

به نام خدا

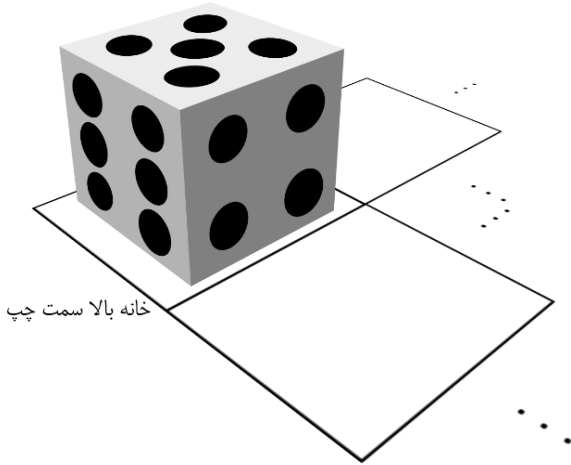


- ✓ آزمون ۳ سوال دارد و هر سوال ۱۰۰ امتیاز. امتیاز هر قسمت در مقابل آن نوشته شده است.
 - ✓ شما تنها باید خروجی نهایی برنامه خود را در سایت ثبت کنید و نیازی به ثبت کد برنامه نیست.
 - ✓ برای هر سوال باقیمانده جواب بر $۷ + ۱۰^۹$ را محاسبه کرده و سپس باقیمانده آن بر دلتایی که در سایت برای شما مشخص شده است را در سایت ثبت کنید.
 - ✓ در این آزمون تنها جواب نهایی مهم است و زمان اجرای برنامه شما هر مقداری می تواند باشد(حداکثر ۳ ساعت!) اما تضمین می شود برای هر سوال راه حلی با زمان اجرای کمتر از یک دقیقه وجود دارد.
 - ✓ طراحان سوالات: ایلیداد رضانی، امیرمحسن آهنچی و محمد امین خشخاشی مقدم.
- ✓ موفق باشید

سوال ۱: تاس خاص

۱۰۰ نمره

زرزاش به تازگی یک تاس خاص خریده است. او در حال بازی با تاسش روی یک جدول $n \times m$ می باشد. تاس در ابتدا در گوشه ی بالا و سمت چپ جدول قرار دارد. ویژگی منحصر به فرد تاس زرزاش این است که در هر خانه ای از جدول که قرار بگیرد (حتی همان خانه ی اول) شماره ای که روی وجه زیرین تاس نوشته شده است را روی خانه اش حک می کند! او در هر مرحله تاسش را



به یک خانه مجاور ضلعی که عددی در آن نوشته نشده است می غلتاند. وضعیت اولیه تاس همانگونه که در شکل است می باشد و مجموع اعداد هر دو وجه مقابل ۷ است. برای مثال اگر در یک جدول ۲ در ۲ ابتدا تاس را به خانه راست سپس پایین و سپس خانه سمت چپ بغلتانیم اعداد روی جدول به شکل زیر است:

۲	۱
۲	۴

الف) اگر زرزاش در یک جدول $10^7 \times 1$ تاس خود را تا آخرین خانه به سمت راست بغلتاند مجموع اعداد خانه هایی که شماره ستون شان یک عدد اول است چند است. ستون ها از چپ به راست به ترتیب از ۱ تا 10^7 شماره گذاری شده اند. (۵ نمره)

ب) اگر زرزاش در یک جدول 1435×1393 مثل شکل زیر (ساعتگرد به سمت داخل) حرکت کند مجموع اعداد جدول

→	→	→	→	→	↓
→	→	→	→	↓	↓
↑	→	→	😊	↓	↓
↑	↑	←	←	←	↓
↑	←	←	←	←	←

در نهایت چه مقداری می شود؟

ج) اگر زرزاش در یک جدول 142014×13931393 مثل شکل زیر حرکت کند مجموع اعداد جدول در نهایت چه

مقداری می شود؟

→	→	→	→	→	↓
↓	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	↓
↓	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	😊

سوال ۲: مسعود و محمود

۱۰۰ نمره

مسعود و محمود پسران منصور به تماشای تلویزیون علاقه زیادی دارند. مسعود اکوادوری و محمود ایرانی است (چرا؟) مسعود می خواهد بازی فوتبال اکوادور - سوییس و محمود می خواد بازی والیبال ایران - برزیل را تماشا کند. کنترل تلویزیون دست منصور پدر آنهاست و او می تواند در ابتدای هر دقیقه کانال را عوض کند. منصور می خواهد عدالت را بین دو فرزند خود برقرار کند بنابراین نمی خواهد مسعود بیشتر از x دقیقه متوالی فوتبال و محمود بیشتر از y دقیقه متوالی والیبال ببیند. n دقیقه دیگر هم برنامه آشپزی شروع می شود و مادر خانه کنترل را در دست خواهد گرفت و بقیه به اتاق هایشان می روند! حال منصور می خواهد بداند در این n دقیقه به چند روش مختلف می تواند تلویزیون ببیند. دو روش تلویزیون دیدن A و B مختلف است اگر زمانی وجود داشته باشد که کانال در حال پخش در A و B متفاوت باشد.

الف) اگر $n = 25$ و $x = y = 10$ باشد تعداد روش های تلویزیون دیدن چند تاست؟ (۷ نمره)

ب) اگر $n = 7000$ و $x = 1375$ و $y = 1996$ تعداد روش های تلویزیون دیدن چند تاست؟ (۳ نمره)

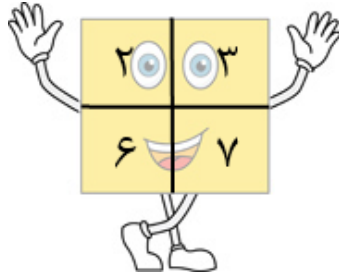
ج) اگر $n = 10^7$ و $x = 31183$ و $y = 12345$ تعداد روش های تلویزیون دیدن چند تاست؟ (۱۰ نمره)

د) اگر $n = 10^4$ و $x \leq y$ تعداد روش های دیدن تلویزیون چند تاست؟ (۱۳ نمره)

سوال ۳: جدول تنبیل

۱۰۰ نمره

به مجموعه n خانه از یک جدول $n \times n$ به گونه ای که هیچ دو خانه ای در یک سطر یا یک ستون نباشند یک قطر پراکنده از آن جدول می گویند. یک جدول تنبیل است اگر تعداد ردیف ها و ستون هایش برابر و مجموع اعداد داخل خانه های هر یک از قطر های پراکنده اش با بقیه قطر ها برابر باشد.



مثلاً جدول روبرو بر خلاف ظاهرش کاملاً تنبیل است چون $۲+۷=۳+۶$

(الف) تعداد جداول تنبیل ۳×۳ که اعداد داخل آن طبیعی و بین ۱ تا ۹ می باشد چند تاست؟ (۸ نمره)

(ب) تعداد جداول تنبیل به طول ۲۰۴۸۲۰۴۸ که اعداد داخل آن ۰ یا ۱ باشد چند تاست؟ (۹ نمره)

(ج) تعداد جداول تنبیل به طول ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۸۷۶۵۴۳۲۱ که اعداد داخل آن صفر یا یک باشد چند تاست؟ (۳ نمره)

(د) تعداد جداول تنبیل به طول ۱۰۰۰ به گونه ای که مجموع کل اعداد جدول $۱۰^۶ \times ۲$ باشد و اعداد جدول طبیعی باشند؟ (۲۰ نمره)