(https://stanford.edu/%7Eshervine/teaching/cs-229.html)

راهنمای کوتاه یاگیری با نظارت

مبانی یادگیری با نظارت

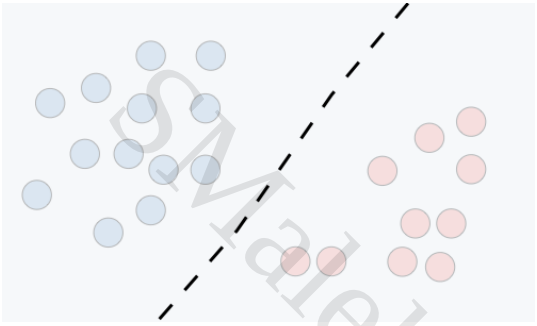
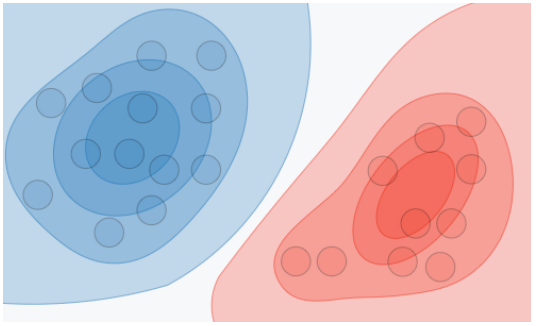
با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از نمونه‌های داده‌ی $\{x^{(i)}, \ldots, x^{(m)}\}$ متناظر با مجموعه‌ی خروجی‌های $\{y^{(i)}, \ldots, y^{(m)}\}$، هدف ساخت دسته‌بندی است که پیش‌بینی y از روی x را یاد می‌گیرد.

انواع پیش‌بینی - انواع مختلف مدل‌های پیش‌بینی کننده در جدول زیر به اختصار آمده‌اند:

دسته‌بندی	(وایازش (رگرسیون	
دسته	اعداد پیوسته	خروجی
وایازش لجستیک، ماشین بردار پشتیبان، بیز ساده	وایازش خطی	نمونه‌ها

نوع مدل ـ انواع مختلف مدل‌ها در جدول زیر به اختصار آمده‌اند.

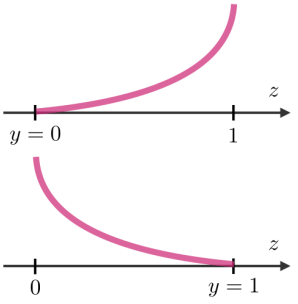
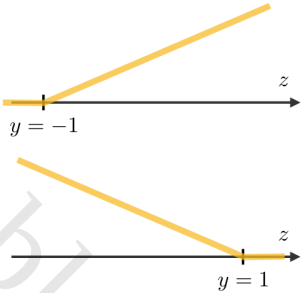
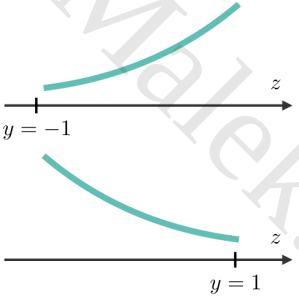
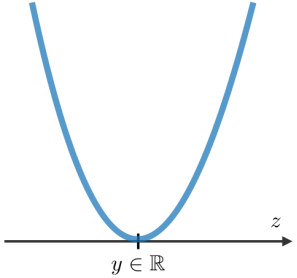
مدل مولد	مدل متمایزکننده	
$P(y\|x)$ تخمین $P(x\|y)$ و سپس نتیجه‌گیریِ	$P(y\|x)$ تخمین مستقیم	هدف

چیزی که یاد گرفته می‌شود	مرز تصمیم‌گیری	توزیع احتمال داده‌ها
تصویر		
نمونه‌ها	وایازش‌ها، ماشین‌های بردار پشتیبان	بیز ساده، GDA

نمادها و مفاهیم کلی

فرضیه - فرضیه که با h_θ نمایش داده می‌شود، همان مدلی است که ما انتخاب می‌کنیم. به ازای هر نمونه داده ورودی $x^{(i)}$، حاصل پیش‌بینی مدل $h_\theta(x^{(i)})$ می‌باشد.

