹۵**

**مدت زمان پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه**

**لطفاً پاسخ نهایی هر سوال را در پاسخ برگ وارد کنید.**
استفاده از ماشین‌حساب، تبلت، تلفن همراه و هر گونه وسیله الکترونیکی ممنوع است.

**دوره‌های آمادگی آزمون انتخابی مرحله دوم مسابقات جهانی IMC**
علاوه بر منابع معرفی شده شامل مجموعه سوالات مسابقات جهانیIMC در قالب کتاب و نرم‌افزار، دوره‌های آمادگی مرحله دوم مسابقات جهانی IMC، به منظور ایجاد عدالت آموزشی، آماده‌سازی دانش‌آموزان منتخب مرحله‌ی اول و نزدیک کردن سطح علمی دانش‌آموزان به سطح سوالات مرحله دوم و مسابقه جهانی برگزار می‌گردد.
دانش‌آموزان منتخب مرحله اول و علاقه‌مند به شرکت در دوره‌های آمادگی می‌توانند از زمان اعلام نتایج، به سایت خانه ریاضی تهران مراجعه و از نحوه‌ی فرایند ثبت‌نام دوره‌ها آگاه شوند و یا با شماره تماس‌های دبیرخانه علمی و اجرایی تماس حاصل نمایند.
**زمان ثبت‌نام دوره‌های آمادگی:**هفته آخر اسفندماه ۱۳۹۳
**زمان برگزاری دوره‌های آمادگی:**۱۶ فروردین‌ماهالی۱۶ اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۴
**زمان اعلام نتایج آزمون انتخابی مرحله اول: هفته آخر اسفندماه ۹۳ از طریق سایت خانه ریاضی تهران**
**زمان و محل برگزاری آزمون انتخابی مرحله دوم: جمعه ۱۸ اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۴ به صورت متمرکز در شهر تهران**
**مراحل بعدی گزینش متناسب با نتیجه آزمون مرحله دوم، متعاقبا اعلام خواهد شد**

### سوالات پاسخ کوتاه

خانه ریاضی تهران: میدان فاطمی، خیابان شهید گمنام، خیابان پیروزه، کوچه رادافزون پلاک ۷۴
تلفن:۸۸۹۷۲۸۱۷/۸۸۹۷۱۷۵۱/۸۸۹۶۰۲۶۴/۸۸۹۶۰۷۳۹(۰۲۱)
سامانه پیامکی: ۵۰۰۰۲۲۶۳۴۳۰
WWW.Mathhome.ir
Telegram.me/Mathhome

**ممکن است در حل سوال ها به رابطه اویلر احتیاج پیدا کنید: در مثلث ABC با شعاع دایره محاطی $r$ و شعاع دایره محیطی $R$ داریم $OI^2 = R(R-2r)$ که $O$ مرکز دایره محیطی مثلث است و $I$ مرکز دایره محاطی مثلث است.**

**۱. تعدادی مربع به ضلع ۲ در مربعی به ضلع ۲۱ قرار گرفته‌اند. مربع های به ضلع ۲ را مربع های کوچک و مربع به ضلع ۲۱ را مربع بزرگ می نامیم. اضلاع مربع ها موازی اضلاع مربع اصلی هستند. می‌دانیم مرکز هیچ مربع کوچکی درون مربع کوچک دیگر نیست. حداکثر تعداد مربع‌ها چند تا است؟(این امکان وجود دارد که محیط مربع های کوچک روی محیط مربع بزرگ باشد اما می دانیم مربع های کوچک از مربع بزرگ بیرون نزده اند و همچنین ممکن است مرکز یک مربع کوچک روی محیط مربع کوچک دیگر باشد)**

حل: جواب ۴۰۰

۴۰۰ تا. اولا کافی است مربع ۲۱ در ۲۱ را شبکه بندی کنید و روی همه نقاط شبکه ای درون مربع بزرگ ، مرکز یک مربع را قرار دهید. هم چنین نمی توان بیش از این مقدار قرار داد. کافی است همه مربع های کوچک را پاک کنید و صرفا مرکز مربع های کوچک را حفظ کنید و حول هر نقطه مربعی به ضلع ۱ بزنید. این مربع ها درون مربعی به مساحت ۲۰ در ۲۰ جای می گیرند و در نتیجه تعدادشان حداکثر ۴۰۰ تا است(کافی است مساحت کل مربع ها را در نظر بگیرید). تمام.

