۱۷۵ مسألهٔ منطقی

دی یرد بیزام، یانوش هرتسگ

ترجمهٔ پرویز شهریاری

دی یرد بیزام
یانوش هرتسگک

۱۷۵ مسألهٔ منطقی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نشر نی
تهران – ۱۳۶۶

نشر نی: تهران، بلوار کشاورز، پاساژ سامان، شمارهٔ ۷ (تلفن ۶۵۹۵۸۵)

بیزام، دی یرد ـ هرتسگ، یانوش

Bizám György — Herczeg János

۱۷۵ مسألهٔ منطقی

175 LOGIKAI FELADAT

مترجم : پرویز شهریاری

چاپ اول : ۱۳۶۶ ، تهران

تیراژ : ۳۳۰۰ نسخه

حروفچینی : مهدی

صفحه‌آرا : حسن نیک‌بخت

لیتوگرافی : موج

چاپ : طلوع آزادی

فهرست

از پیش گفتار نویسندگان

درکتاب چینی خود به‌نام «بازی با منطق»، که تنها به یك نوع از مساله‌های منطقی اختصاص داشت، کوشش کردیم، به تدریج و با عبور از ساده به‌دشوار، نشان دهیم که چه‌زمینهٔ بکر ومتنوعی درآن‌ها وجود دارد.[1] درپایان کتاب، دربارهٔ گستردگی وتنوع بی‌اندازهٔ قلمرو حاکمیت مساله‌های منطقی، اندکی صحبت کردیم و به خوانندگان قول دادیم که تلاش کنیم، آن‌ها را، دست‌کم دریك مورد قانع کنیم: قلمرو مساله‌های منطقی، ارزش آن را دارد که، بارها و بارها مورد بازدید ما قرار گیرد، چرا که در هرزاویهٔ آن، به نکتهٔ تازه‌ای بر می‌خوریم. اکنون، وقت آن رسیده است که به‌قول خود (اگرچه، نه به‌طور کامل) عمل کنیم.

آن‌چه‌دراین کتاب‌جمع‌آوری‌شده‌است، نه‌به‌یك زمینه بلکه به‌زمینه‌های گوناگونی‌مربوط می‌شود که، ضمناً، خالی از مضمون‌های ریاضی نیستند. مساله‌های ازیك‌نوع را، کم‌وبیش، به‌دنبال‌هم‌آورده‌ایم. هررشته ازاین‌گونه مساله‌ها، به‌یك‌زمینه‌مربوط‌می‌شوند وشامل مساله‌هایی با«کالیبرهای»مختلف است: ازساده‌ترین تاعمیق‌ترین وبغرنج‌ترین مساله‌ها، تقریباً همه جا، برای حل‌هرمساله، باید به‌بررسی ریاضی‌آن (و البته، نه‌چندان‌بغرنج) متوسل‌شد.

با همهٔ این‌ها، به کسانی‌که کتاب اول ما را نخوانده‌اند، یادآوری می‌کنیم که، کتاب حاضر کاملاً مستقل است و هیچ‌گونه بستگی با آن ندارد.

---

۱. کتاب «بازی با منطق» هم، دردست ترجمه است و امیدواریم توفیق انتشار آن پیدا شود.

اصل‌هایی را که برای تنظیم مساله‌های این کتاب در نظر گرفته‌ایم، مثل کتاب قبلی، چنین‌اند:

۱. مساله‌هایی در کتاب گذاشته شده است که، برای حل آن‌ها، به‌درك ریاضی خاصی، نیاز نباشد.

۲. برای تنظیم شکل‌های مساله، همیشه از یك حادثهٔ عادی و آشنا ویا، برعکس، از یك حادثهٔ افسانه‌ای و طنزآلود آغاز کرده‌ایم، ولی در هر حال، موقعیت مساله، کاملاً مفهوم است، دلیل این‌که، مساله‌ها را، به‌این صورت تنظیم کرده‌ایم، این است که‌می‌خواستیم، خوانندهٔ خود را، به‌صورتی نامحسوس و بدون این که به دشواری برخوردکند، با یك مفهوم مهم و اساسی، آشنا کنیم: ساختن مدل ریاضی یك موقعیت مفروض در رسیدن به مرحله‌ای از انتزاع ریاضی.

۳. هر مساله‌ای، یك اندیشهٔ ریاضی با خود دارد. استدلال‌هایی که، برای حل مساله‌ها ، مورد استفاده قرار گرفته است، در واقع شامل همان عنصرهایی هستند، که برای اثبات قضیه‌های مختلف ریاضی به‌کار می‌روند. به‌همین مناسبت، باید گفت که، کتاب ما، مجموعه‌ای از معماها نیست، بلکه مجموعه‌ای است از مساله‌های منطقی که، برای حل آن‌ها، می‌توان از توانائی‌هائی که ضمن حل مساله‌های عادی («دبیرستانی») ریاضی به دست آمده است، استفاده کرد و استدلال‌هایی را به‌کار برد که ، در ریاضیات، دیده می‌شوند.

۴. حل کامل مساله‌ها، با دقت منطقی ، داده شده است. بسیاری از راه حل‌ها، با مقدمه‌ای راهنما آغاز و با یادداشت‌هایی پایان یافته‌اند.

۵. تلاش کرده‌ایم، تا به خواست گروه‌های گوناگونی از خوانندگان پاسخ داده و آن‌ها را خرسند کرده باشیم. از آن‌جا که ، در این کتاب، توانسته‌ایم خیلی بیش از کتاب قبلی، به‌نیت خود برسیم، به‌خود حق دادیم، آن را «گلزار منطق»[1] بنامیم. اجباری در این نیست که، همهٔ مساله‌های یك ردیف را حل کنید. خواننده می‌تواند، هر جا که لازم بداند ، یك رشته را

---

۱. در ترجمه صلاح براین‌دیدیم که نام کتاب‌را «۱۷۵ مسألهٔ منطقی» بگذاریم.م.

قطع کند و، بسته به تمایل خود، بــه سراغ مساله‌های ساده‌تر و یا دشوارتر برود.

ما تنها مساله‌هایــی را انتخاب کرده‌ایم کــه ، یا به‌صورت سنتی در «فولکلــور» ریاضیات دبیرستانی وجود دارند و یا به‌نحوی مــی‌توانسته‌اند به‌هدف ما کمك کنند.

بوداپست، آوریل ۱۹۷۴
دی‌یرد بیزام ـ یانوش هرتسگ

به‌خوانندهٔ این کتاب

این کتاب، در بخش‌های مختلفی تنظیم شده است تا بتواند خوانندگان بیشتری را راضی کند. هم کسانی که به‌تازگی وارد دبیرستان شده‌اند و هم کسانی که دانشکده و یا مدرسهٔ عالی را تمام کرده‌اند، می‌توانند در این کتاب، به‌موضوع‌هایی که برایشان جالب است، برخورد کنند. هم کسانی که می‌خواهند وقت آزاد خود را پر کنند ، هم آن‌ها که مایل به‌تقویت تفکر ریاضی خود هستند و هم فارغ‌التحصیلان رشتهٔ ریاضی، می‌توانند از این کتاب استفاده کنند. راضی کردن این قشرهای کاملا متفاوت ، با سلیقه‌ها و آموزش‌های گوناگون و حتی گاهی متناقض، کار ساده‌ای نیست ، به‌همین مناسبت، اگر خواننده‌ای، موردی یا بخشی را سازگار با هدف خود نمی‌بیند، می‌تواند آن را کنار بگذارد. در واقع این، نه‌یك کتاب بلکه چند کتاب است که پشت سرهم آمده و می‌توان، از آن، همچون «شاه کلید» استفاده کرد.

توصیه‌های زیر، می‌تواند به‌خواننده کمك کند تا راهنمای او، در انتخاب مسأله‌های مورد دلخواه او باشد.

برای آگاهی همهٔ خوانندگان

برای خواندن این کتاب، می‌توان از هر بخشی آغاز کرد. بخش‌های مختلف، ارتباطی به‌هم ندارند. توصیهٔ ما به‌خواننده این است که همهٔ کتاب را، از اول تا آخر، مطالعه کند، ولی در توصیهٔ خود هیچ اصراری نداریم.

کتاب، تنها شامل مسأله‌های سرگرم کننده نیست: بسیاری از مسأله‌ها،

زمینه‌ای کاملا جدی دارند. به‌همین مناسبت، ازخواننده می‌خواهیم،همچون یك رمان، به‌این کتاب نگاه کند: ازبرخی جاها می‌توان به‌سرعت گـذشت، ولی در بعضی موردها، باید با حوصله و دقت برخورد کرد.

هرجا، به «حروف خوابیده» برخوردکردید، توجه بیشتری داشته باشید: جواب درست و دقیق مساله، یا بعضی نکته‌های اساسی درمورد آن، با این «حرف‌ها» چاپ شده است.

در بعضی موردها، برای یك مسأله، چند راه حل آورده‌ایم. انتخاب راه حل‌های مختلف، تصادفی نبوده است، بلکه همیشه، به‌یك هدف‌آموزشی و یا به‌یك جنبهٔ منطقی نظر داشته‌ایم. (مثلا، معمولا، راه حل اول ساده و روشن است، در حالی‌که راه حل دوم، کوتاه و ظریف.)

به کسانی‌که تنها بـه مساله‌های سرگـرم‌کننده، علاقه منـدنـد توصیه می‌کنیم که، مساله‌ها را، به تصادف برای حل انتخاب نکنند، زیرا بسیاری از مساله‌ها، مثل حلقه‌های یك زنجیر بـه هم مربوطاند و، برای حل یکی، باید دیگران را هم حل‌کرد. این‌گونه مساله‌ها را، باعلامت دو حلقه‌زنجیر، به‌صورت زیر، مشخص‌کرده‌ایم.

ممکن است، حل مساله‌ای دشوار بـه‌نظر آیـد و، حتی، خواننده نتواند از عهدهٔ حل آن برآید، ولی وقتی چند مسالهٔ دیگر وابستهٔ به آن را حل کرد، «کلید رمز» را به‌دست می‌آورد وموفق‌می‌شود، مسالهٔ مورد نظرخود راهم، حل کند.

این را هم یادآور می‌شویم‌که، بارها، برای طرح صورت یك مساله، ازشرطها و گزاره‌هایی استفاده کرده‌ایم،که در مسالهٔ قبل از آن، طرح شده است. این وضع، وقتی پیش آمده است‌که، برای طرح مساله تازه، تنها باید بخش‌کوچکی ازشرطهای مسالهٔ قبلی را تغییر می‌دادیم. درچنین موردهایی، خودرا ناچار نکرده‌ایم‌که، دوباره، همهٔ شرطهای مسالهٔ قبلی را تکرارکنیم. بنابراین، به خواننده‌ای‌که، به تصادف، جایی ازکتاب را باز می‌کند، توصیه

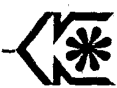
می‌کنیم که، اگر به چنین مساله‌ای برخوردکرد، حوصله به خرج دهد و به مساله یا مساله‌های قبل ازآن مراجعه کند.

مثلاً، از شرطهای مساله‌های ۵۵، ۸۶ و ۶۸ که برای بسیاری از مساله‌های دیگر استفاده شده است. خواننده باید، بی‌تردید با قانون‌های «لوتـوی حرفی» (ابتدای بخش نهم) و «جدول عـددهای متقاطع» (ابتدای بخش دهم) آشنا باشد تا بتواند از عهدهٔ حل ۲۴ مسالهٔ بخش نهم و یا ۲۲ مسالهٔ بخش دهم برآید. همچنین، برای حل مساله‌های ۱۴۸ تا ۱۵۱، باید به رویه وعادت مردم‌آبادی‌های جزیرهٔ گویان (صفحهٔ ۱۲۰) آشنایی‌داشت

ضمناً، از خواننده، حتی اگـر نمی‌خواهد تمام‌کتاب را به طور منظم دنبال کند و در جست و جوی مساله‌های مـورد علاقهٔ خود است، خواهش می‌کنیم از راهنمایی‌های زیـر استفاده کند تا، بـا سادگی بیشتری، به حل مساله توفیق پیدا کند.

از خواننده‌ای کـه دارای استعداد ریاضی است و یا می‌خواهد آن را تقویت کند، می‌خواهیم، فصلی را انتخاب کند و آن را، تا آن‌جا دنبال کند، که مورد علاقهٔ اوست. ممکن است گاهی بـه نظرش برسدکه، اگر تغییری در صورت مساله بـدهد، با نکتهٔ تازه‌ای روبـه رو می‌شود. دراین حالت، مسالهٔ تازه وقتی جالب خواهد بودکه بتوان به کمك مساله‌های موجود در کتاب، آن را حل کرد.

کسی که بـه دنبال مساله‌های دلخواه خـود است و نمی‌خواهد همهٔ کتاب را، به‌طور منظم، دنبال کند، بهتر است از «علامت‌های راهنمائی» که درکنار عنوان هر مساله وجود دارد، استفاده کند:

 ـ آغاز (و نخستین مسالهٔ) سری،

 ـ مساله‌ای از همان سری،

 ـ پایان (و آخرین مسالهٔ) سری.

مساله‌هایی کـه دریك سری قـرار دارند، یکسان نیستند: بین آن‌ها، مساله‌های دشوارتری وجود دارد که، گاهی، بسیار جالب‌اند و برای حل آن‌ها، باید به استدلال‌های ظریفی متوسل شد.

گاهی بین مساله‌های یك سری ، بـه مسالـه‌هایی بر می‌خورید که با «علامت راهنمائی» مشخص نشده‌اند. این مساله‌ها هم، از نظر مضمون، با مساله‌هـای مجاور خود، نزدیك‌اند و ، بـه همین مناسبت، آن‌ها را در بین مساله‌های سری جا داده‌ایم.

اگر مساله‌ای از یك بخش، موجب ملامت و خستگی خواننده شده، بهتر است آن را رها کند و بـه بخش بعدی برود ویـا، برای مدت کوتاهی، کتاب را ببندد و کنار بگذارد.

یـادآوری این مطلب ضروری است کـه، خواننده ، بهتر است ابتدا خود، به حل مساله بپردازد و، سپس، راه حل، جواب و استدلال‌های خود را با آن چه درکتاب آمده است، مقایسه کند. چه‌بسا که، راه حل خواننده، ساده‌تر از راه حل کتاب درآید.

ضمن برخود با مساله‌ها، به‌این «نشانه‌ها» هم توجه داشته باشید:


ـ مساله‌ای که باید توجه خاص به‌آن کرد.


ـ مساله‌هایی در «سطح بالاتر»، که برای هر دوستدار ریاضیات، می‌تواند بسیار جالب باشد (البته، بـه شرطی کـه قبلاً ، با آن مواجه نشده باشد).


ـ مساله‌هایی که برای خوانندگان جوان‌تر خود گذاشته‌ایم.

با تجربه‌ای که پیدا کرده‌ایم، می‌توانیم امیدوار باشیم که، مساله‌های اخیر، بتواند مورد استفادهٔ بچه‌های ۶ تا ۱۲ سال قرار گیرد (البته، نباید از

آن‌ها انتظارداشت که، باهمان استدلال دقیق ومنطقی بزرگترها، پیش‌بروند).

برای معلمان ریاضی هم، توصیه‌هایی داریم:

I. مساله‌ها را دراین جا، نسبت به مضمون ریاضی آن‌ها تقسیم‌بندی می‌کنیم. دراین تقسیم‌بندی، به‌حل مساله‌ها و روش‌هایی که درآن‌ها به‌کار رفته است، نظر داریم [علامت *، به‌معنای آغاز سری جدیداست].

شباهت (قیاس) ، منجرشدن يك مساله به مساله‌ای دیگر:

۳۴، ۳۵، *۳۶، *۵۰، ۵۱، *۴۴، ۵۴.

۳ ، ۴ ، *۵، ۶، *۶۹، *۹۵، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، *۱۲۸، ۱۲۹، *۱۴۳، ۱۴۴، *۱۵۸، ۱۵۹.

تقارن منطقی:

۱۴، *۸۱، ۸۵، *۱۷۰.

مساله‌های بدون جواب:

۲۶، *۸۲، ۸۳، ۸۴، *۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۱۸، *۱۲۰، ۱۲۹، ۱۳۳، ۱۳۵، *۱۵۳، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹.

مساله‌هایی‌که چند جواب دارند:

۱۰۸، ۱۱۴، ۱۱۸، *۱۲۰، ۱۳۴، ۱۳۵، *۱۵۳، *۱۵۷، *۱۶۲.

روش استقرای ریاضی

۲۴؛ مثال متناقض: ۲۴، ۲۵.

۲۷، ۲۸، *۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، *۸۹، ۹۲، ۹۴، ۱۷۴*، ۱۷۵.

[روش برگشتی: ۷۲، ۸۰، ۱۲۴ (یادداشت ۲)].

مساله‌های خاص:

۱۵، ۲۱، ۲۲ ، *۲۴، ۲۵ ، *۲۷، ۲۸ ، ۲۹ ، ۳۳ ، *۶۳، ۶۴، ۶۵، *۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۸، *۸۵، *۸۸، ۸۹.

تعمیم:

۳۳، *۳۴، *۴۷، ۴۸، *۵۳، *۵۴، *۵۶، ۵۹، ۶۵، ۶۷، ۶۸، ۶۹ ، *۷۰، ۷۱ ، ۷۲، *۷۳، ۷۶، *۷۹، ۸۰، *۸۱، ۸۵، *۸۶، ۸۷،

۸۸، *۹۱، ۹۲، *۱۰۶، *۱۳۸ ، ۱۳۸ ، *۱۴۴ (یادداشت) ، *۱۶۲ (یادداشت ۲)، *۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵.

برخی مفهوم‌های اصلی منطق ریاضی:

تمامی بخش یازدهم (۱۴۱ تا ۱۶۳).

اصل دیریکله:

۱۵، *۲۲، تمامی بخش پنجم (۵۵ تا ۶۹).

تابع، رابطه:

۴۸، *۵۵ تا ۶۸، *۷۹، ۸۰، *۸۹ تا ۹۲، *۱۷۳.

(این مثال‌ها ، کاملاً با آن چه معمولاً در دبیرستان داده می‌شود، متفاوتند و به دانش‌آموزان، امکان درك عمیق‌تر مفهوم تابع و رابطه را فراهم می‌آورند.)

ترکیب، تقسیم، مرتب‌کردن:

۳ تا ۶، *۱۵ ، ۲۴ ، *۲۶ تا ۳۳، *۳۴ تا ۳۸، *۳۹، ۴۰، *۷۰، ۷۱، *۱۵۵ (راه‌حل‌دوم)، ۱۶۱، *۱۶۵ (راه‌حل دوم)، *۱۶۶، *۱۶۷، ۱۶۸، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳.

بخش‌پذیری، نظریهٔ عددها:

۲۷ (راه حل سوم)، ۲۹، ۳۳ (راه حل دوم)، *۴۶، ۴۷ (تعمیمی که ضمن حل داده شده است)، *۹۳.

و جدولهای مربوط به عددهای متقاطع ، به خصوص ۱۲۰، ۱۲۲، ۱۲۴، ۱۳۶.

معادله‌های دیوفانتی:

۳۹ ، ۱۴۰ (اگر چه، در این دو مسأله ، از شیوه‌های جبری استفاده نشده است)، *۴۳ تا ۴۸؛ به‌خصوص، یادداشت حل مسالهٔ ۴۸ را ببینید.

II. دراین جا ، مساله‌ها را، نسبت به توان دانش‌آموزان تقسیم کرده‌ایم [در ترجمه، با نوع کلاس‌های مرسوم درآموزش و پرورش ایران تطبیق داده شده است]:

برای کلاس‌های راهنمای تحصیلی

۱) ۹۶، ۱۱۰، ۱۱۶، *۷، *۱۵، ۱۶، *۱۴۱.

۲) ۱۰۸، ۱۰۹، *۳ تا ۶، *۱۷ تا ۲۱، *۱۴، *۱۴۲.

۳) ۱۰۹، ۱۲۰، *۹، ۱۰، *۲۳، ۲۴، *۳۴.

۴) بحث دربارهٔ مساله‌های ۳۴، ۳۵، *۱۳۲ تا ۱۳۵، *۲۵، ۸۱.

۵) ۱۳۷ تا ۱۴۰، *۳۶ تا ۳۸، *۸۲ تا ۸۴.

۶) ۱۱ تا ۱۳، *۸۶ تا ۸۸، *۱۴۳، ۱۴۴.

۷) ۹۵، *۱۰۰ تا ۱۰۷، *۳۹، *۸۵، *۱۴۵.

۸) ۱۲۲ تا ۱۲۵، *۴۳، *۹۰ تا ۹۲، *۱۴۷ تا ۱۴۹.

۹) ۴۴ تا ۴۶، *۹۳، ۹۴، *۱۵۰.

۱۰) ۴۷، ۴۸، *۱۲۷ تا ۱۲۹، *۱۵۱.

برای سال آخر راهنمایی و سال‌های اول و دوم نظری

۱) ۵۵ تا ۵۷، *۱۱۳ تا ۱۱۵، ۱۱۸.

۲) ۵۸، ۵۹، *۱۵۲، ۱۵۳.

۳) ۱۶۴، ۱۶۶، *۱۵۴.

۴) ۶۰، ۶۱، ۶۲، *۱۵۵ تا ۱۵۹.

۵) ۱۶۵، *۱۶۰.

۶) ۶۳ تا ۶۶، *۱۶۱ تا ۱۶۳.

سال‌های دوم و سوم نظری

۱) ۷۹، ۸۰، *۱۶۷ تا ۱۶۹.

۲) ۱۱۷، *۱۳۶، *۷۳، *۱۷۰، ۱۷۱.

۳) ۷۴، ۷۵، *۱۷۲.

۴) ۷۶، ۷۷، ۷۸.

سال‌های سوم و چهارم نظری:

۱) ۲۲، *۷۰.

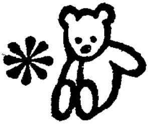
۲) ۲۶ تا ۲۸، *۷۱.

۳) ۳۰ تا ۳۳، *۷۲.

۴) ۸۹، *۱۷۳ تا ۱۷۵.

طبیعی است کـه دانش‌آموزان هـر کلاسی، می‌توانند از مساله‌های مربوط به کلاس‌های قبل هم استفاده کنند. لزومی به توضیح ندارد که، یك معلم آزموده، می‌تواند احتمالاً بـه ترتیب دیگری هم، این تقسیم‌بندی را انجام دهد.

بخش اول
اندکی فکر



۱. شماره تلفن فراموش شده

در اجتماعی از بخش «پست»[1]، این گفت و گو جریان داشت:

ـ کاتی من کار واجبی با پیشتا دارم و باید هرچه زودتر به او تلفن کنم. ولی هیچ کس، دراین جا، شمارهٔ تلفن اورا به‌یاد ندارد. ازدفترراهنمای تلفن هم چیزی عایدم نشد: این راهنما وقتی چاپ شده است که هنوز پیشتا تلفن نداشت.

دوستان حاضر، کوشش کردند، آگاهی‌های پراکندهٔ خود را در این باره جمع کنند.

ـ (کاتی): من خوب به‌یاد دارم که نیمهٔ دوم شمارهٔ تلفن پیشتا، چهار برابر نیمهٔ اول آن است.

ـ (یوشکا): بهتر است شمارهٔ شش رقمی تلفن را، به جای دو قسمت، به سه قسمت تقسیم کنیم. به‌یاد دارم که دو رقم وسط شمارهٔ تلفن پیشتا، یعنی رقم‌های سوم و چهارم، با هم برابر بودند.

ـ (ایلونکا): چیزی که‌من می‌دانم، این است که رقم دوم شماره تلفن، دو برابر رقم اول آن بود. بالاخره فدری، چهارمین نفر این جمع، توانست به‌یاد بیاورد که رقم سوم شمارهٔ موردنظر یا دو برابر رقم دوم آن و یا دو واحد بیشتر از رقم دوم بود؛ ضمناً، یکی از این دو رقم ـ یا رقم دوم و یا رقم سوم ـ برابر ۲ بوده است. فدری نتوانست چیزی بیشتر به خاطر بیاورد.

این‌ها، همهٔ آگاهی‌هایی بود که دوستان توانستند دربارهٔ شمارهٔ تلفن موردنظر به یاد بیاورند.

شمارهٔ تلفن پیشتا چند است؟

---

۱. مؤلفان، بوداپست را به دو بخش «بودا» و «پست» تقسیم کرده‌اند.

۲. تاکتیک عجیب

[لوتو *loto*، عبارت است از بازی با کارت‌های مخصوصی که، روی آن‌ها، ردیف‌هایی از عدد چاپ شده است. یکی از شرکت‌کنندگان دربازی، شماره‌هایی را که در فیش‌های خاصی نوشته شده است، می‌خوانند و بقیه، روی کارت خود، آن‌ها را خط می‌زنند (یا روی آن‌ها را می‌پوشانند). کسی برنده است که، قبل ازهمه، یك یا چند ردیف ازعددها را روی کارت خود خط زده باشد. لوتو از سدهٔ شانزدهم و درایتالیا معمول شد و بعد، به‌تدریج، به سایر نقطه‌های جهان راه یافت. لوتوهای ویژه‌ای برای بچه‌ها وجود دارد که روی کارت‌های آن‌ها، به جای عدد، از تصویر جانوران و گیاهان و غیره استفاده شده است.

درشکل ساده‌ترخود، می‌توان ماهیت لوتو را به‌این ترتیب شرح داد (که‌این‌مساله‌هاهم،براساس‌آن، طرح‌شده‌است.) هریك از شرکت‌کنندگان در بازی، از بین عددهای درست از ۱ تا ۹۰، پنج عدد را به‌میل خود درنظر می‌گیرد. بعد از انتخاب، بین عددهای از ۱ تا ۹۰ قرعه‌کشی می‌شود. کسی برنده است که دست کم، دو شماره ازپنج شماره‌ای را که قرعه‌کشی‌شده است، حدس زده باشد. هر چه تعداد شماره‌هایی که درست حدس زده‌است، بیشترباشد، اندازهٔ برداوبیشتربه‌حساب می‌آید. گردانندهٔ قرعه‌کشی، دقت می‌کند تا شانس بیرون‌آمدن هیچ شماره‌ای باشانس بیرون‌آمدن شماره‌های دیگر، متفاوت‌نباشد. بنابراین، شانس‌برد دوستدارلوتو، درهمهٔ موردها وبه هرترتیبی که ترکیب پنج شماره را انتخاب کند، یکی است.]

a. یانوش، ضمن بازی لوتو، از تاکتیك عجیبی استفاده می‌کرد: او عددهارا به‌صورتی انتخاب می‌کردکه‌یك‌شکل متقارن‌تشکیل‌دهند (شکل۱).

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	~~۳۵~~	۳۶	~~۳۷~~	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵
۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	~~۵۱~~	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	~~۶۵~~	۶۶	~~۶۷~~	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	~~۲۳~~	~~۲۴~~	~~۲۵~~	~~۲۶~~	~~۲۷~~	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵
۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰

۱	۲	~~۳~~	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	~~۳۳~~	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵
۴۶	۴۷	~~۴۸~~	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	~~۶۳~~	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	~~۲۰~~	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	~~۳۴~~	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵
۴۶	۴۷	~~۴۸~~	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	~~۶۲~~	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
~~۷۶~~	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	~~۱۵~~
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	~~۲۹~~	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	~~۴۳~~	۴۴	۴۵
۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	~~۵۷~~	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	~~۷۱~~	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰

~~۱~~	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۶	~~۱۷~~	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	~~۳۳~~	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵
۴۶	۴۷	۴۸	~~۴۹~~	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	~~۶۵~~	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	~~۲۶~~	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	~~۴۲~~	۴۳	۴۴	۴۵
۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	~~۵۸~~	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	~~۷۴~~	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	~~۹۰~~

شکل ۱

دوست او، این تاکتیك را نمی‌پسندید و مرتباً تکرار می‌کرد:

ـ تو احمقی یانوش ! کجا دیده شده است که شماره‌های برنده ، یك شکل متقارن را بسازند؟ تاآن‌جاکه من می‌دانم ، شماره‌های برنده، همیشه به‌صورتی کاملاً بی‌نظم، روی کارت پراکنده‌اند. اگر می‌خواهی برنده‌شوی، از این شیوه صرف‌نظر کن و شماره‌ها را به‌تصادف انتخاب کن.

ولی یانوش هیچ‌اعتنایی به‌این‌حرف‌ها نمی‌کرد وزیرلب‌تکرارمی‌کرد:

ـ هیچ فرقی نمی‌کند!

چه‌کسی حق دارد: یانوش یا دوست او؟

b. انتقاد دایمی دوستان،سرانجام در یانوش اثرکرد: او ازشکل‌های متقارن درکارت صرف‌نظر کرد؛ ولی تـاکتیك عجیب‌تری را پیش گرفت: او هربار، درست یکی از همان پنج شماره‌ای را انتخاب می‌کردکه در هفتهٔ‌قبل برنده شده بود . این تـاکتیك ، اعتراض تند همسر یانوش را برانگیخت و دائماً تکرار می‌کرد:

ـ چرا ایـن‌قدر بی‌عقلی می‌کنی ؟ بیست سال است‌که مردم بـا لوتو بازی می‌کنند. حتی یك بار هم پیش نیامده است‌که شماره‌های برنده ، در دو مورد، یکی باشد. هرگز هم، این اتفاق نخواهد افتاد. تنهاگاهی پیش آمده است‌که یکی از شماره‌ها، دردو قرعه‌کشی، یکی باشد، ولی‌آن‌هم به‌ندرت. عـاقلانه این است‌که یکی از شماره‌های برندهٔ هفتهٔ قبل را انتخاب‌کنی و ، بقیه را، به‌تصادف در نظر بگیری.

ولی یانوش، همان پاسخی راکه به‌دوستانش می‌داد ، برای همسرش تکرارکرد:

ـ مگر فرقی هم می‌کند؟

چه‌کسی حق دارد: یانوش یا همسرش؟

۳. بازی قدیم باقانون جدید

به‌اعتقاد پیشتا، باید قرعه‌کشی بازی لوتورا، عصرها انجام‌داد و برای این‌که بازی دلچسب‌تر باشد و گروه بیشتری‌را دربر بگیرد، پیشنهاد می‌کند

که هر شرکت‌کننده ، به‌جای ۵ شماره، ۸۵ شماره را انتخاب کند. به‌نظر پیشتا ، کسی را باید برندهٔ کامل دانست که هر ۸۵ شماره را، درست حدس زده باشد.

در کدام حالت بازی لوتو، برنده‌شدن دشوارتر است : در حالتی که پیشتا پیشنهاد می‌کند یا درحالت سنتی؟

۴. «برخورد دقیق» در بازی جدید لوتو

ده‌نفر از دوستداران لوتو، کارت خودرا، بنا به‌قاعدهٔ پیشتا، پرکردند: هرکدام ازآن‌ها، ۸۵ شماره را روی کارت خود خط زدند.

به‌تقریب، چندنفرآن‌ها توانسته‌اند ۷۵ شماره یابیشتر ازآن‌را درست حدس بزنند؟

۵. شانس برد درلوتوی جدید

کدام دشوارتر است:

a. حدس ۸۴ شماره در لوتوی جدید، یا حدس ۴ شماره در لوتوی سنتی؟

b. حدس ۸۳ شماره در لوتوی جدید یا ۳ شماره درلوتوی سنتی؟

c. حدس ۸۲ شماره در لوتوی جدید یا ۲ شماره در لوتوی سنتی؟

۶. گونه‌های تازه‌ای دربازی لوتو

خواهش می‌کنیم حرف ما را نادرست تعبیر نکنید : ما به‌هیچ‌وجه خیال نداریم روش‌های «کاملاً مطمئن» و «بدون باخت» را در بازی لوتو به‌شما معرفی کنیم. موضوع بحث ما در این مسیر نیست. وقتی که پیشتا ، تغییری‌دربازی به‌وجودآورد و آن‌را اصلاح کرد ، خیلی‌ها ناراحت شدندکه

چرا این فکر به‌ذهن‌آن‌ها نرسیده بود و ، به‌همین مناسبت ، تصمیم گرفتند، روش‌های ابداعی خاص خود را، در بازی لوتو، پیشنهاد کنند. از بین کسانی که پیشنهادهایی برای «برهم‌زدن» روش سنتی بازی داشتند ، ۳ مورد را آموزنده و دارای تازگی‌های اساسی یافتیم. مثلاً ، یوشکا پیشنهاد کرد ۲۵ شماره را از بین ۶۰ شماره حدس بزنیم و آنوشکا می‌گفت‌که ۳۰ شماره را از ۵۵ شماره انتخاب کنیم.

درکدام‌یك از این دوحالت، بازی لوتو دشوارتر است؟

۷. بازی شطرنج باچندنفر به‌طور هم‌زمان

آندراش و بهلا ، امیدهای بزرگی برای شطرنج‌اند. آن‌ها، با این‌که هنوز دبیرستان را تمام نکرده‌اند، شطرنج‌بازان بزرگسال‌آن‌هارا می‌شناسند و برای پیروزی‌های‌آن‌ها ارزش قایل‌اند.

فدری، برادرکوچکترآندراش در دبستان درس می‌خواند.او استعداد ریاضی فوق‌العاده‌ای دارد، ولی بازی شطرنج را به‌تازگی‌آغازکرده است و تنها می‌داندکه مهره‌هارا چگونه بایدحرکت‌داد. باوجود این، وقتی‌آندراش وبهلا روایت می‌کردندکه چگونه، استادان‌بزرگ‌شطرنج، بدون‌هیچ‌زحمتی، با ۴۰ تا ۵۰ نفر به‌طور هم‌زمان بازی می‌کنند، بلافاصله گفت:

ـ من همین‌حالا حاضرم، درمقابل دو نفر، به‌طور هم‌زمان، بازی کنم. نمی‌خواهید با من بازی‌کنید؟

آندراش ودوست او، دربرابر این پیشنهاد غیرمنتظره، مات ومبهوت شدند. یك‌بچهٔ دبستانی ، که تازه بـا حرکت مهره‌هاآشنا شده است، به‌خود جرأت می‌دهد تا دو شطرنج‌باز قوی و پرتجربه را به‌مبارزه دعوت‌کند !

ولی اوتصمیم گرفته بود تا، روی دوصفحهٔ شطرنج، باآن‌ها بازی‌کند و پیشنهاد کرد:

ـ تنها اجازه بدهید، نحوهٔ انتخاب مهره‌ها ، برای بازی، بامن باشد. بهلا ، مهره‌های خود را، سفید یا سیاه ، انتخاب‌کند، آن‌وقت، من در برابر آندراش، مهره‌های خود را انتخاب خواهم‌کرد.

با توجه به‌این‌که پیشنهاد فدری غیرمنطقی نبود، آندراش و به‌لا با آن موافقت‌کردند و مهره‌هارا روی دوصفحهٔ شطرنج چیدند. آندراش گفت:

ـ برادرکوچك من ، اگر تو بتوانی دست‌کم در برابر یکی از دو نفر ما شکست نخوری، من حاضرم کلاه خودم را بخورم.

در پایان مبارزه، خطری جدی کلاه آندراش را تهدید می‌کرد و تنها بعد ازآن‌که فدری از قرار اولیه و از حق خود صرف‌نظر کرد، کلاه‌آندراش سالم ماند وخودآندراش از خوردن‌آن معاف شد.

فدری چگونه توانست، دست‌کم در یکی از بازی‌ها، از شکست خود جلوگیری کند؟

[فدری،دربازی روبه‌رو، وقتی‌که باآندراش یا به‌لا به‌تنهایی‌بازی‌کند، بدون تـردید شکست می‌خورد. ضمناً، به‌این نکته هم توجه داشته‌باشیدکه فرد چهارمی در این صحنه وجود نداردکه،گمان‌کنیم، فدری از توصیه‌های او استفاده می‌کرده است .

رنگ مهره‌ها، در این دوبازی، نقش اساسی دارند: طبق قانون،بازی را سفید آغاز می‌کند . در بازی هم زمان باچندنفر، محدودیتی برای زمان، قایل نمی‌شوند .]

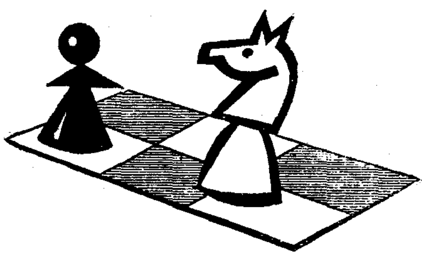
۸. ماراتون شطرنج

آندراش و به‌لا (که درمسألهٔ قبل باآن‌هاآشنا شدیم)، مبارزهٔ بزرگی را ، در بازی شطرنج، بین خود به‌راه انداختند . نتیجه‌ها را دریك «دستگاه شانزده‌تایی» خاص یادداشت‌کردند: ۱۶ بازی «مسابقهٔ‌کوچك» و۱۶مسابقهٔ کوچك (یعنی ۱۶ × ۱۶ یا ۲۵۶ بازی)،«مسابقهٔ بزرگ»را تشکیل می‌داد.

بعد از مبارزه‌ای سخت، پیروزی در مسابقهٔ بزرگ، نصیب‌آندراش شد. در مسابقه‌های کوچك، بانتیجهٔ ۱۰:۶ برنده شد (در ۱۰ مسابقهٔ‌کوچك بر به‌لا پیروز شد و در ۶ مسابقه از او باخت)؛ ولی پیروزی او در مسابقهٔ بزرگ، به‌حساب ۱۵۲:۱۰۴ بود. این نتیجه، باید قـاعدتاً موجب افتخار باشد (به‌لا، یك‌شطرنج‌باز ضعیف نبود وبه‌سادگی نمی‌شد اورا شکست‌داد)،

ولی‌آندراش ناراضی بود. او اعلام کرد :

ـ دستگاه شانزده‌تایی که ، برای محاسبهٔ امتیازها ، قبول کرده‌ایم، نمی‌تواند نسبت نیروهای ما را به‌درستی نشان‌دهد . من نه تنها بیشترین مسابقه‌های کوچك را از به‌لا برده‌ام ، بلکه در هر مسابقه‌ای هم‌که برنده شده‌ام ، پیروزی را با نتیجهٔ بالاتری نسبت به‌او به‌دست‌آورده‌ام . از ۱۰ مسابقهٔ‌کوچکی‌که برده‌ام، حداقل برتری من همان است‌که با نتیجهٔ ۶:۱۰ به‌حساب‌آمده است، ولی من حتی نتیجهٔ ۲:۱۴ هم داشته‌ام. حداکثر برتری به‌لا هم، در ۶ مسابقه‌ای که برده است ، همان نتیجهٔ نهائی ۶ : ۱۰ است ؛ ضمناً، تنها یك‌بار پیروزی بزرگی ازاین‌گونه داشت وبقیهٔ‌مسابقه‌های کوچك را با نتیجهٔ ۷:۹ و حتی $۷\frac{۱}{۲}:۸\frac{۱}{۲}$ برده‌است. به‌این‌ترتیب، دستگاه شانزده‌تائی



محاسبهٔ نتیجه‌ها، نمی‌تواند‌کامل باشد. مثلاً اگر حدمرزی را درنظربگیرید وفرض کنید ، من و به‌لا ، همهٔ پیروزی‌های خود را در مسابقه‌های کوچك، با نتیجهٔ ۰:۱۶ به‌دست‌آورده‌باشیم. در این‌صورت، من به‌اندازهٔ ۱۶ × ۱۰، یعنی ۱۶۰ دور بازی برنده بودم، و به‌لا تنها دو ۶ × ۱۶، یعنی ۹۶ دور، برنده می‌شد و مسابقهٔ بزرگ با نتیجهٔ ۹۶:۱۶۰ به‌نفع من تمام می‌شد. چطور ممکن است‌که در اوضاع واحوال‌کنونی، در مسابقهٔ بزرگ ، تنها با نتیجه ۱۰۴:۱۵۲ پیروز شده‌باشم ؟ هیچ‌دلیل دیگری ندارد، جز این‌که در محاسبهٔ امتیازها، اشتباهی شده‌باشد.

و آندراش، دوباره، به‌محاسبهٔ بردها و باخت‌های خود پرداخت.

چه‌اشتباهی ودرکجا پیش‌آمده است ؟

۹. محاسبهٔ متقابل

در گروه که‌ره‌کی، که شامل ۱۷ خاک‌بردار است، قانون نانوشته‌ای وجود دارد: همهٔ حقوق افراد، تا آخرین اکتشاف، به‌خانوادهٔ آن‌ها داده می‌شود. برای مخارج کوچک عضوهای گروه، تنها اضافه‌کارها پرداخت می‌شود. ولی ازآن‌جاکه، اغلب، ازکار اضافی خبری نیست، خاک‌برداران به‌پول جیبی خود متکی بودند به‌همین‌مناسبت، عضوهای گروه، قانون‌نانوشتهٔ دیگری هم، بین خود، برقرارکردند: با اولین خواهش، مبلغ‌های کوچک پول را، به‌یکدیگر قرض بدهند.

وقتی ما به‌ساختمانی رسیدیم که کارگران در آن‌جا زندگی می‌کردند، عمو شاندور، یکی ازعضوهای گروه، مشغول آماده‌کردن شام بود. بدون این‌که ازچراغ گازسوزآشپزی جدا شود، صدای خود را بلندکرد:

ـ ۵۰ فورینت به‌من قرض بدهید!

بلافاصله، سه‌نفر پاسخ دادند. یکی ازآن‌ها، یک‌اسکناس ۱۰ فورینتی ودونفردیگر هرکدام ۲۰ فورینت به‌سوی عموشاندور درازکردند. عموشاندور، بدون این‌که روی خود را برگرداند، پول‌ها راگرفت؛ او همچنان‌کار خود را ادامه می‌داد، حتی نفهمید چه‌کسانی به‌او قرض داده‌اند؛ تنها از دوستان خود تشکرکرد.

ماکه درآتش کنجکاوی می‌سوختیم، از عموشاندور پرسیدیم:

ـ شما قرض خود را به‌چه‌کسی برمی‌گردانید؟

ـ به سه دوستی که در گروه ما کار می‌کنند.

ـ یعنی به‌چه‌کسانی؟

ـ منظورتان چیست؟

ـ شما حتی نمی‌دانید، چه‌کسی این پول را به شما قرض داده است.

ـ نگران نباشید، من با همه تسویه‌حساب خواهم‌کرد! الان همه‌چیز را یادداشت می‌کنم ببینید!

عموشاندور، صفحهٔ کاغذی را ازجیب خود درآورد. روی این‌کاغذ

نوشته شده بود:

قرض گرفته‌ام	قرض داده‌ام
۲۰	۴۰
۳۰	۱۵
۴۵	۸۰
۶۰	

و عموشاندور، زیر عدد ۶۰ درستون سمت‌راست نوشت: ۵۰. سپس، باقیافهٔ کسی که کاردشواری را انجام داده است، صفحهٔ کاغذ را تا کرد، درجیب خود گذاشت و، دوباره، به کار تهیهٔ شام پرداخت.

ما با شگفتی بسیار به‌او نگاه کردیم، ولی او اضافه کرد:

ـ ناراحت نباشید ، من هم قرض ۱۰ فورینتی را نوشته‌ام و هم دو قرض ۲۰ فورینتی را.

ـ ولی شما ننوشتید، چه کسی این پول‌ها را به‌شما داده است؟

ـ درست است، من اسم کسی را ننوشتم. ولی، برای چه بنویسم ؟

معلوم شد که همهٔ عضوهای گروه ، «حساب» خود را به‌همین ترتیب نگه‌می‌دارند. عموشاندور، که فکر ما را خوانده بود، پیشدستی کرد:

ـ در نتیجه گیری عجله نکنید. در گروه ماهیچ گونه «دفترحسابداری» وجود ندارد. سر گروه ما، بدون آن‌هم، کارهای زیادی دارد، ما هم تصمیم گرفتیم او را از «حساب» کردن آزاد کنیم. دست کم، از یك‌جانب ، خاطرش آسوده می‌شود. البته، ازاو هم می‌توان قرض گرفت، خود او هم گاهی قرض می گیرد، ولی در این مورد، هیچ گونه یادداشتی نمی کند.

در واقع ، این‌توضیح عموشاندور ، چیزی را برای ما روشن نکرد؛ ولی او به‌توضیح خود ادامه داد:

ـ باید توجه کنید که هیچ کدام از ۱۷ عضو گروه ما ، از جای دیگری قرض نمی گیرند. ما تنها به‌هم قرض می‌دهیم. بچه‌های گروه دیگر می‌دانند که ما پول زیادی نداریم و، به‌همین‌جهت، تقاضای قرض از ما نمی کنند. آخر سال، قبل ازآن که به‌مرخصی برویم ، همه دور هم جمع می‌شویم و ، به‌طور کامل، با یکدیگر تسویه‌حساب می کنیم.

تنها بعد از این توضیح عموشاندور بود که توانستیم از روش کار آن‌ها آگاه شویم.

آیا شما هم متوجه شده‌اید؟

(گمان می‌کنم لزومی برتأکید این مطلب نباشد که، عضوهای گروه، باقرض‌دادن به‌یکدیگر، هیچ گونه درصدی‌را، بابت‌سود، به آن‌اضافه نمی‌کنند.)

۱۰. برخورد

شایعهٔ همیاری کارگران در گروه که‌ه‌کی و روش سادهٔ محاسبهٔ آن‌ها، در گروه‌های دیگر منتشر شد. بسیاری از گروه‌های دیگر، و از آن‌جمله گروه شیپوش، از روش گروه که‌ه‌کی پیروی کردند. ولی در این گروه، سرگروه‌را از وظیفهٔ نگه‌داشتن حساب‌های خود معاف نکردند، اولاً به‌این دلیل که، این سرگروه، چندان گرفتار نبود، ثانیاً به‌این دلیل که کارگران هنوز در کار «حسابداری» مسلط نبودند.

البته، آن‌ها هم به‌تدریج راه‌کار را یادگرفتند و به‌این نتیجه رسیدند که می‌توانند یکی از عضوهای گروه خود را از نگه‌داشتن «دفتر حساب» آزادکنند. در این‌باره دو نفر را نامزدکردند، بدون این‌که تصمیم جدی در بارهٔ یکی از آن‌ها بگیرند.