تابع خطا - تابع خطا تابعی است به صورت $L : (z, y) \in \mathbb{R} \times Y \longmapsto L(z, y) \in \mathbb{R}$ که به عنوان ورودی مقدار پیش‌بینی‌شده‌ی z متناظر با مقدار داده‌ی حقیقی y را می‌گیرد و اختلاف این دو را خروجی می‌دهد. توابع خطای معمول در جدول زیر آمده‌اند:

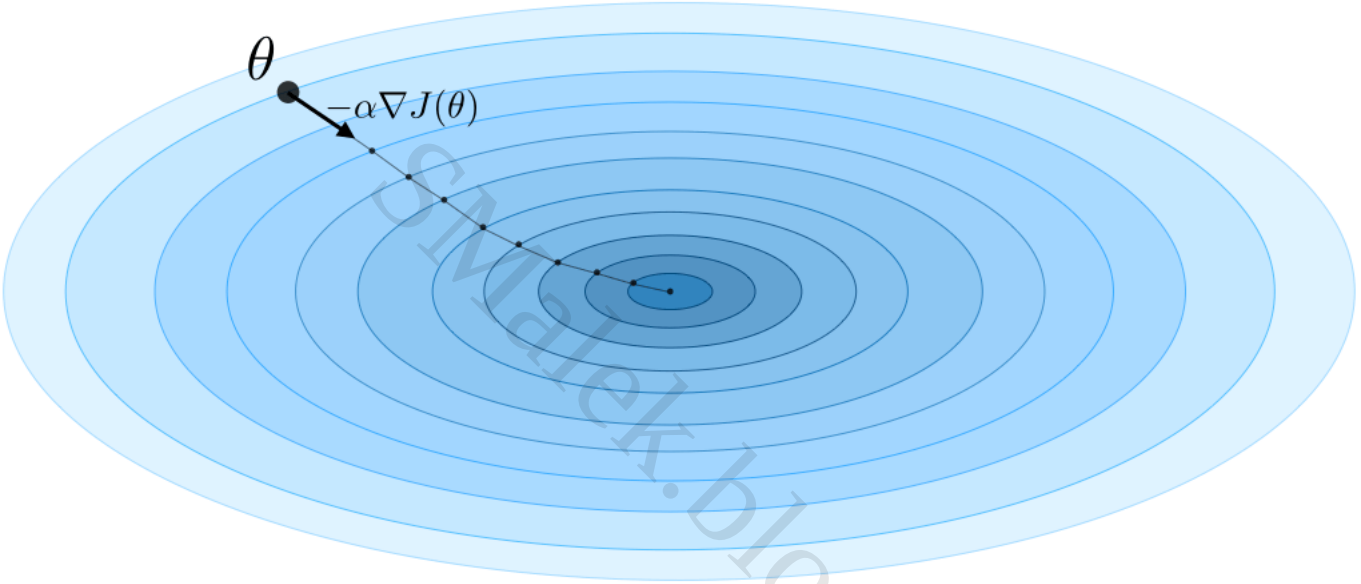
آنتروپی متقاطع	خطای **Hinge**	خطای لجستیک	خطای کمترین مربعات
$-\big[y \log(z) + (1-y) \log(1-z)\big]$	$\max(0, 1-yz)$	$\log(1+\exp(-yz))$	$\frac{1}{2}(y-z)^2$
			
شبکه‌ی عصبی	ماشین بردار پشتیبان	وایازش لجستیک	وایازش خطی

تابع هزینه - تابع هزینه‌ی J معمولاً برای ارزیابی عملکرد یک مدل استفاده می‌شود و با توجه به تابع خطای L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{J(\theta) = \sum_{i=1}^{m} L(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)})}$$

گرادیان کاهشی - با نمایش نرخ یادگیری به صورت $\alpha \in \mathbb{R}$، رویه‌ی به‌روزرسانی گرادیان کاهشی که با نرخ‌یادگیری و تابع هزینه‌ی J بیان می‌شود به شرح زیر است:

$$\boxed{\theta \longleftarrow \theta - \alpha \nabla J(\theta)}$$



نکته: گرادیان کاهشی تصادفی (SGD) عوامل را بر اساس تک‌تک نمونه‌های آموزش به‌روزرسانی می‌کند، در حالی که گرادیان کاهشی دسته‌ای این کار را بر اساس دسته‌ای از نمونه‌های آموزش انجام می‌دهد.