**۲.مجموعه‌ای را بد می‌گوییم اگر به شکل $\{x,۲x,۴x\}$ باشد که $x$ عددی طبیعی است. مجموعه‌ای را پاک می‌نامیم اگر اعضای آن از مجموعه $\{۱,۲,۳, ..., ۱۶\}$ انتخاب شده باشند و هم‌چنین زیرمجموعه‌ی بدی نداشته باشد. مجموعه پاکی را قهرمان می‌نامیم اگر تعداد اعضای آن در بین همه مجموعه های پاک، بیشترین مقدار ممکن باشد. چند مجموعه قهرمان وجود دارد؟**

حل : مجموعه های زیر را در نظر بگیرید:

$$\{۱,۲,۴,۸,۱۶\}, \{۳,۶,۱۲\}, \{۵,۱۰\}, \{۷,۱۴\}, \{۹\}, \{۱۱\}, \{۱۳\}, \{۱۴\}, \{۱۵\}$$

اعضای مجموعه های تک عضوی و دو عضوی باید انتخاب شوند. از مجموعه سه عضوی دقیقا یکی باید حذف شود ( سه حالت) و از مجموعه ۵ عضوی هم عدد ۴ باید حذف شود و در نتیجه تنها یک حالت دارد و در نتیجه کلا ۳ حالت وجود دارد.

**۳. برای اعداد طبیعی $a,b$، عدد طبیعی $a$ را مادر $b$ می‌گوییم اگر عدد طبیعی $c$ یافت شود طوری‌که $c^b$ دقیقا $a$ مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد. عددی طبیعی را طلایی می‌نامیم اگر مادر عدد ۸ نباشد و هم‌چنین مادر عدد ۶ هم نباشد. چند عدد طبیعی طلایی وجود دارد که کوچک‌تر مساوی ۱۰۰ باشد؟**

حل : فرض کنید عدد طبیعی $a$ مادر $b$ باشد. فرض کنید $c^b$ دقیقا $a$ مقسوم علیه مثبت داشته باشد و هم چنین داشته باشیم $c = p_۱^{s_۱}...p_k^{s_k}$ در نتیجه باید داشته باشیم $a = (۱+s_۱b)...(۱+s_kb)$ و در نتیجه باقیمانده $a$ بر $b$ برابر با ۱ است. پس اگر عدد طبیعی $a$ مادر $b$ باشد آنگاه باقیمانده $a$ بر $b$ برابر با ۱ است.

حال بالعکس فرض کنید باقیمانده $a$ بر $b$ برابر با ۱ باشد و $a = bk+۱$ باشد آنگاه عدد $۲^{bk}$ دقیقا $a$ مقسوم علیه مثبت دارد. در نتیجه $a$ مادر $b$ است.

در نتیجه عدد طبیعی $a$ مادر $b$است اگر و فقط اگر باقیمانده $a$بر $b$برابر با ۱ است.

در نتیجه اعدادی طلایی هستند که باقیمانده شان بر ۸ و ۶ برابر یک نباشد. در نتیجه ابتدا اعداد غیر طلایی را حساب می کنیم .طبق شمول و عدم شمول این مقدار برابر است با

$$(1+\left\lfloor \frac{99}{8} \right\rfloor)+(1+\left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor)-(1+\left\lfloor \frac{99}{24} \right\rfloor)=$$
$$13+17-5=25$$

در نتیجه تعداد اعداد طلایی برابر با ۷۵ است.

**۴. ۱۱ نفر در مهمانی حضور دارند. بعضی‌ها هم‌دیگر را می‌شناسند (دوست هم هستند) و هم‌چنین آشنایی رابطه‌ای دوطرفه است. هم‌چنین می‌دانیم هر فرد با ۶ نفر دیگر دوست است و هر دو نفر دقیقا ۳ دوست مشترک دارند. یک مثلث دوستی شامل سه نفر است که دو به دو هم را می‌شناسند. چند مثلث دوستی وجود دارد؟**

حل : جواب ۳۳

ابتدا یک نفر را انتخاب می کنیم. می خواهیم ببینیم او در چند مثلث آمده. اگر بخواهد در مثلثی بیاید باید آن دو نفر دوستش باشند. در نتیجه باید ببینیم از بین دوستانش چند نفر با هم دوستند. می دانیم هر دوستش با دقیقا ۳ نفر دیگر از دوستانش دوست است. در نتیجه از بین دوستانش $9=\frac{3*6}{2}$ نفر با هم دوستند. در نتیجه هر نفر در ۹ مثلث آمده. اگر این مقدار را برای همه افراد جمع بزنیم به عدد ۱۱*۹. هم چنین هر مثلث دقیقا سه بار حساب شده و در نتیجه تعداد کل مثلث ها برابر است با ۳۳ تا . در نتیجه جواب برابر ۳۳ است.