ولی، یکی از این دونفر، که به‌اهمیت کار توجهی نداشت، پیش خود تصمیم گرفت، خودرا ازاین «حسابداری» نفرت‌انگیز خلاص کند و، خودسرانه، یادداشت‌های خود را قطع کرد. اگر کارگر دوم هم، هم‌زمان با او، و بدون این‌که کلمه‌ای به‌کسی بگوید، کار نگه‌داشتن حساب خود را قطع نمی‌کرد، مشکل زیادی پیش نمی‌آمد. ولی نامزد دوم هم، با اطمینان به‌این‌که، همیشه، یکی از کارگران می‌تواند چنین حقی را به‌خود بدهد، کار نگه‌داری حساب خود را ادامه نداد.

بقیهٔ عضوهای گروه، تنها وقتی مطلع شدند که، این دونفر، «ورقهٔ حساب» خود را دور انداخته‌اند که می‌خواستند به‌حساب‌های متقابل رسیدگی کنند.

عموآندراش ، سرگروه، که از عمل این‌دو کارگر بی‌انضباط عصبانی بود، گفت:

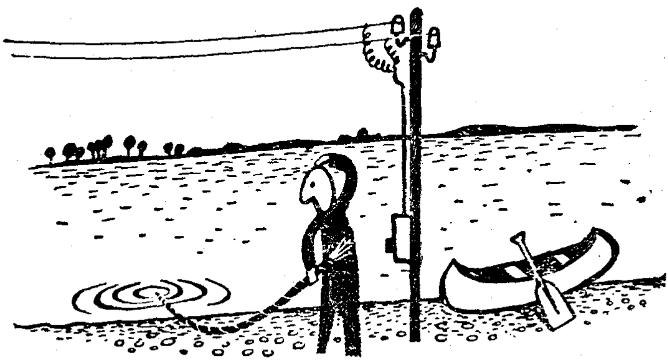
ـ با وجودی‌که همهٔ ما، صورت حساب‌های خود را ، منظم و بادقت نوشته‌ایم، به‌علت اهمال این‌دو نفر، نمی‌توانیم حساب‌ها را روشن کنیم.

a. آیا این استدلال درست است؟

b. اگر بیش از دو نفر از عضوهـای گروه ، خودسرانه از نگه‌داشتن حساب سر بازمی‌زدند، چه‌وضعی پیش می‌آمد؟

۱۱. سیم‌کشی

متصدی برق، کـه شما او را در شکل می‌بینید، روی مسأله‌ای، که چندان ساده نیست، به‌مغز خود فشار می‌آورد.



کابل سیم ، ته رودخـانه است. زیر پوستهٔ خـارجی کابل ، ۴۹ سیم ـ ۴۹ سیم عایق شده ـ وجود دارد . همهٔ سیم‌های داخل کابل، با یك‌رنگ عایق‌کاری شده‌اند، بنابراین، ازروی رنگ عایق‌کاری، نمی‌توان معلوم کرد که، انتهای کدام‌یك از سیم‌هایی‌که در یك طرف ساحل ، از کابل بیرون‌آمده است، باکدام‌یك ازانتهای سیم‌هایی‌که درساحل دیگر دیده می‌شوند، متناظر است! (دو انتها را وقتی متنـاظر می‌دانیم کـه متعلق به‌یك سیم بـاشند.) متصدی برق باید دوانتهای هرسیم را پیداکند و ، آن‌هـا را ، بـا یك عدد

شماره گذاری کند. درطول ساحل رودخانه، یك‌خط انتقال برق وجود دارد. ضمناً یك‌نمونه گیر و یك قایق هم در اختیـار متصدی برق است و با قـایق می‌تواند عرض رودخانه را طی کند.

متصدی برق، چندبار باید در عرض رودخانه برود و برگردد تامسألهٔ خود را حل کند؟

[به کمك نمونه گیر می‌توان فهمیدکه آیا ، سیم مفروض ، تحت‌فشار برق قرار دارد یانه! اگر نمونه گیر با سیمی تماس داشته باشدکه تحت‌فشار برق است، در انتهای‌آن، چراغی روشن می‌شود.]

۱۲. آیا تندتر نمی‌شود ؟

روشی راکه در حل مسألهٔ قبل، برای پیداکردن دو انتهـای متناظر هریك از ۴۹ سیم داخل کابل‌آوردیم، روشی پرزحمت بود، اگرچه متصدی برق، تنها یك‌باز با قـایق خود ، از یك ساحل رودخانه به‌ساحل دیگر آن رفت و، سپس ، برگشت. ولی ، بعد از برگشت ، خیلی وقت صرف‌کرد تـا توانست مأموریت خود را انجام‌دهد.

آیاکار متصدی برق را، نمی‌توان به‌نحوی ساده‌تر کرد؟

۱۳. تعمیم

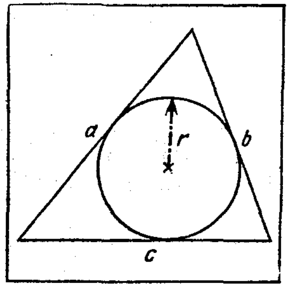
اگر زیر پوشش‌کابل مربوط به‌مسألهٔ ۱۲ ، به‌جـای ۴۹ سیم ، تعداد دلخواهی سیم ـ بیشتر یاکمتر ـ از زیرآب رودخانه عبورکرده باشد ، آیـا متصدی برق می‌تواند تنها بـا یك‌بـار رفت و برگشت از یك‌طرف به‌طرف دیگررودخانه، وظیفهٔ خود را انجام دهد؟

۱۴. رابطه‌های نادرست

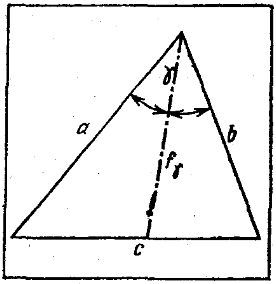
پیشتا، گرم‌حل مسألهٔ ریاضی خودبود، ولی‌موفقیتی به‌دست‌نمی‌آورد:

از هیچ راهی، به‌جواب نمی‌رسید . یوشکا ، برادرکوچکتر او، کـه استعداد ریـاضی فوق‌العاده‌ای داشت ، بـا احساس همدردی ، تلاش پیشتا را دنبال می‌کرد، ولی‌نمی‌توانست به‌او کمك کند؛ اودر کلاس پایین‌تری درس‌می‌خواند.

با وجود این، پیشتا ، اغلب و به‌صورتی پنهانی، از استعداد ریاضی برادر کوچکترش استفاده می‌کرد. این‌بار هم فکری به‌نظرش رسید؛ دفترخود را به‌یوشکا نشان داده و گفت:



شکل ۲



شکل ۳

ـ می‌بینی، این‌جا دورابطه نوشته شده است. من باید، به‌کمك‌آن‌ها، مقدارهـایی را محـاسبـه کنم (a ، b ، c ـ طـول ضلع‌هـای مثلث و S ـ مساحت‌آن).

(۱) شعاع دایرهٔ محاطی مثلث در شکل ۲

$$r=\frac{۲S}{a+b+c}$$

(۲) طول نیمساز زاویهٔ داخلی مثلث در شکل ۳

$$f_\gamma=\frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

یوشکا با دقت به‌رابطه‌ها نگاه‌کرد ، در چهرهٔ او حالت بدگمانی ظاهر شد و ضمن نشان‌دادن علامت رادیکال، پرسید:

ـ ببین پیشتا ، این‌علامتی‌که به V شباهت دارد، یعنی‌چه؟

ـ این، به‌معنای‌آن است‌که باید از عدد زیرآن، جذر گرفت.

ـ این کار را چگونه انجام می‌دهند؟

پیشتاکه نمی‌دانست چگونه جواب دهد، گفت:

ـ مشکل است آن‌را برای تو شرح دهم. به‌طور کلی، باید ازیك‌عدد، عدد دیگری به‌دست‌آورد.

ـ آیا هرچه عدد بزرگتر باشد، جذرآن هم بزرگتر است؟

ـ بله.

ـ در این‌صورت ، هردو رابطه غلط است ؛ چیزی درآن‌ها ، درست نوشته نشده است.

پیشتاکه شگفت‌زده شده بود، پرسید:

ـ از کجا فهمیدی؟ تو که قبلاً این رابطه‌ها را ندیده بودی. این رابطه‌ها را، معلم روی تخته سیاه نوشت.

ـ حق با توست، من آن‌ها را برای نخستین بار می‌بینم و نمی‌دانم از کجا به‌دست آمده‌اند. با همهٔ این‌ها اطمینان دارم که هردوی آن ها نادرست‌اند. چه‌بسا، وقتی‌که از روی تختهٔ سیاه رونویسی می‌کردی، دچار اشتباه شده‌ای.

سرآخر معلوم شدکه حق با یوشکا است: وقتی‌که پیشتا از روی تخته می‌نوشته است، در رابطهٔ (۱) یکی ازعلامت‌ها را عوضی و دررابطه (۲)، به‌جای یك حرف، حرف دیگری را نوشته است.

یوشکا ازکجا متوجه شد که رابطه‌ها نادرست است؟

علاوه براین ، او توانست، با کمی فکرکردن ، حتی رابطهٔ (۱) را اصلاح‌کند وطول شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را برحسب سه ضلع‌آن‌بنویسد.

بخش دوم

منظم کنیم

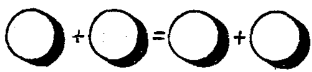
---

۱۵. مجموعهٔ ناقص I

یك روز عصر، پیشتای‌کوچك، دانش‌آموز سال دوم دبستان، باچهرهٔ

یك گناه‌کار، دفتر روزانهٔ خود را به پدر داد. همین‌طور هم بود! خانم معلم، چیز تازه‌ای در دفتر نوشته بود. پیشتا دوباره دسته‌گلی به‌آب داده بود! پیشتا، که سعی می‌کرد خود را تبرئه کند.

ـ می‌دانی پدر، خانم معلم از ما خواست، همان‌طور که روی نیمکت نشسته‌ایم، ۴ کارت را روی میز بگذاریم، به‌نحوی که، مجموع عددهای دو کارت اول برابر با مجموع دو کارت آخر باشد (شکل ۴).



شکل ۴

پدر پیشتا می‌دانست که در کلاس پسر او، به‌هریك از دانش‌آموزان ۱۰۰ کارت برای محاسبه داده شده است. روی هر کارت، یك عدد درست، از ۱ تا ۱۰۰ ، چاپ شده است. خانم معلم، دانش‌آموزان را وامی‌دارد تا روی این کارت‌ها، تمرین‌های جالبی را در زمینهٔ حساب انجام دهند. پیشتا ادامه داد:

ـ من از کار دوست کناری خودم استفاده کردم، زیرا کارت‌های خودم، موقع تنفس، ریخته بود و من تنها توانستم ۲۱ تای آن‌ها را جمع کنم. خانم معلم که متوجه مطلب شده بود، دفتر روزانهٔ مرا گرفت و، در آن،...

ولی پدر حرف او را قطع کرد:

ـ به‌چه مناسبت ، به کارت‌های دوستت احتیاج داشتی؟ از همان ۲۱ کارت می‌توانستی ۴ کارت را، طبق نظر خانم معلم ، انتخاب کنی.

ـ تو در این مورد اطمینان داری بابا؟ تو حتی نمی‌دانی کدام کارت‌ها برای من باقی مانده بود!

ـ مطمئنم پسرم ! کارت‌های خودت را بیار تا برایت توضیح دهم ، چگونه می‌توان این کار را انجام داد!

آیا اطمینان پدر پیشتا، پایه‌ای اساسی دارد؟ آیا در برابر پسرش ، بی‌آبرو نخواهد شد؟

۱۶. تردید

آیا با اطمینان می‌توان گفت‌که مسألهٔ قبل، جواب دارد ؟ بعضی‌ها، در این‌باره، تردید دارند و می گویند:

ـ البته، کاملاً ممکن است دوجفت عدد (عددهایی‌که روی کارت‌ها چاپ شده‌اند) پیدا شودکه مجموعی برابرداشته باشند. ولی‌آیا این،به‌معنای آن است که مسأله (مساله‌ای که خانم معلم به پیشتا و پیشتا به‌پدرش داده است) جواب دارد؟ ما درحل مسأله، به‌این نکته توجه نکردیم که ممکن است، یکی از کارت‌ها ، در دو جفت کارتی که مجموعی مساوی دارند، مشترك باشد. در چنین صورتی، به‌جای ۴ کارت ، سه کارت داریم و، از آن‌ها، نمی‌توان دوجفت کارت درست‌کرد.

این مطلب را، با یك مثال روشن می‌کنیم.

اگر برای پیشتا، تنها ۸ کارت با عددهای ۱،۲،۳،۴،۵،۲۰،۴۰ و ۸۰ باقی مانده بود و از اومی‌خواستند ۶ کارت راطوری پهلوی‌هم بگذارد که مجموع عددهای سه کارت اول برابر با مجموع سه کارت آخر باشد ، به‌سادگی می‌توان روشن کرد که مسأله جواب ندارد. البته می‌توان سه‌تایی‌هایی پیدا کرد که مجموع آن‌ها یکی باشند (مثل ۲۰+۵+۱ و ۲۰+۴+۲ یا ۸۰+۵+۲ و ۸۰+۴+۳) ، ولی در همهٔ آن‌ها، یك کارت مشترك ، وجود دارد. بنابراین، از بین این سه‌تایی‌ها، نمی‌توان ۶ کارت پیداکردکه ویژگی لازم را داشته باشند، زیرا، برای این منظور، باید از یك کارت، دوبار استفاده کرد.

و مگر ممکن نیست، برای حالت مجموع‌های دو جمله‌ای هم، همین وضع پیش آید؟

۱۷. تفاضل به‌جای مجموع

خانم معلم، مسألهٔ تازه‌ای به پیشتا داده است. این‌بار، باید ۴ کارت

را روی میز طوری کنار هم بچینند که تفاضل عددهای دو کارت اول ، بـا تفاضل عددهای دو کارت دوم، برابرباشد (شکل ۵). پیشتا که تجربهٔ تلخی

شکل ۵

از کار قبلی خود دارد، از کارت‌های دوست خود استفاده نمی‌کند و تصمیم می‌گیرد، با همان کارت‌هایی که برایش باقی مانده است، مسأله را حل کند.

عقیدهٔ شما چیست، آیا به‌انجام این عمل موفق می‌شود؟

۱۸. حیله‌ای تازه

فرض می‌کنیم، روی ۱۰ کارت (کارت‌هایی که مورد استفادهٔ پیشتا و هم‌کلاسی‌های اوست)، ۱۰عدد طبیعی نخستین، یعنی عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ چاپ‌شده‌باشد. از این ۱۰ کارت، ۵ کارت را به‌ما داده‌اند (والبته، برای ما معلوم نیست، کدام کارت‌ها). آیا می‌توان از این ۵ کارت، ۴ کارت را، به‌نحوی انتخاب کرد کـه تفاضل دو کارت اول، با تفاضل دو کارت آخر برابر باشد؟

A تأکید می‌کند که چنین عملی ممکن است . او از همان استدلالـی استفاده می‌کند که برای مسألهٔ ۱۵ به‌کار بردیم. کمترین تفاضل بین دوعدد از ۱ تا ۱۰ برابر است با ۱ و بیشترین تفاضل برابر است با ۹. دو عدد را هرجور انتخاب‌کنیم، تفاضل بین آن‌ها، یکی از عددهای ۱ تا۹ خواهد شد. بنابراین، بین تفاضل‌های دوبه‌دوی عددهای از۱ تا ۱۰، تنها ۹عدد نابرابر به‌دست می‌آید. ولی از بین ۵ کارت، می‌توان به‌تعداد$\frac{۵\times۴}{۲}$ ، یعنـی ۱۰ جفت انتخاب‌کرد. بنابراین، دست‌کم‌دو جفت از این کارت‌ها، تفاضلی برابر دارند.

ولی B اعتراض می‌کند:

ـ استدلال شما درست نیست ! در برابر شما این ۵ کارت قرار دارد (شکل ۶). چگونه می‌توانی ۴ کارت از بین آن‌ها انتخاب کنی که با شرط

شکل ۶

مسأله سازگار باشند. به‌هیچ ترتیبی، نمی‌توانی آن‌ها را انتخاب‌کنی!

C، که دستپاچگی A را مشاهده کرد، به‌توضیح زیر پرداخت:

ـ استدلال A، بی‌تردید نادرست است. به‌اعتقاد من، او به‌یک‌موقعیت مهم توجه نکرد. تفاضل دو عدد، منفی هم می‌تواند باشد و ، بنابراین ، می‌تواند یکی ازعددهای ۱ ــ تا ۹ ــ هم باشد. بنابراین، برای تفاضل دو عددی که از بین عددهای ۱ تا ۱۰ انتخاب می‌شوند، نه ۹ نوع، بلکه ۱۸ نوع به‌دست می‌آید. چون از ۵ کارت تنها می‌توان ۱۰ جفت مختلف انتخاب کرد، بنابراین، تعجبی ندارد که نتوانیم دو جفت با تفاضل‌های برابر پیدا کنیم.

چه کسی حق دارد: a) A، b) B، c) C؟

۱۹. ادامهٔ حیله

صورت مسألهٔ قبل را دوباره بخوانید (البته بهتر است‌که خواننده، علاوه برمطالعهٔ صورت مسأله، خودش آن را حل کند و ، سپس، راه حل خود را با راه حلی‌که دراین‌کتاب داده شده است، مقایسه‌کند).

اشتباه استدلال A، درکجاست؟

۲۰. شما دراین‌باره چه می‌گویید؟

پیشتا که بعد ازپیش‌آمد مسألهٔ ۱۷ ، به‌خانه برگشته بود، پسرعموی

خود شانی را، که ۶ سال از او بزرگتر بـود، گیر آورد. با شور و شوق به‌طرف او رفت و خودستایانه شرح داد که چگونه توانسته است، با حیله، مشکل خود را در درس حساب حل کند:

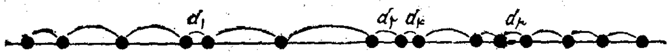
ـ می‌فهمی، در کلاس ما، هرکسی ۱۰۰ کارت دارد که روی آن‌ها، عددهای درست از ۱ تا ۱۰۰ را نوشته‌اند ولی من، کارت‌های خود را گم کرده‌ام و فقط ۲۱ کارت برایم باقی مانده است. خانم معلم از ماخواست ۴ کارت روی میز طـوری ردیف کنیم کـه تفاضل دو کارت اول، بـرابـر با تفاضل دو کارت آخر باشد. باز خوب بودکه ۲۱ کارت داشتم! من‌توانستم ۴ کارت را با این ویژگی پیدا کنم و خانم معلم متوجه نشد کـه مجموعهٔ کارت‌های من کامل نیست.

شانی، بعد از کمی فکر، در پاسخ گفت:

ـ حتی اگر ۱۵ کارت هم برای توباقی مانده بود، می‌توانستی مسألهٔ خود را حل کنی. ولی من نمی‌توانم علت و چگونگی آن را برای تو شرح دهم.

آن‌وقت، روی خود را به‌طرف یوشکا، برادر بزرگتر پیشتا برگرداند و اضافه کرد:

ـ تو در ریاضیات قوی هستی و باید از همه‌چیز سر دربیاوری. فرض کنیم، برای پیشتا، تنها ۱۵ کارت باقی مانده است. این کارت‌ها را، به‌ردیف بزرگی عددهایی که روی آن‌ها نوشته شده است، مـی‌چینیم و تفاضل‌های عددهای مجاور را درنظر می‌گیریم (شکل ۷). اگر در بین این تفاضل‌هـا، دو مقدار پیدا شود که با هم برابر باشند، خودبه‌خود جـواب مسألهٔ پیشتا



شکل ۷

به‌دست آمـده است. ولی، اگر همهٔ تفاضل‌ها با هـم فرق داشته باشند، کوچکترین آن‌ها را d_1 می‌گیریم، واضح است که

$$d_1 \geqslant 1$$

تفاضلی را که از d_1 بزرگتر، ولی از بقیهٔ تفاضل‌ها کوچکتر است، d_2 می‌نامیم، پس

$$d_2 \geqslant 2$$

اگر به‌همین ترتیب استدلال را ادامه دهیم، به‌نابرابری زیر می‌رسیم که در مورد بزرگترین تفاضل صدق می‌کند:

$$d_{14} \geqslant 14$$

اکنون، اگر همهٔ تفاضل‌ها را، از کمترین تا بیشترین، باهم جمع کنیم، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{14} \geqslant 1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 105$$

ولی این، ممکن نیست. بنابراین، حتی در حالتی که تنها ۱۵ کارت دراختیار ما باشد، دست کم، دو تفاضل، باید باهم برابر می‌شوند. یعنی پیشتا، برای حل مسأله، ۶ کارت هم «زیادی» داشته است.

آیا استدلال شانی درست است؟

۲۱. هنوز می‌توان خود را نجات داد

یوشکا، به‌واقع در ریاضیات قوی بود و اشتباه استدلال‌های شانی را، بلافاصله، نشان داد.

شانی، که به‌خاطر شکست خود متأثر شده بود، مدتی سکوت کرد. بالاخره یادآوری کرد:

ـ ولی به‌هرحال ۲۰ کارت کافی است! اگر همهٔ ترکیب‌های ممکن کارت‌ها را در نظر بگیریم، به‌این مطلب قانع می‌شویم.

آیا در واقع همین‌طور است؟

۲۲. مجموعهٔ ناقص II

یوشکا، از استدلال اخیر شانی، که درست هم بود، خوشش آمد،

ولی هنوز راضی نبود: یوشکا گمان می‌کرد که هنوز، ۲۰ کارت خیلی زیاد است. به‌نظرش می‌رسید که مسألهٔ پیشتا را ، با تعداد کمتری کارت هم، می‌توان حل کرد.

یوشکا، مدتی روی این مسأله فکر کرد و، سرانجام، توانست مطلب را روشن کند. نتیجهٔ کار طولانی و اندیشهٔ فوق‌العادهٔ او، چنین بود.

روی هریک از کارت‌ها، یك عدد درست، از ۱ تا ۱۰۰، نوشته شده است. اگر از این مجموعهٔ کامل ۱۰۰ کارت، ۸۴ کارت را کنار بگذاریم، در ۱۶ کارت باقی مانده، همیشه می‌توان ۴ کارت را طوری پیدا کرد که مجموع عددهای دو کارت اول و دوم، برابر با مجموع عددهای دو کارت سوم و چهارم باشد.

یوشکا، نتیجهٔ کارخود را به‌شانی اطلاع‌داد. ولی شانی، نمی‌خواست تنها به‌نتیجه‌گیری قناعت‌کند واز یوشکا خواست، استدلال‌خود را، گام‌به‌گام برای او شرح دهد.

آیا شما می‌توانید، روش استدلال یوشکا را حدس بزنید؟

۲۳. بیشتر بیندیشیم

یوشکا، همراه با برادرانش ـ که آن‌هاهم به‌ریاضیات علاقه‌مند بودند ـ می‌خواست از بین عددهای غیرمنفی و درست کوچکتر از ۱۰۰ ، چنان عددهایی را انتخاب کند، به‌نحوی که نتوان از بین آن‌ها، ۴ عدد طوری جداکردکه تفاضل دوتا از آن‌ها، با تفاضل دوتای دیگر برابر باشد. برادرها می‌خواستند، انتخاب آن‌ها ، تا آن‌جا که ممکن است، تعداد بیشتری از عددها را شامل شود.

از حل مسألهٔ قبل روشن شد که، پیشتا، همیشه می‌تواند از بین ۱۶ کارت، ۴ کارت را طوری انتخاب کندکه ویژگی‌های لازم را داشته باشند و، در نتیجه، مسألهٔ خود را ـ که خانم معلم داده بود ـ حل‌کند. ولی برای برادران علاقه‌مند به‌ریاضیات، هنوز مسأله به‌طور کامل حل نشده بود و پاسخ به این پرسش باقی مانده بود که: آیا پیشتا، همیشه می‌تواند مسألهٔ

خود را با کارت‌هایی که تعداد آن‌ها کمتر از ۱۶ است، حل کند. مثلاً، اگر یوشکا می‌توانست انتخاب خود را از ۱۳ کارت انجام دهد، آن وقت، ثابت می‌شد که، پیشتا، همیشه نمی‌تواند به‌کمك ۱۳ کارت، مسألهٔ خودرا حل کند.

آندراش، یکی از برادران یوشکا، برای انتخاب، عددهای زیر را در نظرگرفت:

۴،۵،۱۲،۱۶،۱۸،...

ولی یوشکا، چنین آغازی را برای انتخاب نپسندید. چرا؟

۲۴. بازهم بیشتر بیندیشیم

آندراش، یوشکا و شانی، مشترکاً تلاش می‌کردند، انتخاب خود را از عددها ـ که در مسألهٔ قبل با آن آشنا شدید ـ تکمیل کنند. آندراش، بعد ازحل مسألهٔ قبل، قبول کرد:

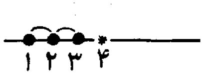
ـ حق با یوشکا است، بهتر است انتخاب را از ۱ آغاز کنیم.

یوشکا پیشنهاد کرد:

ـ و بعد ازآن ، باید عددهای ۲ و ۳ را گذاشت؛ آن‌ها درست‌اند و پشت سرهم قراردارند.

ولی شانی به‌بحث پرداخت:

ـ احتیاط‌کنید! الان دو تفاضل با هم برابر شدند: ۱ — ۲ = ۲ — ۳. البته، هیچ عیبی ندارد (بلافاصله، حرف خود را اصلاح کرد)، زیرا عددهای ۱ و ۲ و ۳، یك سه‌تایی متقارن تشکیل می‌دهند و هیچ مانعی برای ادامهٔ کار وجود ندارد. ولی، دربارهٔ عدد ۴، حتی حرفش‌را هم نمی‌توان زد،زیرا

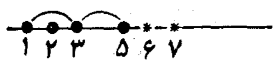


شکل ۸

در این‌صورت، گام سوم هم با تفاضل ۱ برداشته می‌شود و دو تفاضل برابر باهم، یعنی ۳ — ۴ و ۱ — ۲ ، نوع خواست ما را از انتخاب عددها، نقض می‌کند (شکل ۸).

آندراش گفت:

ـ ظاهراً عدد ۵ مناسب است . البته بـا عددهای ۱ و ۳ ، سه‌تـایی متقارن تشکیل می‌دهد، ولی مشکلی پیش نمی‌آورد (شکل ۹).



شکل ۹

و یوشکا یادآوری کرد:

ـ اگر عدد ۵ را در انتخاب خود وارد کنیم، باید از عددهای ۶ و ۷ صرف‌نظر کنیم، زیرا بـا تفاضل‌های ۱ و ۲، در سه‌تایی‌های متقارن برخورد کرده‌ایم .

آندراش، نسنجیده و بی‌مطالعه، اعلام کرد:

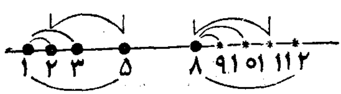
ـ ۸ را هم باید حذف کنیم، زیرا تفاضل ۳ را هم قبلاً داشته‌ایم .

ولی همهٔ دیگران، کم و بیش باهم، گفتند:

ـ ولی ۲ و ۵ و ۸، یک‌سه‌تایی متقارن‌اند (شکل ۱۰).

شکل ۱۰

بعد معلوم شدکه ۴ عدد بعدی ، عددهایی نـامتناسب‌اند: ۹ ، ۱۰ ، ۱۱ و ۱۲ (شکل ۱۱) ونزدیک‌ترین عدد به ۸ ، کـه می‌توان انتخاب کرد،



شکل ۱۱

برابر است با ۱۳ (شکل ۱۲).

شکل ۱۲

مطالعهٔ بعدی نشان‌داد که، بعد از ۱۳، عدد ۲۱ را می‌توان گذاشت. برادران، بخشی از انتخاب خودرا انجام داده‌بودند:

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱،...

که شانی فریاد زد:

ـ یافتم!

ـ چه‌چیزی را؟

ـ شما فقط به‌عددها نگاه‌کنید! یك‌قانون مندی بسیار جالب برآن‌ها حکومت می‌کند:

$$۳ = ۱ + ۲،$$

$$۵ = ۲ + ۳،$$

$$۸ = ۳ + ۵،$$

$$۱۳ = ۵ + ۸،$$

$$۲۱ = ۸ + ۱۳$$

هرعدد برابر است با مجموع دوعدد قبلی! ظاهراً، براساس این قانون، می‌توان همهٔ عددهای بعدی را نوشت.

عقیدهٔ شما دربارهٔ کشف شانی چیست؟

۲۵. آیا درست است؟

مجموعهٔ عددهایی راکه در حل مسألهٔ قبل پیداکردیم:

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۰، ۳۹، ۵۳، ۷۴، ۹۵

می‌توان مجموعهٔ «کمترین‌ها» نامید، زیرا ازکمترین عدد طبیعی (عددواحد) آغاز شده است و، برای هرجملهٔ بعدی آن، کمترین مقدار ممکن انتخاب

شده است.

به‌زبانی دقیق‌تر، «کمترین‌ها» را می‌توان به‌این‌ترتیب تعریف کرد: نخستین عدد مجموعه را، واحد می‌گیریم، وهمهٔ جمله‌های بعدی را طوری انتخاب می‌کنیم که، به‌ترتیب، کوچکترین عدد از بین همهٔ عددهای سازگار با شرط مسأله باشند.

جوانان ریاضی‌دان مـا توانستند، مجموعهٔ کمترین‌ها را، با ۱۲ عدد بسازند. آیـا این، به‌معنای آن است که مجموعه‌ای شامل ۱۳ عدد وجود ندارد، یعنی اگر پیشتا، از ۱۰۰ کارت خود، به‌جای ۲۱ کارت (و یـا ۱۶ کارت)، تنها ۱۳ کارت داشته‌باشد، همیشه می‌تواند، از بین‌آن‌ها، ۴ کارت طوری انتخاب کند که با شرط مسأله سازگار باشند؟

۲۶. پیشتا دوباره به‌دشواری برمی‌خورد

با وجودی که پدر پیشتا، مجموعهٔ کاملی کارت برای او خرید و پیشتا دوباره صاحب هر ۱۰۰ کارت‌شد، دوباره وضع نامطبوعی برایش پیش آمد.

در ساعت حساب، خانم معلم، ۵ کارت نخستین (با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵) را جداکرد و گفت:

ـ هر کدام از شما، این ۵ کارت را به‌دو گـروه تقسیم کنید، ولی، نه به‌صورتی که دلتـان می‌خواهد! در هر گروه بـاید دست‌کم ۲ کارت وجود داشته‌باشد و اگر من، ۲ کارت از یك گروه را نشان دهم، تفاضل بین‌آن‌ها، با هیچ‌کدام از عددهای همان‌گروه برابر نباشد.

ـ شما، کدام دو کارت را انتخاب می‌کنید؟

ـ این را از قبل به‌شما نمی‌گویم! تنها این‌را می‌دانید که، همیشه، دو کارت را از یك گروه انتخاب می‌کنم.

بچه‌ها با شور و شوق به‌کار پرداختند. پیشتا، پنج دقیقه‌ای، با تمام نیرو تلاش‌کرد، بـا وجود این، نتوانست مسأله را حل‌کند. پیشتا دچـار اضطراب و نگرانی شد: آخر او همیشه، درحساب، شاگرد ممتازی‌بود!

آیا در واقع، «برتری» پیشتا دچار مخاطره شده است؟

(پیشتا ، هنوز عددهای منفی را نمی‌شناسد؛ وقتی که بخواهد تفاضل دو عدد را پیدا کند، همیشه عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم می‌کند.)

۲۷. هزار به‌جای پنج

همان‌طور که در حل مسألهٔ قبل روشن شد، پنج عدد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را نمی‌توان به‌دو گروه چنان تقسیم کرد که ، اختلاف هردو عدد متعلق به‌یک گروه، برابر با عددی از همان گروه نباشد.

ولی اگر، به‌جای ۵ عدد، عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ را انتخاب کنیم (۱، ۲، ۳، ۴، ... ، ۹۹۸ ، ۹۹۹، ۱۰۰۰) ، چه‌وضعی پیش می‌آید؟ آن‌هارا به‌چند گروه باید تقسیم کرد، به‌شرطی که در هر گروه، دست کم، دو عدد وجود داشته‌باشد، ضمناً، تفاضل مثبت هردو عدد دلخواه از هر گروه ، برابر با هیچ کدام از عددهای همان گروه نباشد.

روشن است که تقسیم به‌دو گروه کافی نیست، زیرا پنج عدد نخستین را نمی‌توان طوری به‌دو گروه تقسیم کرد که با بقیهٔ خواست‌های مسأله سازگار باشند.

بعضی‌ها عقیده دارند که ۱۰۰۰ عدد را باید به ۱۰ بخش تقسیم کرد. آیا عقیدهٔ آن‌ها درست است؟

۲۸. تا کجا؟

دوباره به‌راه‌حل اول مسألهٔ قبل برمی‌گردیم . به‌این نکته توجه کنید که، در گروه‌های III، IV وبعد ازآن، اندیشهٔ اصلی راه‌حل، به‌طور کامل، مورداستفاده قرار نگرفته است (این را، به‌خوبی در شکل‌های ۶۷ و ۶۸ ، می‌توان دید).

براساس اصلی که در راه‌حل اول طرح کردیم، چگونه می‌توان تعداد بیشتری عددرا در گروه‌ها جاداد؟ بزرگترین عدد N را پیدا کنید که، به‌ازای آن، بتوان عددهای طبیعی از ۱ تا N را به ۱۰ گروه تقسیم کرد.

۲۹. نه‌گروه

با استفاده از روش حل مسألهٔ ۲۷ ، سعی‌کنید ۱۰۰۰ عدد طبیعی نخستین را در ۹ گروه جا دهید.

آیا به‌چنین نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

۳۰. همه‌چیز را از اول آغازکنیم

در حل مسألهٔ ۲۸، سه‌گروه نخستین‌را، به‌این‌ترتیب نوشتیم:

گروه I : ۱، ۴،

گروه II : ۲، ۳،

گروه III: ۵، ۶، ۷، ۸، ۹.

عدد۱۰را در گروه بعدی (گروه IV) قرار دادیم ، درحالی‌که چنین کاری لازم نبود و می‌شد عدد ۱۰ را، مثلاً، درگروه I گذاشت.

عددهای طبیعی از ۱ به‌بعد را در نظر می‌گیریم و می‌کوشیم آن‌هارا بین سه‌گروه تقسیم کنیم.

در کجا ضرورت پیدا می‌کندکه از گروه جدید (یعنی گروه چهارم) استفاده کنیم؟

۳۱. یک‌گروه بیشتر

با توجه به‌حل مسألهٔ قبل، معلوم شدکه ۱۳ عدد طبیعی نخستین را، می‌توان در سه‌گروه جاداد (این‌تقسیم ، روی شکل ۱۳ ، نشان داده شده

شکل ۱۳

است؛ عددهای یك گروه‌را، یا در یك شکل قرار داده‌ایم و یا در شکل‌های یکسان).
با تکیه بر این نتیجه، ۴۰ عدد طبیعی نخستین را به ۴ گروه تقسیم کنید.

۳۲. از گروه قدیم به‌گروه جدید

یکی از گروه‌ها، شامل n عدد طبیعی $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n است. آن‌ها را به‌ردیف صعودی تنظیم کرده‌ایم:

$$x_۱<x_۲<\dots<x_n$$

به‌نحوی که $x_۱$ کوچکترین، و x_n بزرگترین عدد گروه است.

ثابت کنید که، اگر عدد y کمتر از دو برابر بزرگترین عدد این گروه نباشد (یعنی داشته‌باشیم $y\geqslant ۲x_n$)، آن‌وقت، همهٔ عددهای

$$x_۱+y, x_۲+y, \dots, x_n+y$$

و $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n را می‌توان در یك گروه «گسترده» جا داد.

۳۳. تنها ۷ گروه

عددهـای طبیعی از ۱ تـا ۱۰۹۳ را به ۷ گروه چنان تقسیم کنید که تفاضل هردو عدد یك گروه، متعلق به‌همان گروه نباشد.

۳۴. پولیشکا جست و خیز را دوست دارد

پولیشکای کـوچك، در کلاس سوم دبستان درس می‌خواند، ولی خیلی علاقه‌مند است که در انجمن ریاضی کلاس‌های بالاتر شرکت کند. ولی، با آن که پولیشکا دختر باهوشی‌است، معلم ریاضیات، که انجمن ریاضی‌را اداره می‌کند، اعتقاد دارد که، برای او، بهتر است با همسالان خود بازی و جست و خیز کند. او معتقد است که پولیشکا هم، فعلاً باید، مثل بچه‌های دیگر، از بازی و جست و خیز لذت ببرد.

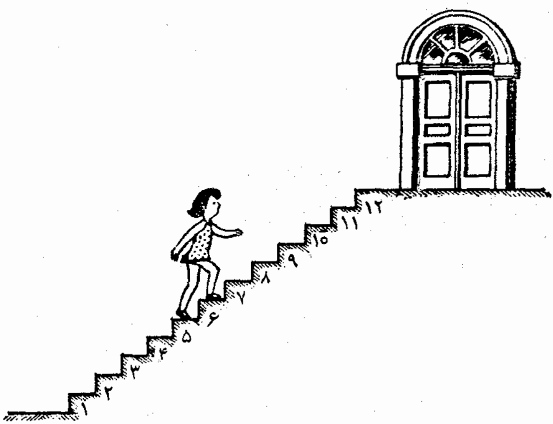
یك روز، در مقابل اصرار پولیشکا، کـه اجازهٔ شرکت در انجمن را

می‌خواست، معلم به‌او گفت:

ـ تو حتماً می‌دانی که دوازده پله تا در مدرسه وجود دارد (اگر تا امروز نشمرده‌ای، می‌توانی امتحان کنی!). خوب، هرصبح، یك‌ربع قبل از شروع کلاس، از پله‌ها بالا می‌روی. من می‌دانم که تو جست و خیز را دوست داری، بنابراین به‌تو اجازه می‌دهم، اگر می‌خواهی، از روی یك‌پله بپری، یعنی، یکباره، دوپله را بالا بروی (به‌اصطلاح، دوپله یکی کنی). البته می‌توانی همهٔ پله‌ها را یکی‌یکی، یا همه را دوتا دوتا و یا بعضی را یکی یکی و بعضی را دوتا دوتا بروی. بنابراین، به‌ترتیب‌های مختلفی می‌توانی ازپله‌ها بالا بروی (بسته به‌این که، کدام پله‌هارا یك‌درمیان‌بروی). به هرپله که برسی دو راه در برابرت قرار دارد: یا پا را برآن بگذاری و یا از روی‌آن بپری و پا را برپلهٔ بالاتر ازآن بگذاری، هروقت‌که توانستی با همهٔ‌روش‌های‌ممکن ازپلکان بالابروی، تورا درانجمن‌ریاضیات‌خواهم‌پذیرفت.

یولیشکا، سعی‌کرد زرنگی کند:

ـ وقتی از پلکان بالا رفتم، می‌توانم دوباره پایین بیایم؟ آخر، در۱۵ دقیقه‌ای‌که تاوقت‌کلاس باقی‌مانده‌است، من می‌توانم چندبار ازآن‌بالابروم.



ولی، معلم با تندی پاسخ داد:

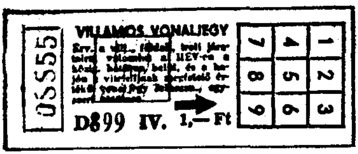
ـ تنها اجازه‌داری، هرروز یکبار از پلکان بالا بروی.

اکنون پولیشکا، هرصبح ازپلکان بالا می‌رود،کاملاً مراقب است، این عمل را، هرروز به‌نحوی غیر از روزهای پیش انجام دهد ، تا بتواند هرچه زودتر به‌انجمن ریاضیات وارد شود.

برای‌این که‌پولیشکا به‌آرزوی‌قلبی‌خود برسد، چندبار بایداز پلکان بالا برود؟

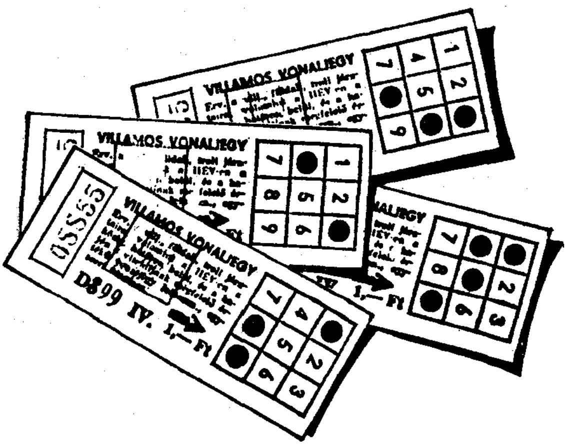
۳۵. بلیت‌های تراموا

در تراموا‌های بوداپست ، بلیت فروش ندارند. مسافـران ، از قبل ، بلیت را تهیه می‌کنند (شکل ۱۴) و وقتی‌کـه به‌واگن وارد می‌شوند، بـا دستگاه معینی،که برای‌این منظور کار گذاشته‌شده‌است، بلیت خود را سوراخ



شکل ۱۴

می‌کنند. هربلیت، ۹ خانه دارد و دستگاه می‌تواند، ۱، ۲، ۳ یا ۴ خانه را سوراخ کند. موقعیت‌سوراخ‌ها، برای‌مسیرهای مختلف، به‌صورت‌های‌متفاوت درنظر گرفته شده‌است (شکل ۱۵). روی‌هم۲۵۵ ترکیب مختلف‌وجوددارد.

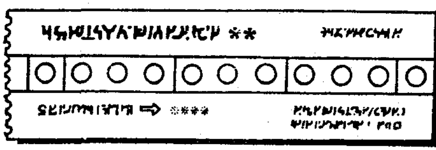


شکل ۱۵

کسی که بـا نظریهٔ ترکیب‌هـا ، اندکی آشنا باشد ، می‌تواند خودش محاسبه کند:

$$\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=9+36+84+126+255$$

درشهر برگن هم‌ازروش مشابهی استفاده می‌کنند، که تنها،نوع سوراخ کردن بلیت، در آن‌جا متفاوت است. در این بلیت‌هـا، به‌جای ۹ خانه ، ۱۱ خانه (به‌شکل‌دایره) وجود دارد و، ضمناً، روی یك‌خطراست، یکی‌بعدازدیگری، قرار گـرفته‌اند (شکل ۱۶). از هردو خـانهٔ مجاور، تنها یکی را می‌توان سوراخ کرد. بلیتی‌که دوخانهٔ مجاورآن سوراخ شده‌باشد ، غیرواقعی است.



شکل ۱۶

(دستگاهی‌که درداخل تراموا، برای‌سوراخ‌کردن بلیت‌گذاشته شده، طوری تعبیه شده است که دوخـانهٔ مجاور را سوراخ نمی‌کند.) در قطار ترامـوای شهر برگن هم، مثل بوداپست، اگر بلیتی سوراخ نشده باشد، به‌معنای آن است‌که پول‌کرایه پرداخت نشده است.

آیا تعداد ترکیب‌ها، برای سوراخ‌کردن بلیت تراموا ، درشهر برگن بیشتر است یا درشهر بوداپست؟

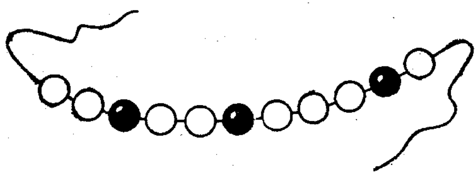
۳۶. گردن‌بند

یه‌وِچکا، بنابه‌توصیهٔ انجمن «کارهای دستی»، گردن‌بند زیبایی‌ساخت (شکل ۱۷) . خـانم معلم از همه (چه‌پسر و چه‌دختر) خواسته بود ، ۱۱ مهره ـ ۳ مهرهٔ قرمز و ۸ مهرهٔ سفید ـ انتخاب‌کنند و، آن‌هارا، به‌نخ‌سبزی بکشند. ضمناً، خانم معلم گفته بود:

ـ چون مهره‌های قرمزکمتر است،آن‌هـا را باید طوری درنظرگرفت

کـه دومهرهٔ قرمز ، پهلوی هم قرار نگیرند. به‌جز این، بایدکوشش کنیدکه همهٔ گردن‌بندها، با هم اختلاف داشته باشند.

دخترها بلافاصله به‌کار پرداختند و تنهـا گاه‌به‌گاهی بـا هم مشورت می‌کردند. آن‌ها ، بـا علاقهٔ بسیار، می‌خواستند بدانندکه‌آیا می‌توانند همهٔ گردن‌بندها را مختلف بسازند. پسرها ـ شانی ، زولی و یوشکا ـ برعکس ، هیچ‌علاقهٔ خاصی برای به‌نخ‌کشیدن مهره‌ها، از خود نشان نمی‌دادند ، زیرا گمان می‌کردندکـه ، این کار، به‌دختران مربوط است وکاری مردانه نیست. به‌خاطر دلتنگی ازبی‌کاری، کتاب را برداشتند (همین کتابی‌راکه شما دردست دارید)، آن‌را زیر میز مخفی کردند و شروع به‌ورق‌زدن کردند. کتاب، روی مسألهٔ ۳۵ بـاز شد. دوستان‌بـلافاصله به‌محاسبه مشغول شدند و، باعجله، آن‌چه‌راکه به‌دست‌آورده بودند، به‌هم نشان می‌دادند.



شکل ۱۷

خانم معلم، لازم‌دید به‌آن‌ها تذکر بدهد:

ـ شانی،زولی، یوشکا! چرا سروصدامی‌کنید وبه‌کارخود نمی‌پردازید؟

ولی شانی، باغرور گفت:

ـ ما درست به‌کار خود مشغولیم! روشن است‌که، هیچ‌جای نگرانی، برای دخترهـا نیست . هرکدام از آن‌هـا می‌تواندگردن‌بند خود را بسازد، بدون این‌که به‌گردن‌بند دیگری شباهت‌داشته‌باشد. مهره‌ها را به ۸۴طریق مختلف می‌توان به‌بندکشید، درحالی‌که همهٔ‌ما روی‌هم ۴۵ نفر بیشتر نیستیم.

ـ این خوب است کـه به‌محاسبه پرداخته‌اید ، ولی این بد است‌کـه خودتان به‌ساختن گردن‌بند نمی‌پردازید.

زولی از خود دفاع‌کرد:

ـ هیچ فایده‌ای نداردکه ما هم درست‌کنیم . به‌نظر من ، تنها به ۴۲

طریق می‌تـوان گردن‌بند را درست کرد . بنـابراین ، تنها وقتی ممکن است گردن‌بندها با هم اختلاف داشته‌باشند که، ما سه‌نفر، دست به‌کار نزنیم.