درست‌نمایی - از مقدار درست‌نمایی یک مدل $L(\theta)$ با پارامترهای θ در پیدا کردن عوامل بهینه θ از طریق روش بیشینه‌سازی درست‌نمایی مدل استفاده می‌شود. البته در عمل از لگاریتم درست‌نمایی $\ell(\theta) = \log(L(\theta))$ که به‌روزرسانی آن ساده‌تر است استفاده می‌شود. داریم::

$$\boxed{\theta^{\text{opt}} = \arg\max_{\theta} L(\theta)}$$

الگوریتم نیوتن — الگوریتم نیوتن یک روش عددی است که θ را به گونه‌ای پیدا می‌کند که $\ell'(\theta) = 0$ باشد. رویه‌ی به‌روزرسانی آن به صورت زیر است:

$$\boxed{\theta \leftarrow \theta - \frac{\ell'(\theta)}{\ell''(\theta)}}$$

نکته: تعمیم چندبُعدی این روش، که به روش نیوتون-رافسون معروف است، قانون به‌روزرسانی زیر را دارد:

$$\theta \leftarrow \theta - \left(\nabla^2_\theta \ell(\theta)\right)^{-1} \nabla_\theta \ell(\theta)$$

مدل‌های خطی

وایازش خطی

در این‌جا فرض می‌کنیم $y|x;\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

معادلات نرمال — اگر X یک ماتریس باشد، مقداری از θ که تابع هزینه را کمینه می‌کند یک راه‌حل به فرم بسته دارد به طوری که:

$$\boxed{\theta = (X^T X)^{-1} X^T y}$$

الگوریتم **LMS** - با نمایش نرخ یادگیری با α، رویه‌ی به‌روزرسانی الگوریتم کمینه‌ی میانگین مربعات (LMS) برای یک مجموعه‌ی آموزش با m نمونه داده، که به رویه‌ی به‌روزرسانی Widrow-Hoff نیز معروف است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\forall j, \quad \theta_j \leftarrow \theta_j + \alpha \sum_{i=1}^{m} \left[y^{(i)} - h_\theta(x^{(i)}) \right] x_j^{(i)}}$$

نکته: این رویه‌ی به‌روزرسانی، حالت خاصی از الگوریتم گرادیان کاهشی است.

LWR — وایازش محلی‌وزن‌دار یا LWR نوعی دیگر از انواع وایازش‌های خطی است که در محاسبه‌ی تابع هزینه‌ی خود هر کدام از نمونه‌های آموزش را وزن $w^{(i)}(x)$ می‌دهد، که این وزن با عامل $\tau \in \mathbb{R}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{w^{(i)}(x) = \exp\left(-\frac{(x^{(i)} - x)^2}{2\tau^2} \right)}$$

دسته‌بندی و وایازش لجستیک

تابع سیگموئید — تابع سیگموئید g که به تابع لجستیک هم معروف است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \boxed{g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} \in]0,1[}$$

وایازش لجستیک — فرض می‌کنیم که $y|x;\theta \sim \text{Bernoulli}(\phi)$. داریم:

$$\boxed{\phi = p(y=1|x;\theta) = \frac{1}{1+\exp(-\theta^T x)} = g(\theta^T x)}$$

نکته: هیچ راه‌حل بسته‌ای برای وایازش لجستیک وجود ندارد.

وایازش **Softmax** — وایازش Softmax یا وایازش چنددسته‌ای، در مواقعی که بیش از ۲ کلاس خروجی داریم برای تعمیم وایازش لجستیک استفاده می‌شود. طبق قرارداد داریم $\theta_K = 0$. در نتیجه عامل برنولی ϕ_i برای هر کلاس i به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\phi_i = \frac{\exp(\theta_i^T x)}{\sum_{j=1}^{K} \exp(\theta_j^T x)}}$$

مدل‌های خطی تعمیم‌یافته

خانواده‌ی نمایی - به گروهی از توزیع‌ها خانواده‌ی نمایی گوییم اگر بتوان آن‌ها را با استفاده از عامل طبیعی η، که معمولاً عامل متعارف یا تابع پیوند نیز گفته می‌شود، آماره‌ی کافی $T(y)$، و تابع دیواره‌بندی لگاریتمی $a(\eta)$ به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{p(y;\eta) = b(y)\exp(\eta T(y) - a(\eta))}$$

نکته: معمولاً داریم $T(y) = y$. هم‌چنین می‌توان به $\exp(-a(\eta))$ به عنوان یک عامل نرمال‌کننده نگاه کرد که باعث می‌شود جمع احتمال‌ها حتماً برابر با یک شود.