**۵. دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۳۶ را در نظر بگیرید که مماس خارجی هستند. هم‌چنین مماس مشترک آن‌ها ترسیم شده است. دایره‌ای بر دو دایره دیگر و خط مورد نظر مماس است. شعاع آن چقدر است؟(توجه: مماس مشترک خارجی مورد نظر از نقطه تماس دو دایره نمی گذرد)**

حل: جواب ۴ و ۳۶

عمود هایی از مراکز دایره ها به خط مورد نظر رسم کنید و هم چنین سه مراکز دایره ها را به هم وصل کنید. در این صورت سه ذوزنقه تشکیل خواهد شد. برای هر کدام از ذوزنقه چون دو زاویه قائمه موجود است می توان رابطه فیثاغورث نوشت که در این صورت با جمعبندی به این نتیجه خواهیم رسید که $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$ که $r_1, r_2$ شعاع دو دایره ای که مماس خارجی شان رسم شده هستند و $r_3$ شعاع دایره ای است که بر دو دایره دیگر و خط مورد نظر مماس است. در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow r_3=4$$

هم چنین ممکن است فردی حالتی را متصور شود که دایره سوم بین دو دایره محصور نباشد که در آن صورت جواب برابر ۳۶ خواهد بود. در نتیجه هر دو جواب ۴ و ۳۶ قابل قبول است.

**۶.فرض کنید آرایش(جایگشتی) از اعداد ۱، ۲و...و۱۳۹۵ دور یک دایره چیده شده اند. سه عدد مجاور هم در این آرایش را یک کپسول می نامیم و طول آن کپسول برابر با تفاضل بزرگترین و کوچکترین عدد در بین این سه عدد تعریف می شود.بزرگترین عدد در بین این ۱۳۹۵ طول کپسول را اندازه آرایش می نامیم. اندازه آرایش حداقل چه عددی می تواند باشد؟**

حل: جواب برابر ۴ است. اولا ۴ تا ممکن است. کافی است اعداد زیر را دور یک دایره بچینیم

۱و۳و۵و...و۱۳۹۳و۱۳۹۵و۱۳۹۴و۱۳۹۲و...و۴و۲

حال ثابت می کنیم که هر آرایشی دارای اندازه حداقل ۴ است. عدد ۱ را در نظر بگیرید. این عدد در ۳ کپسول آمده است که روی هم به غیر از عدد ۱ چهار عدد را تشکیل می دهند. یکی از این اعداد حداقل برابر ۵ است و در نتیجه کپسولی که ۱ و آن عدد در آن قرار دارند طول حداقل ۴ دارد. تمام.

**۷. تعداد چندجمله‌ای‌های درجه سوم $P(x)$ با ضرایب صحیح را بیابید که ضریب بزرگ‌ترین جمله آن ۱ باشد (تکین باشد) و هم‌چنین $P(۰)=-۶۴$ باشد و دارای سه ریشه طبیعی باشد. (ممکن است سه ریشه یکسان هم باشند.) به زبان دیگر بتوان به‌صورت ضرب سه چندجمله‌ای درجه یک با ریشه طبیعی نوشت.**

حل : جواب ۷

شرط مساله معادل است با اینکه ضرب سه ریشه برابر ۶۴ باشد. در نتیجه باید دید به چند طریق ضرب سه عدد طبیعی برابر ۶۴ است طوری که ترتیب مهم نباشد. این اعداد باید توانی از دو باشند. در نتیجه مساله معادل است با اینکه جمع سه عدد نامنفی صحیح(که در واقع توان ها هستند) برابر ۶ باشد طوری که ترتیب مهم نباشد. می توان به سادگی دید ۷ حالت زیر ممکن است :

$۶+۰+۰$

$۵+۱+۰$

$۴+۲+۰$

$۴+۱+۱$

$۳+۳+۰$

$۳+۲+۱$

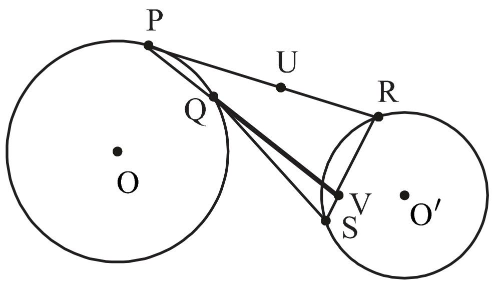
$۲+۲+۲$

**۸. مربع XYZT به ضلع ۵ مفروض است. دو مثلث هم‌نهشت XYS و ZTR بیرون آن رسم شده‌اند طوری‌که $SY=RT=۳$ و $XS=ZR=۴$ است. مقدار $RS^۲$ چند است؟**