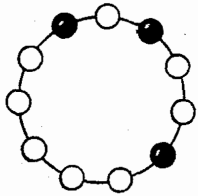
ولی یوشکا در صحبت دخالت‌کرد:

ـ با کمال تأسف، شانی و زولی باید به‌تهیه گردن‌بند مشغول شوند، زیرا به ۴۴ طریق مختلف می‌توان گردن‌بند را درست کرد، بنابراین ، تنها من می‌توانم از کار آزاد باشم.

کدام‌یك از پسران در محاسبهٔ خود اشتباه نکرده است؟

۳۷. دستبند از گردن‌بند

یه‌ووچکا، کار خود را تمام کرد: ۱۱ مهره را به‌نخ‌کشید. با دقت‌همهٔ گردن‌بندها را از نظر گذراند و مطمئن شد که هیچ دو گردن‌بندی، عین هم نیستند. یه‌ووچکا دو انتهای نخ گردن‌بند خود را به‌هم وصل‌کرد. رشته‌ای «بی‌انتها و بی‌آغاز» به‌دست آورد. او که از کار خودش خیلی خوشحال‌شده بود (شکل ۱۸)، آن را به‌مربی انجمن نشان داد و گفت:



شکل ۱۸

ـ خواهش می‌کنم ببینید ، چه دستبند قشنگی درست کرده‌ام ! همـهٔ گردن‌بندها با هم فرق دارند، بنابراین، همهٔ دستبندها هـم، با یکدیگر فرق خواهندداشت. هر کسی دستبندی برای خود دارد که، بامال دیگری، شبیه نیست.

آیا، درواقع هم، همین‌طور است؟

۳۸ . دستبندها

اگـر همهٔ بچه‌هـا ، پیشنهاد یه‌ووچکا را در مسالـهٔ قبل بپذیرند و از

گردن‌بند خود، یك دستبند بسازند، چند دستبند مختلف به دست می‌آید؟
(ضمن مقایسهٔ دستبندها، تنها دنبالهٔ مهرهایی که به نخ کشیده شده‌اند، مورد توجه است نه فاصلهٔ بین آن‌ها.)

بخش سوم

بحث دربارهٔ پول

۳۹. زاغچه

یك روز پیشتا، زاغچه‌ای راکه از لانهٔ پرنده، بیرون افتاده بود، به منزل برد تا به‌او غذا بدهد. درآغاز، همه‌چیز قابل تحمل بود، ولی وقتی‌که جوجه رشدکرد وشروع به‌پروازدر ساختمان‌کرد، دشواری‌هایی پیش آمد: پول‌های‌خرد گم می‌شد و مامان و پاپا، گناه این گم شدن را به گردن پیشتا می‌انداختند آن‌ها می گفتند:

ـ اگر پول لازم داری بگو تا به‌تو بدهیم، ولی یواشکی برندار.

طفلك پیشتا، بی‌هوده می‌کوشید پدر و مادر را به بی‌گناهی خودش متقاعدکند: آن‌ها حرف او را باور نمی‌کردند. مثل همهٔ موردهایی از این گونه، همه‌چیز یکباره وبدون انتظارروشن شد. وقتی‌که مامان به تمیزکاری و مرتب کردن خانه مشغول بود، در گوشهٔ خلوتی، ۱۰ سکه پیدا کرد. نصف آن‌ها (یعنی ۵ سکه) سکه‌های کوچکی برحسب «فیلر»[1] بودند، یعنی هرکدام کمتراز ۱ «فورینت» ارزش داشتند و ارزش هرکدام از ۵ سکهٔ دیگر، ازیك «فورینت» کمتر نبود. بعد ازشمارش، معلوم شدکه درمخفی‌گاه زاغچه، روی هم، ۱۳ «فورینت» و ۴۰ «فیلر» پیدا شده است.

می‌خواهیم بدانیم، زاغچه، چه‌سکه‌هایی وبا چه‌ارزشی، ربوده است.

(برای حل این،مساله و مساله‌های بعدی، باید توجه داشت که، در مجارستان، سکه‌هایی با ارزش ۱۰، ۲۰ و۵۰ فیلر و۱، ۲، ۵و ۱۰ فورینت،

1. هر «فورینت» برابربا ۱۰۰ «فیلر» است.

رواج دارد.)

۴۰. سرقت ادامه دارد

بعد از آن که گناه زاغچه ثابت شد، پیشتا، با دقت بیشتری پرنده را زیر نظر داشت و، هر وقت که لازم می‌دید، سر خود را به علامت سرزنش تکان می‌داد و می گفت:

ـ آی ـ یا ـ یا ـ یا!

ولی، با کمال تاسف، سرزنش‌های او، تاثیری نکرد: زاغچه، مثل سابق، به دزدی خود ادامه داد. چند روزی نگذشته بود که ۱۱ سکه، در مجموع به‌ارزش ۱۵ «فورینت» دزدید، ضمناً، ۶ سکه هر کدام، ارزشی کمتر از «فورینت» داشتند سکه‌های یك فورینتی، بیشتر از سکه‌های ۵ فورینتی بودند و سکه‌های ۲ فورینتی، کمتر از سکه‌های ۱۰ فورینتی نبود.

آیا می‌توانید بگویید، زاغچهٔ نافرمان، چه سکه‌هایی و با چه ارزشی پنهان کرده است.

۴۱. آیا فرق نمی‌کند؟

عمویانوش به‌حسابداری رفت تا حقوق خود را دریافت کند. حسابدار به او گفت:

ـ اسکناس‌خرد ندارم، *بنابراین (۱) پول‌شما را باکمترین تعداداسکناس می‌پردازم.*

عمویانوش، که پول خود را می‌شمرد گفت:

ـ هر طور که می‌توانید عمل کنید. *(۲) حتی یکی از اسکناس‌ها را نمی‌توان با اسکناس‌های دیگری عوض‌کرد.*

آیا گزاره‌های (۱) و (۲)، که با حروف خوابیده چاپ شده‌اند، به‌یك معناست؟

۴۲. پرداخت «اقتصادی»

در برگن، سیستم پولی بغرنجی دارند. واحد اصلی پول، ۱ «دوکات» است. سکه‌های طلای به ارزش ۱، ۲، ۸ و ۱۰ «دوکاتی» هم وجود دارد. سکه یا اسکناس با ارزش بیشتری رواج ندارد.

اگون برگ، ساکن برگن، می‌خواهد ۲۵ «دوکات» از حساب جاری خود بردارد. او که نمی‌خواست، جیب خود را، با این مبلغ کم، پر کند، تصمیم گرفت تا آن جا که ممکن است تعداد کمتری سکه بگیرد؛ به همین مناسبت، از صندوق‌دار خواهش کرد:

ـ اگر ممکن است، ۲۵ دوکات مرا ، از سکه‌های درشت‌تری بدهید. تا آن‌جا که ممکن است، بزرگترین سکه‌ها را به‌من بدهید.

عقیده شما چیست؟ آیا اگر اگون برگ «بزرگترین سکه‌های ممکن» را دریافت کند، کمترین تعداد ممکن است؟

۴۳. اصلاح پولی در برگن

در برگن به‌فکر افتادند واحد پولی تازه‌ای را رایج کنند: «تالر». در رابطه با «اصلاح پولی» این پرسش پیش آمد که چه سکه‌هایی و با چه ارزشی ضرب کنند.

مردم برگن، از روزگارهای قدیم ، عددهای ۳ و ۵ را، عددهای خوشبختی می‌دانستند، به‌همین مناسبت، یکی از تاریخ‌نویسان پیشنهاد کرد که سکه‌های ۳ تالری و ۵ تالری ضرب کنند. او برای تاکید بر پیشنهاد خود، به‌این مطلب هم تکیه کرد که، با این دو سکه، می‌توان هر مبلغی را که شامل مقدار صحیحی تالر باشد، پرداخت کرد. در حالتی که مبلغ، به‌اندازهٔ کافی، بزرگ باشد، پرداخت می‌تواند کامل باشد، یعنی چیزی از جانب گیرنده پس‌داده نشود. کسی که پول را می‌گیرد، تنها درحالت‌هایی باید چیزی پس بدهد که مبلغ پرداخت، برابر ۱، ۲، ۴ یا ۷ تالر باشد.

آیا این حکم درست است؟

۴۴. پیشنهاد دیگر

علاوه بر تاریخ‌دان، که برای ضرب سکه‌ها «عددهای خوشبختی» را پیشنهادکرده بود، کسان دیگری هم دربحث مربوط به‌اصلاح پولی شرکت کرده بودند. یکی ازآن‌ها، ضمن قبول ارزش سکه‌های ۳ و۵ تالری وسادگی محاسبه به‌کمك آن‌ها، معتقد بودکه این‌ها، سکه‌های کوچکی هستند و بهتر است به‌جای آن‌ها از سکه‌های ۵ و ۸ تالری استفاده کنیم. او در نامهٔ خود به مسئول امور مالی نوشت:

ـ درپیشنهاد من نیز، سکه‌هایی با دوارزش وجود دارد. روشن است، هر مبلغی را که بتوان با سکه‌های ۳ و ۵ تالری پرداخت کرد، با سکه‌های ۵ و ۸ تالری هم قابل پرداخت است. این مطلب هم روشن است که، اگر مبلغ پرداختی ازمیزان معینی بیشترباشد، می‌توان همهٔ پرداخت‌ها راطوری انجام دادکه، گیرندهٔ پول، نیازی به‌پس دادن‌سکه یا سکه‌هایی نداشته‌باشد.

آیا نویسندهٔ نامه حق دارد و، واقعاً، آن چه او نوشته است، روشن است؟

۴۵. بحث ادامه دارد

بحث مربوط به پیدا کردن ساده‌ترین دستگاه پولی،که آغاز آن را در دو مسالهٔ قبل دیدیم، ادامه پیدا می‌کند. در بین شرکت‌کنندگان ، کسانی بودندکه‌حتی سکه‌های ۵ و ۸ تالری را کوچك می‌دانستند و معتقد بودندکه باید سکه‌هایی با ارزش بالاتر را رایج کرد. مثلاً، پیشنهادهایی در زمینه ضرب سکه‌هایی با ارزش

(*A*) ۸ و ۱۳

(*B*) ۲۱ و ۳۴

(*C*) ۱۴۴ و ۲۳۳

تالری رسیده بود.

هواداران هر یك از این پیشنهادها، بر این مطلب تکیه می‌کردند که با سکه‌های مورد نظرآن‌ها هم، می‌توان هر مبلغ دلخواهی را (که برحسب تالر، عددصحیحی‌باشد) پرداخت و، اگراین مبلغ به‌اندازهٔ کافی بزرگ‌باشد، هیچ نیازی به بازپرداخت نخواهد بود.

درکدام‌یك‌ازاین‌پیشنهادها، این‌حکم‌درست و درکدام‌یك نادرست‌است؟

۴۶. عددهای جدید

سه مسالهٔ قبل (و بسیاری مساله‌های مشابه دیگری) که برای طرح دستگاه پولی شهر برگن آوردیم، تصادفی نبود. مردم برگن، نه تنها به عددهای ۳ و ۵، بلکه به‌همهٔ عددهای دنبالهٔ فیبوناچی علاقه‌مندند (شاید به‌این علت که، این عددها، ضمن شرح پدیده‌های گوناگونی از طبیعت، به دست می‌آیند). بعضی‌ها، گمان می‌کنند که حالت‌های دیگر را هم برای واحدهای پولی، می‌توان در نظر گرفت و، به‌همین مناسبت، این پیشنهادها را داده‌اند:

(D) سکه‌های ۲ و ۸ تالری،

(E) سکه‌های ۳ و ۲۱ تالری،

(F) سکه‌های ۲۱ و ۱۴۴ تالری.

درمورد کدام یك از این طرح‌ها می‌توان گفت‌که، با دوسکه می‌توان هر مبلغی را پرداخت و برای پرداخت‌های بزرگ، نیازی به بازپرداخت نیست؟

۴۷. چرخش ناگهانی

بحث و گفت و گو دربارهٔ طرحی برای اصلاح پول برگن، همچنان ادامه دارد. خیلی‌ها عقیده داشتندکه باید یکی از پیشنهادهای مسالهٔ ۴۵ را پذیرفت و براین مطلب تکیه می‌کردندکه، این عددها، مستقیماً از عددهایی

به‌دست آمده‌اندکه سده‌های متوالی، «عـددهای خوشبختی» بوده‌اند. همین افراد، علت عدم موفقیت سه پیشنهاد مسالهٔ ۴۶ را، دراین می‌دانستند که، آن‌ها را، به‌صورتی پراکنده انتخاب کرده‌اند.

دراین گیرودار، پیشنهادی رسیدکه، همچون رعد، صدا کرد. یکنفر، برای واحدهای جدید پول، عددهای ۴ و ۱۱ را پیشنهادکرد. پیشنهاددهندهٔ طرح جدید تاکیدمی‌کرد، با وجودی‌که ۴ و ۱۱ جزو «عددهای خوشبختی» نیستند، می‌توان بـا سکه‌های بـه ارزش ۴ و ۱۱ تـالر، هرمبلغ صحیحی را پرداخت کرد و، ضمناً، اگر مبلغ پرداخت به‌اندازهٔ کافی زیاد باشد، نیاز هم به بازپرداخت نیست.

آیا تصور این پیشنهاد دهنده، درست است؟

۴۸. راه حل نامنتظر

درست در لحظه‌ای‌که بحث مربوط به‌اصلاح پولی، به‌اوج شدت خود رسیده بود، ناگهان به‌پایان رسید. بانك ملی برگن اعلام کردکه سکه‌های به ارزش ۳ و ۵ تالری را به‌جریان انداخته است.

با این سکه‌ها، بـه چند طریق می‌توان ۴۹ تالر را، به دیگری داد، بدون این‌که چیزی پس گرفته شود؟

بخش چهارم

منطق وزن‌ها

---

۴۹. کدام سکه تقلبی است؟

وقتی‌که‌زن میان‌سال صندوق‌دار داروخانه، متوجه شدکه، پسربچه‌ای یك سکهٔ دو فورینتی تقلبی بـه او جازده است، دیگر خیلی دیـر شده بود: اثری ازپسربچه‌نبود. وقتی پول‌ها را گرفت احساس تردیدی در او به‌وجود

آمد و به نظرش رسید که یکی از سکه‌ها سبک‌تر است، ولی طبق عادت، آن را در بخشی از صندوق انداخت کـه مخصوص سکه‌های دو فورینتی بود. بنابراین، ناچار بود تا زمانی که سکهٔ تقلبی را پیدا نکند، برای بازپرداخت، از سکه‌های دو فورینتی استفاده نکند.

معلوم شد، ۸۱ سکهٔ دو فورینتی درصندوق وجود دارد؛ و از بین آن‌ها بود که می‌بایست سکهٔ تقلبی سبک‌تر پیدا شود. خوشبختانه یك ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داشت. این ترازو به او امکان می‌داد تـا زودتر به نتیجه برسد و این، برای او، موهبتی بود، زیـرا پول‌ها را باید به بانك می‌بردند و، ضمناً، خرده کاری‌های زیادی هم، در منزل، انتظار او را می‌کشید.

آیا چهار بار وزن کردن، برای کشف سکهٔ تقلبی، کافی است؟

(یك بار و برای همیشه، شرط می‌کنیم کـه همهٔ سکه‌های دو فورینتی واقعی، وزنی بـرابـر دارند. این شرط را، باید برای همهٔ مساله‌های بخش چهارم درنظر گرفت.)

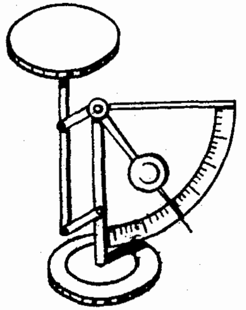
۵۰. ترازوی یك کفه‌ای

می‌دانیم، دربین ۶۴ سکهٔ دو فورینتی، یك سکهٔ تقلبی وجود دارد، که از سکه‌های حقیقی سبک‌تراست. می‌خواهیم این سکه را پیدا کنیم. برای این منظور، می‌توانیم ازترازواستفاده کنیم، ولی‌نه ازآن نوعی که‌صندوق‌دار داروخانه در مسالـهٔ قبلی استفاده کـرده بود، بلکه از ترازوی یك کفه‌ای. البته می‌توان آن را طوری تنظیم کردکه، وقتیِ سکه‌های ۲ فورینتی را در کفهٔ ترازوقرارمی‌دهیم، هردرجهٔ‌آن متناظربا وزن یك سکه‌باشد (شکل ۱۹).

آیا این درست است کـه با شش بـار وزن‌کردن به وسیلهٔ این ترازو، می‌توان سکهٔ تقلبی را پیدا کرد؟

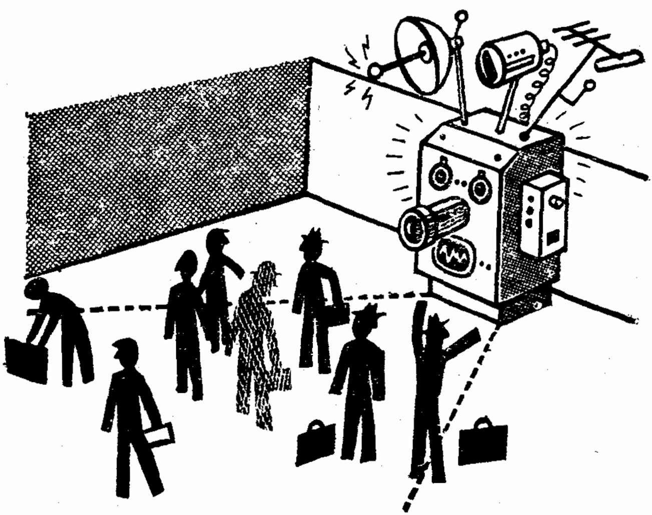
۵۱. پیش‌آمد در فرودگاه

شرکت هوائی «بیگ‌رایـر»، درآخرین لحظه، پـرواز را متوقف‌کرد:



شکل ۱۹

معلوم شده بود، در بین مسافران ، مـرد مسلحی وجود دارد که می‌خواهد هواپیما را برباید. قـرار شد، مسافرانی‌که حرکتشان به تعویق افتاده بود، برای بازرسی فوری آماده شوند.



در سالن فرودگاه، دستگاه کنترل‌کنندهٔ خاصی وجود داشت که ، وقتی مسافران از جلوآن عبور می‌کردند، بدون هیچ اشتباهی مشخص می‌کردکه: آیا مسافر یك شیء فلزی همراه خود دارد یا نـه! روشن است که می‌شد با

بلندگو به‌همهٔ مسافران اطلاع داد که هرچیز فلزی که درجیب یا ساك دستی خود دارند، بیرون بیاورند و به نوبت ازجلو دستگاه کنترل کننده عبور کنند. ولی وقت کم بود و، به‌همین مناسبت، نمایندهٔ شرکت هوائی تصمیم گرفت، به‌جای بازرسی انفرادی، مسافران را به‌صورت گروهی ازجلوچشم الکترونیك دستگاه هشداردهنده بگذارند.

همهٔ‌مسافران را درمقابل عدسی‌دستگاه به‌خط‌کردند و، نمایندهٔ شرکت هوائی، مطمئن شدکه یکی از مسافران، مایل نیست، یك شیء فلزی را از خود جداکند. ولی، کدام مسافر؟ روشن بود، که دستگاه کنترل، نمی‌توانست به این پرسش ، پاسخ بدهد. نمایندهٔ شرکت تصمیم گرفت، مسافران را به گروه‌هایی تقسیم کند، به‌نحوی که، تا حد امکان، از دستگاه کنترل، کمتر استفاده کند.

اگرتقسیم‌به گروه‌ها را، به‌مناسب‌ترین‌وضع ممکن‌انجام دهند، حداکثر چند بار باید چشم الکترونیك دستگاه را بازکرد، به شرطی که بدانیم، تنها یکی از ۱۲۸ مسافر، مسلح است؟

۵۲. یك جعبه سکه‌های تقلبی

پیش ازآن‌که خواننده به‌سراغ کیف خود برود و، ازاین بابت، نگران شود که مبادا سکه‌هایی ازاین صندوق را به او جا زده باشند، می‌خواهیم خیال اورا آسوده‌کنیم‌ که هیچ خطری «جیب» اورا تهدید نمی‌کند: سکه‌های تقلبی، اصلاً به‌گردش نیفتاده‌اند. حقیقت این است‌که این سکه‌ها، نه در کارگاه‌های تهیهٔ سکه‌های تقلبی، بلکه درمرکزدولتی ضرب سکه‌ها دربرگن، آماده شده بود. تنظیم یکی از ماشین‌های خودکار، که سکه‌های پنج‌گروشی ضرب می‌کرد، به‌هم خورده بود و، قبل ازآن که عیب آن را برطرف‌کنند، ۱۰۰۰ سکه بیرون داده بودکه وزن هرکدام از آن‌ها، ۱ گرم کمتر از وزن سکهٔ معمولی بود.

ضرورت داشت، سکه‌های معیوب را، بلافاصله کشف‌کنند، ولی این، کارساده‌ای نبود. سکه‌های پنج گروشی را، درمرکزضرب سکه، درسری‌های

۱۰۰۰ عددی تولید وهر سری را درجعبهٔ جداگانه‌ای بسته‌بندی می‌کردند. هر صد صندوق، یك مجموعه را تشکیل می‌دادکه در صندوق‌های بزرگی به بانك ملی بـرگن منتقل می‌شد. وقتی متوجـه مساله شدندکه کار بارگیری مجموعه‌آغاز شده بود. دریکی از ۱۰۰ جعبهٔ حاوی سکه‌های پنج گروشی، سکه‌های معیوب قرار داشت‌که وزن هرکدام از آن‌ها، ۱ گرم از وزن سکهٔ بی‌عیب، کمتر بود؛ ولی درکدام جعبه؟ کسی نمی‌دانست.

چه باید کرد؟ باید به هر قیمتی، از پخش سکه‌های معیوب جلوگیری کرد. آیا باید ازهرجعبه یك سکه برداشت و، سپس، آن‌ها را با یك ترازوی داروخانه‌ای مورد آزمایش قرار داد؟

نه، بااین فکربلافاصله‌مخالفت شد در واقع، دراین مرکز، یك‌ترازوی دقیق الکترونیك‌وجود داشت‌که، درموردهای لازم، ازآن استفاده می‌کردند. هربارمی‌توان تا ۱۰۰۰۰۰ سکه را بااین ترازو وزن‌کرد ودقت آن به‌حدی است که‌تا یك دهم‌گرم اختلاف را نشان می‌دهد. اشکال کار دراین‌جاست‌که استفادهٔ از ایـن دستگاه پیشرفته و کامل، چندان ارزان تمـام نمی‌شود و، بنابراین، باید تا آن‌جاکه ممکن است، تعداد وزن کردن‌ها را پایین آورد و به حداقل رساند.

چندباربايد بااین ترازوی الکترونیك وزن‌کرد تا جعبهٔ‌حاوی سکه‌های تقلبی‌کشف شود؟

۵۳. دو جعبهٔ سکه‌های تقلبی

اگر به جای یك جعبه ـ که در مسالهٔ قبلی مطرح بود ـ دو جعبه از سکه‌های پنج گروشی، حاوی سکه‌های تقلبی بـاشند و بدانیم که هر سکهٔ تقلبی، ۱ گرم از سکهٔ واقعی سبك‌تر است، چگونه می‌توان آن‌ها را در یك مجموعهٔ صد جعبه‌ای تشخیص داد؟

گفته شد که، برای این منظور، کافی است دوبـار وزن کنیم: یکبار کاملاً شبیه حل مسالهٔ قبل، و بار دیگر، با همان ترتیب، منتهی با شماره‌ـ گذاری جعبه‌ها از ردیف عکس (یعنی جعبهٔ شماره ۱ را، شمارهٔ ۱۰۰، جعبهٔ

شمارهٔ ۲ را، شمارهٔ ۹۹، ...، و بالاخره جعبهٔ شمارهٔ ۱۰۰ را، شمارهٔ ۱ به حساب آوریم).

آیا این حکم درست است؟

۵۳ a. بازهم دربارهٔ دوجعبهٔ پر از سکه‌های تقلبی

به پرسشی که در مسالهٔ ۵۳ مطرح شده است، چگونه می‌توان پاسخ درست داد؟ چندبار باید وزن کرد تا ۲ جعبهٔ حاوی سکه‌های معیوب کشف شود؟

۵۴. مسالهٔ «جواهرفروشی»

استادجواهرساز، سفارشی فوری دریافت کرد که، برای انجام آن، لازم بود طلای زیادی مصرف کند. روشن است که فلز گرانبها را باید با دقت کامل وزن کرد: درکارهای جواهرسازی، برخورد محتاطانه‌ای باموادخام دارند.

وزن کردن مقدار طلای لازم، دشوار نبود، زیرا برای تهیهٔ هر محصول به مقداری طلا نیاز بود که، برحسب گرم، با عددی درست بیان می‌شد، ولی، با کمال تاسف، همهٔ خرده سنگ‌های ترازو اشغال بودند و مجموعهٔ تازه‌ای از آن‌ها هم دردسترس نبود. ولی دو محصول آماده در اختیار او بود که قبلاً تهیه گرده بود و یکی از آن‌ها ۵ گرم و دیگری ۸ گرم وزن داشت. ازشانس جواهرساز، ازاین دونوع محصول، به هرتعدادی که لازم می‌شد، دراختیار داشت.

a. اگر جواهرساز بتواند ازاین «وزنه‌ها» درهر دو کفهٔ ترازوی خود قرار دهد، در یک‌بار وزن کردن، چند گرم طلا را می‌تواند جدا کند؟

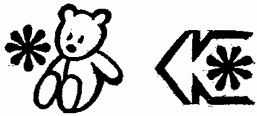
b. اگر بخواهد این «وزنه‌ها» را تنها دریکی از کفه‌های ترازو قرار دهد، چندگرم طلا را می‌تواند وزن کند؟

(تاکید می‌کنیم که تنها به تکه‌هایی از طلا نیاز داریم که، وزن آن‌ها

برحسب گرم، عددی درست باشد.)

بخش پنجم

بدون نگاه‌کردن انتخاب‌کنید!



۵۵. چند جفت جوراب؟

از خواننده دعوت می‌کنیم، همراه با ما، به مغازهٔ خرازی بیاید که، به‌طورعمده، کالاهای کم‌قیمتی را به‌فروش می‌گذارد که نقصی جزئی دارند. در قفسه‌های مغازه و جاهای دیگر، انواع مختلف تـه‌ماندهٔ انبارها، اغلب «به‌صورت زیبائی» روی هم ریخته شده است.

کارمندان مغازه، در ابتدا ، با تعداد زیـادی جوراب و دستکش هم، به‌همین ترتیب رفتار کردند، ولی به‌زودی روشن شد که بی‌مبالاتی در کار و سرسری گرفتن، موضوع، زیان بسیاری به کالا وارد می‌کند. از آن به بعد تصمیم گرفتند، در هر جعبه، تنها یك نوع کالا بریزند (وقتی‌که یك جفت جوراب از جعبه‌ای انتخاب می‌شود، بیش از همه، باید از نظر رنگ با هم بخوانند، ولی درمـورد یك جفت دستکش، علاوه بـر رنگ، مسالهٔ چپ و راست بودن دستکش هم مطرح است). روی هر جعبه، کارتی چسبانده شده

بودکه از محتوی جعبه خبر می‌داد.

البته، خانم‌هـای فروشنده، بدون این نوشته هـم می‌دانستند، در هر جعبه، چه‌چیزی‌وجود دارد؟ کارفروشندگان‌هم‌بسیارپرزحمت‌بود، به‌خصوص که مدیرفروشگاه اجازه نمی‌داد جوراب‌ها و دستکش‌ها را از گوشه‌های‌فرعی و طبقه‌های‌کم ارتفاع، به سالن فروشگاه بیاورند. جعبه‌های حاوی جوراب و دستکش در جـای نسبتاً تـاریکی قـرار داشت. این وضع، مساله‌هـا و دشواری‌های زیادی به‌وجودآورده بود، از آن جمله

دریکی از قفسه‌ها، چند جعبه قرار داردکه، در هرکدام از آن‌ها، ۱۰ جفت جوراب سیاه و ۱۰ جفت جـوراب سفید گـذاشته شده است. (البته، جوراب‌های هرجعبه به‌یك اندازه‌اند.) چند جوراب[۱] باید، درتاریکی، ازاین جعبه بیرون آورد تا بتوان در روشنائی

a. یك جفت جوراب،

b. یك جفت جوراب سفید،

c. دو جفت جوراب،

d. دوجفت جوراب ازیك رنگ،

e. دوجفت جوراب با دورنگ مختلف،

f. دوجفت جوراب سفید،

g. پنج جفت جوراب،

h. سه جفت جوراب سفید و دوجفت جوراب سیاه

ازبین آن‌ها انتخاب کرد! (هرحالت را، به‌طور جداگانه، بررسی‌کنید.)

۵۶. انتخاب جوراب

دریك جعبه، n جوراب سیاه و سفید وجود دارد. تعداد جوراب‌های هررنگ معلوم نیست.

---

۱. درهمهٔ مسالـه‌های این بخش، صحبت بـر سـرحداقل تعداد جوراب‌ها (یا دستکش‌هایی) است کـه از بین آن‌ها بتوان، تعداد جفت‌های مورد نظر را انتخاب‌کرد.

چند جوراب باید، درتاریکی، ازجعبه‌برداشت تا، در روشنائی بتوان k جفت ازبین آن‌ها انتخاب‌کرد؟

(چه در این جا و چه در مساله‌های مشابه، فرض بر این است که، جوراب‌هایی‌که دریك‌جعبه قرار دارند، تنها از نظر رنگ با هم فرق دارند. ولی البته، دستکش‌ها، علاوه بررنگ، از نظر راست یا چپ بودن هم، با یکدیگر اختلاف دارند.)

۵۷. سفارش بعدی

فروشندگان مغازهٔ خرازی، باتجربهٔ خود دریافتندکه، اگر کار را بین خود تقسیم‌کنند، بهترمی‌توانند از عهدهٔ وظیفهٔ دشوار خود برآیند. یکی از فروشندگان، به‌نام ایلونکا، ماموری‌شدکه، بنابرضرورت، جوراب‌ها ودستکش‌ها را از جعبه بردارد و به‌سالن فروشگاه بیاورد.

ایلونکا، کنار جعبه‌ها، درگوشهٔ فروشگاه، ایستاده بود و سفارش‌ها را به نوبت انجام می‌داد:

ـ ۶ جفت جوراب سیاه!

ولی هنوز ایلونکا نتوانسته بود، در تاریکی مطلق، تعداد لازم جوراب‌ها را ازجعبه‌ای‌که حاوی ۱۰ جفت جوراب سیاه و ۱۰ جفت‌جوراب سفید بود، بیرون بیاوردکه سفارش بعدی داده شد:

ـ و... جفت جوراب سفید!

ایلونکا نشنیدکه مشتری چند جفت جوراب سفید خواسته است، ولی چیزی نپرسید. او پیش خود فکرکرد:

ـ هرچند جفت جوراب سفیدکه خواسته باشند، برای من فرق‌نمی‌کند و در تعداد جوراب‌هایی‌که باید ازجعبه بیرون بیاورم تغییری نمی‌دهد.

آیا این، درست است؟

۵۸. سه رنگ

در جعبه‌ای ۵ جفت جوراب سفید، ۱۰ جفت جوراب سیاه و ۱۵

جفت جوراب قهوه‌ای وجود دارد.

چند جوراب، درتاریکی، ازجعبه بیرون آوریم، تا بتوان ازبین‌آن‌ها، این جوراب‌ها را انتخاب‌کرد:

a. ۱ جفت جوراب.
b. ۱ جفت جوراب سفید.
c. ۱ جفت جوراب سیاه.
d. ۱ جفت جوراب قهوه‌ای.
e. ۲ جفت جوراب.
f. ۵ جفت جوراب.
g. ۲ جفت جوراب از دورنگ.
h. ۲ جفت جوراب یك رنگ.
i. ۴ جفت جوراب یك رنگ.
j. ۷ جفت جوراب یك رنگ.
k. ۱ جفت جوراب سفید و ۱ جفت جوراب سیاه.
l. ۱ جفت جوراب سیاه و یك جفت جوراب قهوه‌ای.
m. ۱ جفت جوراب سفید و ۱ جفت جوراب قهوه‌ای.
n. ۱ جفت سیاه، ۱ جفت سفید و ۱ جفت قهوه‌ای.
o. ۳ جفت جوراب سفید.
p. ۳ جفت جوراب سیاه.
q. ۳ جفت جوراب قهوه‌ای.
r. ۲ جفت جوراب سفید و ۱ جفت جوراب قهوه‌ای.
s. ۱ جفت سفید و ۲ جفت قهوه‌ای.
t. ۲ جفت سفید، ۳ جفت سیاه و ۵ جفت قهوه‌ای.

۵۹. چند جفت و چند رنگ؟

a. چند جوراب باید از جعبهٔ مسالهٔ قبل بیرون آورد تا بتوان k جفت ازبین‌آن‌ها جدا کرد؟

b. در جعبه‌ای، جوراب‌هایی بـا n رنگ مختلف وجـود دارد. چند جوراب باید ازآن بیرون آورد تا بتوان، ازبین آن‌ها، k جفت جدا کرد؟

۶۰. دستکش به‌جای جوراب

در جعبه‌ای ۲۰ جفت دستکش سفیـد و ۲۰ جفت دستکش سیاه وجود دارد. چند دستکش راست و چند دستکش چپ بایـد از این جعبه برداشت تا بتوان، ازبین آن‌ها، این‌ها را انتخاب کرد:

a. ۱ جفت دستکش.

b. ۱ جفت دستکش سفید.

c. ۲ جفت دستکش.

d. ۲ جفت دستکش سفید.

e. ۲ جفت دستکش از یك رنگ.

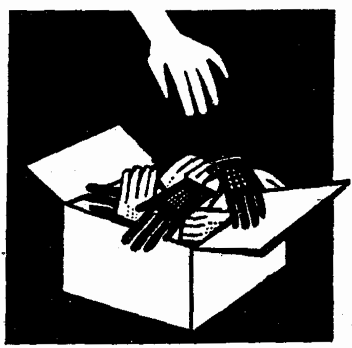
f. ۲ جفت دستکش با دو رنگ مختلف.

g. ۴ جفت دستکش سیاه.

h. ۶ جفت دستکش یك رنگ.

i. ۵ جفت دستکش.

j. ۴ جفت دستکش سفید و ۶ جفت دستکش سیاه.



فرض براین است که، برای انجام هریك ازاین سفارش‌ها، عجلهٔ زیادی نیست و ایـن فرصت وجود داردکـه، کورمال کورمال، بتوان دستکش‌های

چپ را از دستکش‌های راست تشخیص داد.

به‌یاد داشته باشیم که، جواب مسأله، تنها وقتی درست است که، حداقل تعداد لازم دستکش را، برای انجام سفارش‌ها، از جعبه بیرون آورده باشیم.

۶۱. اگر فکر کنیم!

به ۵ جفت دستکش نیاز داریم . چند دستکش راست و چند دستکش چپ بایداز جعبه‌ای بیرون آوریم، که در آن، این دستکش‌ها وجود دارد:

a. ۲۰ جفت دستکش سفید و ۹ جفت دستکش سیاه.
b. ۲۰ جفت دستکش سفید و ۱۰ جفت دستکش سیاه.
c. ۲۰ جفت دستکش سفید و ۱۱ جفت دستکش سیاه.

۶۲. سریع‌تر انجام بدهید

اگر بخواهیم سفارش‌های مسألهٔ ۶۰ را سریع‌تر انجام دهیم و، برای بیرون آوردن دستکش‌ها از جعبه، برای تشخیص دستکش‌های چپ وراست معطل نشویم، در مورد هرپرسش، چند دستکش باید انتخاب کنیم؟

۶۳. اندیشه‌ها

معلوم است، تعداد جوراب‌ها یا دستکش‌هایی که باید در تاریکی از جعبه بیرون بیاوریم، بستگی به‌این داردکه به‌چند جفت ازآن‌ها نیازداریم. اگر تعداد جفت‌های مورد نیاز لااقل یك رنگ زیادتر شود، روشن است‌که تعداد جوراب‌ها یا دستکش‌هایی که باید از جعبه بیرون بیاوریم ، دست‌کم همان مقداری است‌که قبل از اضافه‌شدن «سفارش» بود (این مطلب،نه‌تنها به‌رنگ، بلکه به‌مجموعهٔ ویژگی‌های مربوط به‌کالاهای خرازی هم، بستگی دارد؛ مثلاً درمسألهٔ ۶۰، براساس همین ویژگی‌ها، توانستیم فرض رابراین

بگیریم که می‌توانیم دستکش‌های چپ و راست را، به‌طور جداگانه ومستقل از یکدیگر، از جعبه خارج کنیم) ، یعنی این تعداد کمتر نمی‌شود. تعداد دستکش‌هائی که باید از جعبه بیرون آورد، ممکن است اضافه نشود. مثلاً در مسألهٔ ۶۲، هیچ تغییری نکرد: برای جورکردن ۶ جفت دستکش سفید و ۶ جفت دستکش سیاه ، از جعبه‌ای که حاوی ۲۰ جفت دستکش سفید و ۲۰ جفت دستکش سیاه بود، درست به‌تعداد حالتی که بـه ۴ جفت دستکش سفیـد و ۶ جفت دستکش سیاه نیـاز داشتیم ، دستکش‌های جعبه را بیرون آوردیم.

فرض کنید بخواهیم چند جفت جوراب جـور کنیم . آیا ممکن است حالتی پیش آید که، با اضافه‌کردن جفت جوراب‌های یك رنگ، در میزان جوراب‌هایی که باید از جعبه بیرون آورد، تغییری حاصل نشود؟

۶۴. اندیشه‌های بعدی

در مسألهٔ قبل دیدیم کـه ، اگر «سفارش» جفت دستکش‌ها یا جفت جوراب‌های یکی از دو رنگ اضافه شود، به‌معنای آن نیست که حتماً باید تعداد بیشتری دستکش یا جوراب از جعبه بیرون آورد: در بعضی موردها، می‌توان تعدادی دستکش یا جوراب را ازجعبه خارج کرد که برای جورکردن تعداد کمتری جفت لازم بود. از این گذشته، حتی به‌موردی برخوردیم (راه حل دوم مسألهٔ قبل را ببینید) که ، حتی با اضافه کردن تعداد درخواستی هردو رنگ، بازهم تعداد دستکش‌ها و جوراب‌های انتخابی از جعبه، تغییر نکرد.

آیا ممکن است حالتی پیش آیدکه، با اضافه کردن تعداد جفت‌های همهٔ رنگ‌ها، بازهم بتوان از میان همان تعداد دستکش‌ها و جوراب‌هایی که قبلاً انتخاب کرده‌ایم، کالاهای مورد نیاز را جور کرد؟

پرسش خود را ، دقیق‌تر مطرح می‌کنیم. فرض کنیم، صحبت بـر سر مسأله‌ای باشد که، درآن، چند جفت دستکش یاجوراب از رنگ‌های مختلف

«سفارش» داده شده باشد و، ضمناً، جواب مسأله هم معلوم باشد. به‌زبان دیگر، می‌دانیم که، چند دستکش یا جوراب باید از جعبه بیرون آورد تا تعداد جفت‌های مورد نیاز از هررنگ را جور کرد. علاوه برآن، می‌دانیم که، با تعداد کمتری دستکش یا جوراب، همیشه نمی‌توان «سفارش» مورد نظر را انجام داد.

آیا ممکن است تعداد جفت‌های همهٔ رنگ‌ها را اضافه کنیم، ولی تعداد کل دستکش‌ها یا جوراب‌هایی که باید از جعبه خارج کرد، بی‌تغییر بماند؟ آیا ممکن است، این وضع، در یکی ازحالت‌های زیر پیش آید:

a. وقتی که صحبت از جوراب‌هاست؟

b. وقتی که صحبت از دستکش‌ها، با شرطهای مسألهٔ ۶۰ است؟

c. وقتی که صحبت از دستکش‌ها، با شرطهای مسألهٔ ۶۲ است؟

۶۵. مسألهٔ عکس

دوباره به‌جعبه‌ای برمی‌گردیم که، درمسألهٔ ۵۸، ازآن صحبت کردیم. درآن ۵ جفت جوراب سفید، ۱۰ جفت جوراب سیاه و ۱۵ جفت جوراب قهوه‌ای گذاشته شده است. تااین‌جا، به‌این مسأله پرداختیم که چندجوراب باید، درتاریکی، ازجعبه بیرون‌آورد، تا در روشنایی بتوان تعداد مفروضی جفت جوراب، از این یا آن رنگ، از بین آن‌ها جدا کرد. ولی اکنون، مسأله رابه‌صورت دیگری طرح می‌کنیم: اگردرتاریکی تعداد معینی‌جوراب از جعبه برداشته باشیم، چند جفت جوراب از هررنگ، به‌کمک آن‌ها، می‌توان درست کرد؟

ازخواننده می‌خواهیم، به این پرسش، در ۱۱ حالت، وقتی که تعداد جوراب‌های انتخابی از جعبه، از ۵۰ تا ۶۰ تغییر کند، پاسخ دهد، یعنی جدول صفحهٔ بعد را تکمیل کند:

تعداد جوراب‌هایی که، در تاریکی، از جعبه بیرون آورده‌ایم	تعداد جفت جوراب‌هایی که می‌توان، از آن‌ها، درست کرد:		
	سفید	سیاه	قهوه‌ای
۵۰			
۵۱			
۵۲			
۵۳			
۵۴			
۵۵			
۵۶			
۵۷			
۵۸			
۵۹			
۶۰			

۶۶. بازهم یك سفارش اضافی

ایلونکا، که در مسألهٔ ۵۷ با او آشنا شدیم، دوباره در تاریکی، کنار جعبه ایستاده است و، مثل قبل، تعداد لازم دستکش یا جوراب را از جعبه برمی‌دارد، تا بتوان در روشنایی، سفارش مشتری‌ها را از بین آن‌ها درست کرد. او درکنار جعبه‌ای بودکه محتوی آن، دقیقاً، همان چیزهایی بود که در مسألهٔ قبل (و یا مسألهٔ ۵۸) داشتیم. ایلونکا، بدون این که نگاه کند (چون، در تاریکی قرار داشت)، تعداد متناظر جوراب را برداشت و به

فروشنده‌ای داد که می‌خواست سفارش مشتری را از بین آن‌ها جدا کند. ولی هنوز دو گامی برنداشته بود که سفارش اضافی رسید: ازسالن فروشگاه فریاد زدند که، بیشتر از آن‌چه قبلاً اعلام شد، جفت جوراب‌های سیاه و سفید مورد نیاز است.

ایلونکا، کمی فکر کرد و، بدون این که به‌طرف جعبه برای «تکمیل» کار خود برگردد، راه خود را به‌طرف درسالن فروشگاه ادامه داد. او گمان کرد که، همان تعداد جوراب، برای سفارش تکمیلی جدید هم کافی است.

ایلونکا اشتباه نکرده بود.

بیشترین تعداد جفت جورابی را که ممکن است در سفارش اضافی وجود داشته باشد، پیدا کنید، به‌شرطی که تعداد جوراب‌های انتخابی ایلونکا از ۵۴ تجاوز نکند.

۶۷. تعمیم اول

در جعبه‌ای، جوراب نگهداری شده است. رنگ جوراب‌ها و تعداد جوراب‌های هر رنگ را می‌دانیم. قانونی را تنظیم کنید که، به‌کمک آن، بتوانیم از قبل تعیین کنیم:

a. چند جوراب باید از جعبه بیرون آورد تا بتوان، ازبین آن‌ها، دست‌کم k_i جفت از رنگ i جدا کرد؟

b. اگر n جوراب ازجعبه بیرون آورده باشیم، چند جفت جوراب از هررنگ، می‌توانیم جور کنیم؟

۶۸. تعمیم دوم

دوباره همان جعبهٔ مسألهٔ قبل را در نظر می‌گیریم: از رنگ‌های جوراب‌ها و تعداد جوراب‌های هررنگ، دقیقاً اطلاع داریم. می‌خواهیم تعداد مفروضی جفت جوراب درست کنیم (تعداد جفت‌های هررنگ، برابر

با تعداد جفت‌های هیچ کدام از رنگ‌های دیگر نیست و تعداد درخـواستی جفت جوراب‌های هررنگ، ازتعداد جفت‌هایی‌که از رنگ مفروض درجعبه وجود دارد، تجاوز نمی‌کند). قانونی تنظیم کنیدکه به‌کمك آن، از قبـل، بتوان معین کرد:

a. چند جوراب باید از جعبه بیرون آورد تا از آن‌ها بتوان تعداد درخواستی جفت جوراب‌های هررنگ را درست‌کرد؟

b. درچه موردهایی می‌توان سفارش اضافی را انجام داد (و بـرای این منظور ، چند جوراب باید از جعبه بیرون آورد) ، به‌شرطی که، قبل از سفارش جدید، آن‌قدر جوراب‌که طبق قانون **a** لازم است، بیرون‌آورده باشیم.

۶۹. اندیشه‌های تازه

در مساله‌های ۵۵ تا ۶۲، همهٔ جوراب‌ها یا دستکش‌هایی که در یك جعبه قرارداشتند، یك اندازه درنظرگرفته می‌شدند (زیرا اختلاف‌جوراب‌ها را تنها در رنگ آن و اختلاف دستکش‌ها را ، علاوه بـررنگ، در چپ و راست‌بودن آن‌ها گرفته بودیم).

فرض می‌کنیم ، همـهٔ مسأله‌های ممکن را ، در مـورد تنظیم جفت دستکش‌ها یا جفت جوراب‌های هررنگ ، با توجـه به این محدودیت حل کرده باشیم [ضمناً، مسأله‌های مربوط به‌دستکش‌ها را، در دوحالت، بررسی کرده باشیم : «بدون عجله» (مثل مسألهٔ ۶۰) و «فوری» (مثل مسألـهٔ ۶۲)].

آیا مسأله‌های تازه‌ای به‌وجود می‌آید، اگر فرض کنیم، دریك جعبه، جوراب‌ها و دستکش‌های با اندازه‌های مختلف قرار داشته باشد؟

(روشن است‌که، نمی‌توان اندازهٔ جوراب‌ها یا دستکش‌ها را، بالمس دست، با یکدیگر مقایسه کرد.)