رایج‌ترین توزیع‌های نمایی در جدول زیر به اختصار آمده‌اند:

توزیع	η	$T(y)$	$a(\eta)$	$b(y)$
برنولی	$\log\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)$	y	$\log(1+\exp(\eta))$	1
گاوسی	μ	y	$\frac{\eta^2}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$
پواسون	$\log(\lambda)$	y	e^η	$\frac{1}{y!}$
هندسی	$\log(1-\phi)$	y	$\log\left(\frac{e^\eta}{1-e^\eta}\right)$	1

فرضیه‌های مدل‌های خطی تعمیم‌یافته - مدل‌های خطی تعمیم‌یافته به دنبال پیش‌بینی متغیر تصادفی y به عنوان تابعی از $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ هستند و بر سه فرض زیر استوارند:

(1) $\boxed{y|x;\theta \sim \text{ExpFamily}(\eta)}$

(2) $\boxed{h_\theta(x) = E[y|x;\theta]}$

(3) $\boxed{\eta = \theta^T x}$

نکته: کمینه‌ی مربعات و وایازش لجستیک حالت‌های خاصی از مدل‌های خطی تعمیم‌یافته هستند.

ماشین‌های بردار پشتیبان

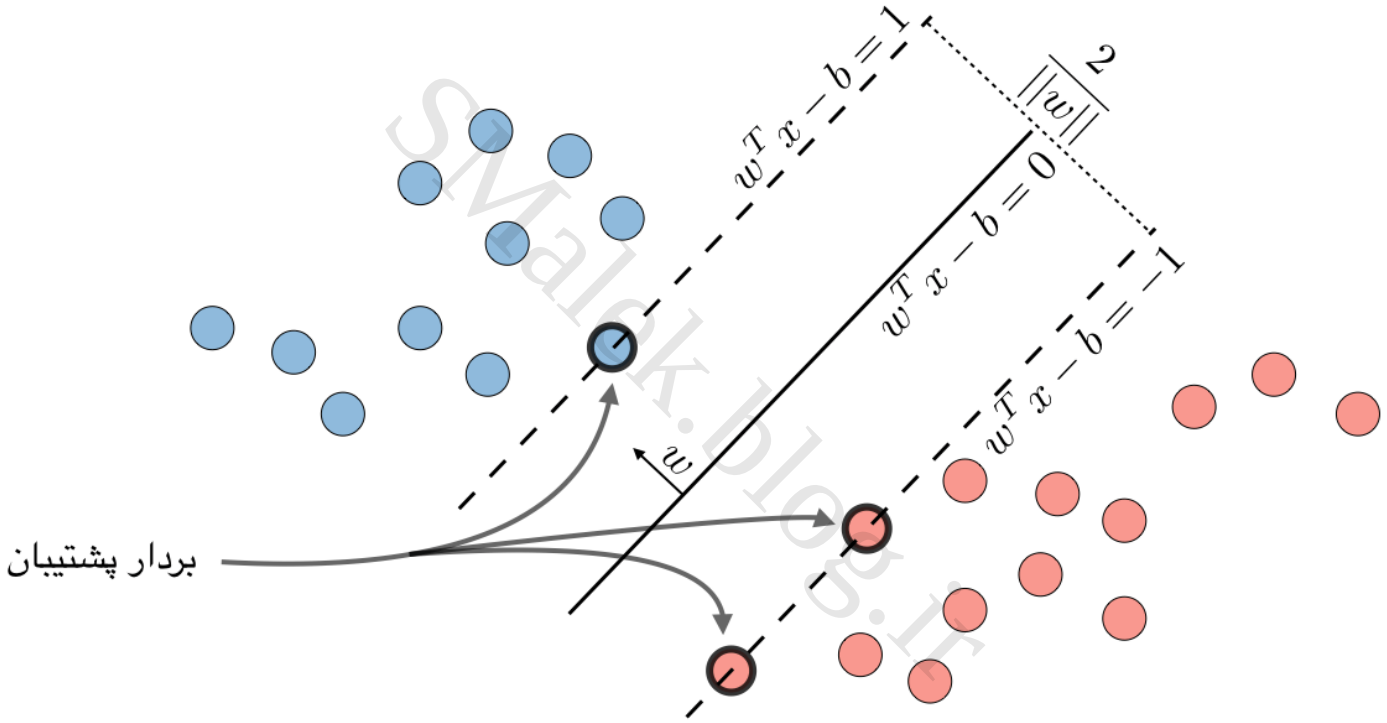
هدف ماشین‌های بردار پشتیبان پیدا کردن خطی هست که حداقل فاصله تا خط را بیشینه می‌کند.