جواب ۹۸

به سادگی می توان دید مساله نسبت به مرکز مربع تقارن دارد و در نتیجه $RS$ از مرکز مربع می گذرد. چهارضلعی $XSYO$ محاطی است که $O$مرکز مربع است. در نتیجه طبق رابطه بطلمیوس داریم : $SO = \frac{(۳+۴)*\frac{\sqrt{۲}}{۲}*۵}{۵} = ۷*\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و در نتیجه $RS = ۷\sqrt{۲}$و در نتیجه $RS^{۲} = ۹۸$

**۹.دو دایره $\Omega_۱$ به شعاع ۶ و مرکز O و $\Omega_۲$ به شعاع ۱ و مرکز $O'$ مفروض است. فاصله مراکز دو دایره ($OO'$) برابر با ۱۳ است. فرض کنید $P,Q$ روی دایره‌ی $\Omega_۱$ باشند و $R,S$ روی دایره‌ی $\Omega_۲$ باشند همچنین فرض کنید PR مماس خارجی مشترک این دو دایره و همچنین QS مماس مشترک داخلی این دو دایره باشد. فرض کنید V محل تقاطع $PQ, RS$ باشد فرض کنید U وسط پاره خط PR باشد. مقدار UV چند است؟(شکل صرفاً برای اطلاع از نحوه قرارگیری نقاط است و از نظر اندازه‌ها و دیگر خصوصیات دارای دقت نیست.)**




جواب :

می توان به سادگی دید $PQ, RS$ بر هم عمودند در نتیجه

$$UV = UR = \frac{PR}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

**۱۰.فرض کنید $x_۱, x_۲, \dots, x_{۲۰۱۶}$ اعدادی حقیقی باشند طوری‌که جزء صحیح این ۲۰۱۶ عدد جایگشتی از اعداد ۱، ۲، ... و ۲۰۱۶ باشد. حداقل مقدار عبارت زیر چند است؟**

$$[x_۲ - x_۱] + [x_۳ - x_۲] + [x_۴ - x_۳] + \dots + [x_{۲۰۱۶} - x_{۲۰۱۵}]$$

**نماد[ ]، نماد جزء صحیح است. جزء صحیح یک عدد برابر بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که کوچک‌تر مساوی آن عدد است.**

حل : جواب منفی ۴۰۳۰ است.

داریم

$$\lfloor x_۲ - x_۱ \rfloor + \lfloor x_۳ - x_۲ \rfloor + \lfloor x_۴ - x_۳ \rfloor + \dots + \lfloor x_{۲۰۱۶} - x_{۲۰۱۵} \rfloor >$$
$$(x_۲ - x_۱ - ۱) + (x_۳ - x_۲ - ۱) + \dots + (x_{۲۰۱۶} - x_{۲۰۱۵} - ۱) =$$
$$x_{۲۰۱۶} - x_۱ - ۲۰۱۵$$

و چون عبارت مورد نظر مساله عددی صحیح است داریم :

$$\lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \lfloor x_4 - x_3 \rfloor + \ldots + \lfloor x_{2016} - x_{2015} \rfloor \geq$$
$$\lceil x_{2016} - x_{2015} \rceil - 2015 \geq -(2016-1) - 2015 = 2015*2$$

همچنین این کران دست یافتنی است. کافی است قرار دهید

$$x_i = 1.0001*(n+1-i)$$

**۱۱. کوچک‌ترین عدد طبیعی $n$ را بیابید که $x^4 - nx + 63$ را بتوان به‌صورت ضرب چند جمله‌ای از درجه یک با ضرایب صحیح و چند جمله‌ای از درجه سه با ضرایب صحیح نوشت.**

حل : جواب ۴۸ است. منظور از $[x^i]$ بررسی و برابر قرار دادن ضریب $x^i$ در دو طرف است.

$$x^4 - nx + 63 = (x+d)(x^3 + ax^2 + bx + c)$$
$$[x^3] \to d = -a$$
$$[x^2] \to 0 = ad + b \to b = a^2$$
$$[x] \to -n = bd + c = -a^3 + c$$
$$[x^0] \to 64 = cd$$

در نتیجه باید حداقل $-c + a^3$ با شرط $ac = -63$ و اینکه $-c + a^3$ طبیعی باشد را به دست آوریم.