بخش ششم

جویندگان طلا، سوسمار و اتومبیل یك نفره

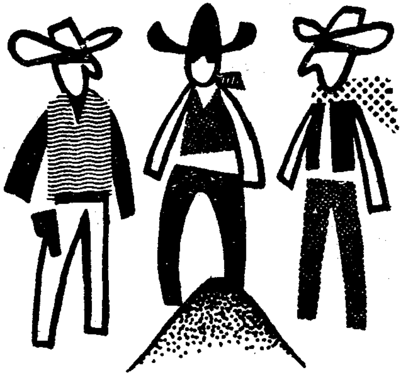
۷۰. تقسیم عادلانه

قبل از هرچیز، یادآوری می‌کنیم که صحبت برسر قسمت‌های برابر است (و البته، چنین تقسیمی، همیشه عادلانه نیست). سه جویندهٔ طلا از آلاسکا، که در مهمان‌خانه‌ای در کنار جاده توقف‌کرده بودند، می‌خواستند طلاهایی را که باهم شسته وبه‌دست آورده بودند، قبل ازجدایی ازیکدیگر به‌طور مساوی بین خود تقسیم کنند: هریك از جویندگان طلا، درست $\frac{1}{3}$ کار را، برای استخراج طلا انجام داده بودند و، بنابراین ، ادعای مالکیت $\frac{1}{3}$ طلاها را داشتند و، این تقسیم را، کاملاً عادلانه می‌دانستند.

ولی، توده‌ای از ذره‌های طلا را، چگونه به‌سه بخش برابر تقسیم کنند؟ جویندگان طلا، اطلاعی از این‌کار نداشتند. ترازو نداشتند و، اگر می‌خواستند به‌ترازو دسترسی‌پیدا کنند، می‌بایستی چندروز راه بروند.(البته، اگرمی‌توانستند خودرا به‌محل ترازو برسانند، دیگرنیازی به‌ترازونداشتند، زیرا در آن‌جا می‌توانستند طلاها را بفروشند و ، آن وقت، دلارها را بین خود تقسیم‌کنند.) هیچ‌یك ازآن‌ها هم، به‌تقسیم «نظری» و «تقریبی»رضایت نمی‌داد.

برای پیداکردن راه حل، به‌مشورت پرداختند.

اگر جویندگان طلا دو نفر بودند، خیلی ساده مشکل حل می‌شد: یکی از دو نفر، طلاها را به‌دو بخش تقسیم می‌کرد، و دیگری هربخشی را که مایل بود، انتخاب می‌کرد. با این روش تقسیم، هیچ‌کدام ازجویندگان طلا، نمی‌توانست نسبت به‌شریك خود، ادعا یا شکایتی داشته باشد.



ولی، جویندگان طلا، نه دو، بلکه سه نفر بودند و مسألهٔ مـربوط به‌تقسیم عادلانـهٔ ذره‌های طلا ، همچنان لاینحل باقی مانده بود : بحث و مذاکره، به‌تدریج ، داغ شده بود. سرانجام، یکی از آن‌ها، کوشید راهـی برای خروج ازاین موقعیت نامطلوب پیدا کند. او خطاب به‌دیگران گفت:

ـ آقایان! به‌چه مناسبت، تقسیم به‌دوبخش را عادلانه می‌دانیم، وقتی که یکی از دو نفر تقسیم کند و، دیگری، سهم خود را انتخاب کنـد؟ علت روشن است: به‌هرکدام از آن‌ها، این امکان داده شده است که، سهم طلای خود را، کمتر از سهم دیگری انتخاب نکند. اگر یکی از این دونفر، با این روش تقسیم ، سهم کمتری ببرد، تنها می‌تواند خودش را مقصر بداند: اگـر تقسیم‌کنندهٔ طلاهـا باشد، گناه او این است که به‌طور برابر تقسیم نکـرده است و، اگر انتخاب کنندهٔ یکـی از دو سهم باشد ، تقصیرش این است که بخش کوچکتر را برای خود برداشته است. ما هم ، باید به‌همین تـرتیب ، عمل کنیم.

دیگری که پیشنهاد شریکش را پسندیده بود، گفت:

ـ حق با توست پیرمرد! فقط من نمی‌فهمم که، بالاخره چه بایدکرد، تا هرکسی بتواند سهم طلای خود را طوری انتخاب کندکه کمتر از دیگران نباشد؟

ولی در واقع، به‌این پرسش، پاسخی داده نشد: هیچ‌کدام نتوانستند، «نسخه‌ای» برای تقسیم عادلانه ارائه دهند.

مشورت می‌کنیم: چگونه باید عمل کرد تا شرط اصلی مربوط به‌تقسیم عادلانه (که با حروف خوابیده مشخص کرده‌ایم)، رعایت شده باشد، یعنی هرکدام ازآن‌ها، امکان انتخاب $\frac{۱}{۳}$ سهم خود را داشته باشند (البته، به‌شرطی که، یکی از شریك‌ها، خود مرتکب اشتباهی تأسف‌آور نشود)، حتی اگر دو نفر از جویندگان طلا، پنهانی با هم سازش کنند و بخواهند بخشی از سهم نفر سوم را، به‌نفع خود، از او کم کنند (آخر، دربین جویندگان طلا، همه‌جور آدمی پیدا می‌شود).

روشن است که، ضمن تقسیم طلاها، نمی‌توانند از زور و خشونت استفاده کنند. آن‌ها اسلحه‌ها را به‌کنار گذاشته‌اند و مدت‌هاست که، باتجربه، دریافته‌اند که باید هوای مشت‌های دیگری را داشته باشند و به یکدیگر احترام بگذارند. ضمناً، ایجاد جنجال هم فایده‌ای نداشت، زیرا کلانتر در همین نزدیکی‌ها بود: او، مثل همیشه، وقت خود را، با استکانی ویسکی، در میخانهٔ همسایه می‌گذراند.

تودهٔ خرده طلاها را چگونه تقسیم کنند؟

(روش‌تقسیم، باید ضمانت کند که، سهم‌هریك ازجویندگان‌طلا، کمتر از $\frac{۱}{۳}$ طلاها نباشد. اگر، با همهٔ این‌ها، کسی سهم بیشتری را نصیب خود کرد، نتوان علت بی‌عدالتی را متوجه روش تقسیم طلاها کرد.)

۷۱. آن‌ها چهار نفر شدند

اگر بخواهیم (با توجه به‌شرطهای مسألهٔ قبل)، تودهٔ طلاها را، به‌جای سه‌نفر، بین چهارنفر تقسیم کنیم، چه باید کرد؟

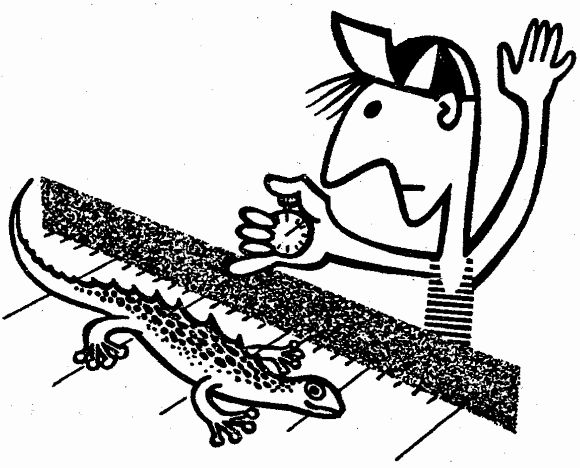
۷۲. از دو، تا...

روشی راکه در دومسألهٔ قبل آوردیم، تعمیم دهید وبرای حالتی‌که

با تعداد دلخواهی جوینده طلا سروکار داشته باشیم، به‌کار برید.

۷۳. سوسمار چالاک

چند ناظر، حرکت سوسمار را، درجریان ۶ دقیقـه، در روی جاده، تعقیب می‌کنند. هرناظر، درست ۱ دقیقه سوسمار را دنبال و خاطـرنشان می‌کند که سوسمار توانسته است، دراین مدت، درست ۱ متر حرکت کند هیچ‌کس، قبل ازآغاز این دورهٔ ۶ دقیقه‌ای وپس از پایان آن، سوسمار را تعقیب‌نکرده بود؛ ولی درجریان این ۶ دقیقه، حتی یك‌لحظه هم، سوسمار را «بدون نظارت» رها نکرده بودند (هرفاصلهٔ زمانی را، همراه بانقطه‌های اول وآخر آن درنظر می‌گیریم).

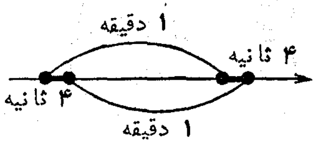


بیگانه‌ای، خارج ازکسانی که با دقت سوسمار را تعقیب می‌کردند، مدعی شد که، سوسمار، درجریان این ۶ دقیقه‌ای که تحت نظارت بـوده، توانسته است ۱۰ متر حرکت‌کند.

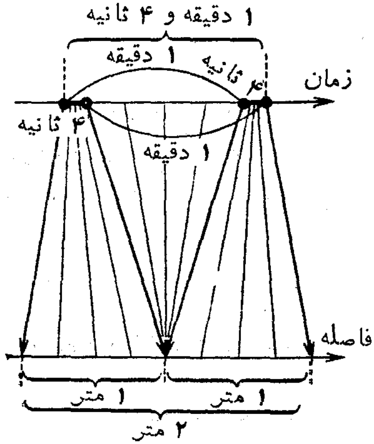
آیا چنین چیزی ممکن است؟

۷۴. با چهار چشم

می‌توان راه‌حل زیر را، برای، مسألهٔ ۷۳ پیشنهادکرد. همهٔ ناظران را، به گروه‌های دو تایی تقسیم می‌کنیم. ناظر دوم ، در هرزوج ، تعقیب سوسمار را، ۴ ثانیه بعد ازاولی قبول می‌کند (شکل ۲۰). در ۴ ثانیه‌هایی که ، در جریان آن‌ها، تنها ناظر اول سوسمار را دنبال می‌کند، او ۱ متر به‌جلو می‌رود. سپس، وقتی که ۲ ناظر، «چهارچشمی» به‌او نگاه می‌کنند، سوسمار ساکت و بی‌حرکت باقی می‌ماند؛ ولی در چهارثانیه‌هایی که، ناظر



شکل ۲۰

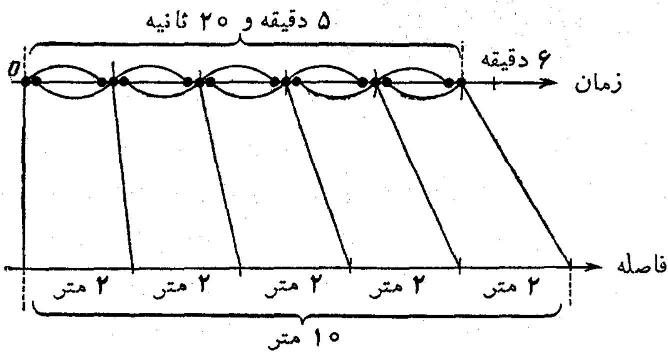


شکل ۲۱

دوم، به‌تنهایی مشغول «نگهبانی» است، سوسمار دو باره ۱ متر به جلو می‌رود (شکل ۲۱). به‌این ترتیب، شرطهای مسأله به‌هم نمی‌خورد و، سوسمار، می‌تواند در مدت ۱ دقیقه و ۴ ثانیه، فاصلهٔ ۲ متری را طی‌کند.

اگربرنامهٔ «نگهبانی» رابه‌این ترتیب تنظیم‌کنیم‌که، هرزوج، درست در لحظه‌ای که زوج قبلی وظیفهٔ خود را تمام کرده است (نه زودتر و نه دیرتر)، وظیفهٔ نگهبانی را به‌عهده بگیرد (شکل ۲۲)، با در نظر گرفتن ۵ زوج ناظر، متوجه می‌شویم که، سوسمار توانسته است، بعد از ۵ دقیقه و

۲۰ ثانیه، ۱۰ متررا طی‌کند و، هنوز ۴۰ ثانیه هم، وقت اضافی دارد.



شکل۲۲

به‌چه‌ترتیبی می‌توان از ۴۰ ثانیهٔ «اضافی» استفاده‌کرد؟ آیا نمی‌توان، این زمان را، طوری تنظیم‌کرد که سوسمار بتواند در مدت ۶ دقیقه ـ که در جریان آن، او را تعقیب می‌کنند ـ فاصله‌ای بیشتر از ۱۰ متر را طی کند ؟

۷۵. معجزه تا کجا ادامه دارد؟

یك ضرب‌المثل مجارستانی می گوید : « هر معجزه‌ای تنها سه روز زندگی می کند و، بعد، می‌میرد». ولی، توصیهٔ ما این است که ، در استفادهٔ از این ضرب‌المثل برای پاسخ به پرسش عنوان این مسأله ، عجله نکنید. منظور ما، «ادامهٔ» معجزه، نه در زمان، بلکه در فضاست. حقیقت امر این است که، حل مسألهٔ قبل، نوعی نارضایتی ایجاد می‌کند : شرطهایی که در مسأله، برای «برنامهٔ» مشاهده‌ها داده شده است ، به‌سوسمار اجازهٔ نمی‌دهد تا، از ۶ دقیقه‌ای که برای مشاهده منظور شده است، به‌طور کامل استفاده کند. تردید مبهمی در ما به وجود می‌آیدکه، شاید، اگر به‌ترتیب دیگری زوج‌ها راتنظیم کنیم، سوسمار بتواند، درهمین‌فاصلهٔ زمانی، مسیرطولانی‌تری را طی‌کند. از این گذشته، به‌چه مناسبت، ناظران را ، باید حتماً به‌زوج‌ها

تقسیم کنیم؟ مگر نه‌این است که توالی ناظران را، می‌توان به‌ترتیب دیگری، و مثلاً مثل مسألهٔ ۷۳، در نظر گرفت؟ چه بسا که، نه‌یك روش، بلکه روش‌های بسیاری برای تنظیم توالی ناظران وجود داشته باشد، تا سوسمار بتواند به‌جلو حرکت کند.

به‌این‌ترتیب، آیا سوسمار مسألهٔ ۷۳، می‌تواند در ۶ دقیقه، بیش از ۱۰ متر حرکت کند؟

دربارهٔ ناظران مسألهٔ ۷۳، تنها گفته می‌شود که، آن‌ها، «چندنفرند». بدون آن‌که از کلی‌بودن مسأله چیزی کم شود، می‌توان تعداد ناظران را، دلخواه گرفت، تنها شرطی که باید درنظر بگیریم، این‌است که این «تعداد»، محدود وقابل‌شمارش است.

۷۶. مترها و دقیقه‌ها

فرض می‌کنیم که، درمسألهٔ ۷۳ (یا ۷۵)، فاصلهٔ‌زمانی تعقیب‌ناظران، به‌جای ۶ دقیقه، عدد درست دیگری (بزرگتر یا کوچکتر)، برای دقیقه‌های نظارت، درنظر گرفته باشیم.

در این‌صورت، سوسمار، تا چه‌فاصله‌ای را می‌تواند طی کند؟

۷۷. بدون توقف

مسألهٔ ۷۳ را توانستیم برای حالتی حل‌کنیم که، سوسمار، حرکت خود را با «خیزبرداشتن» انجام‌دهد: یك‌حرکت سریع می‌کند و، سپس، ساکن می‌ماند (ضمناً، مجموع زمان‌های حرکت فعال و زمان‌های استراحت او، ۶ دقیقه را تشکیل می‌دهد).

آیا سوسمار می‌تواند ۱۰ متر را در ۶ دقیقه طی کند، با این شرط‌که، در مسیر خود، هرگز متوقف نشود؟

۷۸. با دقتی کمتر

در تمام مسأله‌های مربوط به‌سوسمار (از ۷۳ تا ۷۷)، همه‌جا ، یکی از شرطهای مسألهٔ ۷۳ را تکرار کردیم که ، هرناظر درست ۱ دقیقه نگهبانی داده است و، ضمناً، نظارت هرناظر به‌طور پیوسته وبی‌وقفه انجام‌گرفته‌است.

اکنون، شرط اخیر راکنار می‌گذاریم : از پیوستگی نگهبانی هرناظر صرف‌نظر می‌کنیم. تنها، این‌فرض را می‌پذیریم که، هرناظر ، روی‌هم، کار یك‌دقیقه‌ای خود را انجام‌دهد (بقیهٔ شرطهای مسألهٔ ۷۳، پابرجاست).

آیا ممکن است، سوسمار، با این‌کنترل ضعیف‌تر، بتواند در ۶دقیقه، بیش از ۱۰ متر حرکت کند؟

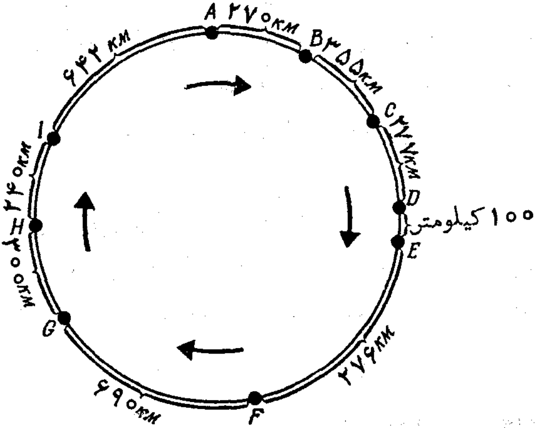
۷۹. مسیر دایره‌ای I

وقتی‌که دربارهٔ جاهای دیدنی شهر برگن صحبت می‌کنیم، نمی‌توان منطقهٔ بیابانی‌آن‌را به‌خاطر نیاورد، زیرا زیبائی آن، جهان‌گردان بسیاری را به‌طرف خود جلب می‌کند . دورتادور این‌بیابان ، یك‌جادهٔ اتومبیل‌رو کشیده‌اند که از آبادی‌های A، B، C، D، E، F، G، H و I می‌گذرد. فاصلهٔ این‌آبادی‌ها، نسبت به‌هم، روی نقشهٔ (شکل ۲۳) داده شده است.

اگون برگ ، جهان‌گرد دوآتشه، تصمیم گرفت ، از چند روز تعطیل غیرمنتظره‌ای‌که برایش پیش‌آمده بود، استفاده‌کند وجادهٔ دایره‌ای شکل را، با اتومبیل یك‌نفرهٔ خود، که ضمناً مدل تازه‌ای بود ، دور بزند. در دفتر جهان‌گردی به‌او اطلاع دادند ، که هلی‌کوپتر می‌تواند او و اتومبیلش را به‌هرکدام از آبادی‌هایی‌که بخواهد ، برساند و ، سپس ، در زمانی‌که قرار می‌گذارند، او و اتومبیلش را ازآن‌جا برگردانند.

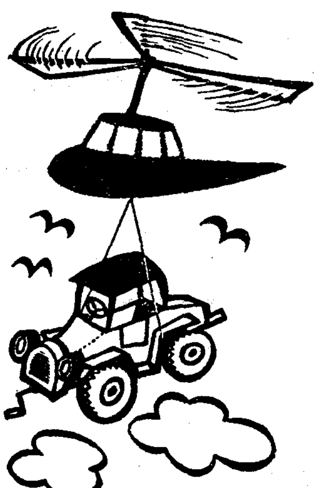
همه‌چیز به‌خوبی پیش می‌رفت ، ولی در جریان آماده‌شدن ، برخی مسأله‌های پیش‌بینی‌نشده‌ای به‌وجود آمد.

اولاً معلوم شدکه در مرکزهای بنزین‌گیری آبادی‌ها ، ذخیرهٔ کمی



شکل ۲۳

بنزین باقی‌مانده است: در A، ۱۱ لیتر؛ در B، ۱۴ لیتر؛ در C، ۱۱لیتر؛ در D ، ۳۲ لیتر؛ در E، ۱ لیتر؛ در F، ۲۸ لیتر؛ در G، ۲۰ لیتر ؛ در H، ۲ لیتر و در I، ۲۵ لیتر.



ثانیاً هلی‌کوپتری که به‌وسیلهٔ ١گون‌برگ سفارش داده‌شده بود کم‌قدرت ازآب درآمد و می‌توانست اتومبیل را به‌شرط خالی‌بودن باك آن از بنزین، به‌نقطهٔ موردنظر برساند. (طبیعی است که از هلی‌کوپتر هم نمی‌شد مقداری سوخت وام گرفت، زیرا بنزین مصرفی هلی‌کوپتر بابنزین موردنیازاتومبیل، با هم فرق دارند.)

اتومبیل کوچك ١گون‌برگ، در هر ۱۰۰ کیلومتر، ۴ لیتر مصرف‌دارد.

١گون‌برگ و اتومبیل او را، درکدام‌آبادی بگذارند تا او بتواند تمام جادهٔ دایره‌ای‌شکل را دوربزند، به‌شرطی‌که، تصمیم گرفته باشد، در جهت پیکان‌ها حرکت کند؟

۸۰. مسیر دایره‌ای *II*

روی یك جادهٔ‌دایره‌ای شکل، تعدادی پمپ‌بنزین («آبادی») وجود دارد؛ و درآن‌ها، آن‌قدر بنزین وجود داردکه اتومبیل مفروض بتواند تمامی مسیر را طی‌کند.

ثابت‌کنید، بدون ارتباط به‌محل پمپ‌بنزین‌ها در طول مسیر و بدون ارتبـاط به‌مقدار ذخیرهٔ بنزین در هرکدام از این پمپ‌ها، همیشه می‌توان، دست‌کم یك‌مرکز بنزین‌گیری را پیداکردکه، باآغاز ازآن، اتومبیل بتواند تمامی مسیر را طی‌کند؟

(باك اتومبیل، گنجایش تمام بنزینی را داردکه برای عبور از تمامی مسیر، لازم است.)

بخش هفتم

درست‌کردن مخلوط

---

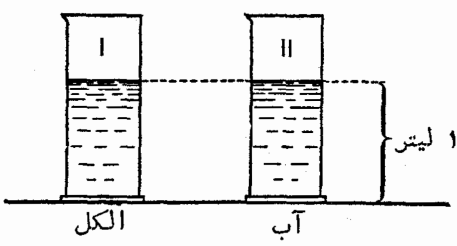
۸۱. روش ساده

مدیرآزمایشگاه از دستیار خود خواهش‌کرد، چندسی‌لیتر $p\%$ محلول

آب و الکل تهیه کند. (مدیر آزمایشگاه خیال داشت ، عدد مشخص p را به‌دستیار خود بگوید، ولی متأسفانه فراموش کرد و، دربارهٔ عدد p، چیزی نگفت.) برای‌این‌منظور، دواستوانه «یك‌اندازه» یك‌لیترونیمی در آزمایشگاه وجود دارد: در استوانهٔ اول، یك‌لیتر الکل خالص و در استوانهٔ دوم ، یك لیتر آب‌مقطر ذخیره شده است (شکل ۲۴). هیچ‌ظرف یا مایع دیگری ، که شامل آب و الکل باشند ، برای آماده‌کردن محلول موردنظر ، در دسترس نیست.

البته، دستیار می‌توانست ، به‌سادگی ، محاسبه‌کند که ، برای تهیهٔ محلول لازم ، به‌چقدر الکل و آب نیاز دارد ، ولی او نمی‌خواست خود را به‌محاسبه مشغول‌کند. او تصمیم گرفت که ، با عمل، کار را سریع‌تر انجام دهد. راه موردنظر او، این بودکه مایع را از یك‌ظرف به‌ظرف دیگر بریزد، آن‌راکاملاً به‌هم بزند،اندازهٔ غلظت مخلوط حاصل‌را اندازه بگیرد وآن‌قدر این عمل را ادامه دهد تا به‌غلظت موردنظر برسد.

این روش ، برخلاف انتظار او ، بسیار پرزحمت از آب درآمد: تنها بعد از تکرار پنج‌بار جا به‌جایی ، در یکی از ظرف‌ها ، محلول الکل $p\%$ آماده شد.



شکل ۲۴

دستیار، روبه‌مدیرآزمایشگاه‌کرد:

ـ آماده است! اگر اجازه می‌دهید، امروز زودتر بروم. کارهای شخصی دارم که باید انجام‌دهم.

ـ بسیارخوب (مدیر، موافقت‌کرد). ۱ لیتر محلول $(100 - p)\%$ هم

تهیه‌کن و بعد برو.

دستیار پریشان شد: او می‌خواست خیلی زودکارش را تعطیل کند ، و حالا، بازهم باید معطل شود.

چه توصیه‌ای برای او دارید؟

[فرض را براین می‌گیریم‌که ، حجم مخلوط الکل و آب با مجموع حجم‌های جداگانهٔ‌آن‌ها برابر باشد ، اگرچه در واقع، چنین نیست. علاوه برآن، فرض می‌کنیم‌که، الکل خالص ، به‌کلی بدون‌آب باشد (یعنی غلظتی برابر ۱۰۰٪ داشته‌باشد). البته، این‌فرض هم، کاملاً واقعی نیست.]

۸۲. بعد چه بایدکرد؟

دوباره همه‌چیز مثل آغاز مسألهٔ قبل اتفاق افتاد (همان دو استوانهٔ یك‌اندازه باآب و الکل). این‌بار، مدیرآزمایشگاه از دستیار خود خواست، محلول ۶۳٪ الکل درست‌کند.

بعد ازچندبار جابه‌جاکردن، دستیار متوجه شدکه در یکی از ظرف‌ها، الکل ۶۰٪ به‌دست‌آورده است.

اکنون دستیار چه باید بکند؟

۸۳. یك‌حالت دیگر

در مسألهٔ قبل، دستیار متوجه شدکه، در یکی از ظرف‌ها، الکل۶۰٪ وجود دارد.

اگر دستیار متوجه می‌شد، در استوانه‌ای‌که مایع‌کمتری دارد، الکل ۳۸٪ وجود دارد، برای حل مسألهٔ قبل چه می‌توانست انجام‌دهد؟

۸۴. ازآغاز تا پایان

دوباره با همان دو استوانهٔ یك‌اندازه سروکار داریم‌که در یکی از آن‌ها (استوانهٔ I) ۱ لیتر الکل خالص و در دیگری (استوانهٔ II)، ۱ لیتر

آب مقطر وجود دارد.

به‌چه ترتیبی، می‌توان در ظرف *II*، الکل ۶۰٪ درست کرد؟ (به‌جز همین دواستوانه، از ظرف یا مایع دیگری نباید استفاده‌کرد.)

۸۵. اختلاف غلظت

دوظرف دراختیار داریم که گنجایش هرکدام برابر ۳ لیتر است. دریکی از این دوظرف، ۲ لیتر مایع با غلظت ۱ کیلوگرم بردسی‌متر مکعب و در دیگری، ۲ لیتر مایع با غلظت $\frac{۱}{۲}$ کیلوگرم بردسی‌متر مکعب وجود دارد.

ازیك ظرف(که‌آن‌را ظرف اول می‌نامیم) ۱ لیتر مایع دردیگری (ظرف‌دوم) ریخته‌ایم، سپس از ظرف دوم، ۲ لیتر در ظرف اول و، بعد ازآن، از ظرف اول ۲ لیتر در ظرف دوم و، بالاخره ، از ظرف دوم ۱ لیتر در ظرف اول ریخته‌ایم.

درکدام‌حالت، اختلاف غلظت مایع‌های دوظرف، کمتر می‌شود: اگر انتقال مایع را از ظرفی‌آغاز کنیم که، مایع درون آن، غلظت بیشتری دارد، یا از ظرفی که، مایع درون‌آن، غلظت کمتری دارد؟

(فرض می‌کنیم ، بعد از هرانتقال، مایع درون هرظرف کاملاً مخلوط شده‌باشد، همچنین، حجم مخلوط ، با مجموع حجم‌های دومایعی که به‌هم مخلوط شده‌اند، برابر باشد.)

بخش هشتم

مسابقهٔ جام پیروزی

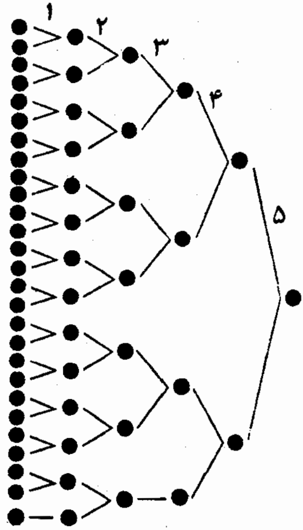
---

۸۶. مسابقهٔ جام پیروزی

همین چندی‌پیش ، مسابقهٔ ورزشی بین تیم‌های دانشکده‌های ریاضی به‌پایان رسید. بازی‌ها به‌شیوهٔ المپیك انجام گرفت و، درواقع، همهٔ تیم‌هایی

که در برابر یکدیگر قرار داشتند، مدعی جام پیروزی بودند. (اگر یک‌بازی هیچ به‌هیچ تمام می‌شد، به‌تیم‌ها، وقت اضافی داده می‌شد. گاهی، این وقت اضافی هم، برای تشخیص تیم برترکافی نبود، آن‌وقت، با ضربه‌هایی که از یازده‌متری زده می‌شد، تیم برنده‌را معلوم می‌کردند: هرتیمی‌که گل بیشتری زده بود، برنده می‌شد.)

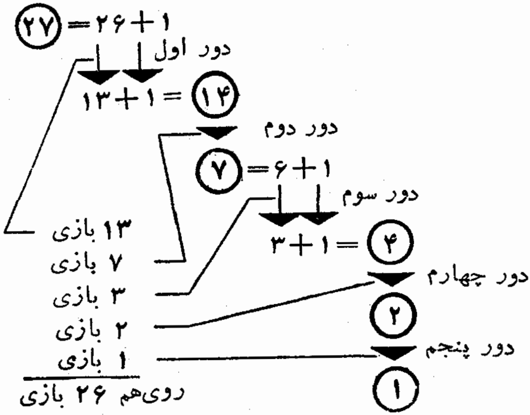
درمسابقهٔ جام دانشکده‌های ریاضی، ۲۷ تیم شرکت داشتند (نمودار مسابقه، در شکل ۲۵ داده شده است) . در دور اول و دور سوم بازی‌ها، یکی از تیم‌ها (که «اضافه» مانده بود)، بدون این‌که با تیم دیگری روبه‌رو شود، به‌دور بعدی راه یافت.



شکل ۲۵

محاسبهٔ تعداد رویارویی‌ها، دشوار نیست: این تعداد ، برابر است با تعداد «چنگک‌های» V مانند درروی نمودار. ولی، از آن‌جا که، مسابقه بین تیم‌های ریاضی‌دانان جریان داشت ، استفادهٔ از این‌روش ابتدایی را، برای محاسبهٔ تعداد بازی‌ها ، برازندهٔ خود ندانستند. در شکل ۲۶، روش ساده‌تری ، برای این محاسبه ، نشان داده شده است. در نخستین دور، از

۲۷ تیم، می‌توان ۱۳ رویـارویی تشکیل داد ویك تیم «اضافی» را، بدون بازی، به‌دور بعدی برد. در دور دوم بازی‌ها ، ۱۴ تیم شرکت دارند که، از آن‌ها،۷ رویارویی تشکیل می‌شود. از ۷ تیمی که به‌دور سوم‌راه یافته‌اند، ۱ تیم، بدون بازی به‌دور چهارم می‌رود و بین ۶ تیم دیگر، ۳ رویـارویی انجام می گیرد . بین ۴ تیمی که به‌دور چهارم راه‌یافته‌اند ، ۲ رویارویی و بین ۲ تیم دور پنجم، ۱ رویارویی به‌وجودمی‌آید. بنابراین، دراین‌مسابقه، برای کسب جام پیروزی، روی‌هم ۲۶ بازی باید انجام شود.



شکل ۲۶

در مسابقهٔ «جشن دوستداران ورزش»، سال گذشته ۱۶۶ تیم وامسال ۲۱۴ تیم شرکت‌کرده‌اند. این‌مسابقه‌ها هم، به‌شیوهٔ المپیك انجام گرفت و تنها ۲ تیم به‌مرحلهٔ نهایی رسیدند.

چند بـازی، در مسابقهٔ «جشن دوستداران ورزش» در سال گذشته و وچندبازی، امسال انجام‌گرفته است؟

۸۷. مسابقهٔ جام پیروزی دوم

اگر n تیم، برای مسابقه، نام‌نویسی کرده‌باشند و مسابقه ، بـا شیوهٔ المپیك، تنظیم‌شود، روی‌هم، چند رویارویی باید انجام بگیرد؟ (درمسابقهٔ

جام‌پیروزی، تنهاتیم‌هایی حق شرکت دارند‌که، قبلاً نام‌نویسی‌کرده باشند.)
(برای کسانی که با شیوهٔ مسابقه‌های المپیک‌آشنایی ندارند، آن‌را در مسألهٔ قبل، به‌تفصیل شرح داده‌ایم.)

۸۸. مسابقهٔ جام پیروزی در شرایط بغرنج‌تر

شنیده می‌شود که می‌خواهند مسابقهٔ «جشن دوستداران ورزش» را، به‌صورت بغرنج‌تری‌برگزار‌کنند. این‌طرح، به‌این مناسبت پیداشده است‌که، ورزش، به‌صورتی‌کاملاً توده‌ای درآمده است، تعداد تیم‌های داوطلب در مسابقه‌های «جشن‌دوستداران‌ورزش»، سال‌به‌سال افزایش می‌یابد و،درنتیجه پیداکردن استادیوم‌آزاد، برای انجام مسابقه‌ها، به‌دشواری برخورده است. به‌این ترتیب ، برای انجام بازی‌ها در مرحله‌های مختلف، ممکن است، به‌علت نبودن‌جا، مواجه با بن‌بست بشوند و بعضی از تیم‌ها نتوانند بازی خود را انجام‌دهند؛ درنتیجه، این‌تیم‌ها ، بدون انجام بازی، حق شرکت در مرحلهٔ بعدی را به‌دست می‌آورند. از قبل هم، نمی‌توان پیش‌بینی کردکه، چندتیم، با این موقعیت روبه‌رو می‌شوند.

با همهٔ این‌ها ، آیا نمی‌توان پیش‌بینی‌کردکه، امسال، برای انجام مسابقهٔ «جشن دوستداران ورزش»، چندبازی باید انجام شود؟
(به‌یاد بیاوریم‌که، در مسابقهٔ امسال، ۲۱۴ تیم شرکت‌دارند.)

۸۹. کافی‌نبودن تعداد استادیوم‌ها، به‌کجا منجر می‌شود؟

درهرمرحلهٔ ازبازی‌های‌مربوط به‌مسابقهٔ جام‌پیروزی بین‌دانشکده‌های ریاضی(مسألهٔ ۸۶)، همهٔ تیم‌هایی‌که ممکن‌بود، شرکت‌داشتند. درهرمرحله، تنها ۱ تیم ممکن بود، بدون‌بازی، به‌مرحلهٔ بعدی راه پیداکند، واین وضع هم ، وقتی پیش می‌آیدکه تعداد تیم‌های شرکت‌کننده در مرحلهٔ مفروض ،

عددی فرد می‌شد. ولی در مسابقهٔ مربوط به جام‌پیروزی «جشن دوستداران ورزش» (مسألهٔ ۸۸)، به‌علت کافی‌نبودن تعداد استادیوم‌ها، نه یك‌تیم، بلکه چندتیم می‌توانست، بدون‌انجام بازی، به‌مرحلهٔ بعدی برود. کسی که با حل مسألهٔ ۸۷ آشنا نیست (وما دیدیم که، درحالت کافی‌نبودن تعداد استادیوم‌ها هم، تعدادکل‌بازی‌ها تغییر نمی‌کند)، ممکن است دچار شگفتی شودکه، چگونه ممکن‌است، تعدادبازی‌های‌انجام‌شده، ارتباط بااین‌مطلب نداشته‌باشد که، مسابقه‌ها، در چه اوضاع واحوالی انجام شده است: در حالت «عادی» (وقتی‌که، بازی‌ها، طبق جدول تنظیمی انجام‌شده‌اند) یادرحالت «غیرعادی» (وقتی‌که بخشی از مسابقه‌ها، به‌خاطر فقدان ورزشگاه آزاد، انجام نگرفته است و هردوتیمی‌که نتوانسته‌اند بازی خود را انجام‌دهند، با هم به‌مرحلهٔ بالاتر صعودکرده‌اند)؟ در این‌باره، می‌خواهیم دوپرسش را دربرابر خواننده قراردهیم.

۱. فرض می‌کنیم، تعداد تیم‌های شرکت‌کننده در مسابقهٔ با شرایط عادی (وقتی‌که در هرمرحله، حداکثر بازی‌های ممکن، انجام می‌شود)، با تعداد تیم‌های شرکت‌کننده در مسابقهٔ با شرایط غیرعادی (وقتی‌که، به‌خاطر انجام‌نگرفتن بعضی بازی‌ها، تیم‌های بیشتری، از یك‌مرحله به‌مرحلهٔ بعدی بروند)، برابر باشد.

درکدام‌حالت ــ حالت «عادی» یا حالت «غیرعادی» ــ برای تعیین‌تیم برندهٔ جام پیروزی، مرحله‌های بیشتری در انجام مسابقه، لازم است؟

(هرمرحله از مسابقه، به‌بازی‌هایی گفته می‌شود، که به‌طور هم‌زمان انجام‌گیرند.)

۲. آیا ممکن است، وضعی پیش‌آیدکه، تعداد مرحله‌های مسابقه در حالت «غیرعادی» کمتر از تعداد مرحله‌ها در حالت «عادی» باشد؟

۹۵. یك‌مرحله

برای گردکردن عددها، معمولاً، به‌جای‌آن‌ها، نزدیك‌ترین عدددرست به‌آن‌ها را در نظر می‌گیرند. ولی، در بسیاری موردها، بهتر است، عدد را

«از پایین» گرد کنیم، یعنی عدد مفروض را ، با بزرگترین عدد درستی که از آن تجاوز نمی‌کند عوض‌کنیم . این روش گردکردن ، انتخاب بخش‌درست عدد، نام‌دارد. وقتی که بخواهیم ، بخش درست عددی را انتخاب‌کنیم ، آن‌را در داخل کروشه قرار می‌دهیم:

$$[۳/۷]=۳ ,\quad [۴/۲]=۴ ,\quad [۷]=۷ \quad \left[۵\frac{۱}{۲}\right]=۵, [۰/۳]=۰$$

(در حالت کلی، $[x]$ را، بخش درست عدد x می‌نامند).

فرض‌کنیم، در مرحله‌ای از مسابقه ، که با شیوهٔ المپیك و به‌صورت «عادی» انجام گرفته است (از هربازی ، تنها یك‌تیم، به‌مرحلهٔ بعدی رفته است)، k تیم شرکت‌کرده باشند.

با استفاده ازعلامت گذاری «بخش درست عدد»، دستوری را بنویسید که تعداد بازی‌های این‌مرحله را، معین کند.

۹۱. بعد ازمرحلهٔ مفروض

در یك مرحلهٔ مفروض از مسابقه، کـه با شیوهٔ المپیك و بـا شرایط «عادی» انجام می گیرد (حداکثر ، ۱ تیم می‌تواند ، بدون رویارویی با تیم دیگر، به‌مرحلهٔ بالاتر برود)، k تیم شرکت‌کرده‌اند.

دستوری‌را بنویسید که تعداد تیم‌هایی راکه، بعد ازاین مرحله، «جان سالم به‌دربرده‌اند» معین‌کند،یعنی،قانون بازی‌را درمرحلهٔ بعدی معین‌کنید.

۹۲. از مرحله‌ای به‌مرحله‌ای

n تیم، برای شرکت درمسابقهٔ جام پیروزی شرکت‌کرده‌اند. مسابقه با شیوهٔ المپیك و با شرایط «عادی» انجام می گیرد.

با استفاده از دستورهایی‌که در حل دو مسألهٔ قبل به‌دست‌آورده‌ایم، مسیر مسابقه را به‌طـورکامل شرح‌دهید ، یعنی نشان‌دهید ، چندتیم از یك مرحله به‌مرحلهٔ دیگر می‌رود و، در هرمرحله، چندبازی انجام می گیرد؟

۹۳. دو اتحاد

ثابت کنید

۱) برای هرعدد x

$$[x]+1=[x+1];$$

۲) برای هرعدد درست t

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{2}\right]}{2}\right]=\left[\frac{t}{4}\right]$$

۹۴. مسأله‌ای از المپیاد

در یکی از المپیادهای مسکو (سال ۱۹۶۸)، این‌مسأله داده شد. مقدار مجموع زیر را پیداکنید:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n+3}{8}\right]+\left[\frac{n+7}{16}\right]+\left[\frac{n+15}{32}\right]+\dots$$
$$\dots+\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^k}\right]+\dots$$

که درآن، n عدد درست دلخواهی است.

*

ازخواننده می‌خواهیم، به‌یادداشتی که درانتهای این فصل (قسمت حل)، با عنوان «نگاهی به‌عقب»، آماده است، توجه کند.

بخش نهم

لوتوی حرفی

این بازی که می‌خواهیم دربارهٔ آن صحبت کنیم، یك‌بازی گروهی است

و یك‌نفر به‌تنهایی، نمی‌تواند خود را با آن مشغول کند. یکی از حاضران خارج می‌شود، بقیه واژه‌ای را در نظر می‌گیرند و وقتی، فرد خارج شده، برگشت، به‌او اطلاع می‌دهند که، در این واژه، چندحرف وجود دارد. او سعی می‌کند واژه‌را حدس بزند و، به‌نوبت، واژه‌هایی به‌همین‌طول (باهمان تعداد حرف) نام می‌برد، و هربار به‌او اطلاع می‌دهند، چند حرف را درست حدس زده است. وقتی حدس یك‌حرف را درست به‌حساب می‌آورند که، جای‌این‌حرف، درواژهٔ درنظر گرفته شده و در واژه‌ای که نام برده می‌شود، یکی باشد. مثلاً اگر واژهٔ پادیس در نظر گرفته شده‌باشد، با نام‌بردن واژهٔ لیوان یا بوشهر، ۰ حرف؛ با واژهٔ پرواز یا کانون، ۱ حرف، با واژهٔ پارچه یا موریس، ۳ حرف و با واژهٔ نارمك یا پرویز، ۲ حرف درست حدس زده شده است. کسی برنده است‌که بانام‌بردن تعدادکمتری واژه، جواب را پیدا کند.

روشن است‌که دراین‌بازی، علاوه برقدرت تفکر منطقی (ویا دقیق‌تر بگوییم، تسلط برمنطق صوری)، سادگی و قابل‌کشف‌بودن واژه‌ای‌که باید پیدا شود و حتی، شانس هم دخالت دارد (زیرا روشن است‌که، در انتخاب نخستین واژه، هیچ‌چیز دیگری، جز شانس، نمی‌تواند، به‌جویندهٔ واژه، کمك کند). به‌همین مناسبت، نام «لوتو» برازندهٔ این بازی است و جزئیات دیگری‌که دربارهٔ آن گفتیم، روی‌هم‌رفته، بازی را جالب‌تر و دلچسب‌تر می‌کند. بازی گروهی لوتوی حرفی‌را، به‌همهٔ خوانندگان پیشنهاد می‌کنیم، ولی در این‌جا، درصفحه‌های کتاب، تنها تلاشی را مطرح می‌کنیم‌که، کسی، برای پیداکردن واژهٔ موردنظر، انجام داده است. تنها منطق خالص برای خواننده باقی می‌ماند (وحتی در واقع، کمتر ازآن)، زیرا بسیار پیش آمده است‌که، نه یك واژه، بلکه انتخابی ازچند حرف را درنظرگرفته‌ایم (مثلاً مچسی)[1].

---

۱. بنابراین، برای حل مسأله‌های ۱۱۴ تا ۱۱۷ به‌زبان مجارستانی، نیازی ندارید (همچنین، برای حل مسأله‌های ۹۵ تا ۱۱۳، هیچ‌نیازی به‌اطلاع از معنای فارسی واژه‌ها نیست).

برای این که، بازی جالب‌تـر شود، مساله‌هایی را هم آورده‌ایم که، تنها، یك جواب منحصر ندارند (جواب، ممکن است یك واژه یا ، به طور ساده، ترکیبی ازچند حرف باشد). این که چه جواب‌هایی قابل قبول‌اند واین که چند جواب به‌دست می‌آید ، چیزی است کـه به عهدهٔ داوری خواننده گذاشته‌ایم.

بعد از هر واژه‌ای که نام بـرده شده است، بعد از دونقطه، عددی را گذاشته‌ایم که معرف تعداد حرف‌هایی است که درست حدس زده شده است.

همهٔ واژه‌هایی که نام برده‌ایم («حدس زده‌ایم»)، ازنظر تعداد حرف‌ها، با واژهٔ موردنظر، یکسان‌اند.

۹۵.

(۱) مار: ۲؛ (۲) کار: ۲؛ (۳) دوش: ۱.

۹۶.

(۱) لور: ۲؛ (۲) کار: ۲؛ (۳) کوس: ۲.

۹۷.

(۱) سیم: ۲؛ (۲) بام: ۱؛ (۳) خیس: ۱.

۹۸.

(۱) جام: ۲؛ (۲) کلم: ۲؛ (۳) جسم: ۱.

۹۹.

(۱) دشت: ۲؛ (۲) پیت: ۱؛ (۳) دسر: ۲.

۱۰۰.

(۱) پست: ۲؛ (۲) بست: ۲؛ (۳) مرد: ۱.

۱۰۱.

(۱) جیب: ۲؛ (۲) شیب: ۲؛ (۳) سوپ: ۱.

۱۰۲.

(۱) کال: ۲؛ (۲) لال: ۲؛ (۳) باك: ۱.

۱۰۳.

بعضی از روزها، به‌بازی لوتوی حرفی مشغول می‌شویم ولی باکمال تاسف، یادداشت بازی‌ها، خوب نگه‌داری نشده است. بخشی از حرف‌ها پاك شده است و آن‌چه باقی‌مانده، چنین است:

(۱) * رد: ۲؛ (۲) * رد: ۲؛ (۳) آ **: ۱

علامت * به‌این معناست که، حرف مربوط به آن را، نتوانسته‌ایم بخوانیم. تنها چیزی که می‌توان با اطمینان گفت، این است، که این حرف، با حرف‌های خوانده شدهٔ متناظر، یکی نیست.

۱۰۴.

(۱) خشت: ۲؛ (۲) روم: ۱؛ (۳) طشت: ۲.

۱۰۵.

(۱) جهت: ۲؛ (۲) صفر: ۱؛ (۳) جفت: ۲.

۱۰۶.

(۱) شهر: ۱؛ (۲) شال: ۱؛ (۳) جام: ۱؛
(۴) سحو: ۱؛ (۵) جسم: ۱.

۱۰۷.

(۱) مار: ۱؛ (۲) ماد: ۱؛ (۳) دود: ۱؛ (۴) دژم: ۱؛ (۵) بیم: ۱.