دسته‌بند حاشیه‌ی بهینه - دسته‌بند حاشیه‌ی بهینه‌ی h به گونه‌ای است که:

$$\boxed{h(x) = \text{sign}(w^T x - b)}$$

که $(w, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ راه‌حلی برای مساله‌ی بهینه‌سازی زیر باشد:

$$\min \frac{1}{2}||w||^2 \quad \text{و} \quad y^{(i)}(w^T x^{(i)} - b) \geqslant 1$$



نکته: در این‌جا خط با $w^T x - b = 0$ تعریف شده است.

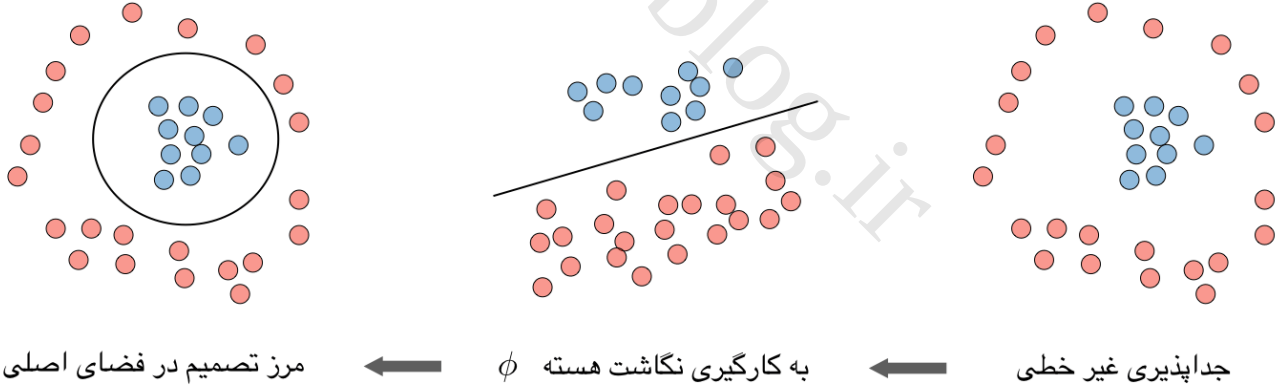
خطای **Hinge** — در ماشین‌های بردار پشتیبان از تابع خطای Hinge استفاده می‌شود و تعریف آن به صورت زیر است:

$$\boxed{L(z,y) = [1 - yz]_+ = \max(0, 1 - yz)}$$

هسته - برای هر تابع نگاشت ویژگی‌های ϕ، هسته‌ی K به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{K(x,z) = \phi(x)^T \phi(z)}$$

در عمل، به هسته‌ی K که به صورت $K(x,z) = \exp\left(-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2}\right)$ تعریف شده باشد، هسته‌ی گاوسی می‌گوییم. این نوع هسته یکی از هسته‌های پراستفاده محسوب می‌شود.



نکته: می‌گوییم برای محاسبه‌ی تابع هزینه از «حقه‌ی هسته» استفاده می‌شود چرا که در واقع برای محاسبه‌ی آن، نیازی به دانستن دقیق نگاشت ϕ که بیشتر مواقع هم بسیار پیچیده‌ست، نداریم؛ تنها دانستن مقادیر $K(x,z)$ کافیست.