به راحتی می توان دید باید $c, a$ مثبت باشند. قرار می دهیم $-c = c'$ در نتیجه باید حداقل $c' + a^3$ با شرط $ac' = 63$ را به دست آوریم. برای $a = 3, c' = 21$ این مقدار برابر ۴۸ خواهد بود. برای $a = 1, 2$ هم مساله بدیهی است.

**۱۲. تعداد چندجمله‌ای‌های *ناصفر* $P(\mathrm{X})$ را بیابید که در معادله زیر صدق کنند:**

$$P\big(P(x)\big) = (x^2 + x + 1)P(x)$$

حل : جواب ۱

اگر درجه دو طرف را برابر قرار دهیم درجه برابر ۰ یا ۲ است. تنها چندجمله ای ثابت همان چند جمله ای صفر است. اگر چند جمله ای درجه دو باشد کافی است قرار دهید $P(x) = ax^2 + bx + c$. داریم

$$a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=(x^2+x+1)(ax^2+bx+c)\rightarrow$$
$$a(a^2x^4+2abx^3+b^2x^2+2bcx+c^2)+bax^2+b^2x+bc=$$
$$ax^4+(b+a)x^3+(c+b+a)x^2+(b+c)x+c\rightarrow$$
$$a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+ba)x^2+(2abc+b^2)x+(ac^2+bc)=$$
$$ax^4+(b+a)x^3+(c+b+a)x^2+(b+c)x+c\rightarrow$$
$$[x^4]\rightarrow a^2=1\rightarrow a=\pm 1$$
$$[x^3]\rightarrow 2a^2b=a+b\rightarrow 2a=a+b\rightarrow a=b$$
$$[x]\rightarrow 2abc+b^2=b+c\rightarrow 2a^2c+a^2=a+c\rightarrow a+c=2c+1\rightarrow a=c+1$$
$$[x^0]\rightarrow c=ac^2+bc\rightarrow c=ac^2+ac=ac(c+1)\rightarrow c=0\ or\ 1=a(c+1)$$
$$[x^2]\rightarrow ab^2+ba=c+b+a\rightarrow a^3+a^2=2a+c\rightarrow a+1=2a+c\rightarrow 1=a+c$$
$$\rightarrow 1=a+(a-1)\rightarrow a=1\rightarrow b=1\rightarrow c=0$$

در نتیجه $P(x)=x^2+x$ و در نتیجه دقیقا یک چند جمله ای صدق می کند.

**۱۳. $k$ دانش‌آموز از کلاس‌های اول و دوم دبیرستان وجود دارند ( $k$ برابر تعداد کل دانش‌آموزان است.) می‌دانیم هر دانش‌آموز دقیقا $x$ نفر از کلاس اول دبیرستان و دقیقا $x$ نفر از کلاس دوم دبیرستان می‌شناسد. آشنایی رابطه‌ای دوطرفه است و هم‌چنین می‌دانیم $k\leq 10$. تعداد زوج مرتب‌های $(k,x)$ از اعداد طبیعی با این شرایط را بیابید.**

حل: جواب ۷

با شمردن آشنایی های بین کلاس اولی ها و کلاس دومی ها می توان ثابت کرد تعداد اعضای این دو کلاس با هم برابر است. و در نتیجه $k$ باید زوج باشد. هم چنین هر کدام از کلاس اولی ها باید $x$ تا از کلاس اولی های دیگر را بشناسد و در نتیجه باید $xk/2$ زوج باشد و هم چنین $x\leq \frac{k}{2}-1$ است. این دو شرط کافی هم هستند. در نتیجه تمام زوج ها به صورت زیر خواهند بود:

$$(k,x)=(4,1),(6,2),(8,3),(8,2),(8,1),(10,4),(10,2)$$

که تعدادشان ۷ تا است.