۱۰۸.

(۱) تیر: ۲؛ (۲) تیغ: ۱؛ (۳) مام: ۱.

۱۰۹.

(۱) مرغ: ۲؛ (۲) کرج: ۲؛ (۳) شرم: ۲.

از خواننده خواهش می‌کنیم، کتاب را روی میز نیندازد.

۱۱۰.

(۱) ساری: ۲؛ (۲) جیوه: ۲؛ (۳) ساقه: ۳.

۱۱۱.

(۱) نهنگ: ۲؛ (۲) نطفه: ۲؛ (۳) پونز: ۲؛ (۴) کوهی: ۰.

۱۱۲.

(۱) جماد: ۱؛ (۲) جمیل: ۱؛ (۳) جبال: ۳؛ (۴) طنجه: ۱.

۱۱۳.

(۱) مه‌سو: ۲؛ (۲) نرمك: ۲؛ (۳) پوپك: ۲.

۱۱۴.

(۱) AVAR: ۲; (۲) AKIT: ۲; (۳) ADOD: ۲;
(۴) AVAS: ۲; (۵) OKOT: ۱; (۶) AVUL: ۱;
(۷) OROM: ۰

۱۱۵.

(۱) KEREK : ۳ ; (۲) BALTA : ۳ ; (۳) MEREM : ۲.

۱۱۶.

(۱) KAROM : ۳ ; (۲) MAROS : ۳ ; (۳) MEREM : ۲ ;
(۴) BALOS : ۳.

۱۱۷.

(۱) LAKAS : ۲ ; (۲) LAKOS : ۲ ; (۳) LAJOS : ۲ ;
(۴) BAJOS : ۲ ; (۵) GITAR : ۱ ; (۶) GYUFA : ۲ ;
(۷) PLUSZ : ۲.

۱۱۸. چند پرسش

فرض‌کنیم به‌بازی لوتوی حرفی مشغولیم و به‌این مساله‌ها، برخورد کرده‌ایم:

a) مساله‌ای‌که تنها یك جواب دارد،

b) مساله‌ای‌که دارای چند جواب است،

c) مساله‌ای‌که دارای فرض‌های متناقضی است.

چه تغییری به‌وجود می‌آید، اگر

I) یك یا چند واژهٔ جدید حدس بزنیم (یعنی، یك یاچند واژهٔ جدیدبا همان تعداد حرف، نام ببریم)؛

II) از یك تا چند واژه‌ای‌که قبلاً نام برده‌ایم، صرف‌نظر کنیم؟

به خواننده توصیه می‌کنیم‌که، بخشی از وقت آزاد خود را، به‌بازی لوتوی حرفی با دوستانش، اختصاص دهد.

بخش دهم
جدول عددهای متقاطع

در هرخانه ازجدول عددهای متقاطع، باید یك رقم گذاشته شود، یعنی عددهای ۰، ۱، ۲، ...، ۸، ۹. در هر جدول عددهای متقاطع، تنها از عددهای طبیعی (عددهای درست مثبت) استفاده می‌شود. تنها استثنا، عدد ۰ است: وقتی‌که صحبت از عدد یك رقمی است، علاوه برعددهای مثبت، صفر هم می‌تواند باشد. اگر با عددی چند رقمی سروکار داشته باشیم، این عدد، نمی‌تواند با صفرآغاز شود: رقم اول این عدد باید مخالف صفرباشد.

ممکن است، دربارهٔ عددی‌که دریك ستون (ردیف عمودی) یا یك‌سطر (ردیف افقی) قرار دارد، هیچ صحبتی نشده باشد. گمان نکنید کـه اشتباهی شده‌است ویا، درچاپ، ازقلم افتاده است، بلکه این وضع، به‌معنای آن‌است که، این عدد را، می‌توان به کمك سایـر عددهایی‌که در جدول وجود دارد پیدا کرد.

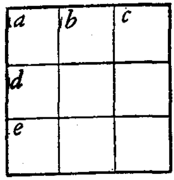
منظور از رقم اول هـر عدد، نخستین رقم از سمت چپ و منظور از آخرین رقم، نخستین‌رقم ازسمت راست است. وقتی‌که مثلاً می‌گوییم، رقم سوم، به‌این معناست که ازسمت چپ عدد به‌طرف راست، سومین رقم را در نظر بگیریم.

این توصیه‌های کلی را، درمورد حل هـرکدام از مساله‌های این بخش به خاطر داشته باشید، زیرا در هرمسألهٔ جداگانه، آن‌ها را تکرار نخواهیم کرد. تنها، در موردهایی‌که وضع بر خلاف این توصیه‌ها باشد ویا شرطهای دیگر وارد شده باشد، به‌طور خاص، توضیح خواهیم داد.

۱۱۹.

ردیف‌های افقی (شکل ۲۷): a. نصف‌عدد ردیف عمودی a، به‌شرطی که ازآخر به‌اول نوشته شود. d. عددی‌که بر ۱۰ و ۱۷ (بدون باقی‌مانده)

بخش‌پذیر است. e. تفاضل بزرگترین و کوچکترین عدد سه رقمی.



شکل ۲۷

ردیف‌های عمودی: a. اگرهمهٔ رقم‌های این‌عدد را برابرمی‌گرفتیم، ۴۰۰ واحد بزرگتر می‌شد. b. عددی‌که رقم سوم آن برابر است با مجموع دو رقم دیگر. c. عددی فرد.

۱۲۰. چند پرسش

جواب مسألهٔ قبل به چه صورتی در می‌آمد، اگر

الف. عدد d ازردیف افقی را به‌این‌صورت تعریف‌می‌کردیم: «عددی که بر ۱۰ بخش‌پذیر است»؟

ب. عددd ازردیف افقی‌را، این‌طور، تعریف می‌کردیم: «عددی‌که بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد»؟

پ. تعریف عدد b ازردیف افقی را به‌این‌صورت عوض می‌کردیم: «عددی بخش‌پذیر بر ۵»؟

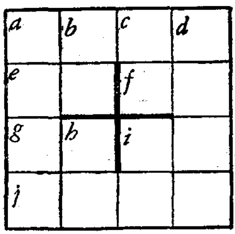
ت. برای تعریف عدد d در ردیف افقی، می‌گفتیم: «عددی‌است بخش‌پذیر بر ۱۸»؟

ث. عدد c در ردیف عمودی را به این ترتیب تعریف می‌کردیم: «عددی است زوج»؟

(برای پاسخ دادن به هریك ازاین پرسش‌ها، باید درنظر داشت‌که همهٔ تعریف‌های دیگر، بدون تغییر باقی مانده‌اند. در پرسش‌های الف تا ت، تعریف عدد c در ردیف عمودی، و در پرسش ث، تعریف عدد d از ردیف افقی، همان تعریف مسألهٔ قبلی است.)

۱۲۱.

ردیف افقی (شکل ۲۸): a. توان سوم (مکعب) عددی که همهٔ رقم‌های آن با هم برابر است. e. نیمهٔ دوم عدد a در ردیف عمودی. f. همان عدد g در ردیف افقی، به‌شرطی‌که از آخر به‌اول نوشته شود. g. نیمهٔ دوم عدد j در ردیف افقی. i. عددی که، درآن، یکی از رقم‌ها، دو برابر دیگری است (ولی، متاسفانه‌نمی‌دانیم،کدام رقم). j. مساحت مربع به‌ضلع n سانتی‌متر، به‌شرطی‌که n همان عدد c ازردیف عمودی باشد (مساحت، برحسب سانتی متر مربع).



شکل ۲۸

ردیف عمودی: a. وزن (به‌گرم) ماهی‌که عمویانوش صیدکرده‌است. b. شماره منزل یکی ازخوانندگان این‌کتاب. c. مجذوردومین رقم خودش. d. مجذور عددی دورقمی، به شرطی‌که این عدد دو رقمی، رقم‌هایی برابر داشته باشد. h. عددی‌که دو برابرنصف خودش است. i. عددی‌که، اگر در سمت راست آن ۰ قرار دهیم، ۱۰ برابر می‌شود.

۱۲۲.

افقی (شکل ۲۹): a. عددی‌که ۱۰ برابر $\frac{۱}{۱۰}$ خودش‌است. e.عددی که با یکی از عددهای ردیف‌های عمودی برابر است. f. عددی‌که ۴ واحد

ازسه برابر عدد h درردیف قائم بزرگتر است. g. عددی بخش‌پذیر بر ۹. i. عددی که با توان پنجم رقم دوم خود برابر است. j. تفاضل هررقم از رقم قبلی آن، دراین عدد، مقدار ثابتی است.

a	b	c	d
e		f	
g	h	i	
j			

شکل ۲۹

عمودی: a. عددی زوج، کـه همهٔ رقم‌های آن، برابر یکدیگرند. b. پنج برابر عـدد h در ردیف عمودی. c. یك واحد بیشتر از عدد i در ردیف عمودی. d. عددی بارقم‌های‌برابر. h. تعداد پرتقال‌های داخل سبد یکی از خوانندگان مجارستانی‌این‌کتاب. i. تعداد صفحه‌های یك‌کتاب بسیار جالب.

۱۲۳. یك حالت دیگر

اگر تعریف عدد i درردیف افقی و تعریف عـدد a در ردیف قائم را، به‌ترتیب زیر تغییر دهیم، چـه تغییری در جواب مسألهٔ قبل ایجاد می‌شود (شکل ۲۹).

ردیف افقی: i. عددی که، رقم اول‌آن، یك‌واحد ازرقم دوم آن‌بیشتر باشد.

ردیف عمودی: a. عددی که همهٔ رقم‌های آن، برابر یکدیگرباشند. (تعریف بقیهٔ عددها، بدون تغییرباقی می‌مانند).

۱۲۴.

افقی (شکل ۳۰): a . نصف عـدد c در ردیـف افقی. c. عـددی با

رقم‌های برابر. e. مجذورعدد d درردیف عمودی. f. عددی که دو رقم وسط آن، با هم برابرند، رقم آخر بزرگترین رقم و رقم اول، دو واحد از هررقم وسطی کوچکتر است. h. مجذور یك عـدد درست. i. مجموع دو رقـم اول عدد f درردیف افقی.

a	b	c	d
e			
f			g
h		i	

شکل ۳۰

عمودی: a. عددی که ۲ واحدکمتر ازعدد h در ردیف افقی است. b. عدد بخش‌پذیر بر ۵۱. c. مجذور یك عدد درست. d. همان عدد c در ردیف افقی. f. عددی که درتقسیم بر ۱۱، باقی‌مانده‌ای برابر ۱۰ می‌دهد. g. ۷ برابر عدد i از ردیف افقی.

۱۲۵.

افقی (شکل۳۱): a. نصف‌عدد c درردیف افقی. c. عددی بارقم‌های برابر. e. مجذور عدد d در ردیف عمودی. f. عددی که دو رقم وسط آن، باهم برابرند. h. مجذور یك عدد درست.

عمودی: a. ازعدد h درردیف‌افقی، کوچکتراست. b. عددی‌بخش‌پذیر

a	b	c	d
e			
f			g
h		i	

شکل ۳۱

۵۱. d. برابربا عـدد c از ردیف افقی. f. عددی که در تقسیم بر ۱۱، به باقی‌ماندهٔ ۱۰ می‌رسد. g. ۷ برابر عدد i ازردیف افقی.

.۱۲۶

افقی (شکل ۳۲): a. تفاضل هـر رقم آن از رقم قبلی، مقدار ثابتی است (و این تفاضل ، از تفاضل رقم‌هـای متوالی عـدد a درردیف عمودی کوچکتر است). e. مجموع عدد ۱۰۰ باعدد f درردیف افقی. f. اگرعدد e ردیف افقی را از ۱۰۰ کـم کنیم، این عـدد به دست می‌آید. g. شمارهٔ ایستگاهی که، لاتسی، برای گذراندن روزهای تعطیل خود، درآن‌جا، پیاده می‌شود. i. شمارهٔ صفحهٔ کتابی که لاتسی بـه‌مطالعهٔ آن مشغول است. j. عددی کـه هر رقم آن، کوچکتر از رقم قبلی است، ضمناً، تفاضل هر دو رقم مجاور، مقدار ثابتی است.

a	b	c	d
e		f	
g	h	i	
j			

شکل ۳۲

عمودی: a. عددی که تفاضل بین هررقم آن با رقم قبلی مقدارثابتی است (و این تفاضل، کمتر از تفاضل هـر دو رقم متوالی درعدد d از ردیف عمودی است). b. نیمهٔ دوم عدد a درردیف افقی. c. یك عدد دورقمی. d. عددی که درآن، تفاضل هر رقم با رقم قبلی، مقدار ثابتی باشد (این تفاضل، از تفاضل بین هر دورقم متوالی در عدد j افقی کمتر است). h. همان عدد i ردیف عمودی، به‌شرطی که از آخر بـه‌اول نوشته شود. i. همان عدد h از ردیف عمودی، به شرطی که ازآخر به‌اول نوشته‌شود.

(چه دراین مساله وچه در مساله‌های دیگر، هرجا صحبت از رقم‌قبلی باشد، به معنایی است کـه در زیر توضیح می‌دهیم. رقم‌های هر عدد، ردیفی

طبیعی دارند: در عددهایی که به‌صورت افقی نوشته شده‌اند، ازچپ به‌راست ودرعددهایی که به‌صورت عمودی نوشته شده‌اند، ازبالا به پایین. بنابراین، درعددهای «افقی»، رقم‌قبلی به‌معنای رقم سمت‌چپ ودرعددهای «عمودی»، به معنای رقم بالای آن است. از همین جا، معنای «رقم بعدی» هم روشن می‌شود: رقم بعدی در عددهای «افقی» ، رقم سمت راست و در عددهای «عمودی»، رقم پایین آن است.)

۱۲۷.

افقی (شکل ۳۳): *a*. عددی که، درآن، هر رقم‌کوچکتر از رقم قبلی وتفاضل هر دورقم مجاور، مقدار ثابتی است. *e*. عددی که، مجموع‌رقم‌های آن، با مجموع رقم‌های عدد *g* درردیف افقی، برابراست. *f*. عددی زوج. *g*. عددی که، درآن، هررقم‌کوچکتر ازرقم قبلی واختلاف هردو رقم مجاور، مقدار ثابتی است.

a	*b*	*c*	*d*
e			
f			
g			

شکل ۳۳

عمودی: *a*. عددی که، درآن، هررقم از رقم قبلی‌کوچکتر است. *b*. عددی که، مجموع رقم‌های آن، یك واحد از مجموع رقم‌های *a* در ردیف عمودی‌کمتر است. *c*. این عدد، دارای خاصیت زیراست: اگر آن را ازآخر به اول بنویسیم، آن وقت، مجموع دوعدد ـ عدد اصلی و عدد «مقلوب» ـ رقم‌هایی برابر پیدا می‌کند. *d*. عدد چهار رقمی نیست، ولی اگر آن را از آخر به اول بنویسیم (یعنی «مقلوب» کنیم) ، عددی چهار رقمی به دست می‌آیدکه، درآن، هر رقم بعدی‌کمتر از رقم قبلی است.

۱۲۸.

افقی (شکل ۳۴): a. عددی که، درآن ، هررقم از رقم قبلی بزرگتر است. e. عددی که، درآن، هر رقم از رقم قبلی بزرگتر است. f. عددی که، درآن، هررقم، از رقم قبلی خودکوچکتر است. g. عددی که، درآن، هررقم ازرقم قبلی خودکوچکتر است.

a	b	c	d
e			
f			
g			

شکل ۳۴

عمودی: a. عددی که، درآن، هررقم کوچکتر از رقم قبلی است. d. عددی که، درآن، هررقم، کوچکتر از رقم قبلی است.

۱۲۹.

افقی (شکل ۳۵): a. عددی که، درآن، هر رقم بزرگتر از رقم قبلی است. e. عددی که، درآن، هررقم بزرگتر ازرقم قبلی است. f. عددی که، درآن، هررقم کوچکتر ازرقم‌قبلی‌است. g. عددی که، درآن، هررقم، ازرقم

a	b	c	d
e			
f			
g			

شکل ۳۵

a	b	c	d
e			
f			
g			

شکل ۳۶

قبلی خودکوچکتر است.

عمودی: a. عددی که، درآن، هررقم از رقم قبلی خود بزرگتراست. d. عددی که، درآن، هررقم از رقم قبلی خود بزرگتر است.

۱۳۰.

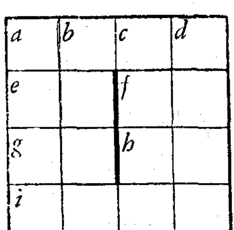
افقی (شکل ۳۶): a. عددی که، درآن، هررقم از رقم قبلی بزرگتر است. e. عددی اول. f. عددی که، هررقم آن، از رقم قبل ازخودکوچکتر باشد. g. عددی که مجموع رقم‌های آن، عددی زوج باشد.

عمودی؛ a. عددی که، درآن، هر رقم از رقم قبلی‌کوچکتر باشد. b. عددی که از مجموع عدد e درردیف افقی و نصف عدد d در ردیف عمودی، بزرگترباشد. c . عددی که، درآن، هررقم قبلی ازرقم بعدی‌آن کوچکترباشد. d. مجموع مربع‌های دوعدد درست.

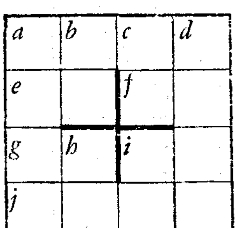
۱۳۱.

افقی (شکل ۳۷): a. عددی که دارای این خاصیت است: اگر از هر رقم، رقم قبلی را کم کنیم، هیچ‌کدام از تفاضل‌ها، منفی نخواهند شد. e. بخش‌پذیر بر ۹. f. عددی زوج. g. عددی که، مجموع رقم‌های آن، برابر است با مجموع رقم‌های عدد h در ردیف افقی. h. کوچکتر از عدد g در ردیف افقی. i. عددی با این خاصیت‌که، اگراز هررقم، رقم مجاورش راکم کنیم، همیشه یك‌عدد، برای تفاضل، به‌دست می‌آید.

عمودی: a. عددی که، زیر هیچ کدام از رقم‌های آن، رقم بزرگتری



شکل ۳۷



شکل ۳۸

وجود ندارد. b. عددی که، مجموع رقم‌های آن، ۶ واحد بزرگتر ازمجموع رقم‌های عدد c در ردیف عمودی است. d. عددی که، هیچ‌کدام از رقم‌های آن، از رقم قبلی خود، کوچکتر نیست.

۱۳۲.

افقی (شکل ۳۸): g. ۱۰ واحد بزرگتر از عدد f در ردیف افقی. i. عددی که تمام رقم‌های آن یکی است. j. به‌همان رقمی ختم شده است که عدد g درردیف افقی، به‌آن ختم شده است.

عمودی. b. مکعب عدد i از ردیف افقی. b. دوبرابر عدد c ازردیف عمودی. c. دو برابر عدد f از ردیف افقی. d. همان عدد j افقی.

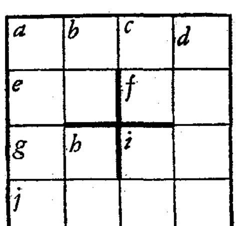
۱۳۳.

افقی (شکل ۳۹): e. عددی زوج.

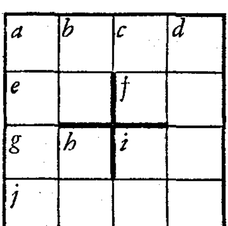
عمودی: b. همان عدد e از ردیف افقی، به‌شرطی‌که از آخر به اول نوشته شود. d. مکعب عدد b در ردیف عمودی.

۱۳۴.

افقی (شکل ۴۰): g. مجموع دوعدد f و i ازردیف افقی. j. مکعب عدد i از ردیف عمودی.



شکل ۳۹



شکل ۴۰

عمودی: a. مکعب عدد b از ردیف عمودی. b. همان عدد i ردیف عمودی، به شرطی که ازآخر به‌اول نوشته شود. c. بخش‌پذیر برعدد i از ردیف عمودی. d. عددی که تمام رقم‌های آن، یکی است.

آیا این جدول را می‌توان حل کرد؟

۱۳۵. پرسش‌های جدید

ازدیدگاه قابل حل بودن (یادداشت قسمت حل مسألهٔ قبلی راببینید)، همهٔ جدول‌های متقاطع عددی، به سه نوع تقسیم می‌شوند:

I) جدول‌های با شرطهای متناقض (تعداد جواب‌ها، برابر ۰)؛

II) جدول‌های قابل حل یك ارزشی (تعداد جواب‌ها، برابر ۱)؛

III) جدول‌های قابل حلی که یك ارزشی نیستند (تعداد جواب‌ها، بیشتر از ۱).

جدولی از نوع II را درنظر می‌گیریم که تعریف سطرها و ستون‌های آن، والبته نه‌همهٔ آن‌ها، داده شده باشد نوع جدول چه‌تغییری می‌کند، اگر

الف. یك یا چند تعریف آن را حذف کنیم؟

ب. تعریفی را حذف نکنیم، بلکه‌یك یاچند تعریف به‌آن اضافه‌کنیم، یعنی سطرها و ستونهایی را هم، که قبلاً تعریف نشده بودند، تعریف‌کنیم؟

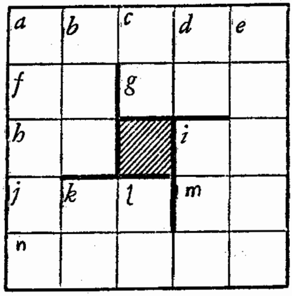
*

توجه خواننده را به‌چند نمونه‌ای جلب می‌کنیم‌که بعداز حل مسألهٔ ۱۳۵ آمده است.دراین نمونه‌ها، می‌توان عبورهای ممکن از یك نوع به‌نوع دیگر جدول را، به‌طور عینی، مشاهده کرد. این نمونه‌ها، از این جهت لازم است‌که، حتی اگر پاسخ پرسش‌ها را می‌دانیم، می‌توان‌آن‌ها را درعمل تجربه‌کرد. این نمونه‌ها، ما را بابعضی ویژگی‌های وجودشرطهای متناقض آشنا می‌کنند و رابطهٔ متقابل ساده‌ای بین نوع مختلف این‌گونه شرطها، برقرار می‌سازند.

۱۳۶.

برای حل جدول شکل ۴۱، باید آگاهی‌هایی از نظریهٔ بخش‌پذیری

عددها داشت. با وجود این، گمان ما براین است که، می‌توانیم با خیال راحت آن را برای خوانندهٔ این کتاب طرح کنیم.



شکل ۴۱

افقی: a. برهیچ‌عدداول دیگری، جزعدد h ازردیف افقی، بخش‌پذیر نیست (عدد ۱ را، اول به حساب نمی‌آوریم). f. عددی که با عدد c از ردیف عمودی، برابر است. g. عددی که بر ۷ و برعدد m از ردیف افقی بخش‌پذیر است. h. عدد اولی که همهٔ رقم‌های آن، با هم برابرند. i. برعدد h از ردیف افقی بخش‌پذیر است. m. عددی که بر هریك از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بخش‌پذیر است. n. عددی بخش‌پذیر بر ۱۰۰۱.

عمودی: a و b. عددی بخش‌پذیر بر ۹. c. عددی بخش‌پذیر بر ۸. e. عددی بخش‌پذیر بر ۱۰۲. i. عددی بخش‌پذیر بر ۱۱۱. h. عددی که بردو رقم اول عدد n درردیف افقی منطبق است. l. عدد بخش‌پذیر بر۷.

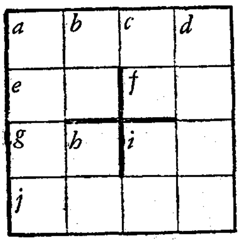
۱۳۷. زندگی نامهٔ شخصی

یه‌روموش بونداش تا کنون در تیم «ناب» بازی می‌کرد؛ او فوروارد گوش راست تیمی بود که ازاتحاد تیم‌های «نامدار» و «برزو» به‌وجود آمده بود. می‌گوییم «بازی‌می‌کرد»، زیرا همین‌چندی پیش، درخواست داده بود، او را درتیم فوتبال «آرش» بپذیرند.

ولی‌رئیس باشگاه‌آرش‌نمی‌خواست «بی‌گدار به‌آب بزند». ومی‌خواست دربارهٔ سجایای اخلاقی هر داوطلبی، حتی اگر فوتبالیست مشهوری مثل

یه‌روموش بونداش باشد، اطمینان حاصل کند. به‌همین مناسبت، از یه‌روموش بونداش خواهش کرد، زندگی نامهٔ خود را به تفصیل بنویسد و علت علاقهٔ خود را، برای ورود به‌باشگاه «آرش» شرح دهد.

یه‌روموش بونداش فکر کرد، اگر پاسخ خود را به‌صورت طنزآمیزی طرح کند، ممکن است علاقهٔ مسئول باشگاه ورزشی را به‌طرف خود جلب کند و زندگی‌نامهٔ شخصی خود را، به‌صورت یك جدول عددهای متقاطع عرضه کرد (شکل ۴۲):



شکل ۴۲

افقی: a. سال تولد. e. شمارهٔ منزلی که در آن زندگی می‌کنم. f. سن من. g. عددی فرد. i. وقتی‌که به‌این سن بودم، بازی خود را در تیم «ناب» آغاز کردم. j. مبلغ اضافی‌که، نسبت به‌دریافتی ماهانهٔ خود در تیم قبلی، از باشگاه «آرش» پیشنهاد می‌کنم (برحسب «فورینت»).

عمودی: a . سال جاری (منظور سالی است که، در آن، یه‌روموش بونداش، جدول زندگی‌نامهٔ خود را، به‌مسئول باشگاه «آرش» می‌دهد).b. برابر عدد e در ردیف افقی. c. سن من در ۲۰ سال دیگر.d. اگر به‌عدد e در ردیف افقی، ۱۰ واحد اضافه، سپس حاصل را ۱۰ برابر و، بعد، نتیجه را در رقم اول عدد b از ردیف عمودی ضرب‌کنیم، این عدد به‌دست‌می‌آید. h. ۹ واحد بیشتر از عدد i عمودی. i. تعداد مربیان ورزشی که، در تیم قبلی، ضمن ۵ سال با آن‌ها کارکرده‌ام.

این جدول را حل‌کنید.

خبرمربوط به‌این‌جدول را، دریك تکه ازمجلهٔ قدیمی پیدا کرده‌ایم،

ولی نتوانستیم عددهای آن را کشف کنیم . ولی ، گروهی از دانشمندان انستیتوی تاریخ ، بعد از بررسی‌های بسیار روشن کردند که حادثهٔ مربوط به‌این خبر، درسدهٔ بیستم اتفاق افتاده است (ضمناً، ماهم کتاب خود را، قبل از سال ۱۹۸۰ نوشته‌ایم).

.۱۳۸

خود را در سدهٔ سی‌ام فرض می‌کنیم. یوچی کابوك، دانشمند نامی، یك کتاب قدیمی را، در بارهٔ مسأله‌های منطقی، کشف کرده است: همین کتابی را که شما در دست دارید.

با خود گفت:

ـ این‌یك‌موفقیت است! ولی من باید بدانم، این کتاب، چه‌زمانی چاپ شده است.

ولی ، دانشمند ما ، نتوانست تاریخ چاپ‌کتاب را پیداکند: ابتدا و انتهای کتاب، از بین رفته بود (والبته، بخش‌هایی از کتاب، سالم‌مانده‌بود). دانشمند ، به‌مسألهٔ ۱۳۷ توجه‌کرد (او شنیده بودکه ، در عهد باستان ، فوتبالیست معروفی بوده است‌که، در این مسأله ، در بارهٔ او صحبت شده

است). صورت مسأله، باقی‌مانده بود البته به‌جز جمله‌آخر داخل پرانتز که دربارهٔ تـاریخ چاپ‌کتاب صحبت شده است) ولی بخش مربوط به حل آن از بین رفته بود. دانشمند به‌کار پرداخت وحل مسأله را آغاز کرد.

او چند جواب به دست می‌آورد؟

۱۳۹.

اگر تعریف عدد b از ردیف عمودی را، از شرطهـای مسألهٔ ۱۳۷ خارج‌کنیم، جواب‌آن به‌چه‌صورتی درمی‌آید؟

۱۴۰.

اگر یادداشت آخر مسألهٔ ۱۳۷ را ، در این باره‌که «حادثه در سدهٔ بیستم اتفاق افتاده است»، ازآن حذف‌کنیم، برای مسأله چندجواب به‌دست می‌آید: یکی یا بیشتر؟

بخش یازدهم
درست و نادرست

---

۱۴۱. فینال مسابقهٔ دو امدادی

هر مسافر دوم تـراموا ، به‌خواندن ستون ورزشی روزنـامه مشغول بود، و بقیه، با شور و هیجان، دربارهٔ‌آخرین خبرهای ورزشی ، با هم‌بحث می‌کردند. یانچی موفق نشده بود روزنامه بخرد، ولی او به‌روزنامه‌هـای دیگران نگاه می‌کرد و پاره‌هایی از سخنان دیگران، به‌گوش او می‌رسید.

خبر اصلی روز ، به‌مسابقهٔ فینـال دو امدادی ۱۰۰ × ۴ متر مردان مربوط می‌شد، که روز قبل انجام شده‌بود. بعد از مبارزه‌ای سخت، ۶کشور به‌فینال راه یافته بودند: تیم‌های اروپایی A و B ، تیم‌های افریقایی C و D و ۲ تیم E و F ازقارهٔ امریکا. یانچی می‌خواست بداند، هریك از این تیم‌ها، چه‌مقامی را دربین شرکت‌کنندگان، به‌دست‌آورده است، ولی‌رسیدن

به‌این منظور، کار ساده‌ای نبود. یانچی شانس زیادی نداشت: سعی می‌کرد، ازروی شانهٔ مسافر کناری‌خود، به‌روزنامه‌نگاه کند، ولی‌هربارکه می‌خواست مطلبی را بخواند ، صاحب روزنامه ، آن را ورق می‌زد و به‌صفحهٔ دیگری می‌رفت؛ ازاین‌طرف وآن‌طرف هم، تکه‌سخنانی به‌گوش می‌رسیدکه، داوری ازروی‌آن‌ها، کار ساده‌ای نبود.

یانچی، تنها توانست، این‌آگاهی‌ها را، درخاطر خود نگه دارد:

(۱) «تیم A برتیم F پیروز شده است».

(۲) «تیم افریقایی، مدال طلا را به‌دست‌آورد».

(۳) «تیم B برتیم D غلبه‌کرد».

(۴) همه‌چیزگواه برآن‌بودکه دوتیم‌امریکایی پشت سرهم قراردارند، ولی ناگهان ودر لحظهٔ‌آخر، یك‌تیم اروپایی خود را در بین‌آن‌ها جاداد.

(۵) «... تیم افریقایی از بقیهٔ تیم‌های شرکت‌کننده در فینال ، عقب مانده بود».

(۶) «۳ دوندهٔ سیاه‌پوست، اول به‌خط پایان رسیدند».

(۷) «تیم F برتیم B پیروز شد».

(۸) «تیم E برتیم F پیروز شد».

(۹) «بین‌دوندگان تیم‌های‌اروپایی، دوندهٔ سیاه‌پوست وجودنداشت».

یانچی، براساس این‌آگاهی‌ها، تلاش‌کرد تامقام‌های هریك از شش‌تیم را پیداکند ، ولی تلاش او بی‌فایده بود و به‌هیچ‌جایی نمی‌رسید. سرانجام، بعد از تجزیه و تحلیل دقیق ، روشن شد، یکی ازگزاره‌های بالا نادرست است: این خبررا یا بد دیده بود، یا بد شنیده بود ویا، موقع‌به‌خاطرآوردن، دچار اشتباه شده‌بود.

بقیه گزاره‌ها، درست‌اند.

تیم‌های شرکت‌کننده در مسابقهٔ دو فینال ، هرکدام ، چه‌مقامی را کسب کرده‌اند ؟

. رهبری تربیت‌بدنی تصمیم گرفت، برای تبلیغ ورزش‌های سبك ، بهتر است مسابقه را درجایی ترتیب دهدکه، هنوز، فوتبال، همهٔ ورزش‌های دیگر را کنار نزده است.

بعد ازبحث زیاد، درهٔرود هایدا را، برای این‌منظور، انتخاب کردند. به‌سختی می‌توان ادعا کرد که مکانی بهتر از این، بتوان برای مسابقه درنظر گرفت: از یك‌طرف، قله‌های سفیدکوه‌های «کونشاگ» و ، از طرف دیگر ، دامنهٔ پوشیده ازجنگل کوه‌های هایدا قرارداشت.

از هر باشگاه ورزشی معروف، نماینده‌ای درمسابقه شرکت‌کرده بود: «باران» (بالباس سفید ونیلوفری)، «تگرگ» (بالباس سفید وسبز)،«طوفان» (با لباس سفید وآبی)، «ابر» (با لباس سفید وقرمز) و «رعد» (با لباس آبی وقرمز). در هرمورد، یکی ازرنگ‌ها، به‌معنای رنگ پیراهن، و رنگ‌دیگر، به‌معنای رنگ شلوارکوتاه‌است. وقتی‌که یکی ازرنگ‌ها سفید باشد،همیشه به‌معنای رنگ شلوارکوتاه است.

مسابقه ، موفقیت بزرگی به‌دست‌آورد . از همهٔ ساکنان دور و بر، کوچك و بزرگ ، به‌تماشای مسابقه‌آمده بودند . احتمالاً ، خوانندهٔ ما، علاقه‌مند باشد از نتیجهٔ مسابقه با خبر شده و بداند، شرکت‌کنندگان در مسابقه، به‌چه مقام‌هایی رسیده‌اند. ولی با کمال تأسف، ما نمی‌توانیم به‌این پرسش‌ها، پاسخ‌بدهیم، زیرا مسابقه‌ها، خیلی دیر به‌پایان رسیدند وما به‌طور کامل از آن‌ها مطلع نشدیم. وقتی‌که از دیگران پرسیدیم، این‌آگاهی‌ها را به‌ما دادند:

(۱) آندراش: من درست نتوانستم نفر اول ونفرآخر را ببینیم. ولی همهٔ دیگر دونده‌ها، شلوارهای کوتاه یك‌رنگ داشتند.

(۲) یانوش : به‌سختی می‌شد دوندگان را از هم تمیز داد ؛ چقدر لباس‌های‌آن‌ها شبیه به‌هم بود. تنها چیزی که به‌خاطر می‌آورم این‌است که،

بین لباس نفر اول، با لباس نفر چهارم، وجه اشتراکی وجود نداشت.

(۳) یونچی: شلوارهای کوتاه سه‌دوندهٔ اول، هم‌رنگ بودند.

(۴) کاتی: دونده‌ای که آخرین نفر بود، پیراهن نیلوفری داشت.

(۵) شاندور: تاآن‌جاکه به‌خاطر می‌آورم، دو دوندهٔ اول و آخر، پیراهن‌های هم‌رنگ داشتند.

(۶) ژوفی: درلباس ورزشی دودوندهٔ‌آخر، رنگ قرمز وجود داشت.

(۷) یوژی: من به‌سختی به‌یاد می‌آورم که شلوارهای کوتاه دو دوندهٔ آخر، از یک‌رنگ بودند.

(۸) ایلونکا: دوندهٔ سوم، پیراهن قرمز داشت.

(۹) فدری: من نفر اول و آخر را نتوانستم به‌خوبی ببینم، ولی به‌یاد دارم که دربین‌بقیهٔ شرکت‌کنندگان درمسابقه، رنگ‌آبی وجودنداشت.

کشف حقیقت ازبین این پاسخ‌ها، کارساده‌ای نبود. ولی‌خوشبختانه، برای ما معلوم شد که ۲ پاسخ از ۹ پاسخ بالا، نادرست است و تنها ۷ «نشانهٔ» دیگر، باحقیقت سازگارند.

این مطلب هم‌روشن شدکه دونده‌های مختلف، درزمان‌های مختلفی، فاصلهٔ مسابقه را پشت‌سر گذاشته‌اند.

این آگاهی‌هایی که به‌زحمت فراهم کرده‌ایم، می‌توانند به‌خواننده کمک کنند تا ردیف ورزشکاران را، در عبور ازخط پایان، معین کنند.

مقام‌های دوندگان، به‌چه ردیفی بوده است؟

۱۴۳. حیرت مربی

پنج‌شناگر ـ آندراش، بهلا، چابا، دژیو و ارنیو ـ در یک باشگاه ورزشی عضو بودند. یک‌روز، در غیاب مربی، یک مسابقه بین خود ترتیب دادند. وقتی که مربی به‌باشگاه‌آمد، نتیجهٔ مسابقه را جویا شد و این پاسخ‌ها را شنید:

آندراش: (۱) دژیو به‌مقام دوم رسید، (۲) خود من سوم شدم.

بهلا: (۳) من بهترین نتیجه‌را به‌دست‌آوردم، (۴) ولی چابا دوم‌شد.

چابا: (۵) من سوم شدم، (۶) ولی به‌لا نفرآخر شد.

دژیو: (۷)من دوم شدم، (۸)ولی‌ارنیو، با این که تمام نیروهای خود را به کار برد، چهارم شد.

ارنیو: (۹) من توانستم تنها یك شناگر را پشت‌سر بگذارم، (۱۰) آندراش مسابقه را برد.

ولی وقتی که بچه‌ها چهرهٔ شگفت‌زدهٔ مربی را دیدند، به‌او اطلاع دادند که، هر کدام از آن‌ها، یك آگاهی درست داده است ویك آگاهی نادرست.

حالا، مربی در تلاش این است که بتواند، نتیجهٔ واقعی مسابقه را، پیدا کند.

به‌او کمك کنید!

(شناگران، در زمان‌های متفاوتی، به‌خط پایان مسابقه رسیده‌اند.)

۱۴۴. حالت جدید

فرض کنیم، در مسألهٔ قبل، ارنیو، به‌جای گزارهٔ (۱۰) که گفته بود: «آندراش، مسابقه را برد»، بگوید:

(۱۰) «چابا سوم شده است».

ولی بقیهٔ شرطها، عین مسألهٔ قبل، باقی‌بمانند.

در این‌حالت، جواب مسألهٔ ۱۴۳ به‌چه‌صورتی درمی‌آید؟

۱۴۵. خوراکی شمارهٔ I

یونچی، پیشتا، ارژی و یوشکا، در خانه تنها مانده بودند. مامان، قبل از آن که بیرون برود، بارها و بارها تأکیدکرده بود که، هیچ‌کس نباید، قبل از برگشتن او، به بشقاب پودینگ خوشمزه، که برای شام آماده شده بود، دست بزند.

ازتفصیل (که دراین‌جا لزومی‌ندارد) می‌گذریم. همین‌قدر می‌گوییم، وقتی‌مامان‌به‌خانه‌برگشت، دیدکه‌تکه‌خرده‌های‌بشقاب‌چینی زیبا کف‌آشپزخانه

ریخته است و دربین تکه‌های بشقاب شکسته، باقی‌ماندهٔ شام به‌زمین‌ریخته است. چهار نازپروردهٔ او هم، دور و بر خرده‌شکسته‌ها، با چهره‌ای گناه‌کار ایستاده بودند.

وقتی‌که مامان‌آغاز به‌رسیدگی کرد، این پاسخ‌ها را شنید:

یونچی: (۱) من بشقاب پودینگ‌را چپه نکردم.

(۲) وقتی‌که به‌آشپزخانه‌آمدم، پیشتا آن‌جا بود.

(۳) یوشکا، بعد از من به‌آشپزخانه‌آمد.

پیشتا: (۴) من بشقاب پودینگ را برنگردانده‌ام.

(۵) وقتی‌که من به‌آشپزخانه‌آمدم، یونچی‌آن‌جا بود.

(۶) یوشکا، بعد ازهمه، به‌آشپزخانه‌آمد.

ارژی: (۷) من بشقاب را نشکستم.

(۸) یونچی و پیشتا دروغ می‌گویند.

(۹) وقتی‌که من به‌آشپزخانه رسیدم، یوشکاآن‌جا بود.

یوشکا: (۱۰) من شام را به‌زمین نریختم.

(۱۱) وقتی‌که من، برای‌آخرین‌بار وارد‌آشپزخانه شدم، صدای بلندی به‌گوشم رسید.

(۱۲) پیشتا قبل از همه به‌آشپزخانه رفته بود.

مامان بازهم چیزهایی ازبچه‌ها پرسید و ازپاسخ‌هایی‌که شنید، مطمئن شد، آن‌که برای‌آخرین‌بار واردآشپزخانه شده است، همهٔ نشانه‌ها را درست داده است؛ بقیهٔ بچه‌ها هرکدام دوپاسخ درست ویك پاسخ نادرست داده‌اند.

چه‌کسی بشقاب پودینگ را شکسته است؟

۱۴۶. سه دوشیزه

روزی باقطار برقی حومهٔ شهر مسافرت می‌کردیم. دریکی‌ازواگن‌ها، سه‌دوشیزه با ما بودندکه ۱۶-۱۷ ساله به‌نظر می‌آمدند و، ظاهراً، دوستانی نزدیك به‌هم بودند.

در یکی از ایستگاه‌ها، سه پسر جوان وارد واگن شدند و (همان‌طور که شماهم حدس می‌زنید)، روبه‌روی دخترها نشستند. پسران جوان، طبق معمول ، فرصت را برای آشنایی با همسالان زیبای خود، از دست ندادند. دخترها، ابتدا تنها با خودشان صحبت می‌کردند و می‌خندیدند، ولی کم‌کم، با بی‌میلی، دربرابر اصرار پسرها تسلیم شدند و بعضی پاسخ‌های کلی دادند. ما، این حرف‌ها را شنیدیم.

پسر: شما دخترها درکجا درس می‌خوانید؟

ازآن‌جاکه ما، دخترها را، نمی‌شناختیم، آن‌ها را X، Y و Z می‌نامیم.

(۱) X: همهٔ ما به‌دبیرستان می‌رویم.

(۲) Y: بله، من در دبیرستان درس می‌خوانم.

(۳) Z: هیچ‌کدام ازما، به‌آموزشگاه فنی نمی‌رویم.

پسر (به‌یك یك دخترها روکرد): اسم شما چیست؟

(۴) X: اسم من یوا است.

(۵) Y: در بین سه‌نفرمان، من کوتاه‌ترین نام را دارم.

(۶) Z: نام من ایلونکا است.

پسر: از آشنایی شما خوشحالیم. نمی‌خواهید، کمی در بارهٔ خودتان صحبت کنید.

(۷) X : آن‌که نامش آنا است، دیگر در دبیرستان «برژن» درس نمی‌خواند.

(۸) Y: آن‌که نامش آگنش است، درمدرسهٔ حرفه‌ای درس‌می‌خواند.

(۹) Z : همهٔ ما در یك‌کلاس هستیم.

بعد از آن‌که دخترخانم‌ها، به‌اندازهٔ کافی سر به‌سر پسرها گذاشتند، دلشان به‌رحم آمد و راز خود را فاش کردند. معلوم شد که آن‌ها، ازهمان ابتدای کار، بین خودشان قرار گذاشته بودند که یك نفر به‌همه پرسش‌ها، پاسخ درست بدهد، دیگری ، همه پاسخ‌های خود را نادرست انتخاب کند، و سومی، هر دو پاسخ متوالی خود را، یکی درست و دیگری نادرست بدهد. (منظور از دختر خانم اول، الزاماً همان کسی نیست‌که ما X نامیده‌ایم؛

همچنین، منظور از دختر خانم‌های دوم وسوم، الزاماً، Y و Z نیست).
بعد دخترها پرسیدند:
ـ چرا روحیهٔ خود را باخته‌اید ؟ آیا به‌راستی هنوز نمی‌توانید نام هرکدام از ما را پیدا کنید و بدانید که در کجا درس می‌خوانیم؟ بهتر است به‌شما کمك کنیم و نشانهٔ دیگری هم بدهیم. هروقت ، یکی از ما، پاسخ نادرستی داده است، حتماً نفی گزارهٔ او ، درست است. خوب، ما دیگر به‌ایستگاه خود رسیده‌ایم وباید از قطار پیاده شویم.
آیا، براساس این آگاهی‌ها، می‌توان نام هریك از دخترها و جایی را که تحصیل می‌کنند، پیدا کرد؟

۱۴۷. آوارهٔ بیابان

مسافری از بغداد به‌بخارا می‌رفت. بعد از یك آبادی، راه به‌دوشاخه تقسیم می‌شد : یکی از راه‌ها ، به‌طرف بخارا می‌رفت و دیگری، به‌بیابان می‌رسید. تنها مردم محلی می‌دانستند که ازکدام راه باید رفت. مشهود بود که، مردم بومی دوگونه‌اند: بعضی همیشه راست می‌گویند و بقیه، همیشه دروغ. ضمناً ، این‌ها، مردمی کم حرف بودند و، در برابر هرپرسشی، تنها به‌پاسخ «بله» یا «نه» قناعت می‌کردند. با همهٔ این‌ها، مسافر ما توانست‌راه بخارا را پیدا کند . او، برای منظور خود، از نخستین ساکن آبادی ، تنها یك پرسش کرد.
پرسش مسافر چه بوده است؟

تاریخ جزیرهٔ گویان
(مسأله‌های ۱۴۸-۱۵۱)

در جزیرهٔ گویان، که در وسط دریا قراردارد، سه آبادی وجود دارد «حق گو»، «کج‌رو» و «میانه». این‌آبادی‌ها، نام خود را، تصادفی، به‌دست

نیاورده‌اند. ساکنان آبادی «حق‌گو» همیشه (و تنها) راست مـی‌گویند. ساکنان آبادی «کج‌رو»، جز دروغ، حرفی نمی‌زنند. مردم آبادی «میانه»، به‌نوبت، گاهی راست می‌گویند و گاهی دروغ؛ ولی البته حرف‌های راست یا دروغ را، تصادفی انتخاب نمی‌کنند: همیشه، نفی گزارهٔ راست آن‌هـا دروغ، و نفی گزارهٔ دروغ آن‌ها، راست است.

ساکنان دیگری در جزیره وجود ندارند: هرکسی که در جزیره زندگی می‌کند. ساکن یکی از این سه‌آبادی است.

برای حل چهار مسألهٔ زیر، باید همهٔ این‌ها را درنظر گرفت.

۱۴۸. کجا آتش‌گرفته است؟

کشیك مرکزآتش‌نشانی جزیرهٔ بویان، غرق در پیش‌آمدهای یك‌رمان جالب بودکه تلفن زنگ زد. گـوشی تلفن را برداشت؛ از آن‌طرف خط، صدایی پراضطراب می‌گفت:

ـ عجله‌کنید! درآبادی ما آتش‌سوزی رخ داده است.