لاگرانژی - لاگرانژی $\mathcal{L}(w,b)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\mathcal{L}(w,b) = f(w) + \sum_{i=1}^{l} \beta_i h_i(w)}$$

نکته: به ضرایب β_i ضرایب لاگرانژ هم می‌گوییم.

یادگیری مولِد

یک مدل مولد ابتدا با تخمین زدن $P(x|y)$ سعی می‌کند یاد بگیرد چگونه می‌توان داده را تولید کرد، سپس با استفاده از $P(x|y)$ و هم‌چنین قضیه‌ی بِیز، $P(y|x)$ را تخمین می‌زند.

تحلیل متمایزکننده‌ی گاوسی

فرضیات - در تحلیل متمایزکننده‌ی گاوسی فرض می‌کنیم y و $x|y=0$ و $x|y=1$ به طوری که:

(1) $\boxed{y \sim \text{Bernoulli}(\phi)}$

(2) $\boxed{x|y=0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma)}$

(3) $\boxed{x|y=1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma)}$

تخمین - جدول زیر تخمین‌هایی که هنگام بیشینه‌کردن تابع درست‌نمایی به آن می‌رسیم را به اختصار آورده‌است:

$\widehat{\phi}$	$\widehat{\mu_j} \quad (j=0,1)$	$\widehat{\Sigma}$
$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 1_{\{y^{(i)}=1\}}$	$\frac{\sum_{i=1}^{m} 1_{\{y^{(i)}=j\}} x^{(i)}}{\sum_{i=1}^{m} 1_{\{y^{(i)}=j\}}}$	$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x^{(i)}-\mu_{y^{(i)}})(x^{(i)}-\mu_{y^{(i)}})^T$

دسته‌بند بِیز ساده

فرض - مدل بِیز ساده فرض می‌کند تمام خصوصیات هر نمونه‌ی داده از هم‌دیگر مستقل است.

$$\boxed{P(x|y) = P(x_1, x_2, \dots|y) = P(x_1|y)P(x_2|y)\dots = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|y)}$$

راه‌حل‌ها - بیشنه‌کردن لگاریتم درست‌نمایی به پاسخ‌های زیر می‌رسد، که $k \in \{0,1\}, l \in [\![1, L]\!]$

$$P(x_i = l|y = k) = \frac{\#\{j|y^{(j)} = k \text{ و } x_i^{(j)} = l\}}{\#\{j|y^{(j)} = k\}}$$ و $$P(y = k) = \frac{1}{m} \times \#\{j|y^{(j)} = k\}$$

نکته: دسته‌بند بِیز ساده در مساله‌های دسته‌بندی متن و تشخیص هرزنامه به صورت گسترده استفاده می‌شود.

روش‌های مبتنی بر درخت و گروه

این روش‌ها هم در مسائل وایازش و هم در مسائل دسته‌بندی می‌توانند استفاده شوند.

CART - درخت‌های وایازش و دسته‌بندی، عموما با نام درخت‌های تصمیم‌گیری شناخته می‌شوند. می‌توان آن‌ها را به صورت درخت‌هایی دودویی نمایش داد. مزیت آن‌ها قابل تفسیر بودنشان است.

جنگل تصادفی - یک تکنیک مبتی بر درخت است، که تعداد زیادی درخت تصمیم‌گیری که روی مجموعه‌هایی تصادفی از خصوصیات ساخته‌شده‌اند، را به کار می‌گیرد. روش جنگل تصادفی برخلاف درخت تصمیم‌گیری ساده، بسیار غیر قابل تفسیر است البته عمکرد عموماً خوب آن باعث شده است به الگوریتم محبوبی تبدیل شود.

نکته: جنگل تصادفی یکی از انواع «روش‌های گروهی» است.