**۱۴. زیرمجموعه $B$ از $\{1,2,\dots,64\}$ را طلایی می‌نامیم اگر برای هر دو عدد طبیعی مختلف که کوچک‌تر مساوی ۶۴ باشند و جمعشان توان ۲ باشد (توان ۲ مانند ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ...) دقیقا یکی از آن‌ها در $B$ باشد. چند مجموعه طلایی داریم؟**

حل : جواب ۱۲۸

فرض کنید اعداد $\{1,2,\dots,2^k\}$ انتخاب شده اند .حال $\{2^k+1,\dots,2^{k+1}\}$ را انتخاب می کنیم. طبق فرض مساله برای اعداد $\{2^k+1,\dots,2^{k+1}-1\}$ دقیقا یک حالت وجود دارد با توجه به انتخاب های قبل. هم چنین برای عدد آخر هم ۲ حالت وجود دارد. در نتیجه تعداد انتخاب ها برای $\{1,2,\dots,2^{k+1}\}$ ۲ برابر حالت $\{1,2,\dots,2^k\}$ است. هم چنین برای مجموعه $\{1\}$ دو حالت وجود دارد. در نتیجه جواب برابر ۱۲۸ است.


**۱۵. برای عدد طبیعی $x$ نماد $f(x)$ نشان‌دهنده بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه آن است که توان ۲ باشد (یعنی به شکل $2^k$ باشد.) هم‌چنین فرض کنید $g(x) = f(2) + f(4) + f(6) + \ldots + f(2^x)$ باشد. عدد x را خاص می‌گوییم اگر $g(x)$ مربع کامل باشد. تعداد اعداد سه رقمی خاص چند تا است؟**

حل : جواب ۱۰

می توان دریافت که $g(x) = (x+1)2^{x-1}$ است. می توان دید باید $x+1$ زوج و مربع کامل باشد. معادلا باید $x = (2t)^2 - 1$ باشد. در نتیجه اعداد خوب سه رقمی این ها هستند $12^2 - 1, 14^2 - 1, \ldots, 30^2 - 1$ که تعدادشان ۱۰ تا است.

**۱۶. مثلث $ABC$ با مقدار زوایای، $C = 70$، $B = 54$ و $A = 56$ مفروض است. فرض کنید دایره محاطی داخلی به مرکز $I$ سه ضلع $AB$، $AC$ و $BC$ را به ترتیب در نقاط $A', B', C'$ قطع کند. هم‌چنین خط گذرنده از دو نقطه $C, I$ پاره‌خط $B'C'$ را در نقطه $F$ قطع کند. مقدار زاویه‌ی $FBC$ چقدر است؟ (راهنمایی: همه زوایا را به دست آورید و به دنبال چهارضلعی محاطی بگردید.)**

حل: جواب ۵۵

با بررسی زوایا می توان دریافت که چهارضلعی $IFC'B$ محاطی است. در نتیجه $BFI = BC'I = 90$ و در نتیجه $FBC = 90 - FCB = 90 - 35 = 55$

**۱۷. مثلث $ABC$ دارای شعاع دایره محاطی ۱ و شعاع دایره محیطی ۵ است. خط دلخواهی از مرکز دایره محاطی داخلی آن $(I)$ می‌گذرد و دایره محاطی داخلی را در نقاط $X, Y$ و دایره محیطی را در نقاط $X', Y'$ قطع می‌کند، طوری‌که $X$ روی پاره‌خط $X'I$ است. حداقل مقدار عبارت $XX' \times YY'$ چقدر است؟**

حل : جواب ۱

$$
\begin{aligned}
& XX' * YY' = (IX' - IX)(IY' - IY) \\
& = (IX' - r)(IY' - r) = IX' * IY' - (IX' + IY')r + r^2 \\
& = 2Rr - X'Y'r + r^2 \\
& \geq R(2r) - 2Rr + r^2 = r^2 = 1
\end{aligned}
$$

در نتیجه جواب برابر ۱ است.

**۱۸. نقطه‌ای در صفحه را شبکه‌ای می‌گوییم اگر مختصات آن صحیح باشد. حداکثر تعداد نقاط شبکه‌ای در صفحه را بیابید که هیچ سه‌تایی روی یک خط نباشند و هم‌چنین مرکز ثقل مثلثی که از هر سه نقطه آن تشکیل می‌شود شبکه‌ای نباشد.**

حل : جواب ۸

برای سه نقطه $(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲),(x_۳,y_۳),$ مرکز ثقل آن برابر است با

$$(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳},\frac{y_۱+y_۲+y_۳}{۳})$$

و در نتیجه در صورتی مرکز ثقل شبکه ای است که جمع مختصات افقی مضرب سه باشد و هم چنین عمودی. می توان دید جمع سه عدد در صورتی مضرب ۳ است که یا هر ۳ باقیمانده شان بر سه یکسان باشد و یا هر ۳ یاقیمانده شان بر ۳ متفاوت باشد(*)

ادعا می کنیم حداکثر ۸ نقطه می توان قرار داد. اولا ۸ نقطه زیر دارای خاصیت مساله هستند

$$\begin{aligned}&(۰,۰),(۰+۳,۰+۱۲)\\&(۰+۶,۱+۲۴),(۰+۹,۱+۴۸)\\&(۱,۰+۹۶),(۱+۳,۰+۱۹۲)\\&(۱+۶,۱+۳۸۴),(۱+۹,۱+۷۶۸)\end{aligned}$$

حال ثابت می کنیم ۹ نقطه شدنی نیست. فرض خلف که شدنی باشد.