ـ درکدام‌آبادی؟

ـ درآبادی «میانه».

مأمورآتش‌نشانی چه‌باید بکند؟

۱۴۹. در چای‌خانه

یك‌روز مسافری به‌جزیرهٔ بویـان آمد. سه‌نفر از مردم محلی به‌او برخوردند از او دعوت کردند تـا در چای‌خـانه، به‌گفت و گویی دوستانه بنشینند. مسافر، که از «طبیعت سه‌گانه» جزیره‌نشینان مطلع بود، تصمیم گرفت، قبل ازهرچیز، روشن کندکه، این‌سه‌نفر، هریك ازکدام‌آبادی هستند. در برابر پرسش او، افراد محلی ـ که‌آن‌ها را X، Y و Z می‌نـامیم، این پاسخ‌ها را دادند:

(۱) X: من در همان‌آبادی Y زندگی می‌کنم.

(۲) Y: من در همان‌آبادی Z زندگی می‌کنم.

(۳) Z: نه X ونه Y ، هیچ‌کدام «هم‌ولایتی» من نیستند.

(۴) X : Z ، اهل «میانه» است.

(۵) Y : آبادی محل زندگی X تاآبادی محل زندگی من، به‌اندازهٔ از«میانه» تا «کج‌رو» فاصله دارد.

(۶) Z:X و Y از یک‌آبادی نیستند.

(۷) X: در مدتی‌که در این‌جا با هم صحبت می‌کردیم ، Z توانست یک‌بار دروغ بگوید.

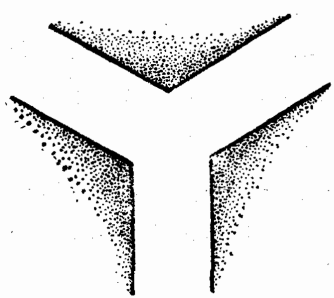
(۸) Y:X همیشه راست می‌گوید.

(۹) Z: آخرین‌بار، هم X و هم Y دروغ گفته‌اند.

از خواننده می‌خواهیم، به‌مسافرکمک کند. X، Y و Z، هرکدام اهل چه‌آبادی هستند؟

۱۵۰. در سه‌راهی دشت‌هموار

تاریخ جزیرهٔ بویان و ساکنان آن، که به‌کوتاهی برای خوانندگان شرح‌دادیم، علاقهٔ بسیاری ازمردم‌را به‌طرف خود جلب‌کرده بود. به‌همین مناسبت ، هیأت تحریریهٔ یکی از روزنامه‌ها ، خبرنگاری را به‌جزیره بویان فرستاد، تا به‌اوضاع و احوال آن‌جا آشنا شود و موضوع جالبی راکه فراهم می‌کند، در دفتر یادداشت خود بنویسد.



شکل ۴۳

خبرنگار، برپشت اولین عقابی‌که پیداکرد، نشست و خواهش کرد او را به‌آبادی «حق‌گو» برساند. تا جزیرهٔ بویان، همه‌چیز به‌خیر و خوشی گذشت، ولی عقاب، به‌جای‌آبادی «حق‌گو»، در دشت صافی در تقاطع یك سه‌راهی فرودآمد (شکل ۴۳).

خبرنگار، با حالت اعتراض گفت:

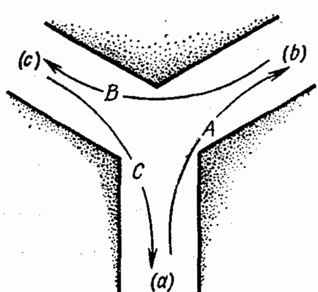
- این‌چه‌شوخی‌است! قرار مااین‌بودکه مرا به‌آبادی «حق‌گو»ببری.

ولی عقاب بال‌هایش را تکان‌داد و گفت:

- خیلی متأسفم‌که‌کار دیگری از دست من برنمی‌آید. تا ۱۰ دقیقهٔ دیگر غذای من‌تمام می‌شود ومن، دراین‌مدت، نمی‌توانم خودرا به‌منزل‌گاه عقاب‌ها برسانم.

و عقاب پروازکرد و رفت.

خبرنگار بدشانس، تك و تنها، در بیابان و در تقاطع یك سه‌راهی باقی‌مانده بود. روشن‌است‌که او، خیلی زود متوجه شدکه، ازاین‌سه‌مسیر، یکی به‌طرف‌آبادی «حق‌گو» می‌رود، دیگری به‌طرف‌آبادی«کج‌رو» وسومی به‌طرف‌آبادی«میانه»، ولی‌کدام‌یك به‌کدام‌طرف، اطلاعی نداشت. درابتدای مسیرها، هیچ‌نشانه و علامتی وجود نداشت. (اگر «طبیعت سه‌گانهٔ» مردم جزیرهٔ بویان را درنظر بگیریم، دلیل فقدان نشانه‌های راهنمایی درجاده‌ها، روشن می‌شود: هرگونه‌نوشته‌ای، می‌تواند موجب‌سردرگمی بیشتربشود.)



شکل ۴۴

خوشبختانه، درهریك ازجاده‌ها، آدمی دیده می‌شد. رهگذران نزدیك شدند و هرکدام، به‌طرفی که می‌خواستند، پیچیدند. (همهٔ این‌ها، در شکل ۴۴ نشان داده شده است. جاده‌ها را با a ، b و c و مسیر عبور رهگذران A ، B و C را، با پیکان نشان داده‌ایم.)

مخبر روزنامه پرسش‌هایی کرد و پاسخ‌هایی به‌او دادند.

ـ ازکجا می‌آیید؟

(۱) A: ازآبادی «حق گو».

(۲) B: از منزل.

(۳) C: از...

ـ به کجا می‌روید؟

(۴) A: به‌منزل.

(۵) B: به‌آبادی محل زندگی A.

(۶) C: به‌آبادی «حق گو».

ـ کجا زندگی می‌کنید؟

(۷) A: درآبادی «حق گو»

(۸) B: درآبادی «کج‌رو»

(۹) C: در ...

متأسفانه، خبرنگار نتوانست پاسخ‌های(۳) و (۹) (پاسخ‌های اول و سوم رهگذر C) را بشنود. او اطمینان داشت‌که C، هم در (۳) و هم در (۹) نام یکی ازآبادی‌ها را به‌زبان‌آورد. اما متوجه نشدکه در هردومورد، یك‌آبادی را نام‌برد یا دوآبادی مختلف را.

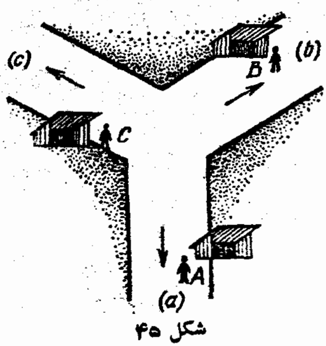
با همهٔ این‌ها، وقتی‌که خبرنگار روی پاسخ‌هاکمی فکرکرد، توانست کشف‌کندکه هرکدام از جاده‌ها، به‌کدام آبادی منتهی می‌شود. ضمناً، او توانست‌روشن‌کندکه C «هم‌ولایتی» B است‌وبااودریك‌آبادی زندگی‌می‌کند، درنتیجه، توانست‌گزاره‌های (۳) و (۹) را هم، که نشنیده بود، تکمیل‌کند.

شما هم، همهٔ این‌ها را روشن‌کنید.

۱۵۱. حالت جدید

تفاوت این مسأله، بامسألهٔ قبل، این است‌که، پیاده‌های A، B وC، در جاده‌ها حرکت نمی‌کنند، بلکه‌کنار پناه‌گاه خود ایستاده‌اند (شکل ۴۵). آن‌ها، در برابر پرسش‌های خبرنگار، این‌پاسخ‌ها را دادند.

(۱) A: هرکدام ازجاده‌ها، به‌یکی‌ازسه‌آبادی می‌رود: یابه«حق‌گو»؛ یا به «کج‌رو» و یا به «میانه».



شکل ۴۵

(۲) B: من ساکن «میانه» هستم.

(۳) A: جاده‌ها، به‌آبادی‌های مختلف می‌روند.

(۴) C : من، در همان‌آبادی B زندگی می‌کنم.
(۵) A: ما سه‌نفر، در سه‌آبادی مختلف زندگی می‌کنیم.
(۶) B: جاده‌هایی که ازکنار پناه‌گاه‌ها رد می‌شوند، به‌همان‌آبادی محل زندگی‌کسی که کنار پناه‌گاه ایستاده است، نمی‌رسند.
(۷) C : جادهٔ a ، به‌سمت‌آبادی محل زندگی من نمی‌رود.
(۸) A : جادهٔ a ، به‌طرف‌آبادی محل زندگی من نمی‌رود.
(۹) B : حرف C را باور نکنید، او حتی یك‌بار هم درست نگفته است.
(۱۰) B:A، در مورد اخیر، دروغ گفته است.
(۱۱) C : جادهٔ C، به‌سمتی نمی‌رودکه من زندگی می‌کنم.
معلوم‌کنید، چه‌کسی درکجا زندگی می‌کند و هریك از جاده‌ها، به‌کدام‌آبادی می‌رسند.

۱۵۲. خوراکی شماره II

این‌بار، سه‌نفر مورد سوءظن‌اند: کاتی، ایلونکا و شانی. این‌بار، مامان متوجه گم‌شدن پنج شکلات شد. اوآن‌ها را برای گردش فردای بچه‌ها تهیه‌کرده بود. هرسه‌نفر، یك‌صدا، خود را بی‌تقصیر می‌دانستند.
(۱) کاتی : من حتماً به یکی از شکلات‌ها هم دست نزده‌ام!
(۲) ایلونکا : من حتی به یکی از شکلات‌ها هم دست نزده‌ام!
(۳) شانی : من حتی به یکی از شکلات‌ها هم دست نزده‌ام!
چنین‌آگاهی ناچیزی، می‌تواند حتی باتجربه‌ترین بازپرس‌ها را به‌شك بیندازد، ولی مامان اطمینان داشت که نباید جای دیگری، دنبال مقصر برود و، به‌همین‌جهت‌به‌پرسش‌های خود ادامه داد واین‌پاسخ‌ها را شنید:
(۴) کاتی: ایلونکا، بیشتر از شانی شکلات برداشت.
(۵) ایلونکا (که رو به‌کاتی‌کرده بود): چرا دروغ می‌گویی؟
(۶) شانی: کاتی و ایلونکا، همه شکلات‌ها را برداشته‌اند!
(۷) کاتی (که رو به‌شانی‌کرده بود): دروغ می‌گوید!

بالاخره، بعد از پی‌گیری‌های مامان، معلوم شد که، هر کدام از بچه‌ها، به تعداد شکلات‌هایی که برداشته ، دروغ گفته است.

کاتی، ایلونکا و شانی، هر کدام چند شکلات برداشته‌اند؟

۱۵۳. حالت‌های دیگر

مسألهٔ قبل‌را، برای موردهایی‌حل کنید که، مامان، دربرابر پرسش‌های خود، این ۷ پاسخ را شنیده باشد:

حالت الف

(۱) کاتی : من حتی به یکی از شکلات‌ها هم دست نزده‌ام!

(۲) ایلونکا : من حتی به‌یکی از شکلات‌ها هم دست نزده‌ام!

(۳) شانی : من حتی به یکی از شکلات‌ها هم دست نزده‌ام!

(۴) کاتی: ایلونکا، بیشتر ازشانی شکلات برداشته است!

(۵) ایلونکا (روبه‌کاتی می‌کند): چرا دروغ می‌گویی؟

(۶) شانی:کاتی سه‌شکلات برداشته است !

(۷) کاتی (رو به‌شانی می‌کند) : دروغ می‌گوید!

حالت ب

(۱) کاتی : من حتی به یکی از شکلات‌ها هم دست نزده‌ام!

(۲) ایلونکا : من حتی به‌یکی از شکلات‌ها هم دست‌نزده‌ام!

(۳) شانی : من حتی به‌یکی از شکلات‌ها هم دست نزده‌ام !

(۴) کاتی: ایلونکا، بیشترازشانی شکلات برداشته است!

(۵) ایلونکا (روبه‌کاتی می‌کند): چرا دروغ می‌گویی؟

(۶) شانی: کاتی، یك شکلات ، بیشتر ازایلونکا برداشته‌است!

(۷) کاتی (رو به‌شانی می‌کند): دروغ می‌گوید!

دوحالت، تنها درگزارهٔ (۶) با هم فرق دارند. بقیهٔ گزاره‌ها ، دردو حالت «الف» و «ب» یکی هستند وبر گزاره‌های متناظر خود در مسألهٔ ۱۵۲ (یعنی، گزاره‌های با شماره‌های برابر) منطبق‌اند.

این روایت، مربوط به‌همان چهار «قهرمانی» است که در مسالهٔ ۱۴۵ هم، باآن‌ها سروکار داشتیم. ازآن‌جاکـه، بشقاب زیبای چینی شکسته شده بود، تنها یك دیس بلـوری روی میز بود. ولی، این دیس هـم خالی بود: ۴سیب و۴موزی که مامان، برای شام بچه‌ها گذاشته بود، ناپدید شده‌بودند.

مامان تلاش زیادی کـرد تا، آن‌هایی را که بـدون اجازه از میوه‌ها استفاده‌کرده‌اند، وادار به اعتراف‌کند. ولی بچه‌ها، جواب سربالا می‌دادند:

(۱) یولچی: من به‌سیب‌ها دست نزده‌ام!

(۲) پیشتا: ولی، آخر من‌هم از دیس برداشته‌ام...

(۳) یوشکا: اولین سیب را یولچی برداشت!

(۴) پیشتا: دخترها آغازبه برداشتن میوه از دیس‌کردند!

(۵) ارژی (به پیشتا): توساکت باشی بهتر است: یك‌بار راست‌گفتی و، بعد ازآن، بلافاصله، دوبار دروغ‌گفتی!

(۶) یوشکا: توهنوز اعتراض داری؟ این، شما دخترها هستید که، هر دوبار، مقصرید، هم حالا وهم بار قبل!

(۷) یولچی: پسرها بودندکه برای باراول، موزها را برداشتند!

(۸) پیشتا (به یولچی): پس این را هم بگوکه تو سیب رابرداشتی!

(۹) ارژی . بله یوشکا بـه تنهایی ، بیش از نصف همه سیب هـا را برداشت!

(۱۰) یوشکا (به ارژی). دروغ می‌گویی!

(۱۱) ارژی: پیشتا، سیب وموز برداشت!

(۱۲) یوشکا: یولچی موزبرداشت!

(۱۳) یولچی: پسرها، حتی یك‌بارهم راست نگفتند!

(۱۴) پیشتا: هردو دختر دروغ می‌گویند!

قبول‌کنیدکه، کار مامان، برای رسیدن به حقیقت، چندان ساده نبود، ولی اوتوانست همه‌چیز را روشن‌کند. معلوم شدکه

I) تنها یکی ازچهاربچه، همه‌جا راست گفته است؛

II) هربچه، به‌تعداد میوه‌ای که ازدیس برداشته است (سیب وموز)، دروغ گفته است.

هریك ازبچه‌ها چند سیب وچند موز ازدیس برداشته‌اند؟

(یولچی و ارژی دختر، و پیشتا و یوشکا پسرهستند.)

۱۵۵. در اردوی ورزشی

آخرین‌باری که به اردوی ورزشی رفته بودیم، باسه دختر ورزشکار روبه‌رو شدیم. دراین مساله، می‌خواهیم دربارهٔ‌آن‌ها صحبت کنیم، ولی از آن‌جاکه، دخترها مایل نبودند، اسم خودرا فاش کنند. آن‌ها را با «نام‌های مستعار» A، B وC یاد می‌کنیم. می‌دانستیم، یکی ازاین دخترها عضوباشگاه ورزشی «رعد»، دیگری عضو باشگاه «طوفان» و سومی عضو باشگاه «ابر» است. ولی اطلاع نداشتیم، کدام دختر عضو کدام باشگاه است. به همین مناسبت، تصمیم گرفتیم، این‌موضوع‌را، ضمن «مصاحبهٔ» باآن‌ها روشن کنیم.

ولی روشن بودکه هم‌صحبت‌های ما، می‌خواستند مساله را با شوخی برگزارکنند وبه‌ما اطلاع دادندکه، تنها به‌پرسش‌هایی پاسخ می‌دهندکه به رنگ لباس باشگاه ورزشی‌آن‌ها مربوط بشود. ما هم، چاره‌ای جز موافقت نداشتیم: مامی‌دانستیم که رنگ لباس ورزشی باشگاه «طوفان» سفید وآبی، «ابر» سفید وقرمز و «رعد» آبی وقرمز است.

دختران ورزشکار، این پاسخ‌ها را به‌ما دادند:

(۱) A : یکی ازرنگ‌های لباس ورزشی باشگاهی که B در آن است، آبی می‌باشد.

(۲) B : C عضو باشگاهی است که یکی از رنگ‌های لباس ورزشی آن سفید است.

(۳) C : A عضو باشگاهی است که، درلباس ورزشی خود، از رنگ آبی هم استفاده می‌کند.

(۴) A : یکی ازرنگ‌های لباس ورزشی C ، آبی‌است.

(۵) B : بین رنگ‌های لباس ورزشی باشگاهی که A عضو آن است، رنگ قرمز وجود ندارد.

(۶) C : یکی از رنگ‌های لباس ورزشی باشگاه مربوط به B ، سفید است.

این آگاهی‌ها، خیلی کم و «ناجور» بود. بنابراین لازم بود با احتیاط به‌آن‌ها بنگریم- دخترها هم، با نگاهی شیطنت‌آمیز به ما می‌نگریستند و می‌خندیدند.

از رفتن به‌درون اردوگاه‌هم منع شده بودیم. برای ما مسلم شدکه، این دخترها، ساکن‌آبادی‌های جزیرهٔ بویان هستند وهرکدام ازآن ها ساکن یکی ازآبادی‌های «حق گو»، «کج‌رو» و«میانه»اند. ولی ما از آبادی محل زندگی هرکدام از آن‌ها، اطلاعی نداشتیم. چاره‌ای نبود جزاین که‌بازهم پرسش‌هایی ازآن‌ها بکنیم. واین است پاسخ‌های آن‌ها:

(۷) A : C بیشتر از B به‌شما دروغ گفته است.

(۸) B : بیش ازنصف پاسخ‌هایی که تا این‌جا شنیده‌اید، درست است.

(۹) C : بیش ازنصف پاسخ‌هایی که تا اینجا شنیده‌اید، نادرست‌است.

دخترها، بادادن این پاسخ‌ها، پارا به‌فرار گذاشتند ونا پدید شدند. ما ماندیم وگزاره‌های (۱) تا (۹). حداقل این اطمینان را داشتیم که آن ها، در اردوی ورزشی بودند. بعداً معلوم‌شدکه، به‌گزارهای (۷) ، (۸) و (۹) می‌توان چشم امید دوخت.

آیا به‌کمك این‌آگاهی‌ها، می‌توان به‌صورت یك ارزشی، معین‌کردکه هرکدام ازاین دخترها به‌چه باشگاه ورزشی تعلق دارند؟

۱۵۶. حالت «کوتاه شده»

به‌نظر می‌رسد، بخشی ازگزاره‌های مسالهٔ قبل، کاملاً زیادی است: ظاهراً، باحذف آن‌ها، هیچ‌تغییری به‌وجود نمی‌آید.

آیا این تصور درست است؟

۱۵۷. يك‌عقب‌نشينی كوچك نظری

الف) قانع شديم كه، يكی از جواب‌های حالت «كوتاه شدهٔ» (مسالهٔ ۱۵۶)، باتمام شرطهای مسالهٔ اصلی ۱۵۵ سازگار است.

آيا نمی‌توان علت اين پيش‌آمد را، به‌صورتی كـوتاه‌تر از حل مسالهٔ ۱۵۶ روشن‌كرد؟

ب) شرطهای مسالهٔ ۱۵۵ را می‌توان، تنها بـاحذف اين يا آن بخش ازگزاره‌های (۱)تا(۹) تغييرداد، همهٔ گزاره‌های‌ديگر، بايد به‌قوت خودباقی باشند. (بنابرايـن ، نمی‌توان گـزاره‌های حذف شده را باگزاره‌های جديدی عوض‌كرد وازآگاهی‌هايی‌استفاده‌كرد كه درحالت‌اصلی مساله وجود ندارند).

آيا ممكن است، جواب مسالهٔ ۱۵۵، با شرطهای مسالهٔ «كوتاه‌شدهٔ» جديد سازگار نباشند؟

۱۵۸. حالت تازه

گزارهٔ (۷) مسالهٔ ۱۵۵ را، به‌اين‌صورت، تغيير می‌دهيم:

(۷) A : B بيشتر از C به‌شما دروغ گفته است.

همهٔ شرطهای ديگر مسالهٔ ۱۵۵، بـه‌همان صورت سابق خود، باقـی مانده‌اند.

جواب‌مسالهٔ ۱۵۵، دراين حالت، به‌چه صورتی درمی‌آيد؟

۱۵۹. برخورد زودگذر

يك‌روز به‌سه‌نفر ازمردم جزيرهٔ بويان ازدور برخوردكرديم: A، BوC هرسه‌نفر دست‌خود را برای ما تكان می‌دادند. ما فرياد زديم:

ــ چه پيش‌آمده است ؟

ولی‌آن‌ها، حتی‌یک‌کلمه‌هم درپاسخ ما نگفتند وتنها با دست‌های خود می‌خواستند چیزی را بفهمانند. دقیق‌تر شدیم ودیدیم:

(الف) هرکدام ازآن‌ها تلاش می‌کنند، ۲ گزاره را باحرکت دست‌ها، بیان کند.

وقتی به‌آن‌ها نزدیک شدیم وخواستیم روشن‌کنیم، چه پیش‌آمده است A با عصبانیت دستش را تکان داد و گفت:

(ب) A : B بیشتر از C دروغ گفته است.

ولی B درپاسخ اوخندید و گفت:

(ج) B : بیش‌ازنصف گزاره‌هایی که تا این‌جاآمده، درست است.

(د) معلوم شد که گویا، ازاین‌سه‌نفر، یکی اهل‌آبادی «حق‌گو»دیگری اهل‌آبادی «کج‌رو» وسومی اهل‌آبادی «میانه» است.

آیا چنین چیزی ممکن است؟

۱۶۰. بازهم مسابقهٔ دو

۴ ورزشکار A، B، C و D درمسابقهٔ دو شرکت‌کردند. ورزشگاه خالی بود، تنها درپایان مسابقه‌ها، یك نفر به‌آن‌جا واردشد (N). بعد از انجام مسابقه، ورزشکاران وتماشاچی، این‌آگاهی‌ها را به‌ما دادند:

(۱) A: من‌مسابقهٔ دو را نبردم، ولی قبل از C به‌پایان خط رسیدم.

(۲) B : من از C ردشدم.

(۳) C : D، فاصله‌را درزمانی‌کمتر از B دوید.

(۴) D : من‌آخرین نفر نبودم.

(۵) N : ازاین چهارنفر، تنها برندهٔ مسابقه دروغ گفته است. بقیهٔ ورزشکاران راست گفته‌اند.

بعد ازآن‌که نتیجهٔ مسابقه را اعلام کردند، معلوم شد، دست‌کم، ۳ گزاره از۵ گزارهٔ (۱) تا (۵) درست است. (*)

الف. ثابت‌کنیدکه ورزشکار C، درردیف‌اول ودوم قرار نگرفته‌است.

ب. آیا ممکن است N راست گفته باشد؟

۱۶۱. زن وشوهرها

دریك شرکت به‌آن‌ها برخوردیم،ماتوانستیم بفهمیم که نام‌زن‌ها توکا، مژده و زمرد ونام مردها توفان، مهرداد و زمان است. ولی نتوانستیم متوجه شویم که چه کسی همسرچه کسی است. ابتدا نمی‌خواستند «راز» خود رافاش کنند، ولی بعد از کمی فکر، گفتند:

ـ سعی کنید خودتان کشف کنید، ولـی ازقبل بگوییم کـه، کار چندان ساده‌ای نیست.

(*) در هر زوج، یکی همیشه راست و دیگری دروغ می گوید.

بعد ازاین اطلاع، به حرف‌های آن‌ها گوش کردیم:

(۱)زمان: نام‌های هرزن وشوهر، بایك حرف آغاز می‌شود.

(۲)مهرداد: درمورد یکی از زن‌وشوهرها، نام زن و شوهر، بایك‌حرف آغاز نمی‌شود.

(۳) زمرد: توکا همسر توفان است.

(۴)توفان: من با زمرد ازدواج کرده‌ام.

(۵) مژده: بین گزاره‌هایی که تا این جاآمده است، دروغ بیشتر ازراست است.

(۶) توکا: بین گزاره‌هایی که تا ایـن‌جا آمـده است، دروغ بیشتر از راست است.

آیا بـراساس این آگاهی‌ها، می‌توانید بگویید، چه کسی با چه کسی ازدواج کرده است؟

۱۶۲. گزارهٔ جدید

اگریکی از چهار گزارهٔ زیررا به گزاره‌های مسالهٔ قبل اضافـه کنیم، چه تغییری درحل‌آن پیش می‌آید:

(۷a) توفان: شوهر توکا درست گفت.
(۷b) توفان: شوهر توکا دروغ گفت.
(۷c) زمان: شوهر توکا دروغ گفت.
(۷d) توفان: همسر من راست گفت.
(مساله را، درهرچهار حالت، حل کنید.)

۱۶۳. راه‌حل ساده‌تر

[درمسألهٔ ۱۶۱، شرطها چنان «انعطافی» دارند، که ۳ جواب برای مسأله به‌دست می‌آید. علت اصلی این وضع را، بایددر این‌جا جست وجو کرد که، نتیجه‌های حاصل از شرطها را، نمی‌توان، به‌صورت زنجیره‌ای، یکی را بعد ازدیگری قرارداد (آن‌طورکه، درمسأله‌های دیگر، بارها چنین امکانی رابه‌دست آورده بودیم). علاوه براین، شرطهای مسألهٔ ۱۶۱، چنان «پراکنده‌اند» که مانع هرگونه نتیجه‌گیری وتحقیق در جدول می‌شوند. درحالتی‌ازمسألهٔ ۱۶۲، که شرطهای‌آن، باشرطهای مسألهٔ ۱۶۱، تنها دریك گزارهٔ اضافی (۷b) اختلاف دارد، از سه‌جواب، تنها یك‌جواب باقی ماند. بنابراین، گاهی می‌توان، بااضافه‌کردن یك‌شرط جدید، چنان شرطها را به‌هم مربوط‌کرد که مسأله، تنها یك‌جواب منحصر داشته باشد. بانگاه‌کردن به جدول، می‌توان به سادگی، به‌این امر قانع شد.

علاوه‌برآن، این‌امید وجود داردکه، درحالت«گسترش‌یافته» مسأله، نتیجه‌های حاصل ازشرطهای متعدد تر، خیلی پراکنده نباشند و امکان استفادهٔ از روش ساده‌تر ـ یعنی روش تنظیم جدول ـ را برای به دست‌آوردن جواب فراهم کنند.

دوباره، حل مسأله ۱۶۱ را آزمایش می‌کنیم: همهٔ گزاره‌های (*) و (۱) تا (۶) را نگه می‌داریم وگزارهٔ (۷b)

ازمسألـهٔ ۱۶۲ را به‌آن‌ها اضافـه می‌کنیم. بـرای راحتی کار خواننده، همهٔ گزاره‌های این مسألهٔ جدید را ، دوباره فهرست می‌کنیم.]

توکا ، مژده ، زمرد ، توفان ، مهرداد و زمان ، سه زوج را تشکیـل می‌دهند.

(*) بین هرزن وشوهر، یکی همیشه راست می‌گوید ودیگری همیشه دروغ می‌گوید.

(۱) زمان : نام‌های هرزن وشوهر، بایك حرف آغاز می‌شود.

(۲) مهرداد : درمورد یکی اززوج‌ها، نام زن‌وشوهر بایك حرف آغاز نمی‌شود.

(۳) زمرد : توکا همسر توفان است.

(۴) توفان : من‌با زمرد ازدواج کرده‌ام.

(۵) مژده : بین‌گزاره‌هایی که تـا این جا آمده است، دروغ بیشتر از راست است.

(۶) توکا : بین گزاره‌هایی‌که تا این‌جا آمـده است، دروغ بیشتر از راست است.

(۷) توفان : شوهر توکا دروغ گفت.

چه‌کسی همسر چه‌کسی است؟

بخش دوازدهم

خواندن فکر

۱۶۴. سوپرمن ودوستداران او

اوی و کاتی ، دوستانی جدا نشدنی‌اند. چندی پیش، باهم به‌تماشای آخرین فیلم مجارستانی رفتند وهردوی‌آن‌ها از *N.N.*، قهرمان داستان‌فیلم

خوششان آمد و او را «همسرایده‌آل» می‌دانستند. ولی ازآن‌جاکه، هرکدام ازآن‌ها، تنها ۱۵ سال‌داشت، تاحدی‌ناراحت‌بودند: آیا، برای‌قهرمان‌رویاهای خود، خیلی جوان نیستند؟

بدون این‌که باهم حرفی بزنند، تصمیم گرفتند از سن $N.N.$ هنرپیشه مطلع شوند و، برای این‌منظور، به‌دربان استودیو مراجعه‌کردند. دربان‌که می‌خواست باعاشق جوان شوخی بکند، به اوی گفت:

ـ اگر این قدر به‌سن $N.N.$ علاقه‌مندی، خودت‌آن را پیدا کن! در این فیلم، سه‌نفر، نقش‌های عمده را به‌عهده داشتند (که $N.N.$ هم یکی از آن‌هاست). حاصل ضرب سال‌های سن این سه نفر، برابر است با ۴۹۳۲۱ . (طبق معمول، سن‌هر کدام را تاعدد دوستی، گردکرده بود.)

متاسفانه، اوی سن‌هیچ‌کدام ازاین هنرپیشه‌ها رانمی‌دانست. پدر اوی به‌او گفت‌که، $N.N.$ از اوکوچکتر است، زیرا در همان دبیرستان او درس خوانده است، منتهی چندسال بعد. ولی، این‌مطلب هم به اوی کمکی نکرد تا سن $N.N.$ را پیداکند.

وضع کاتی هم بهتر ازاین نبود. دربان، به‌اوهم، همان‌پاسخی راداد که، قبلاً به اوی داده بود. ولی برادرش به اواطلاع دادکه $N.N.$ از او بزرگتر است، زیرا آن‌ها در یک دانشکده تحصیل‌کرده‌اند، منتهی $N.N.$ دانشکده‌را تمام‌کرده است که‌او، گواهی‌نامهٔ دبیرستان راگرفته است. توضیح برادر، کمك زیادی به کاتی نکرد.

ولی ، یك روزکه دوستان پهلوی هم نشستند و برای هم درد دل کردند، توانستند باکمك یکدیگر، سن $N.N.$ را پیداکنند.

سن $N.N.$ چقدر است؟

(روشن است که اوی ازسن پدر خود و کاتی ازسن برادر خود،اطلاع داشتند.)

۱۶۵. خاطرهٔ گذشته

چهار دوست ـ باستان شناس، معمار، نقاش و مورخ ـ به خواهش

باستان‌شناس، دورهم جمع شده‌بودند. او روایت خود را آغاز کرد:

ـ شما حتی تصور آن را هم نمی‌توانید بکنید که، همین چندی پیش، چه حادثه‌ای تأسف‌انگیزی پیش آمده است. هیاْت علمی ما، ضمن بازدید دقیق «هایدوشاگ»، یك مهمان‌خانهٔ قدیمی کشف کرد که، ازنظر معماری، فوق‌العاده جالب بود وارزش علمی بی‌اندازه‌ای داشت، ولی دراثر یك بی‌مبالاتی غیر قابل بخشش، تاریخ بنای این ساختمان، ناشناخته باقی ماند. تاریخ بنای ساختمان، عددی چهار رقمی بوده است. هررقم تاریخ را بر سنگ جداگانه‌ای نقش کرده بودند، ولی بعدها، زیر لایهٔ ضخیمی ازگچ پوشانده شده‌بود. ما تنها وقتی به وجود رقم‌های روی سنگ پی بردیم که سنگ‌ها را درآورده بودیم و، درنتیجه، ردیف رقم‌ها به‌هم خورده بود. حق بود دقت بیشتری می‌کردیم و، این سند علمی‌را، خراب نمی‌کردیم. اکنون، فقط چهار رقم جداگانه دراختیار داریم: یك‌رقم ۱، دورقم ۷ و یك رقم ۸. باید به همهٔ منبع‌ها مراجعه‌کرد. کاری بسیار طولانی وخسته‌کننده است، و تازه معلوم نیست به نتیجه برسیم.

نقاش گفت:

(۱) می‌توان محدوده جست‌وجوها را تنگ‌تر کرد، من خوب به یاد دارم که، این مهمان‌خانه، در یکی از تابلوهای $P.R.$ ـ که منظره‌ها را نقاشی می‌کرد ـ آمده است.

باستان‌شناس، بعد ازمقداری فکر گفت:

(I) با وجود این، نمی‌توانم تاریخ بنای مهمان‌خانه را پیدا کنم.

معمار سعی کرد کمك کند:

(۲) وقتی که، کلیسای کوچك روبه روی مهمان‌خانه را می‌ساختند، خود مهمان‌خانه وجود نداشت.

باستان‌شناس کمی اندیشید وبا خوشحالی فریاد زد:

(II) درست است. از کمك شما متشکرم! اکنون دیگر تاریخ بنای مهمان‌خانه برای من روشن است!

مورخ خودش را وارد کرد:

(III) ولی من، هنوزنمی‌دانم.

نقاش توضیح داد:

(۳) وقتی که .$X.Y$ به سیاحت در مجارستان مشغول بود، در این مهمان خانه متوقف شده بود.

ومورخ آرام گرفت:

(IV) دراین‌صورت، تاریخ بنای مهمان‌خانه، برای من هم‌روشن‌شد.

سعی می کنیم ماهم تاریخ بنا را پیدا کنیم.

(وظیفهٔ خود می‌دانیم، خواننده را از این بابت مطمئن کنیم که، هیچ یك ازدوستان، درتاریخ‌ها، اشتباهی نکرده‌اند. تخصص وتجربهٔ باستان‌شناس ضامن این مطلب است).

۱۶۶. مسابقهٔ شنا درشهر برگن

اتحادیهٔ شناگران شهر برگن، یك مسابقه شنای ماراتـن ترتیب داد که، درآن،۸ ورزشکار شرکت کرده‌بودند، روایت‌ماهم، دراین‌مسأله، مربوط به‌همین مسابقه است. برای این کـه، خوانندهٔ خود را بی‌جهت، بـرای بیان اسم‌های دشوار مردم برگن دچار اشکال‌نکنیم، آن‌ها را با A،B،C،D،E، F ، G و H نام می‌بریم. به X، مفسرجوان ورزشی مامـوریت داده شد تا در مسابقه حضور یابد وبلافاصله، بعـد ازپایان مسابقهٔ شنا، هیأت تحریریهٔ «نشریهٔ مصور ورزشی شهربرگن» را، از نتیجه‌ها آگاه کند.

مسابقه، ساعت‌ها طول می کشید و ، شناگران، می‌بایستی کیلومترها فاصله را شناکنند و، این، برای X خسته کننده بـود. با خود گفت: «کافی است وقتی به‌محل‌استخر بروم که نیمی ازمسیر طی‌شده باشد»؛ وبه‌ورزشگاه مجاور، برای تماشای مسابقهٔ فـوتبال رفت . بازی چنان جالب بود کـه، دستور هیأت تحریریه را فراموش کرد.وقتی کـه X ، به محل استخر آمـد، خیلی دیر شده بود: مسابقهٔ شنا پایان یافته بـود و، حتی، جـدول نام‌های شناگران ونتیجهٔ مسابقه راهم، ازروی تابلو پاك‌کرده بودند.

چه باید کرد؟ X، خیلی خوب می‌دانست که اگر « مجلـهٔ غیرمصور ورزشی شهر برگن» زودتر ازهیأت تحریریهٔ او، ازنتیجهٔ مسابقه‌آگاه شود،

دیگر نخواهد توانست «جان سالم به‌در ببرد» وخودرا ازمخمصه نجات‌دهد. نمی‌خواست ازتماشا گرانی که باقی مانده بودند، چیزی بپرسد، زیرامی‌ترسید یکی ازآن‌ها، متوجه سهل‌انگاری اوبشود و به سردبیر مجله اطلاع دهـد. اگر دست کم می‌توانست ازردیف نتیجهٔ مسابقه‌آگاه شود، گزارش کوتاهی ازنتیجهٔ مسابقه می‌نوشت ودنبالهٔ مطلب را، باشرح مطالب فرعی «آب و تاب» می‌داد ودراین باره که، هرکدام از شرکت کنندگـان، مسیر مسابقه را درچه مدتی شنا کرده‌اند، سکوت می کرد، ولو این که، این گزارش، برای بسیاری ازخوانندگان جالب نبود.

خوشبختانه، ازحرف‌هایی که مردم باهم می‌زدند واو،، جسته گریخته می‌شنید، متوجه شدکه، دو ورزشکار، بعد ازمبارزه‌ای سخت، مقام‌های‌اول ودوم را بین‌خود تقسیم کردند ودوشنا گر دیگر، دو مقام آخر را برای خود اختصاص دادند. چیزی، بیشتر ازاین، نتوانست بفهمد. X ، حتی نتوانست متوجه شودکه، درهرکدام ازاین موردها، چه کسی قبل و چه کسی بعد، بـه خط پایان رسیده است. X ، به‌خود جرأت داد، به خود شناگران مـراجعه کرد وتلاش کرد، به‌طور غیرمستقیم، آگاهی‌هایی ازآن‌ها به‌دست آورد.

آن‌چه؛ دراین گفت و گو، به X اطلاع دادند، چنین بود:

(۱) A : بیشترتماشاگران، ازاین‌که توانستم F و H را جابگذارم، خوشحال بودند.

(۲) B : من موفق شدم از C جلو بیفتم و، این‌بار، زودتر از A به خط پایان رسیدم.

(*) X باخود اندیشید: «این راخودم‌می‌دانستم. تنها نیمهٔ اول‌حرف اوبرای من مهم‌است. باوجود این، نباید دلسرد شوم. ببینم بقیهٔ ورزشکاران چه می گویند».

(۳) C : من ترجیح می‌دهم مصاحبه نکنم.

(۴) D : هرچه تلاش‌کردم، نتوانستم از C جلو بیفتم، ولی بلافاصله بعداز او، به خط پایان رسیدم.

(۵) E : متأسفانه، دوباره از G عقب افتادم.

(**) X که خوشحال به‌نظرمی‌رسید، پیش خود فکرکرد: «این‌درواقع

آگاهی مفیدی بود»،

(۶) F : تلاش ناموفقی کردم که از H جلو بزنم، ولی اوقوی‌تربود.

G و H هم، برای مصاحبه آماده بودند، ولی وقتی که نوبت آن‌ها رسید، X درآن جا نمانده بود. به‌محض این‌که F ساکت شد، X به طرف تلفن دوید: اودیگر می‌دانست، شناگران، به‌چه ردیفی به‌خط پایان مسابقه رسیده‌اند.

سعی‌کنیم، ماهم این ردیف را پیداکنیم.

(لازم است یادآوری‌کنیم که، هیچ‌کدام ازشرکت‌کنندگان درمسابقه، در حال و هوای شوخی نبودند تا، احتمالاً، اطلاع نادرستی به خبرنگار ورزشی بدهند: همهٔ گزاره‌های ورزشکاران، درست است.)

۱۶۷. المپیاد منطق درتلویزیون (I)
(مرحلهٔ مقدماتی)

شرکت‌کنندگان مرحلهٔ مقدماتی المپیاد منطق؛ درمسابقهٔ‌تلویزیونی، به‌گروه‌هایی که درهرکدام ۴ نفروجود داشت، تقسیم‌شدند. دریکی‌از گروه‌ها، ۴ دختر بودندکه، هیأت داوران، نام « دختران گوشواره‌ای » را به آن ها داده بودند.

نمایندهٔ داوران روبه دخترها کرد، جعبه‌ای را از جیب خود درآورد و گفت:

ـ اجازه بدهید، برای مدت‌کوتاهی، گوشواره‌های خودرا‌کنار‌بگذارید تاگوشواره‌های تازه‌ای به‌جای آن‌ها، به‌گوش شماها آویزان‌کنیم. خواهش می‌کنم، به این‌جا نگاه‌کنید. دراین جعبه، ۴جفت‌گوشوارهٔ سفید و ۱ جفت گوشوارهٔ قرمز وجود دارد. من به‌گوش‌های هرکدام ازشماها، یك جفت از این‌گوشواره‌ها راآویزان می‌کنم. بنابراین، روی‌هم، ۴ جفت‌گوشواره، از جعبه برخواهم داشت. گوشواره‌هایی راکه به گوش‌های هرکدام از شماها آویزان می‌کنم، ازیك رنگ خواهد بود، یعنی کسی دوگوشوارهٔ مختلف نخواهد داشت.

سپس، یك به‌یك دخترها، به‌نمایندهٔ داوران نزدیك شدند. او ۴ جفت گوشوارهٔ سفید را به گوش‌های آن‌ها آویخت ویك جفت گوشوارهٔ قرمز را، به‌داخل جعبه برگرداند (همهٔ این کارها، طوری بامهارت انجام شدکه، هیچ یك از دختران متوجه نشدندکه چه رنگ گوشواره‌ای به گوش خودشان آویخته شد وکدام رنگ گوشواره، درجعبه باقی ماند).

وقتی‌که دخترها، دوباره به‌جای خود نشستند، نمایندهٔ داوران گفت:

ـ خواهش می‌کنم به یکدیگر نگاه کنید! کسی که زودتر از دیگران، رنگ گوشوارهٔ خودرا بگوید، برندهٔ مسابقه خواهد بود.

چهار دختر ، ساکت بـه یکدیگر نگاه می کردند سکوتی پـر هیجان حاکم بود.

باز هـم چند ثانیه‌ای گذشت که ، یکی از دختران ، بـا صدای بلند اعلام کرد:

ـ گوشواره‌های من سفید است!

ازکجا به‌این موضوع پی‌برد؟

۱۶۸. المپیاد منطق در تلویزیون (II) (مرحلهٔ نیمه نهایی)

برندگان مرحلهٔ مقدماتی المپیاد (مسألـهٔ ۱۶۸ را ببینید)، دوباره به گروه‌هـای ۴ نفری تقسیم شدند و، بـه عضوهای گـروه خانم‌ها، دوباره، مساله‌ای دربـارهٔ گوشواره‌ها داده شد، منتهی این‌بـار، دشوارتر از مرحلهٔ مقدماتی. نمایندهٔ داوران، رو به‌گروه خانم‌ها‌کرد و گفت:

ـ دربرابر شما جعبه‌ای قرار داردکـه، درآن، ۸ گوشوارهٔ سفید و ۲ گوشوارهٔ قرمز گـذاشته شده است. برای مدت‌کوتاهی، از سلیقه و ظرافت صرف نظرکنید! این‌بار، وقتی گوشواره‌ها را به‌گوش شماها آویزان می‌کنیم، الزاماً این شرط را رعایت نخواهیم‌کرد که دو گوشوارهٔ یك نفر، هم رنگ باشند. ممکن است، این وضع هم وجود داشته باشدکه، دو گوشوارهٔ یك یا

دو نفر از شماها، از دو رنگ مختلف انتخاب شده باشد.

هر کدام از شرکت کنندگان در دور نیمه‌نهائی، به‌نمایندهٔ داوران نزدیك شدند و، بعد از آن که گوشواره‌های خود را گرفتند، جدا ازهم، در اطاقك خود نشستند. همهٔ خانم‌ها می‌توانستند یکدیگر را ببینند، ولی تنها صدای مجری برنامه‌را می‌شنیدند.

مجری برنامه به‌آن‌ها گفت:

ـ خواهش می‌کنیم به‌یکدیگر نگاه کنید و، سعی کنید، رنگ گوشواره‌های خودتان را پیدا کنید. هروقت، گمان کردید بـه رنگ گوشواره‌های خود پی برده‌اید، شستی همان رنگ را، از بین شستی‌هایی که در جلو شماست، فشار دهید. اگر بـه کمك گـوشواره‌های دیگران، نتوانستید رنگ گـوشواره‌های گوش‌های خودرا تشخیص دهید، لطفاً شستی را که علامت سئوال دارد، فشار دهید.

خانم‌ها به طرف شستی‌ها خم شدنـد (آن‌ها طوری نشسته بودند که نمی‌توانستند، شستی‌های جلودیگران را ببینند) وآماده بودند، شستی مورد نظر خود را فشاردهند.

ـ (I) ببینیم چه‌نتیجه‌ای به‌دست می‌آورید ـ مجری با گفتن این حرف، کلیدی را چرخاند. روی هر کـدام از اطاقك‌ها ، علامت سئوالی روشن شد، یعنی، هر۴ شرکت کننده، شستی علامت سئوال را فشار دادند (این را، همه می‌توانستند ببینند).

ـ به‌این ترتیب، هیچ کدام ازشرکت کنندگان نتوانستندرنگ گوشوارهٔ خود را پیدا کنند. ولی کمی‌تحمل کنیم عجالتاً، به تماشاگران گرامی مسابقه، پیشنهاد می کنیم به‌یك میان پرده توجه کنند.

روی پرده تلویزیون، نمایشنامهٔ کوتاهی اجرا شد.

پیش‌پرده تمام شدو، دوباره، ۴ اطاقك‌شیشه‌ای روی صفحهٔ تلویزیون ظاهرشدکه دردرون هرکدام، دخترخانمی باگوشواره‌های خود نشسته بود.

صدای مجری شنیدمشد:

ـ (II) بینندگـان محترم! شرکت کنندگـان در مـرحلهٔ نیمه نهائی

المپیاد ما، برای پاسخ دادن به‌پرسش، به‌اندازهٔ کافی‌وقت داشتند ویادآوری می‌کنیم که هیچ‌کدام از شرکت‌کنندگان، درحل مسألهٔ قبل، موفق نبودند، زیرا هیچ‌یك از آن‌ها، نتوانستند رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کنند. پاسخ جدیدرا، بعد از آن که‌من، کلید را زدم، خواهید دید. به‌این‌ترتیب، امیدوارم، دختر خانم‌های عزیز فراموش نکنند که شستی موردنظر خود را فشار دهند. اگربه رنگ گوشوارهٔ خود پی‌بردید، باید شستی همان رنگ را فشار دهید. اگر با توجه به‌رنگ گوشواره‌های سایر شرکت‌کنندگان، نتوانستید رنگ گوشوارهٔ خود را تشخیص دهید، خواهش می‌کنم، شستی علامت سئوال را فشار دهید.