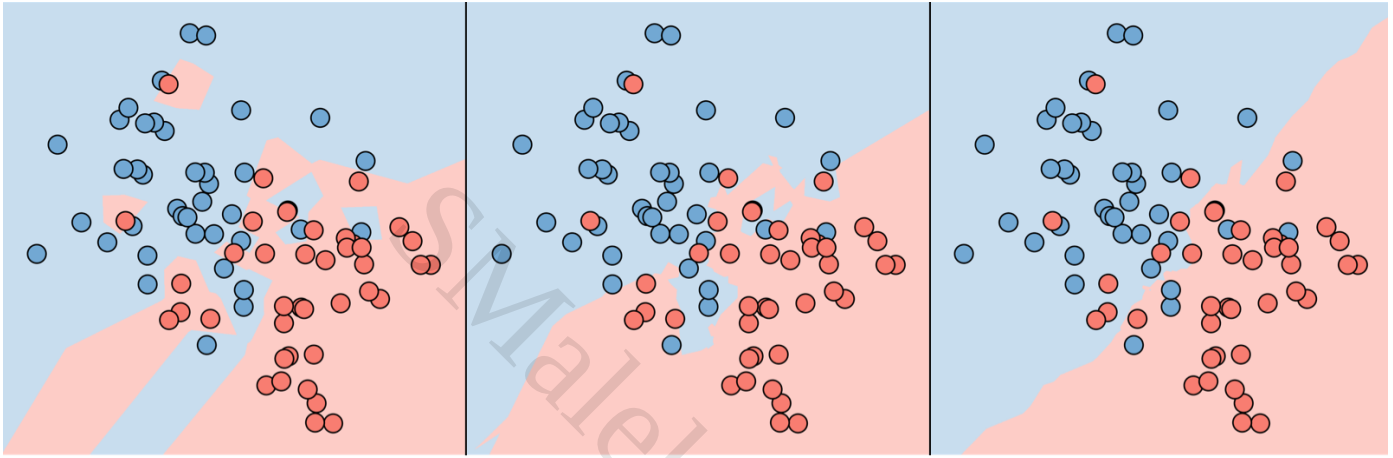
ترقی‌دادن - ایده‌ی اصلی روش‌های ترقی‌دادن ترکیب چند مدل ضعیف و ساخت یک مدل قوی از آن‌هاست. انواع اصلی آن به صورت خلاصه در جدول زیر آمده‌اند:

ترقی‌دادن گرادیانی	ترقی‌دادن سازگارشونده
چند مدل ضعیف روی باقی خطاها آموزش می‌یابند	برای خطاها وزن بالایی در نظر می‌گیرد تا در مرحله‌ی بعدیِ ترقی‌دادن، مدل بهبود یابد.

سایر رویکردهای غیر عاملی

k-همسایه‌ی نزدیک - الگوریتم k-همسایه‌ی نزدیک که عموماً با k-NN نیز شناخته می‌شود، یک الگوریتم غیرعاملی است که پاسخ مدل به هر نمونه داده از روی k همسایه‌ی آن در مجموعه دادگان آموزش تعیین می‌شود. این الگوریتم هم در دسته‌بندی و هم در وایازش استفاده می‌شود.

نکته: هرچه پارامتر k بزرگ‌تر باشد پیش‌قدر مدل بیشتر خواهد بود، و هر چه کوچکتر باشد واریانس مدل بیشتر خواهد شد.

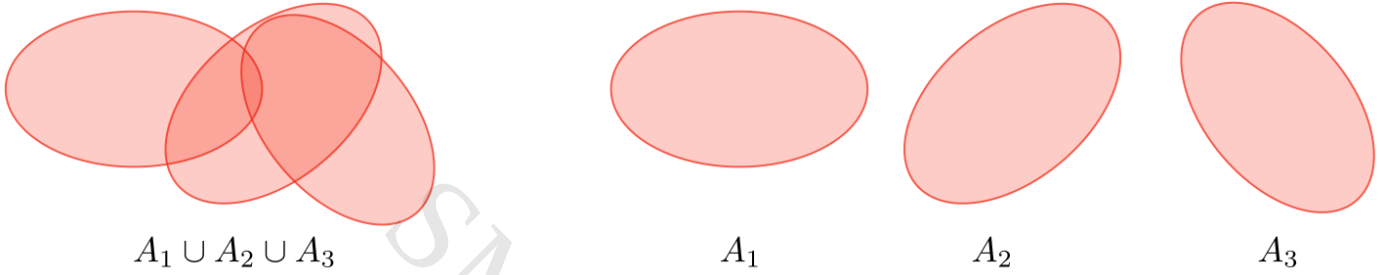


$k = 1$ $k = 3$ $k = 11$

نظریه یادگیری

کران اجتماع — اگر $A_1, \ldots, A_k$، k عدد رخداد باشد، داریم:

$$\boxed{P(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_k)}$$



نامساوی هوفدینگ — اگر $Z_1, \ldots, Z_m$، m عدد متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان و نمونه‌برداری‌شده از توزیع برنولی با پارامتر ϕ باشند و هم‌چنین $\widehat{\phi}$ میانگین آن‌ها و $\gamma > 0$ ثابت باشد، داریم:

$$\boxed{P(|\phi - \widehat{\phi}| > \gamma) \leqslant 2\exp(-2\gamma^2 m)}$$

نکته: این نامساوی به کران چرنوف نیز معروف است.

خطای آموزش — به ازای هر دسته‌بند h، خطای آموزش $\hat{\epsilon}(h)$ (یا همان خطای تجربی)، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\hat{\epsilon}(h) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 1_{\{h(x^{(i)}) \neq y^{(i)}\}}}$$

احتمالاً تقریباً درست **(PAC)** — چارچوبی است که در ذیل آن نتایج متعددی در نظریه یادگیری اثبات شده است و فرض‌های زیر را در بر دارد:

• مجموعه‌ی آموزش و مجموعه‌ی آزمایش از یک توزیع هستند.

• نمونه‌های آموزشی مستقل از یکدیگر انتخاب شده‌اند.

خرد شدن — برای مجموعه‌ی $S = \{x^{(1)}, \dots, x^{(d)}\}$ و مجموعه‌ای از دسته‌بندهای $\mathcal{H}$ می‌گوییم، $\mathcal{H}$ مجموعه‌ی S را اصطلاحاً خرد می‌کند اگر به ازای هر مجموعه‌ای از برچسب‌های $\{y^{(1)}, \dots, y^{(d)}\}$ داشته باشیم:

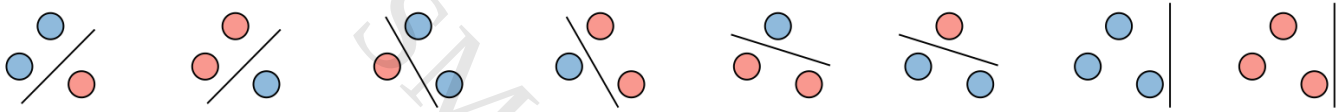
$$\boxed{\exists h \in \mathcal{H}, \quad \forall i \in [\![1, d]\!], \quad h(x^{(i)}) = y^{(i)}}$$

قضیه‌ی کران بالا — اگر $\mathcal{H}$ یک مجموعه‌ی متناهی از فرضیه ها (دسته‌بندها) باشد به طوری که $|\mathcal{H}| = k$ باشد و δ و m ثابت باشند، آنگاه با احتمالِ حداقل $1 - \delta$ داریم:

$$\boxed{\epsilon(\widehat{h}) \leqslant \left(\min_{h \in \mathcal{H}} \epsilon(h)\right) + 2\sqrt{\frac{1}{2m}\log\left(\frac{2k}{\delta}\right)}}$$

بُعد **VC** — بُعد Vapnik-Chervonenkis برای هر مجموعه‌ی نامتناهی از فرضیه‌ها (دسته‌بندها) $\mathcal{H}$ که با $\mathrm{VC}(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شود، برابر است با اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که می‌توان با استفاده از $\mathcal{H}$ آن را خرد کرد.

نکته: بُعد VC مجموعه‌ی $H = \{$همه‌ی دسته‌بندهای خطی در ۲ بعد$\}$ برابر با ۳ است.



قضیه **(Vapnik)** — به ازای $\mathcal{H}$ به طوری که $VC(\mathcal{H}) = d$ و هم‌چنین m تعداد نمونه‌های آموزشی باشد، با احتمالِ حداقل $1 - \delta$ داریم:

$$\epsilon(\widehat{h}) \leqslant \left(\min_{h \in \mathcal{H}} \epsilon(h)\right) + O\left(\sqrt{\frac{d}{m}\log\left(\frac{m}{d}\right) + \frac{1}{m}\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}\right)$$