به سادگی می توان دید طبق (*) از هر ۵ عدد صحیح سه تا از آن ها یافت می شود که میانگین آن ها عددی صحیح باشد. (**)

فرض کنید $A$ مجموعه ای نقاط باشند که مختصات $x$ باقیمانده اش بر ۰ برابر ۰ باشد.

فرض کنید $B$ مجموعه ای نقاط باشند که مختصات $x$ باقیمانده اش بر ۱ برابر ۱ باشد.

فرض کنید $C$ مجموعه ای نقاط باشند که مختصات $x$ باقیمانده اش بر ۲ برابر ۲ باشد.

طبق(**) $|A|,|B|,|C|\leq ۴$ است. در نتیجه اگر یکی از آن ها برابر صفر باشد کار تمام است و تعداد کل حداکثر ۸ خواهد بود. در نتیجه فرض کنید $|A|,|B|,|C|\geq ۱$ باشد. حال به سادگی با کمی حالت بندی می توان دریافت می توان از هر کدام از مجموعه های $A,B,C$ نقطه ای انتخاب کرد طوری که مرکز ثقل این سه نقطه دارای مختصات صحیح باشد.

**۱۹. عددی طبیعی را عجیب می‌نامیم اگر برابر ۱ باشد یا این‌که اول باشد. چند عدد عجیب $p$ یافت می‌شود طوری‌که $p^۲-p+۱$ مکعب عددی طبیعی باشد؟**

حل : جواب ۲

اولا ۱ عجیب است. حال اعداد بزرگتر از ۱ را بررسی می کنیم. واضح است $n>۲$ باید باشد.

$$\begin{aligned}&p^۲-p+۱=n^۳\rightarrow p(p-۱)=(n-۱)(n^۲+n+۱)\\&\rightarrow p\,|\,n-۱ \text{ or } p\,|\,n^۲+n+۱\end{aligned}$$

اگر $p\,|\,n-۱$ آنگاه

$$p \le n-1 \to n^3 \le (n-1)^2-(n-1)+1 \to n^2+n+1 \le n-1-1$$
$$\to n^2 \le -1$$

که تناقض است. در نتیجه $p \mid n^2+n+1$ است. در نتیجه $\frac{n^2+n+1}{p}=\frac{p-1}{n-1}=k\in\mathbb{Z}$ در نتیجه $n-1 \mid k-3$. اگر $k=3$ باشد آنگاه $p=19$ خواهد بود. در غیر این صورت خواهیم داشت $n+2\le k$ . هم چنین از معادلات بالا نتیجه می شود که

$$n^2+(1-k^2)n+(n^2-n+1)=0$$
$$\to 2n^2+1 \ge n(n+2)^2 \to 3n^2 > n^3$$
$$\to 3 > n \to n=2$$

که تناقض است چون $n>2$. در نتیجه دو جواب وجود دارد.

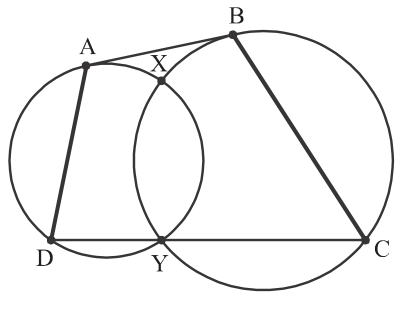
**۲۰. عدد صحیح نامنفی $r$ را خوب می گوییم اگر اعداد طبیعی $x,y$ یافت شوند طوری که اگر باقی‌مانده تقسیم $x^5+y^2+44$ بر $x^2+y$ برابر با $r$ و مقسوم‌علیه آن تقسیم برابر با $q$ و $q^3+2qr+10r=1395$ باشد. جمع همه مقادیر ممکن برای $r$ را بیابید؟**

حل: جواب ۲

داریم $1395=q^3+2qr+10r\le q^3+2q^2+10q<(q+2)^3$ و در نتیجه $10\le q$. در نتیجه داریم $q^3\le q^3+2qr+10r\le q^3+2q^2+10q<(q+1)^3$ و در نتیجه $q^3\le 1395<(q+1)^3$ و در نتیجه $q=11$ و در نتیجه $q^3=1331$ و در نتیجه $1395=q^3+2qr+10r=1331+32r$ و در نتیجه $r=2$ است. و جواب برابر ۲ خواهد بود.