(*) ازقبل یادآوری می‌کنیم، بنا به تصمیم هیات داوران، شرکت‌کنندگانی از دور دوم که نتوانند رنگ گوشواره‌های خود را تعیین کنند، کنار گذاشته نمی‌شوند، زیرا طبق نظر داوران، آن‌ها می‌توانند در دوربعدی المپیاد ما باقی بمانند. ولی اگرکسی رنگ گوشواره‌های خود را نادرست معین کند، حذف می‌شود و دیگر نمی‌تواند دردور بعدی شرکت کند.

ـ همه آماده‌اید ؟ توجه‌کنید، کلید را زدم!

مجری برنامه، کلید را زد و همه دیدند که، دوباره، روی هریك از اطاقك‌ها، علامت سئوال روشن شد.

ـ (III) بازهم هیچ‌کدام از خانم‌ها، نتوانستند رنگ گوشوارهٔ خود را پیدا کنند! بازهم امتحان‌می‌کنیم. من‌علامت سئوال‌را خاموش خواهم‌کرد؛ شرکت‌کنندگان‌می‌توانند، برای بارسوم، عقیدهٔ خودرا ابراز کنند، شروع‌شد!

تقریباً بلافاصله، روی‌یکی ازاطاقك‌ها، ۲ لامپ روشن شد: دخترخانم داخل آن، توانسته بود رنگ گوشواره‌های خود را پیداکند.

رنگ گوشواره‌های دختر خانم‌ها چیست و، برندهٔ این مرحله، چگونه توانست، رنگ گوشواره‌های خود را پیداکند؟

(باید یادآوری کردکه، همهٔ شرکت‌کنندگان درالمپیاد، نیروی زیادی درتفکرمنطقی دارند. آن‌ها می‌توانند ازهرحادثهٔ مفروضی، تمام نتیجه‌گیری‌های ممکن را به‌دست آورند. بنابراین، وقتی که شرکت‌کنندگان در المپیاد،

نمی‌توانند به پرسشی پاسخ بدهند، به معنای آن است که، داده‌های موجود، برای پاسخ دادن کافی نیست. درضمن، شرکت کنندگـان می‌دانند که، وقتی داده‌های موجود، برای تعیین جواب کافی باشد و به‌جای فشاردادن شستی‌های رنگ گوشواره‌های خود، شستی سئوال را فشار دهند، به سختی «مجازات» می‌شوند: چنین شرکت کننده‌ای حذف می‌شود و دیگر نمی‌تواند دربین برندگان باقی بماند.

هیچ شرکت کننده‌ای، به‌تصادف و بدون استدلال منطقی، شستی رافشار نمی‌دهد.

این یادآوری‌ها، برای مساله‌های دیگرهم، به‌قوت خود باقی‌هستند.)

۱۶۹. حرف‌های «اضافی»

آیا جای این بحث وجود دارد که، گمان کنیم، شرطهای مسألهٔ قبلی، بیش‌ازحدزیاد است. آیا مجری برنامهٔ تلویزیون، بیش‌ازاندازه حرف‌زده‌است؟

مثلاً، آیا قطعه‌ای که با علامت (*) مشخص شده است، لازم بود؟

۱۷۰. یك پیش‌آمد کوچك

در جریان مرحلهٔ نیمه نهائی المپیاد منطق، حادثه‌ای در استودیوی تلویزیون پیش‌آمد، دریکی از گروه‌های شرکت‌کننده، از نمایندهٔ هیأت‌داوران پرسیدند:

ـ لطفاً بفرمائید، مگرنباید صورت مسأله طوری تنظیم شده باشدکه، همهٔ شرکت‌کنندگان، شانس مساوی، برای پیروزی، داشته باشند؟

و نمایندهٔ هیأت داوران پاسخ داد:

ـ البته. ولی اگرکسی‌بتواند عکس‌آن را ثابت‌کند، بدون توجه‌به‌این که، چه‌کسی قبل از دیگران رنگ گوشواره‌های خود را پیداکرده است، او را برنده اعلام خواهیم‌کرد.

ژوژا، که این سئوال را طرح کرده بود، از توضیح مجری برنامه تشکر کرد و، وقتی قانون‌های مرحلهٔ نیمه نهائی را بـه دختر خانم‌ها یادآوری می‌کردند، گفت:

ـ خواهش می‌کنم، چشمان مرا با دستمالی ببندید، به‌نحوی‌که نتوانم چیزی را ببینم و، تنها، درپایان این مرحله، آن‌ها را بازکنید. من چشم‌بسته عمل خواهم‌کرد.

هیات داوران با پیشنهاد ژوژا موافقت‌کرد. چشمان او را بستند.

با وجود این، ژوژا توانست، در گروه چهار نفری خود، برندهٔ نیمه نهائی بشود.

به چه‌ترتیب، این توفیق را پیدا کرد؟

۱۷۱. المپیاد منطق در تلویزیون (*III*) (مرحلهٔ نهائی)

این‌بارهم، مجری برنامه، رنگ گوشواره‌ها را از هر دختر خواست،

منتهی این‌بار، درهر گروه ۳ نفربودند. به‌شرکت‌کننده‌گان، جعبه‌ای را نشان دادندکه، درآن، ۴ گوشوارهٔ سفید و۳ گوشوارهٔ قرمز (۲ جفت سفید ویک جفت و نیم قرمز) وجود داشت. مجری ، ۶ گوشواره را از جعبه بیرون آورد و هر دو تای آن‌ها را به گوش‌های یکی از شرکت‌کننده‌گان آویزان کرد. البته، هیچ شرکت‌کننده‌ای، متوجه نشد چه گوشواره‌هایی به‌گوش او آویزان کردند. به‌آن‌ها اطلاع داده شدکه، گوشواره‌ها، ممکن است بی‌نظم انتخاب شده باشند (یعنی، دریك گوش قرمز و درگوش دیگر سفید).

در مرحلهٔ نهائی، چه از نظر شرطها و چه از نظر روش کار، هیچ تفاوتی با مورد نیمه‌نهائی نداشت (مسألهٔ ۱۶۸ را ببینید).

(I) در مقابل نخستین پرسش، هرسه شرکت‌کننده، شستی علامت سئوال‌را فشاردادند، یعنی هیچ‌کدام ازآن‌ها، نتوانستند به رنگ گوشواره‌های خود، پی‌ببرند.

(II) بعد ازآن‌که، به شرکت‌کننده‌گان در مرحلهٔ نهائی، برای فکر کردن، به‌اندازهٔ‌کافی وقت داده‌شد، مجری «علامت‌های سئوال» را خاموش کرد، ولی بلافاصله، روی هر سه اطاقك علامت‌های سئوال ظاهر شد.

(III) وقتی‌که، گرداننده، بار دیگر کلید را زد و علامت‌های سئوال را خاموش‌کرد، بلافاصله، یکی از شرکت‌کننده‌گان مرحلهٔ نهائی، توانست رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کند و، درمرحلهٔ نهائی، برنده شد.

گوشواره‌های برندهٔ دور سوم مسابقه ، چه رنگی (یا چه رنگهایی) داشته‌اند؟

رنگ گوشواره‌های بقیهٔ شرکت‌کننده‌گان چه بوده است؟

برندهٔ‌مسابقه، به‌چه‌ترتیبی‌توانست رنگ گوشواره‌های خودرا پیداکند؟

۱۷۲. دربارهٔ مردها صحبت کنیم

روشن است‌که، دربین شرکت‌کننده‌گان درمسابقهٔ نهائی، تنها جنس لطیف‌وجود نداشت والبته درمورد مردها، نمی‌شد ازگوشواره استفاده‌کرد. (دست‌کم، اعتقاد هیات داوران، این طور بود). تصمیم گرفته شدکه، برای

آن‌ها، از کلاه‌های با رنگ‌های مختلف، استفاده کنند. در مرحلهٔ نهائی المپیاد منطق، مردها را هم، به گروه‌های سه نفری تقسیم کردند و برای هر گروه ۵ کلاه درنظر گرفتند: ۳ سفید و ۲ قرمز.

قانون‌های مربوط بـه‌اجرای مـرحلهٔ نهائی مردان، همان قانون‌های مرحلهٔ نهائی زنان است (مسالهٔ ۱۶۸).

مرحلهٔ نهائی المپیاد منطق مردان، به این ترتیب، جریان پیدا کرد:

(I) بار اول، همهٔ شرکت کنندگان، شستی علامت‌سئوال رافشار دادند.

(II) بار دوم هم، همین وضع تکرار شد.

(III) همین کـه مجری کلید را زد و شرکت‌کنندگان امکان « ارتباط مستقیم» با یکدیگر را پیدا کردند، یکی از آن‌ها، توانست رنگ کلاه خود را پیدا کند.

رنگ کلاه برندهٔ مرحلهٔ نهائی چه بوده است؟

بقیهٔ شرکت‌کنندگان چه رنگ کلاهی به‌سر داشته‌اند؟

آن‌ها، به چه‌ترتیبی توانستند، مساله را حل کنند؟

۱۷۳. یکی پشت سر دیگری

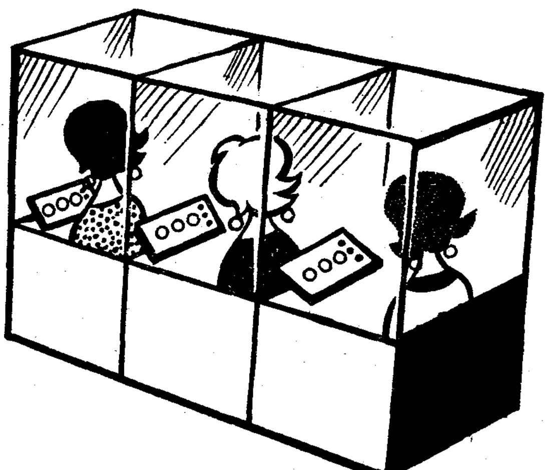
درمرحلهٔ نهائی المپیاد منطق در تلویزیون، مسالهٔ زیر را به شرکت‌کنندگان دادند.

به سه دخترخانم، ۶ گوشوارهٔ سفید و ۲ گوشوارهٔ قرمز نشان دادند (یعنی روی هم، ۸ گوشواره) و به گوش‌های هرکدام ازآن‌ها، ۲ گوشواره آویزان کردنـد (روی هم، ۶ گوشواره). سپس، از دخترخانم‌ها خواستند به اطاقك‌های خود بروند. ولی این‌بار، اطاقك‌ها طوری قرارداشتندکه هردختر تنها می‌توانست کسی یا کسانی را ببیندکه درجلو اونشسته بودند، وکسی یا کسانی راکه درعقب او بودند، نمی‌دید.

هردختر باید رنگ گوشواره‌های خود را پیداکند.

قانون انجام مسابقه، کاملاً شبیه مساله‌های قبل است.

زمانی‌که برای فکر کردن شرکت‌کنندگان در نظر گرفته شده است، برای همهٔ آن‌ها، یکی‌است. وقتی‌که دخترها، یك شستی علامت سئوال یا دو شستی (یك رنگ یا با رنگ‌های مختلف) را فشار می‌دهند، در اطاقك‌ها، چراغ‌های خاصی روشن می‌شود و، همهٔ شرکت‌کنندگان، می‌توانند پاسخ رقیبان خود را ببینند. این وضع، تا جایی ادامه دارد که، لااقل یکی از شستی‌های مربوط به‌علامت سئوال فشارداده‌شود. اگر، بنا به عقیدهٔ داوران، ولو یکی از شرکت‌کنندگان، با به‌دست آوردن آگاهی‌های اضافی، می‌تواند رنگ گوشواره‌های خودرا معین کند، دستگاه‌مکالمه روشن می‌شود ودخترها، به صلاح دید خود، می‌توانند با یکی از رقیبان خود گفت‌وگو کنند. کسی برنده به‌حساب می‌آیدکه، زودتر از دیگران بتواند رنگ گوشواره‌های خود را پیداکند.



گوشواره‌هارا چگونه‌باید تقسیم کردتا، درمرحلهٔ نهایی المپیادمنطق، دختر خانمی برنده شودکه

a) در اطاقك عقب نشسته است،

b) دراطاقك وسط قرار دارد،

c) در اطاقك جلویی نشسته است.

نباید فراموش‌کرد که، قدرت تفکرمنطقی، تنها مخصوص زن‌ها نیست و، درمیان شرکت‌کنندگان در المپیاد منطق، مردها هم وجود دارند.

به ۱۰ فینالیست المپیاد، ۱۰ کلاه سفید و ۶ کلاه قرمز نشان دادند. وقتی که مجری برنامه، کلاه هرکسی را برسر او گذاشت، دراطاقك‌های خود، که «دریك‌ستون» قرارداشتند، قرار گرفتند. هرشرکت‌کننده، تنها می‌توانست کسانی را ببیندکه جلواو نشسته بودند و مساله، عبارت بود از تعیین رنگ کلاه خود.

قانون‌های انجام مسابقه و مسیر جریان آن، شبیه مسالهٔ قبل است. وقتی که برای فکر کردن در نظر گرفته شده است، یکسان است. برای همهٔ شرکت‌کنندگان، شستی علامت سئوال یا شستی رنگ مورد نظر خود را، فشار دهند، چراغ خاصی درهمهٔ اطاقك‌ها روشن می‌شود و، بنابراین ، همهٔ شرکت‌کنندگان، ازنوع‌پاسخ رقیبان خود، آگاه‌می‌شوند. تنهاتفاوتی‌که، این مساله، با مسالهٔ قبلی دارد ، این است‌که، همهٔ آزمایش‌ها برای تعیین رنگ کلاه، مثل آزمایش اول ادامه می‌یابد: دستگاه مکالمه روشن نمی‌شود.

کسی برنده به‌حساب می‌آیدکه، قبل از دیگران، رنگ‌کلاه خود را پیداکند. دراین باره، توضیح می‌دهیم چون شرکت‌کنندگان در المپیاد، از گفت‌وگوی بایکدیگرمحروم‌اند، این‌مطلب مهم نیست‌که، این یاآن‌شرکت‌کننده، چند ثانیه‌ای از رقیبان خود جلوبیفتد. مهم چیز دیگری است: برنده باید، یك مرحله از آزمایش، قبل از دیگران پاسخ درست را داده باشد. در حالتی‌که، چند شرکت‌کننده، بتوانند رنگ‌کلاه خود را، بعد از گذشت‌تعداد برابری از مرحله‌های آزمایشی، اعلام‌کنند، ولو این‌که، پاسخ‌های خود را در یك لحظه نداده باشند، هیات داوران ، نتیجه را «هیچ بـه هیچ» اعلام خواهد کرد.

ولی درحالتی که‌مورد بحث ماست، چنین وضعی پیش نیامد، زیرا، در سه آزمایش اول، هر ۱۰ شرکت‌کننده، شستی علامت سئوال را فشار دادند

و، درآزمایش چهارم، فقط پیشتا بودکه توانست رنگ کلاه خود را پیداکند وبقیهٔ ۹ شرکت‌کننده، دوباره، ازشستی علامت سئوال استفاده کردند.

الف) شمارهٔ اطاقك پیشتا را پیدا کنید. (اطاقك‌ها را ازعقب به‌جلو شماره‌گذاری کرده‌اند: شماره نخستین اطاقك ۱۰، و شمارهٔ آخرین اطاقك ۱ است.)

ب) دربارهٔ رنگ‌کلاه شرکت‌کنندگان درمرحلهٔ نهائی المپیادمنطق، چه می‌توانید بگویید؟

۱۷۵. یك پرسش ساده

المپیادهایی از آن نوع که در مساله‌های قبل، دربارهٔ آن‌ها صحبت کردیم، اغلب جریان دارد. متاسفانه، به‌بسیاری ازآن‌ها نتوانسته‌ایم توجه کنیم و، بنابراین، آگاهی ما دربارهٔ آن‌ها، کم است. دربارهٔ المپیادی هم‌که می‌خواهیم دربارهٔ آن صحبت‌کنیم، وضع ما به‌همین‌گونه است.

تعداد دقیق شرکت‌کنندگان درالمپیاد معلوم نیست. ما تنها می‌دانیم که، تعداد آن‌ها، به‌قدر کافی زیاد و «کلاه قرمزی‌ها» دراقلیت بودند. کسی نتوانست ازشمارهٔ اطاقك برنده اطلاعی به‌ما بدهد؛ حتی ازتعداد مرحله‌های آزمایشی هم (که منجر به برنده شدن او شد) اطلاعی نداریم. تنها به‌ما گفته‌اندکه، برنده، فقط یك نفر بودکه یوشکا نامیده می‌شد.

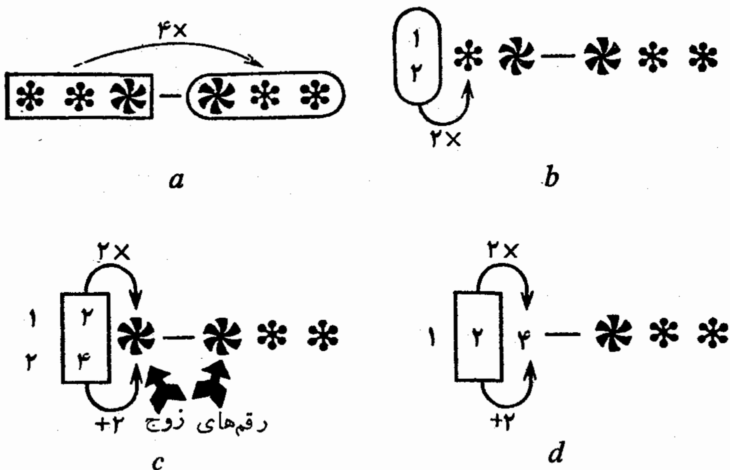
کلاه یوشکا، چه رنگی داشته است؟

حل مسأله‌ها

بخش اول

۱. شماره تلفن فراموش شده

روشن است که هم نیمهٔ اول و هـم نیمهٔ دوم یك عدد شش رقمـی، عددی است سه‌رقمی (شکل ۴۶ ـ a). از گفتهٔ کاتی روشن می‌شود که رقم اول شمارهٔ تلفن موردنظر، نمی‌تواند بزرگتر از ۲ باشد (درغیر این‌صورت، نیمهٔ دوم شماره تلفن ـ که چهاربرابر نیمه اول‌آن است ـ عددی چهار رقمی می‌شود).



a b c d

شکل ۴۶

توضیح ایلونکا نشان می‌دهدکه دورقم اول شمارهٔ تلفن برابراست با ۱۲ یا ۲۴ (شکل ۴۶ ـ b).

رقم سوم شماره تلفن پیشتا ، عـددی است زوج، زیـرا بنا به اطلاع فه‌ری ، این رقم باید یادو برابر رقم دوم و یا ۲ واحـد بیشتر ازآن باشد؟ و چون رقم دوم برابـر است با ۲ یا ۴، در هـر حال، رقم سوم، عددی زوج

می‌شود (شکل ۴۶ ـ c).

به سادگی می‌توان ثابت کرد که این شمارهٔ تلفن نمی‌تواند با۲۴ آغاز شود. درواقع، اگر شمارهٔ فراموش شدهٔ تلفن با ۲۴آغاز شود، نیمهٔ اول‌آن کمتر از ۲۴۰ وبیشتر از ۲۴۹ نیست و، دراین‌صورت، نیمهٔ دوم‌که چهارِ برابر نیمه اول است نمی‌تواندکمتر از ۹۶۰ و بیشتر از ۹۹۶ باشد. و، در هرحال، رقم چهارم شمارهٔ تلفن برابر ۹ می‌شود. درچنین صورتی (با توجه به اطلاع پوشکا) رقم‌سوم هم باید برابر ۹ باشد. ولی ما روشن‌کردیم‌که رقم سوم عددی زوج است.

بنابراین، شمارهٔ تلفن پیشتا با ۱۲ آغاز می‌شود و، بنابراین، رقم‌سوم آن برابر است با ۴، زیرا، خواه ۲ را دو برابر کنیم و خواه ۲ واحد به‌آن اضافه کنیم، در هرحال، عدد ۴ به دست می‌آید (شکل ۴۶ ـ d). وقتی که نیمه اول شمارهٔ تلفن معلوم باشد، باچهاربرابر کردن‌آن، رقم‌های نیمه دوم هم به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، شمارهٔ تلفن پیشتا چنین است:

۱۲۴۴۹۶

وبه سادگی روشن می‌شودکه با همه شرطهای مسأله سازگار است.

یادداشت ۱. ضمن حل مسأله، دراین باره سکوت کردیم که شمارهٔ شش رقمی تلفن نمی‌تواند با رقم صفرآغاز شود. اگر این قید را از مسأله برداریم، یك‌جواب دیگر هم به‌دست می‌آید:

۰۰۰۰۰۰

یادداشت ۲. وقتی‌که صحبت ازتقسیم عدد شش‌رقمی به‌دوبخش بود به‌طورطبیعی، هربخش‌را شامل سه رقم گرفتیم، به‌نحوی‌که سه‌رقم اول، نیمه اول و سه‌رقم دوم، نیمه دوم عددرا تشکیل دهند . ولی در واقع، این نوع تقسیم، خیلی هم طبیعی نیست،زیرا معمول است‌که شمارهٔ تلفن شش‌رقمی‌را دورقم دورقم‌می‌خوانند: ۹۶ـ۴۴ـ۱۲ . ولی، درحالتی‌هم‌که، تقسیم‌این‌عدد شش‌رقمی را به‌دوعدد سه‌رقمی‌قبول نداشته باشد وفرض را براین بگیرد که، وقتی عدد را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، می‌توان در بخش اول ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ رقم را درنظر گرفت وبقیه عدد را به‌عنوان بخش دوم به‌حساب آورد،

بازهم درجواب مسأله تغییری حاصل نمی‌شود. درواقع، این شرط که بخش دوم عدد، چهاربرابر بخش اول‌آن است، تنها وقتی می‌تواند صادق باشد که آن‌را به‌دوعدد سه‌رقمی تقسیم کرده باشیم. اگربخش اول را یك یا دورقمی بگیریم، همواره عددی کمتر از شش‌رقم به دست می‌آوریم (بزرگترین عدد دو رقمی، برابر است با ۹۹ کـه چهار برابرآن، ۳۹۶ می‌شود). در نتیجه، شماره تلفن چهاریا پنج‌رقمی به‌دست می‌آید. روشن است‌که اگر بخش اول را چهار یا پنج‌رقمی بگیریم، هرگز نمی‌توانیم، برای چهار برابرآن، عـدد دورقمی یا یك‌رقمی به‌دست‌آوریم.

یادداشت ۳. چه بسا کـه خواننده بتواند، از راه دیگری، بـه همین جواب برسد. در چنین صورتی، از خواننده می‌خواهیم‌که با دقت راه حـل خود را مورد تجزیه وتحلیل قرار دهد، آن‌را باراه حلی‌که در این‌جا آمـده است، مقایسه‌کندومواظب باشدکه دراستدلال‌های او رخنه‌ای وجودنداشته باشد. وباید مراقبت‌کندکه، برای رسیدن به‌جواب، باید از داده‌ها آغاز کرد وسرانجام به مجهول رسید.

روشن است‌که این توصیه، برای همه مسأله‌های بعدی این‌کتاب هم، باید مورد توجه باشد.

۲. تاکتیك عجیب

در هردومورد، حق با یانوش است، زیرا بنابرشرط مسأله «هرترکیبی از ۵ شماره انتخـاب شود، شانسی برابر بـا هرترکیب ۵ شماره‌ای دیگر دارد». این‌شرط، به‌معنای آن‌است‌که، برای ۵ شماره‌ای‌که به‌صورت‌متقارن انتخـاب شده‌اند، به‌اندازهٔ ۵ شماره‌ای کـه به‌تصادف و به‌صورت پراکنده انتخاب شده‌باشند، شانس برددارد. به‌همین‌ترتیب، انتخاب یکی‌ازموردهای برد هفته‌قبل، شانسی‌کمتر (ویا بیشتر) ازهرحالت دیگری ندارد.

a. معمولاً، ۵ شماره‌ای کـه از قرعه‌کشی به‌دست می‌آید، یك‌شکل متقـارن تشکیل نمی‌دهند. این وضع، به‌این مناسبت پیش می‌آیدکه، تعداد شکل‌های نامتقارن، به‌مراتب بیشتر از تعداد شکل‌های متقارن است، ولی این مطلب به‌معنای آن نیست‌که هرشکل نـامتقارن‌کاملاً مشخص، نسبت

به‌یک شکل متقارن کاملاً مشخص، شانس برد بیشتری دارد.

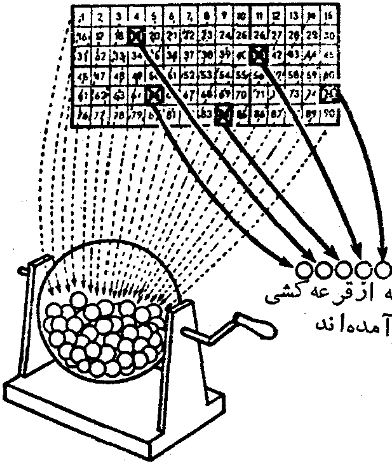
b. در مورد شماره‌های برندهٔ هفتهٔ قبل هم، وضع به‌همین گونه است. این شماره‌ها هم، ترکیبی (کاملاً مشخص) از ۵ شماره را تشکیل می‌دهند. بنابراین، شانس برد این‌ترکیب، با هرترکیب دیگری، کاملاً برابر است. و این، به‌معنای آن است که ترکیب ۵ شماره‌ای هفتهٔ قبل، هیچ‌شانسی کمتر (یا بیشتر)، از یک‌ترکیب ۵ شماره‌ای تصادفی دیگر ندارد.

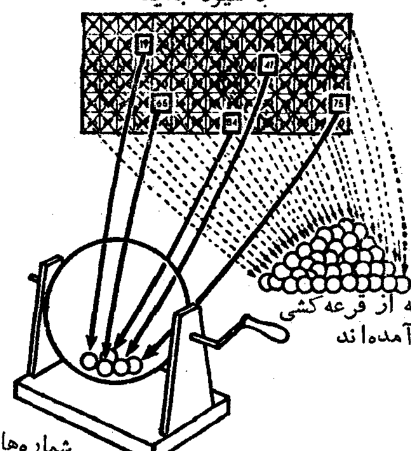
یادداشت. روشن است که احتمال نامتقارن‌بودن پنج شماره‌ای که از قرعه‌کشی درمی‌آید، بیشتر ازاحتمال متقارن‌بودن آن‌هاست. به‌همین‌ترتیب، احتمال آمدن شماره‌هایی متفاوت با قرعه‌کشی هفتهٔ قبل، خیلی بیشتر از احتمال‌آمدن همان شماره‌هاست. ولی از این‌جا نباید نتیجه گرفت که، گویا، شانس‌آمدن هرشکل متقارن، کمتر ازهرشکل نامتقارن است. به‌همین‌ترتیب، نباید نتیجه گرفت که، گویا، هرترکیب مشخص پنج‌شماره‌ای از برندگان هفتهٔ قبل، شانسی‌کمتر از هرترکیب ۵ شماره‌ای دلخواه دارد.

۳. بازی قدیم با قانون جدید

کارتی‌که بنا برقاعدهٔ جدید، ۸۵ شمارهٔ خط‌خورده دارد، به‌همان‌اندازه کارت شامل ۵ شمارهٔ خط‌خورده در بازی سنتی، شانس‌بردن دارد.

در واقع، تعداد روش‌های انتخاب ۸۵ شماره از ۹۰ شماره، برابر است با تعداد روش‌های باقی نگه‌داشتن ۵ شمارهٔ «انتخاب‌نشده». وقتی‌که ۸۵ شماره را روی کارت لوتو خط می‌زنیم، مثل این است که بخواهیم ۵ شماره‌ای‌که درقرعه‌کشی بیرون نیامده‌اند، با۵ شماره‌ای‌که خط‌نزده‌ایم، تطبیق‌کنند. این‌دونوع بازی لوتو، تنها ازنظر فنی، یعنی شیوهٔ قرعه‌کشی، با هم فرق دارند. در هردوحالت، باید ۵ شماره را انتخاب‌کرد: در حالت سنتی، ۵ شماره‌ای راکه از قرعه‌کشی بیرون می‌آیند؛ و در حالت جدید، به ۵ شماره‌ای نظر داریم‌که در قرعه‌کشی بیرون نمی‌آیند. بنابراین، شانس برد یک‌ترکیب ۸۵ شماره‌ای، برابر است با شانس باقی‌ماندن ۵ شماره‌ای‌که از قرعه‌کشی بیرون نمی‌آیند (شکل ۴۷).


پر کردن کارت در بازی لوتو
با شیوهٔ سنتی
شماره‌هایی که از قرعه‌کشی
بیرون آمده‌اند
شماره‌هایی که از قرعه‌کشی
بیرون نیامده‌اند


پر کردن کارت
با شیوهٔ جدید
شماره‌هایی که از قرعه‌کشی
بیرون آمده‌اند
شماره‌هایی که درقرعه‌کشی
بیرون نیامده‌اند

شکل ۴۷

۴. «برخورد دقیق» در بازی جدید لوتو

به‌پرسش مسأله ، می‌توان پاسخ دقیق داد : هر ۱۰ نفر. در واقع ، در بازی لوتو باشیوه جدید، تعداد شماره‌هایی که هرنفرحدس می‌زند، نمی‌تواند از ۸۰ کمتر باشد.

چون هرشرکت‌کنندهٔ دربازی، ۸۵ شماره‌را خط می‌زند، تنها ۵شمارهٔ خط‌نخورده باقی‌می‌ماند. بنابراین ، در بدترین حالت خود، یعنی وقتی همهٔ ۵ شماره‌ای که از قرعه‌کشی بیرون نیامده‌اند جزو شماره‌های انتخابی‌باشند، بازهم ۸۰ شماره درست ازآب درمی‌آید.

۵. شانس برد در لوتوی جدید

در هرسه حـالت (a ، b و c) ، دشواری حدس در نوع جدید و نوع سنتی لوتو، یکسان‌است، زیرا درهرحالت حدس تعداد شماره‌های‌یك‌حالت، به‌حدس همین تعداد شماره‌ها درحالت دیگر، منجر می‌شود.

در واقع، اگر در حالت پیشنهادی پیشتا، به‌درستی

۸۴، ۸۳، ۸۲

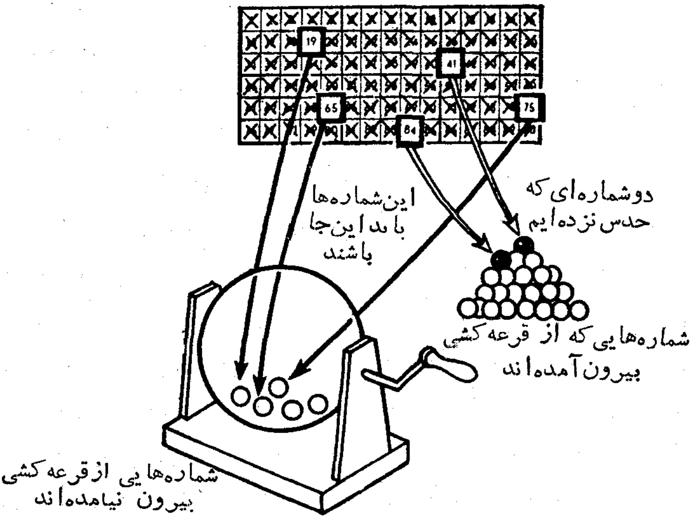
شماره راحدس بزنیم، به‌معنای‌آن است‌که دربین شماره‌هایی‌که ازقرعه‌کشی بیرون‌آمده‌اند، به‌ترتیب به‌تعداد

۱، ۲، ۳

نتوانسته‌ایم‌شماره‌را درست حدس بزنیم، یعنی بین‌شماره‌هایی‌که ازقرعه‌کشی بیرون آمده است ، ۱ ، ۲ و ۳ شماره پیدا می‌شودکه آن‌هـا را روی‌کارت خط نزده‌ایم . بنـابراین، بین ۵ شماره‌ای که، بعداز قرعه‌کشی ، در گردونه باقی‌مانده است، به‌تعداد

۵ — ۱، ۵ — ۲، ۵ — ۳

یا



شکل ۴۸

۲، ۳، ۴

شماره، جزو شماره‌های «انتخابی» ماست. و این، مثل آن است که، درحالت سنتی لوتو،

۲، ۳، ۴

شماره را حدس زده‌باشیم.

روی شکل ۴۸، حالتی نشان داده شده است که از ۸۵ شماره‌ای که روی کارت خط زده‌ایم، توانسته‌باشیم ۸۳ شماره‌را، و یا از ۵ شمارهٔ خط نخورده، ۳ شماره را، درست حدس بزنیم.

۶. گونه‌های تازه‌ای در بازی لوتو

مقایسهٔ دوحالت جدید بازی لوتو، به‌صورتی که در مساله داده شده است، کار دشواری است، زیرا یکی از حالت‌ها با عددهای ۶۰ و ۲۵ و

حالت دیگر، با عددهای ۵۵ و ۳۰ مشخص شده است؛هیچ‌کدام از عددهای «معرف»، در دوحالت جدید، با هم برابر نیستند.آیا نمی‌توان شکل تازه‌ای برای صورت مسأله اندیشید، به‌نحوی که هریك ازدو حالت مسأله،دست‌کم در یك‌عدد، با هم مشترك باشند؟

حل مسألهٔ ۳، می‌تواند ما را در این زمینه راهنمایی کند.

اگر از ۵۵ شمارهٔ آنوشکا،که در گردونهٔ قرعه‌کشی وجود دارد، ۳۰ شماره را خارج‌کنیم ، ۲۵ شماره در گردونه باقی‌می‌ماند . بنابراین ، اگر شماره‌هایی را در نظر بگیریم‌که هنوز ازگردونه خارج نشده‌اند، آن‌وقت ، دوحالت بازی لوتو، به‌این صورت درمی‌آیند: در حالت‌آنوشکا، باید از۵۵ شماره، ۲۵ شماره را بیرون‌آورد، و در حالت یوشکا، باید همین ۲۵شماره را از ۶۰ شمـاره در نظرگرفت . روشن است‌که، حدس ۲۵ شماره از ۶۰ شماره ، دشوارتر از حدس ۲۵ شمـاره از ۵۵ شماره است . به‌این ترتیب، با فرض یوشکا، دشوارتر از فرض‌آنوشکا می‌توان دربازی لوتو برنده شد.

یادداشت. ممکن است گـزارهٔ اخیر ، برخی از خوانندگان را به‌فکر وادارد . چطور ممکن است حدس تعدادی شماره از بین شماره‌هـای بیشتر، دشوارتر از حدس همان تعداد شماره از بین شماره‌هـای‌کمتر باشد؟ کجای این مطلب روشن است؟ این ناباوری در موردی هم پیش می‌آیدکه، گاهی حدس تعداد بیشتری شماره از بین یـك مقدار معین دشوارتر از حدس تعداد کمتری شماره از بین همـان مقـدار نیست (قبلاً نمونه‌ای از این مـورد را داشتیم). بحث‌زیرمی‌تواند به‌برطرف‌کردن تردید ما کمك کند.

فرض‌می‌کنیم، کسی‌که به‌بازی‌لوتو، باپیشنهاد آنوشکا، مشغول‌است، آن‌قدر کارت را پرکند که ، در هرقرعه‌کشی، یکی از کارت‌هـای او با ۲۵ حدس درست درآید (به‌زبان دیگر، این‌دوستدار لوتو، همهٔ حالت‌های ممکن قرعه‌کشی را در نظر بگیرد) . او می‌تواند با همین کارت‌ها، در قرعـه‌کشی لوتو، طبق پیشنهاد یوشکا شرکت‌کند؛ ولی این‌بار، برد اوتضمین نمی‌شود، زیرا درفرض یوشکا، تعداد حالت‌های ممکن قرعه‌کشی بیشتر است؛ تعـداد کل شماره‌ها در این حالت، بیشتر از ۵۵ است.

فدری می‌توانست ، برای پیروزی، در بازی با آندراش همان رنگ مهره‌هایی را انتخاب کندکه، در بازی دیگر، به‌لا انتخاب‌کرده بود. در این صورت، یکی از رقیبان فدری، و مثلاً آندراش (A) در مقابل سیاه ، و دیگری، یعنی به‌لا (B)، درمقابل سفید بازی می‌کند.

بنابراین A، که با مهرهٔ سفید بازی می‌کند، نخستین حرکت را انجام می‌دهد. فدری، که در بازی با به‌لا صاحب مهره‌های سفید است، می‌تواند همان حرکت A را تکرار کند. سپس منتظر می‌ماند تا B حرکت متقابل‌خود راانجام دهد، آن‌وقت فدری هم، همان حرکت را روی مهره‌های سیاه‌خود، درمقابل A انجام‌می‌دهد وهمان‌حرکت A را درمقابل خود، با مهره‌های سفید در برابر B تکرار می‌کند و غیره. با چنین روشی، دوبازی، کاملاً شبیه یکدیگر خاتمه می‌یابند: هرنتیجه‌ای که آندراش در برابر فدری به‌دست آورد، فدری هم دربرابر به‌لا به‌همان‌نتیجه می‌رسد. بنابراین، فدری ضرورتاً یا دریك بازی برنده و یا در هردو مساوی می‌شود.

در واقع، فدری، دو شطرنج‌باز را وامی‌دارد تا با هم بازی کنند و خود، تنها نقش یك واسطه را دارد. تنها یك دور بازی انجام گرفته است، منتهی روی دو صفحهٔ شطرنج.

گاهی، دو شطرنج‌باز، «به‌وسیلهٔ نامه» با هم بازی می‌کنند. جریان کار، به‌این ترتیب است. شطرنج‌باز A ، مهره‌ها را روی صفحهٔ شطرنج می‌چیند، حرکت اول را انجام می‌دهد وآن را، بانامه، به‌اطلاع شطرنج‌باز B می‌رساند. B هم به‌نوبهٔ خود ، مهره‌ها را روی صفحهٔ شطرنج می‌چیند، حرکت A را تکرار می‌کند، حرکت جوابیهٔ خود را انجام می‌دهد و، آن‌را، با نامه به‌اطلاع A می‌رساند؛ به‌همین ترتیب، بازی ادامه می‌یابد.

در بازی مسألهٔ ما هم، در واقع، آندراش و به‌لا ، «به‌وسیلهٔ مکاتبه» با هم بازی کرده‌اند و فدری تنها نقش پست‌چی را داشته است. برای این منظور، هیچ لزومی ندارد که فدری تسلطی برهنر شطرنج داشته باشد و یا

حتی حرکت مهره‌های آن را بداند. تنها چیزی که برای او لازم است، مختصری استعداد ریاضی است تا بتواند هرحرکتی را که یکی از دو رقیب انجام می‌دهند، در صفحهٔ شطرنج دیگر، به‌عنوان حرکت خود، تکرار کند (در واقع، حیله‌ای که فدری اندیشید تا بتواند با دو شطرنج‌باز پرتجربه، دریك زمان «مسابقه و یکی از آن‌ها را شکست دهد، یا دست‌کم با هر دو مساوی کند»، خودنشانهٔ‌استعداد ریاضی وقدرت استنباطهای منطقی‌اوست).]

۸. ماراتون شطرنج

اشتباه در استدلال آندراش است. نتیجه ۱۰۴ : ۱۵۲، به طورکامل، با همهٔ شرطهای مسأله سازگار است.

مثالی که آندراش می‌آورد، تنها دردید اول، نسبت امتیازها رابه‌نفع بهلا تغییر می‌دهد. در واقع، با این فرض که همهٔ مسابقه‌های کوچك بانتیجهٔ ۱۶:۰ و به‌نفع برنده به‌پایان رسیده باشند، آندراش، مقدار ممکن تعداد بردهای خود را در۱۰ مسابقهٔ‌کوچك بالا می‌برد (به‌یاد بیاوریم که‌آندراش، در ۱۰ مسابقهٔ کوچك، پیروزی به‌دست آورده است) ؛ در حالی که تعداد بازی‌هایی که بهلا برده است، تنها در۶ مسابقهٔ کوچك افزایش می‌یابد (زیرا بهلا، تنها در ۶ مسابقهٔ‌کوچك برنده شده است).

محاسبهٔ امتیازها با مثال آندراش، تنها وقتی نسبت نیروها را به‌نفع بهلا تغییر می‌دهد که تعداد پیروزی‌های بهلا را در مسابقه‌های کوچك، تا مرز تعداد پیروزی‌های آندراش بالا ببریم. برتری‌که آندراش در۴ مسابقهٔ کوچك «اضافی» به‌دست می‌آورد، نه‌تنها «مزیتی» را که گویا در فرض بردهای با نتیجهٔ ۱۶:۰ به‌دست می‌آورد، جبران می‌کند، بلکه آن‌را «پشت سرهم می‌گذارد».

[بهلا تنهاوقتی می‌توانست، درمحاسبهٔ امتیازها، به‌واقع مزیتی به‌دست آورد که، آندراش، به‌جای این‌که برنده و بازنده را تا حداکثر ممکن بالا ببرد، فرض می‌کرد که، همهٔ مسابقه‌های کوچك، با یك نتیجهٔ ۱۰:۶ به‌نفع برنده، پایان‌می‌یافت. بااین فرض، تعداد پیروزی‌های آندراش درمسابقه‌های

کوچك ، زیادتر نمی‌شود و تعداد پیروزی‌های به‌لا پایین نمی‌آید و این، برای به‌لا، مزیتی است.

در این حالت، آندراش ۶×۶+۱۰×۱۰، یعنی ۱۳۶ دورمسابقه و به‌لا ۶×۱۰+۱۰×۶ دور مسابقه را برده است و، مسابقهٔ بزرگ، با نتیجهٔ نهائی ۱۲۰:۱۳۶ به‌نفع آندراش پایان می‌پذیرد، و این، کمی کمتر از پیروزی واقعی است.]

با توجه به‌موقعیت‌های مطرح در صورت مسأله، می‌توانست همین نتیجهٔ ۱۰۴:۱۵۲، مثلاً درحالت زیرهم، بدون هیچ اشکالی به‌دست‌آید:

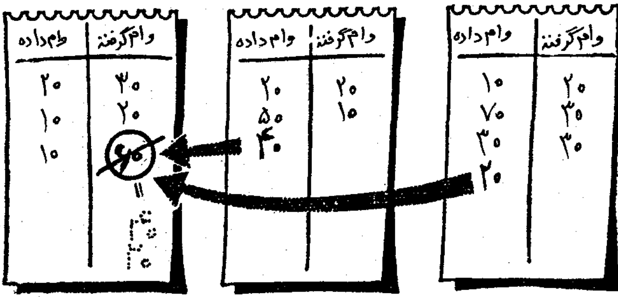
آندراش، یك مسابقهٔ کوچك را با نتیجهٔ ۲:۱۴، یك مسابقهٔ کوچك را با نتیجهٔ ۳ : ۱۳ ، سه مسابقهٔ کوچك را با نتیجهٔ ۵ : ۱۱ و ۵ مسابقهٔ کوچك را با نتیجهٔ ۶:۱۰ ببرد.

و به‌لا ، یك‌مسابقهٔ کوچك را با نتیجهٔ ۶:۱۰، سه‌مسابقهٔ کوچك را با نتیجهٔ ۷:۹ و ۲ مسابقهٔ کوچك را با نتیجهٔ $۷\frac{۱}{۲}:۸\frac{۱}{۲}$ برده باشد.

۹. محاسبهٔ متقابل

ازآن‌جاکه عضوهای گروه، تنها بین خود، پول را رد وبدل می‌کنند (از جای دیگری قرض نمی‌گیرند و به‌کسی، جز عضوهای گروه خود، قرض نمی‌دهند)، بنابراین، هرپولی که ازدستی به‌دست دیگرمی‌رود، در«ورقه‌های حساب»، دوبار نوشته می‌شود : یك‌بار به‌عنوان وامی‌که داده شده است، باردیگر به‌عنوان وامی‌که گرفته شده است.

[در موری هم‌که مبلغ جدول دریکی از «ورقه‌های حساب» درستون «قرض دادم» («قرض گرفتم»)، شامل مبلغ‌های کوچکتری باشدکه در ستون «قرض گرفتم» («قرض دادم») ورقه‌های دیگری ثبت شده است ، باز هم این گزاره درست است. در واقع ، با تقسیم این مبلغ «جامع» به‌اجزای خود (شکل۴۹)، هیچ تغییری دررابطهٔ مالی دوطرف «معامله» به‌وجود نمی‌آید، ولی درستی گزاره، روشن‌تر می‌شود.]



شکل ۴۹

بنابراین ، مجموع همهٔ پول‌هـــایی‌که به‌وام‌گرفته شده، برابر است با مجموع همهٔ پول‌هایی‌که به‌وام داده شده است. به‌این ترتیب ، اگر هرعضو گروه تمـــامی بدهی خود را به «صندوق عمومی» بپردازد و ، سپس ، همهٔ مبلغی راکه دیگر عضوهای گروه از او وام گرفته‌اند، از «صندوق عمومی» بردارد ، «تـــراز» برقرار می‌شود: نه پولی در صندوق می‌مـــاند و نه‌چیزی کم می‌آورد، همهٔ عضوهای گروه هم ، با رضایت کامل، محاسبه‌های متقابل را انجام داده‌اند.

البته ، هیچ لزومی نداردکـــه ، عضو گروه ، اول همهٔ بدهی خود را به‌صندوق بریزد و ، سپس ، آن‌چه به‌دیگران قرض داده است ، از صندوق بردارد . کافی است ، حساب خود را رسیدگی کند و تفـــاوت بدهی و طلب خودرا به‌صندوق بپردازد (اگر بدهی اوبیشتر است) ویا از صندوق بردارد (اگر طلب اوبیشتر است). دراین‌صورت، باید مجموع همهٔ اضافه‌بدهی‌ها، با مجموع همهٔ اضافه‌طلب‌ها، برابر شود.

از این‌جا روشن است‌که، یکی از عضوهای گروه ، می‌تواند حساب پول‌هایی راکه به‌قرض داده یا به‌قرض گرفته است، نگه ندارد. وقتی‌که بقیهٔ عضوهای گروه، حساب‌های خود را به‌طورکامل ، به‌صندوق ، تسویه‌کنند، معلوم می‌شودکه، این یک‌عضو، چقدر باید به‌صندوق بپردازد یا چقدر باید ازآن بردارد.