.

**۲۱. دو دایره $\Omega_1$ و $\Omega_2$ در دو نقطه $X$ و $Y$ یکدیگر را قطع می‌کنند. مماس مشترک دو دایره به‌ترتیب در نقاط $A$ و $B$ بر دو دایره $\Omega_1$ و $\Omega_2$ مماس است طوری‌که پاره‌خط $AB$ به $X$ نزدیک‌تر باشد تا $Y$. خطی که از $Y$ می‌گذرد دو دایره $\Omega_1$ و $\Omega_2$ را به ترتیب در نقاط $D$ و $C$ قطع می‌کند. هم‌چنین می‌دانیم چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. می‌دانیم $XD=3$، $DY=2$ و $XC=6$. مقدار $YC$ را به‌دست آورید.**



حل: می توان ثابت کرد $XY$ نیمساز $DXC$ است و درنتیجه $YC=\frac{XC}{XD}.YD=\frac{۶}{۳}*۲=۴$ است.

**۲۲.کره‌ای به شعاع ۳ و نقطه $X$ به فاصله ۱ از مرکز کره مفروض است. فرض کنید $Y,Z,T$ سه نقطه روی محیط کره باشند طوری‌که سه پاره‌خط $XY,XZ,XT$ دوبه‌دو بر هم عمود است. فرض کنید مکعب مستطیلی از چهار نقطه $Y,Z,T,X$ عبور دهیم و نقطه $U$ رأس مقابل قطری $X$ در مکعب مستطیل باشد. فاصله $U$ تا مرکز کره چقدر است؟**

حل: جواب ۵

جواب برابر ۲۵ است. فرض کنید سه محور مختصات در فضا موازی $XY,XZ,XT$ باشد و نقطه $X$ دارای مختصات $(p_x,p_y,p_z)$ باشد و $O$ مرکز کره باشد. در این صورت به سادگی می توان دید داریم

$$UO^۲=(XA+p_x)^۲+(XB+p_y)^۲+(XC+p_z)^۲$$

هم چنین می دانیم

$$۹=(XA+p_x)^۲+(p_y)^۲+(p_z)^۲$$
$$۹=(p_x)^۲+(XB+p_y)^۲+(p_z)^۲$$
$$۹=(p_x)^۲+(p_y)^۲+(XC+p_z)^۲$$

اگر سه معادله بالا را با هم جمع کنیم خواهیم داشت و از معادله $۱=^۲(p_x)^۲+(p_y)^۲+(p_z)$:

$$QU^۲=(XA+p_x)^۲+(XB+p_y)^۲+(XC+p_z)^۲$$
$$=۲۷-۲((p_x)^۲+(p_y)^۲+(p_z)^۲)=۲۵$$

و در نتیجه این فاصله برابر ۵ است.

## سوال تشریحی

**۱. هر خطی در صفحه که با محور افقی (محور x ها) زاویه‌ای بسازد که آن زاویه مضربی از ۶۰ باشد (یعنی ۰ یا ۶۰ یا ۱۲۰ و ...) را خط زنبوری می‌نامیم. دو نقطه در صفحه را غریبه می‌گوییم اگر خطی زنبوری یافت شود طوری‌که دو نقطه در دو دو طرف آن باشند و فاصله هر کدام از نقاط تا آن خط حداقل ۱ باشد. تعدادی نقطه غریبه با هم (دو به دو غریبه) در مربعی ۱۵×۱۵ قرار دارند. ثابت کنید تعداد نقاط کمتر از ۹۰ تا است.**

حل: حول هر نقطه شش ضلعی منتظم با مرکز آن نقطه و فاصله مرکز تا اضلاع برابر ۱ بزنید. این شش ضلعی ها هم را قطع نمی کنند و درون مربع $18\times17$ جا می شوند(مقداری هم جای خالی باقی می گذارند) و هم چنین مساحتشان برابر است با $2\sqrt{3}>2\times1.7$ در نتیجه تعداد نقاط از مقدار زیر کمتر است

$$\frac{۱۷\times۱۸}{۲\times۱/۷}=۹۰$$

می توان با همین کار ثابت کرد که حداکثر ۸۶ نقطه با این خاصیت وجود دارد.