درنتیجه، روش محاسبهٔ متقابل درگروه که‌رکی، به‌این ترتیب است:

از ۱۶ نفر عضو گروه ، که حساب بدهی‌ها و طلب‌های خود را نگه‌داشته‌اند، ابتدا آن‌هایی که به‌صندوق بدهکارند، بدهی خودرا می‌پردازند، سپس، آن‌هایی که طلب دارند، طلب خود را ازصندوق می‌گیرند.

اگر در صندوق چیزی بماند ، به‌معنای آن است که این مبلغ به‌نفر هفدهم (که حساب خود را نگه‌نداشته است) تعلق دارد و ، اگر صندوق کسری بیاورد، نفر هفدهم باید به‌همان اندازه به‌صندوق بپردازد.

۱۰. برخورد

a. استدلال عموآندراش درست نیست.

در واقع، آن‌عضوهایی از گروه ، که حساب خود را نگه‌داشته‌اند، آنچه قرض گرفته‌اند به‌صندوق می‌پردازند وآن‌چه به‌دیگران قرض‌داده‌اند، ازصندوق می‌گیرند. اگر درصندوق چیزی باقی بماند، بایدآن‌را به‌دونفری دادکه حساب خود را نگه نداشته‌اند. این‌دو نفر باید در تقسیم این‌مبلغ، با هم‌کنار بیایند. درحالتی هم‌که صندوق‌کسری بیاورد، باید دو نفر اهمال‌کار، این‌کسری را بپردازند.

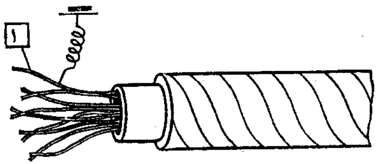
b. در حالتی‌که، بیش از دونفر ، در نگه‌داشتن حساب خود اهمال کرده باشند، بقیهٔ عضوهای گروه‌ـ که حساب خود را با دقت نگه‌داشته‌اندـ می‌توانند مثل حالت *a*، محاسبه‌های متقابل را انجام‌دهند.

۱۱. سیم‌کشی

چون متصدی برق باید انتهای سیم‌ها را شماره‌گذاری‌کند، روشن است‌که، برای این‌منظور، بایدبه‌صورتی سنجیده، این‌انتهاها را منظم‌نماید. ساده‌ترین روش تنظیم انتهای سیم‌ها، این است‌که همهٔ ۴۹ سیم را، پشت‌سر هم، به‌هم مربوط‌کند (شکل ۵۳).

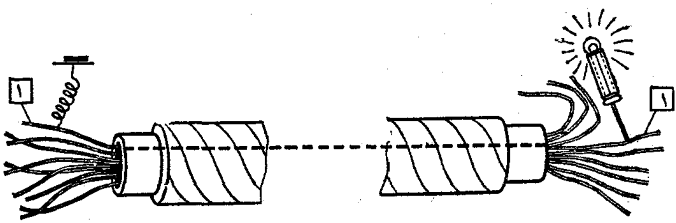
متصدی برق‌کافی است یکبار به‌ساحل دیگر برود وسپس برگردد. برای این‌منظور، باید به‌ترتیب زیر عمل‌کند:

در «این» ساحل ، به‌انتهای یکی از سیم‌ها ، جریان را وصل می‌کند، یعنی آن‌را به‌خط انتقال برق پیوند می‌دهد؛ این انتها را باشمارهٔ ۱ مشخص و بقیهٔ ۴۸ سیم را دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کند (شکل ۵۰).



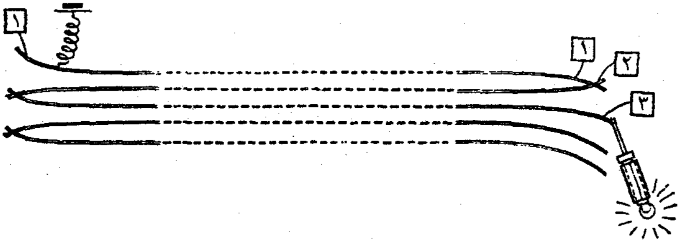
شکل ۵۰

بعد به‌ساحل دیگر می‌رود (و فراموش نمی‌کند کـه نمونه‌گیر را بـا خود ببرد) و درآن‌جا ، یك‌یك انتهای سیم‌ها را ـ که از غلاف کابل بیرون آمده‌اند ـ امتحان می‌کند. روشن است کـه لامپ نمونه‌گیر ، وقتی (و تنها وقتی) روشن می‌شودکـه، متصدی برق، آن‌را به‌انتهای سیم ۱ وصل کند. بنابراین، انتهای سیمی را، که موجب روشن‌شدن لامپ شده است، باید با شمارهٔ ۱ مشخص کرد (شکل ۵۱).



شکل ۵۱

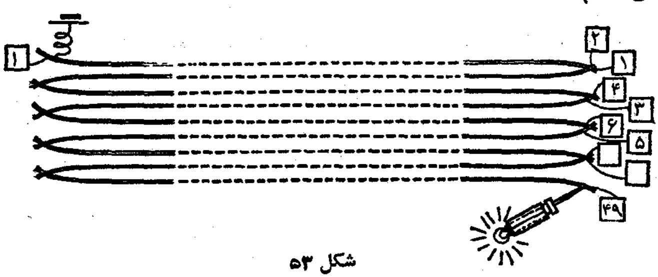
اکنون متصدی برق، انتهای یکی دیگر از سیم‌ها را به‌انتهای سیم ۱ وصل می‌کند. واین سیم انتخابی‌را ۲ می‌نامد؛ آن‌وقت باید، دوباره، انتهای همهٔ ۴۷ سیم باقی‌مانده را با نمونه‌گیر آزمـایش کند. روشن است که لامپ نمونه‌گیر وقتی (وتنها وقتی) روشن می‌شودکـه ، متصدی برق ، آن‌هـارا به‌انتهای سیمی وصل کرده باشدکه در طرف دیگر ساحل رودخانه، به‌سیم۲ وصل باشد. این سیم نام شمارهٔ ۳ را به‌خود می‌گیرد (شکل ۵۲).



شکل ۵۲

سپس، متصدی برق ، با وصل انتهای سیم ۳ به‌یکی از سیم‌های «بدون‌نام» ودادن شمارهٔ ۴را به‌این‌سیم‌انتخابی، دوباره، به‌کمك نمونه‌گیر، همهٔ سیم‌های بدون‌شماره راآزمایش می‌کند.روشن است‌که لامپ نمونه‌گیر، وقتی (وتنها وقتی) روشن خواهدشدکه‌آن‌را به‌انتهای سیمی وصل‌کرده‌باشد که درساحل دیگر رودخانه به‌سیم ۴ مربوط شده است. این‌سیم هم، دارای شمارهٔ ۵ می‌شود.

متصدی برق، این‌روش‌را تاآن‌جا ادامه می‌دهدکه هر ۴۹ سیم دارای شماره شوند. و این ، به‌معنای آن است‌که هر ۴۹ سیم به‌دنبال هم بسته شده‌اند ویك سیم واحد را تشکیل داده‌اندکه از ۴۹ قطعه تشکیل شده‌است (شکل ۵۳)



شکل ۵۳

بعد ازپایان این‌وظیفه، متصدی برق به‌طرف دیگر ساحل برمی‌گردد ـ آغاز به‌تعیین سیم‌هایی می‌کندکه درآن‌طرف رودخانه، شماره‌گذاری‌کرده بود (در این‌طرف، تنها یکی از سیم‌ها، شماره دارد).

در این‌طرف رودخانه ، انتهای همهٔ سیم‌ها ، به‌جز سیم ۱ ، دوبه‌دو

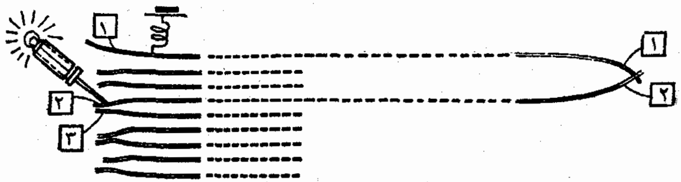
به‌هم وصل‌اند. درهرکدام ازاین زوج‌ها، هرسیم شماره‌های غیر از ۱ دارد. اگر در یکی از این زوج‌ها، دو انتها را ازهم جداکنند، تمامی سیم پرپیچ و خم، به‌دو «مـار» مستقل و بدون‌ارتباط به‌هم ، تقسیم می‌شود. در یکی از این‌دو بخش، جریان برق‌وجوددارد ودیگری، ازخط انتقال برق جدامی‌ماند. بنابراین، اگر نمونه‌گیر را، به‌نوبت، به‌هریك ازدو انتهای‌آزاد این دوسیم وصل‌کنند، تنها در یکی از آن‌هـا، یـا روشن‌شدن لامپ روبه‌رو می‌شوند. روشن است‌که،آن انتهای سیم‌که لامپ‌را روشن می‌کند، به‌انتهای ۱ وصل است (زیرا، این‌سیم، به‌خط انتقال برق متصل است)، بنابراین، شمارهٔ آن کمتر و شمارهٔ انتهای «خاموش» یك‌واحد بیشتر است.

سپس، همان‌طورکه نمونه‌گیر با لامپ روشن به‌انتهای‌آزاد سیم (که به‌انتهای ۱ وصل است) نگه‌داشته شده است، متصدی برق باید، به‌نوبت، هرکدام از بقیهٔ زوج‌های به‌هم متصل را باز کند و بعد ببندد . با بازکردن بعضی از این‌زوج سیم‌ها، لامپ نمونه‌گیر خاموش می‌شود ودر بعضی‌دیگر روشن باقی‌می‌ماند. روشن‌است‌که شمارهٔ سیم‌های اول‌کمتر وشمارهٔسیم‌های نوع دوم بیشتر از شمارهٔ سیم آزادی است‌که انتهای آن به‌نمونه‌گیر وصل است. بنابراین، متصدی برق، می‌تواند ، با شمردن تعداد اتصال‌هایی‌که با بازشدن‌آن‌ها،لامپ نمونه‌گیرخاموش می‌شود، شمارهٔ «دم‌مار» را،که به‌خط انتقال برق متصل است، پیداکند. مثلاً اگر لامپ نمونه‌گیر، بـا بازکردن ۵ زوج خاموش شود، آن‌وقت، برای این‌کـه به «دُم‌مار»، از راه سیم ۱ ، برسد، باید از ۵ زوج انتها، یعنی روی‌هم از ۱۱ انتها بگذرد. در نتیجه ، شمارهٔ «دم‌مار»۱۲ می‌باشد، وسیم‌آزادی‌که به‌آن وصل است، دارای‌شمارهٔ ۱۳ است. به‌این ترتیب، متصدی برق می‌تواند، شمارهٔ انتهای‌آزادشدهٔسیم را معین‌کند.

بعد باید، این‌دوانتهارا به‌هم وصل ودو انتهای زوج دلخواه دیگری را از هم جداکرد و همـان‌روند فوق را ادامه داد . بعد دوبـاره این زوج سیم به‌هم‌متصل و زوج دیگری، برای‌آزمایش، بازمی‌شود و، این‌روند ، تا آن‌جا ادامه می‌یابدکه شمارهٔ همهٔ سیم‌ها به‌دست‌آید (برای پایان گرفتن‌کار، باید این‌روند را ۲۴بار تکرارکرد).

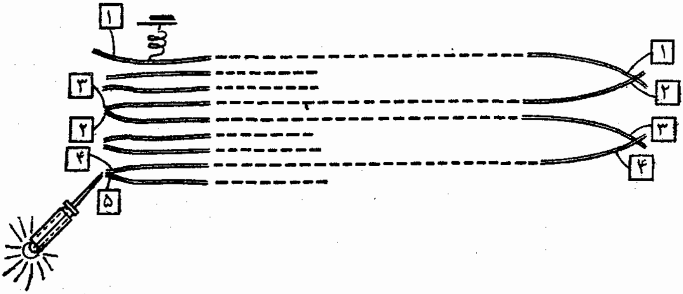
۱۲. آیا تندتر نمی‌شود؟

کارمتصدی برق‌را، به‌ترتیب زیر، می‌توان کمتر کرد. وقتی که‌متصدی برق به‌ساحلی برمی‌گرددکه ، در ابتدای کار ، درآن‌جا بود ، بـاید انتهای سیم‌هایی راکه دوبه‌دو به‌هم وصل‌اند، شماره گذاری کند (مثلاً ، دو انتهای یك‌زوج را با عدد رومی I ، دوانتهای زوج دیگر را بـا عدد رومی II و غیره) و، سپس، آن‌ها را بازکند. اگر نمونه گیر را، به‌نوبت ، به‌هرکدام از ۴۸ سیم، به‌طور جداگانه وصل‌کند، متوجه می‌شودکه، لامپ‌آن ، تنها در یك مورد روشن خواهد شد: وقتی که، نمونه گیر، به انتهای سیم ۲ متصل



شکل ۵۴

باشد (شکل ۵۴). به این ترتیب، متصدی برق، انتهای ۲ را پیدا می‌کند؛ زوج این انتها (کـه همان شمارهٔ رومی آن را دارد)، انتهای سیم ۳ است. اکنون، اگر انتهای دوسیم ۲ و ۳ را دوباره به‌هم وصل‌کند، باید نمونه گیر را بـا هر یك از ۴۶ انتهای باقی‌مانده مـورد آزمایش قرار دهد. هر جا که چراغ نمونه گیر روشن شد، بـا سیم شمارهٔ ۴ سروکار دارد وسیم زوج آن، شمارهٔ ۵ است (شکل ۵۵). اکنون بایـد دو انتهای ۴ و ۵ را به هم وصل کند، با نمونه گیر، ۴۴ سیم شماره گذاری نشدهٔ باقی‌مانده را مورد آزمایش قرار دهد و بـه همین ترتیب عمل کند تـا انتهای همهٔ سیم‌ها شماره گذاری شوند (در ایـن شماره گذاری، دو انتهای هـر سیم، بـا یك شماره مشخص می‌شوند).



شکل ۵۵

۱۳. تعمیم

کافی است. درواقع، اگر تعداد سیم‌های داخل کابل، فرد باشد، متصدی برق می‌تواند کاملاً شبیه مسأله ۱۱ (و ۱۲) عمل کند.

عمل متصدی برق، در حالت زوج بودن تعداد سیم‌ها هم، به‌ترتیب مشابهی می‌تواند به‌انجام برسد. تنها تفاوتی که دارد، این است که، متصدی برق، قبل از آن که از رودخانه عبور کند (وقتی که هنوز در «این طرف» است)، انتهای سیم‌ها را دو به‌دو به‌هم وصل می‌کند، به‌جز این که، انتهای دو سیم را آزاد می‌گذارد: علاوه بر سیمی که به‌خط انتقال برق وصل است، سیم بعدی را آزاد می‌گذارد و آن‌را شماره ۲ می‌نامد. وقتی که متصدی برق به‌طرف دیگر رودخانه می‌رود، می‌تواند بدون هیچ‌زحمتی و به‌ترتیب زیر، این سیم را تشخیص دهد: کافی است «دم‌ماری» که زیر فشار برق است به‌آن وصل شود، به‌نحوی که همهٔ سیم‌های شماره‌گذاری نشدهٔ دیگر، آزاد باشند، یعنی لامپ نمونه‌گیر، ضمن تماس با آن‌ها روشن نشود.

وقتی که این سیم شناخته شد، بقیهٔ سیم‌ها را می‌توان، مثل حالتی که تعداد سیم‌ها فرد است، شماره‌گذاری کرد.

۱۴. رابطه‌های نادرست

در صورت مسأله گفته شده است که یوشکا، از نحوه به‌دست‌آمدن

رابطه‌های(۱) و (۲) اطلاعی‌ندارد. بنابراین، تنها باید به‌خود این‌رابطه‌ها بپردازیم و، برای کشف نادرستی آن‌ها، کاری به‌نحوهٔ تفصیلی به‌دست آمدن آن‌ها نداشته‌باشیم: برای حل مسأله ، باید از همین رابطه‌های (۱) و (۲) آغاز کنیم.

(۱). ابتدا رابطهٔ(۱) را درنظر می گیریم. اگر این‌رابطه‌را «به‌زبان جبری» ترجمه کنیم، می گوید: برای این که شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را به‌دست‌آوریم، باید دو برابر مساحت این مثلث را برمقداری تقسیم کنیم که برابر است با مجموع دوضلع مثلث، منهای ضلع سوم‌آن.

این پرسش پیش می‌آید: از مجموع کدام دوضلع مثلث، باید ضلع‌سوم راکم کرد؟ رابطهٔ (۱)، در این‌باره، «سکوت»کرده است.

از این گذشته، رابطهٔ(۱) در این‌باره، نمی‌تواند هیچ کمکی بکند،زیرا این رابطه، تنها می گویدکه a، b و c ، طول ضلع‌های مثلث‌اند و، روشن است‌که، به‌هرترتیب دلخواهی می‌توان ضلع‌های مثلث‌را نام گذاری کرد.

در هرمثلث، شعاع دایرهٔ محاطی، به‌هریك ازسه‌ضلع «توجهی‌یکسان» دارد: طول این شعاع، بستگی به‌آن نداردکه ضلع‌هـای مثلث را ، چگونه نـام‌گذاری کـرده‌بـاشیم (مثلاً ، بستگی به‌این ندارد که کدام ضلع را ، a بنامیم).

به‌این ترتیب ، رابطهٔ (۱) تنهـا وقتی می‌تواند درست باشدکه، در مخرج‌آن، بتوان تفاضل هرضلع دلخواه را، از مجموع دوضلع دیگرنوشت. یعنی، اگر رابطهٔ

$$r=\frac{۲S}{a+b-c}$$

درست باشد، باید به‌ناچار، دورابطهٔ زیرهم درست باشند.

$$r=\frac{۲S}{a+c-b} \quad \text{و} \quad r=\frac{۲S}{b+c-a}$$

ولی، در مورد هرمثلث ، برای شعاع دایرهٔ محاطی ، تنهـا یك‌مقدار به‌دست می‌آید، یعنی هرسه رابطه، باید برای r، فقط یك‌مقدار را بدهند و،

در نتیجه، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{۲S}{b+c-a}=\frac{۲S}{a+c-b}=\frac{۲S}{a+b-c}$$

که درآن، a و b و c ، ضلع‌های یك‌مثلث دلخواهند . ولی از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود:

۱) یا $S=0$ ،

۲) ویا $b+c-a=a+c-b=a+b-c$.

(البته، a و b و c، مثل‌سابق، به‌معنای‌طول ضلع‌های یك‌مثلث‌اند).
حالت ۱) برای ما بی‌معنی است ، زیرا ما می‌خواهیم با یك‌مثلث واقعی سروکار داشته باشیم. در حالت ۲)، مثلاً برای $a=۳$ ، $b=۵$ و $c=۶$ به‌دست می‌آید:

$$b+c-a=۸$$

$$a+c-b=۴$$

$$a+b-c=۲$$

و سه کسر

$$\frac{۲S}{b+c-a}\,,\ \frac{۲S}{a+c-b}\,,\ \frac{۲S}{a+b-c}$$

منجر به‌سه‌مقدار مختلف، برای شعاع دایرهٔ محاطی مثلث می‌شوند.
بنابراین، رابطهٔ (۱) نمی‌تواند درست باشد.
از بحث بالا نتیجه می‌گیریم که، رابطهٔ مربوط به‌شعاع دایرهٔ‌محاطی، تنها وقتی می‌تواند درست باشد که، با هرگونه تبدیل حرف‌های a، b و c به‌یکدیگر، تغییر نکند. درجبر، چنین رابطه‌هایی‌را، متقارن[1] نسبت به a و

۱. مفهوم تقارن جبری، نه‌تنها اجازه می‌دهد تا درستی رابطه‌ها را بازرسی کنیم، بلکه ضمناً به‌سادگی حل‌مسأله‌ها هم، بسیار کمك می‌کند. به‌کتاب‌های «تقارن در جبر» و «تقارن در هندسه وجبر» ازهمین مترجم مراجعه‌کنید.

b و c گویند.

یوشکا متوجه شدکه، رابطهٔ (۱)، متقارن نیست: برخورد رابطهٔ(۱) با c ، همان برخوردی نیست که با a و b دارد (زیرا a و b باعلامت «مثبت» و c با علامت «منفی» درمخرج کسر ظاهر شده‌اند).

در صورت مسأله ، در رابطهٔ (۱) ، تنها یك اشتباه رخ داده است. برای این‌که رابطهٔ (۱) ، به‌صورت رابطه‌ای متقارن نسبت به a و b و c درآید ، کافی است علامت جلو حرف c را ، در مخرج کسر ، تغییر دهیم و $-c$ را به $+c$ تبدیل کنیم:

$$r=\frac{۲S}{a+b+c} \qquad (*)$$

به‌این ترتیب ، اگر تنها به‌صورت مسألهٔ خود توجه داشته‌باشیم ، رابطهٔ (۱) برای محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، تنها می‌تواند به‌صورت (*) باشد (در واقع هم، رابطهٔ (*) درست است).

(۲). در مورد رابطهٔ (۲) هم ، می‌توان به‌همین ترتیب ، استدلال کرد. تنها تفاوت این است‌که، در این‌جا، نیمساز زاویهٔ ۲γ «توجه‌یکسان خود را» تنها به‌ضلع‌های a و b دارد (دوضلعی که زاویهٔ بین آن‌ها برابر ۲γ است) و، نسبت به‌ضلع سوم c، رابطهٔ دیگری دارد. بنابراین، رابطهٔ (۲) که معرف طول نیمساز f_γ است ، باید تنها نسبت به‌ضلع‌های a و b متقارن باشد. این وضع به‌معنای آن است‌که ، رابطهٔ (۲)، نباید با تبدیل a و b به‌یکدیگر تغییر کند (یعنی وقتی‌که ، در رابطه، همهٔ aها را به b و همهٔ bها را به a تبدیل کنیم) . اگر این‌تبدیل را انجام‌دهیم ، رابطهٔ (۲) چنین می‌شود:

$$f_\gamma=\frac{\sqrt{bc(b+a+c)(b+a-c)}}{b+a}$$

اگراین رابطه را، باآن‌چه پیشتا ازروی تخته‌سیاه‌نوشته است‌مقایسه کنیم، معلوم‌می‌شودکه این‌تبدیل، منجر به‌یك‌تغییردررابطه شده‌است: عبارت

زیر رادیکال، به‌جای a، با b آغازشده است. به این ترتیب، تبدیل bوa به یکدیگر، مقدار $f_{۲}$ را تغییر می‌دهد و، در نتیجه، رابطهٔ (۲) نمی‌تواند درست باشد.

دراین استدلال، از این مطلب استفاده کردیم‌که، نتیجهٔ جذر دو عدد مختلف، عددهایی مختلف‌اند.

*

رابطه (۲)، باید درواقع، به این‌صورت باشد:

$$f_{۲}=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

بخش دوم

۱۵. مجموعهٔ ناقص I

در چه صورتی، پدر پیشتا نمی‌تواند مسأله را حل‌کند و آبرویش می‌رود؟ وقتی‌که، بامحاسبه مجموع هردو عدد دلخواه ازکارت‌های موجود، هرگز به‌دوعدد برابر دسترسی پیدا نکند. ولی، تعداد روش‌هایی‌که، به‌کمك آن‌ها ، بتوان ۲ کارت از ۲۱ کارت را انتخاب کرد، فوق‌العاده زیاد است. هرکدام از ۲۱ کارت را می‌توان به‌عنوان کارت اول، و هریك از ۲۰ کارت باقی‌مانده را به عنوان‌کارت دوم انتخاب‌کرد و روی میز درکنار هم چید. بنابراین، روی هم می‌توان به تعداد ۲۰ × ۲۱ جفت‌کارت درست‌کرد، ولی ازآن‌جاکه مجموع دوعدد، به‌ردیف قرارگرفتن‌آن ها مربوط نیست(می‌دانیم که $a+b=b+a$)، بنابراین، زوج عددهایی که تنها در مورد ردیف دو جمله خود باهم اختلاف دارند، مجموعی برابر خواهند داشت. و این، به معنای آن‌است‌که نیمی از۲۰ × ۲۱ جفت را می‌توان ازگردونه خارج‌کرد. به این‌ترتیب، روی‌هم $\frac{۲۱ \times ۲۰}{۲}$ جفت عددپیدا می‌کنیم‌که، احتمالاً، تنها

دریکی ازجمله‌های خود می‌توانند برهم منطبق باشند (ونه درهردو جمله).
اگر پدر پیشتا نتواند دوجفت کارت، بامجموع برابر، پیدا کند، بـه معنای آن است که همهٔ ۲۱۰ مجموع، عددهایی مختلف‌اند. ولی، کمترین مجموع ممکن‌برابراست‌با ۳ = ۲ + ۱ وبیشترین مجموع ممکن ۱۹۹ = ۱۰۰ + ۹۹. بنابراین، مجموع‌های دوعدد درهرجفت کارت، تنها می‌تواند یکی ازعددهای ۳، ۴، ۵، ...، ۱۹۸، ۱۹۹ باشد ونه هیچ عدد دیگری، یعنی روی هم، ۱۹۷ مقدارمختلف برای این‌مجموع‌ها به دست می‌آید و، درنتیجه، در بین ۲۱۰ مجموع موجود، به ناچار باید بعضی، باهـم برابر باشند. به ایـن ترتیب، دست‌کم می‌توان دوجفت‌کارت را پیداکردکه مجموع عددهای روی آن‌هـا ، باهم برابرباشند.

۱۶. تردید

بـا وجود تـردید شکاکان، مسألهٔ قبل، حتماً دارای جواب است: دو مجموع مساوی می‌توان پیدا کردکه هردو جملهٔ اولـی، با دوجملهٔ دومـی اختلاف داشته باشند. در واقع، اگر دو جفت کارتی راکه مجموعی بـرابـر دارند با عددهای $(b، a)$ و $(b، c)$ بگیریم (به‌نحوی‌که یکـی ازکارت‌ها، در هردوجفت مشترك باشد)، باید داشته باشیم:

$$a+b=b+c$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $a=c$: یعنی دو جفت کارت ، شامل عددهای $(a، b)$ و $(b، a)$ مـی‌شوند، که تنها در ردیف عددها بـاهم فرق دارند و، اگربه‌یاد داشته باشید، مااین دوجفت کارت را، یك‌جفت به‌حساب آوردیم. بنابراین، جفت کارت‌هایی‌که مجموعی برابر داشته باشند، حتماً درهردوجملهٔ خود باهم فرق دارند.

۱۷. تفاضل به‌جای مجموع

اگر پیشتا کمی دقت‌کند، متوجه می‌شودکه مسأله را حل‌کرده است.

درواقع، ازحل مسألهٔ ۱۵ روشن‌شدکه، همیشه می‌تواندازبین ۲۱ کارت خود ۴ کارت را طوری انتخاب‌کندکه مجموع عددهای دو تای اول، با مجموع عددهای دوتای آخربرابر باشد. اگر پیشتا این۴ کارت را پیدا کند، برای‌حل مسألهٔ جدید خود، کافی است جای کارت‌های دوم وچهارم را باهم عوض‌کند تا جواب مسألهٔ تازه را به‌دست‌آورد. مثلاً، اگرپیداکرده باشد:

$$۲۵+۱۳=۳۰+۸$$

آن‌وقت، به‌دست می‌آورد

$$۲۵-۸=۳۰-۱۳$$

ویا درحالت‌کلی، اگر داشته باشد:

$$a+b=c+d$$

آن وقت، خواهدداشت:

$$a-d=c-b$$

۱۸. حیله‌ای تازه

b. B حق دارد : از ۵ کارتی‌که در شکل ۶ نشان داده شده است، نمی‌توان ۴ کارت را طوری انتخاب‌کردکه باشرط مسأله سازگار باشد. (از خواننده می‌خواهیم همهٔ حالت‌های ممکن را آزمایش‌کند. تعداد این‌حالت‌ها خیلی زیاد نیست.)

a. A حق ندارد. او می‌خواهد ثابت‌کندکه بین ده عدد طبیعی‌نخستین به‌هرترتیبی ۵ عدد را انتخاب‌کنیم، همیشه می‌توان از بین آن‌ها ۴ عدد پیداکردکه با شرط مسأله بسازد؛ ولی استدلال او درست نیست، زیرا B توانسته است مثالی بیاوردکه حکم A را نقض‌کند.

c. C هم حق ندارد ، زیرا اگر تفاضل دوعدد منفی باشد، با تغییر ردیف‌آن‌ها، به‌تفاضل مثبت می‌رسیم.

وقتی A تأکید می‌کندکه «از ۵ کارت می‌توان $\frac{۵\times۴}{۲}$، یعنی ۱۰ زوج

تشکیل داد»، دوزوجی راکه تنها درردیف عددهای خود با هم فرق دارند، یکی به‌حساب می‌آورد: مثلاً زوج‌های ۷،۳ و ۳،۷ را یکبار درنظرمی‌گیرد اگربین دوزوجی که، تنها درردیف عددهای خود، باهم فرق دارند، اختلاف قایل شویم (یعنی، زوج‌های مرتب را در نظر بگیریم)، آن‌وقت، به جای $۱۰ = \frac{۵ \times ۴}{۲}$ ، $۵ \times ۴ = ۲۰$ زوج خـواهیم داشت. در این حـالت، یعنی وقتی‌که با زوج‌های مرتب سروکار داشته باشیم و، اگر ردیف دوعدد دریك زوج تغییر کند، آن را زوج جدیدی بـه حساب آوریـم، تعداد تفاضل‌های مختلف برابر۱۸ وتعداد زوج‌هایی که می‌توان تشکیل داد، برابر۲۰می‌شود. بنابراین، دوباره به این نتیجه می‌رسیم که، دست‌کم، ۲ زوج با تفاضل‌های مساوی، پیدا می‌شود.

به این ترتیب، اگر استدلال A اشتباه باشد، ایـن اشتباه مربوط بـه جایی نیست که A تعداد زوج‌ها را محاسبه می‌کند (ظاهراً، اشتباه بایـد در جای دیگری باشد).

دربارهٔ تفاضل‌های منفی، بیشتر صحبت‌کنیم (درمسألهٔ ۱۷هم، ممکن بود باچنین تفاضل‌هایی روبه‌روشویم). اگر پیشتا ، هنوز با عـددهای منفی آشنا نباشد، می‌توان حیله‌ای به‌اوآموخت. مثلاً ، درمسألهٔ ۱۷، ممکن‌بود پیشتا این ۴ کارت را انتخاب‌کند:

$$۲۰ + ۹ = ۸ + ۲۱$$

و به‌دست‌آورد:

$$۲۰ - ۲۱ = ۸ - ۹$$

روشن است‌که او، چنین تفاضل‌هایی را بی‌معنی می‌داند. ولی پیشتا ، خیلی زود می‌تواند متوجه شودکه باید ردیف‌کارت‌های‌اول ودوم و، سپس، ردیف کارت‌های سوم وچهارم را عوض‌کند وبه‌دست‌آورد:

$$۲۱ - ۲۰ = ۹ - ۸$$

در استدلال A اشتباهی وجود ندارد.

اشتباه دراین‌جاست که، ممکن است، یکی از کارت‌ها، در دو زوج با تفاضل‌های مساوی شرکت داشته باشد. بنابراین، ازوجود چنین زوج‌هایی، نمی‌توان نتیجه گرفت که ۴ کارت، باتوجه به‌شرط مسأله، پیدا می‌شود.

درواقع، استدلالی که درمسألهٔ ۱۶ داشتیم، ضمن عبور از مجموع به تفاضل، نادرست می‌شود: وقتی در۴ کارتی که پهلوی هم چیده‌ایم، عددهای کارت‌های دوم وسوم یکی باشد وضمناً تفاضل عددهای دوکارت اول مساوی تفاضل دو کارت‌آخر بشود، عددهای دوکارت اول وچهارم برابرنیستند.

[اگر بخواهیم تحقیق کنیم که از ۵ کارت پیشنهادی B ، نمی‌توان ۲ زوج کارت با تفاضل‌های برابر انتخاب کرد، به این ترتیب عمل می‌کنیم. هر ۱۰ زوج را تشکیل می‌دهیم ودرهر مورد، تفاضل‌را محاسبه می‌کنیم:

$$۱۰-۱=۹ \quad ۱۰-۲=۸ \quad ۱۰-۵=۵ \quad ۱۰-۸=۲$$

$$۸-۱=۷ \quad ۸-۲=۶ \quad ۸-۵=۳$$

$$۵-۱=۴ \quad ۵-۲=۳$$

$$۲-۱=۱$$

همان طور که A ، به‌درستی، استدلال کرده است، دو تفاضل برابر به‌دست می‌آید، ولی عدد ۵ درهردوی‌آن‌ها شرکت‌کرده است. بنابراین، در مورد کارت‌هایی که B پیشنهاد کرده است، داریم:

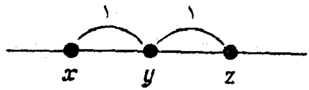
$$۸-۵=۵-۲$$

وروشن است که، به جای ۴ کارت، با ۳ کارت سروکارداریم.]

۲۰. دراین‌باره، شما چه می‌گویید؟

استدلالی شانی درست نیست؛ اشتباه درهمان‌گام اول است. درواقع

تمام استدلال شانی، براساس این فرض است که، اگرمقدار دوتفاضل برابر یکدیگر باشند، مسألهٔ پیشتا برای ۱۵ کارت، دارای جواب است. ولی در مسألهٔ قبل هم دیدیم که، تنها وجود دوتفاضل مساوی، به‌معنای حل مسأله نیست، زیرا ممکن است، ضمن تشکیل دوتفاضل مساوی، به‌جای ۴ کارت، ۳ کارت شرکت کرده باشد. اشتباه شانی در همان گام نخست، نتیجه‌گیری نهایی را از بین می‌برد، ولو این که درتمامی استدلال‌های بینابینی، اشتباهی وجود نداشته باشد. به عنوان نمونه‌ای که این نتیجه‌گیری را نقض می‌کند،



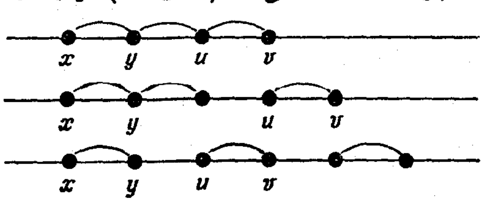
شکل۵۶

می‌توان دوتفاضل برابر ۱ رادرنظر گرفت (شکل۵۶): دراین‌جا $y-x=$ ۱ و $z-y=$ ۱.

۲۱. هنوز می‌توان خود را نجات داد

روشن می‌کنیم که: آیا پیشتا می‌تواند، با در اختیار داشتن تنها ۱۰ کارت، مسألهٔ خود را حل کند؟

اگر از «روش شانی» استفاده کنیم و تفاضل عددها را در کارت‌های مجاور درنظر بگیریم، روشن‌است که وجود دوتفاضل مساوی، وجودجواب را برای مسأله تضمین نمی‌کند.ولی، وجود سه تفاضل مساوی، به پیشتا امکان پیداکردن جواب مسأله را می‌دهد (شکل ۵۷)، زیرا درایـن صورت،



شکل۵۷

همیشه می‌تواند ۴ کارت انتخاب کند:

$$y-x=u-v$$

بنابراین، روش پیشنهادی شانی را، می توان، به این ترتیب «اصلاح» کرد:

$d_۱$ و $d_۲$ را، کمترین تفاضل‌هایی می گیریم که از کارت‌های مجاور به دست می‌آیند:

$$d_۱ \geqslant ۱ \quad و \quad d_۲ \geqslant ۲$$

$d_۳$ و $d_۴$ را، کوچکترین عددها، از بین سایر تفاضل‌ها فرض می کنیم. این دو تفاضل، در نابرابری‌های زیر صدق می کنند:

$$d_۳ \geqslant ۲ \quad و \quad d_۴ \geqslant ۲$$

اگر به‌همین ترتیب، از تفاضل‌های کوچکتر به‌سمت تفاضل‌های بزرگتر برویم، سرآخر به‌این نابرابری‌ها می‌رسیم:

$$d_{۱۷} \geqslant ۹ \quad و \quad d_{۱۸} \geqslant ۹$$

$$d_{۱۹} \geqslant ۱۰$$

[وقتی که ۲۰ کارت را به ردیف هم بچینیم، روی هم ۱۹ تفاضل به وجود می‌آورند]. اگر همهٔ تفاضل‌هارا، از کمترین تابیشترین، باهم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$d_۱+d_۲+d_۳+\ldots+d_{۱۷}+d_{۱۸}+d_{۱۹} \geqslant$$
$$\geqslant ۲(۱+۲+\ldots+۹)+۱۰=۱۰۰$$

ولی ازآن جاکه، عدد نخستین کارت، از ۱ کمتر نیست، بنابراین عدد کارت آخر ـ کارت بیستم ـ باید از ۱۰۱ کمتر نباشد، که ممکن نیست. این تناقض به‌معنای آن است که، فرض مربوط به این‌که بیش از دو تفاضل مساوی بین عددهای مجاور وجود ندارد، نادرست است. به‌این ترتیب، درحالت وجود ۲۰ کارت، دست‌کم ۳ تفاضل مساوی پیدا می‌شود واین، به‌معنای آن است که پیشتا می‌تواند مسالهٔ خود را حل کند.

ما دیگر این را می‌دانیم که، به‌جای زوج مجموعه‌هایی که در صورت مساله ازآن‌ها صحبت شده است، می‌توان زوج تفاضل‌ها را مورد بررسی قرار داد. درواقع، اگر بتوانیم ۴ کارت طوری پیداکنیم که مجموع عددهای دو کارت اول، بامجموع عددهای دو کارت آخر، برابرباشد:

$$a+b=c+d$$

با تغییر جای کارت‌ها، می‌توانیم، تفاضل‌های مساوی را به‌دست‌آوریم:

$$a-c=d-b$$

یا

$$a-d=c-b$$

کارت‌هایی را که درسمت راست و چپ این نابرابری‌ها قرار دارند، می‌توان جا به‌جا کرد، بدون این‌که برابربودن دو طرف، به هم بخورد:

$$c-a=b-d$$

$$d-a=b-c$$

و این به معنای آن است که همیشه می‌توان کارت‌ها را طوری پهلوی هم گذاشت که تفاضل‌های مورد نظر، مثبت باشند.

برعکس، اگر ۴ کارت در اختیار داشته باشیم، به نحوی‌که بتوانیم آن‌ها را طوری پهلوی هم قرار دهیم که تفاضل دو کارت اول برابربا تفاضل دو کارت آخرباشد:

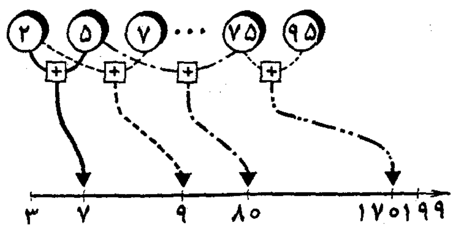
$$x-y=u-v$$

آن‌وقت، همیشه می‌توانیم، با جابه‌جا کردن کارت‌ها، به‌ردیفی برسیم که، در آن، مجموع دو کارت اول برابر با مجموع دو کارت آخر باشد:

$$x+v=y+u$$

به‌این ترتیب، نتیجهٔ نهائی را می‌توان به این‌صورت تنظیم کرد. هیچ فرقی نمی‌کند که‌کدام یك از این دو مساله را حل‌کنیم: چهارکارت را طوری جست وجوکنیم‌که مجموع عددهای دوکارت اول با مجموع عددهای دوکارت دوم برابر باشد، یا در جست وجوی چهارکارتی باشیم‌که‌تفاضل عددهای دو کارت اول‌آن‌ها، باتفاضل عددهای دوکارت‌آخر آن‌ها برابر باشد. این‌ها، دو مسالهٔ هم ارزند.

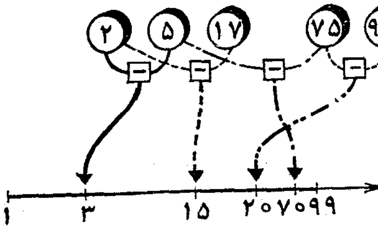
مسالهٔ مربوط به تفاضل‌ها را، بیشتر بررسی می‌کنیم.



شکل ۵۸

[در واقع، بررسی تفاضل‌ها، اندکی راحت‌تراز بررسی مجموع‌هاست. درحل مسالهٔ ۱۵، همهٔ زوج کارت‌های ممکن را، باهمهٔ مجموع‌های ممکن دوعدد مقابله کردیم، ودرحل مسالهٔ ۱۸، که درجست وجوی اشتباه استدلال A بودیم، همهٔ زوج کارت‌ها را با همهٔ تفاضل‌های مثبت و ممکن دو عدد مقابله کردیم. روش اخیر، به‌این مناسبت ساده‌تر است که، اگر عددهای وارد در مجموع‌ها و تفاضل‌ها را باهم مقایسه کنیم، می‌بینیم‌که در هردو مورد با عددهای یکسانی سروکار داریم ، ولی روشن است که مجموع‌ها، درقلمرو بزرگتری از عددها، نسبت به‌تفاضل‌های مثبت قرار دارند. مثلاً ، وقتی‌که مجموع‌ها را مطالعه می‌کنیم، کوچکترین مجموع برابر $۳ = ۲ + ۱$ و بزرگترین‌مجموع‌برابر $۱۹۹ = ۱۰۰ + ۹۹$ می‌شود. بنابراین، عددهای‌معرف این مجموع‌ها، در روی محور عددی، از ۳ تا ۱۹۹ پراکنده‌اند (شکل ۵۸). ولی اگر با تفاضل‌های مثبت سروکار داشته باشیم، کوچکترین آن‌ها برابر $۱ = ۱ - ۲$ وبزرگترین‌آن‌ها برابر $۹۹ = ۱ - ۱۰۰$ می‌شود. به‌این‌ترتیب، تفاضل‌های مثبت، روی بخش کوچکتری از محور عدد قرار دارند (از ۱ تا

۹۹) واثبات این مطلب که، آن‌ها، نمی‌توانند «جدا از هم و به صورتی پراکنده» باشند (ودست کم، دوتا از آن‌ها باید برهم منطبق باشند)، به‌مراتب ساده‌تراست (شکل ۵۹). در واقع، از ۱۶ کارت، می‌توان، $\frac{۱۶ \times ۱۵}{۲}$، یعنی

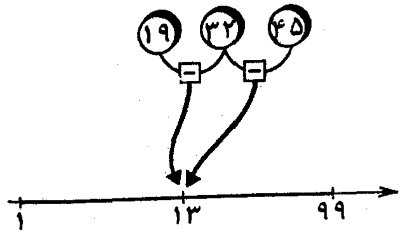


شکل ۵۹

۱۲۰ زوج تشکیل داد. اگر عددهای هر زوج را باهم جمع کنیم، ۱۲۰ مجموع به‌دست می‌آید که، کاملاً ممکن است، بدون تکرار، بین نقطه‌های صحیح محور عددی در فاصلهٔ از ۳ تا ۱۹۹ پراکنده باشند. در حالی که اگر تفاضل عددها را در هرزوج محاسبه کنیم (و همیشه عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم کنیم)، ۱۲۰ تفاضل مثبت به‌دست می‌آوریم که، روشن است، نمی‌توانند بدون تکراردربین نقطه‌های صحیح محور عددی از ۱ تا ۹۹، بدون تکرار، پراکنده باشند. از آن جاکه، تفاضل‌های مثبت، نمی‌توانندبیش از ۹۹ مقدار مختلف را اختیارکنند، بنابراین، دست کم ۲۱ تای آن‌ها، بر تفاضل‌های دیگر منطبق می‌شوند.

می‌دانیم که، استدلال A در مسالهٔ ۱۶، نادرست بود. او به‌این نکته توجه نکرده بودکه، برای دو زوجی که تفاضلی برابردارند، ممکن است یك کارت مشترك وجود داشته‌باشد (شکل ۶۰) و، بنابراین، وجود تفاضل‌های برابر، هنوز به معنای آن نیست که می‌توان ۴ کارت سازگار با شرط مساله پیدا کرد.

باید روشن کردکه باچند تا ازاین «عددهای سه‌تایی متقارن» می‌توان برخوردکرد (این عددهای سه‌تایی را به‌این مناسبت متقارن نامیده‌ایم که، کوچکترین و بزرگترین عدد، روی محور عددی، نسبت به عدد متوسط، در

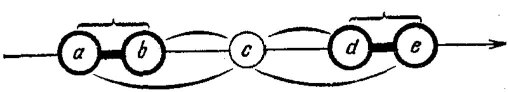


شکل ۶۰

دو نقطهٔ قرینهٔ یکدیگر قرار دارند). اگر تعداد سه‌تایی‌های متقارن زیاد نباشد (و درحالت مورد نظرما، از ۲۱ تجاوز نکند)، آن وقت، اثبات‌حکم یوشکا به‌هیچ گونه دشواری برخورد نخواهدکرد.

متاسفانه، برای ۱۶ کارت، تعداد سه‌تایی‌های متقارن به‌طور قابل ملاحظه‌ای از ۲۱ بیشتر می‌شود، زیرا هریك ازعددهای «درونی» می‌تواند، درعین‌حال، متعلق به چندین سه‌تایی متقارن باشد.

فرض کنیدکه‌موفق شویم،چنین «مرکزمشترکی» را پیداکنیم. آن‌وقت، اگر مثلاً عددی، مرکز عضوهای دوگروه سه‌تایی ازعددهای متقارن باشد، با حذف عدد وسط ازاین ۵ کارت، (که این سه‌تایی‌ها را تشکیل می‌دهند)، ۴ کارت باقی می‌ماندکه با شرط مساله سازگارند.



شکل ۶۱

برای این‌که دراین‌مورد قانع شویم، کافی است به‌شکل ۶۱ نگاه‌کنیم (که در آن، ۴ کارت وجود دارد، که بعد از حذف عضو وسط دو سه تائی متقارن، «به‌همان ترتیبی‌که لازم است» قرار گرفته‌اند: به ترتیب صعودی «شماره‌ها»). بعد ازاین ملاحظه، اثبات حکم یوشکا ، خود به خود حاصل می‌شود. درواقع، از۱۶ کارت، تنها ۱۴ کارت را می‌توان مرکز سه‌تایی‌های متقارن به‌حساب‌آورد، زیرا به‌روشنی‌معلوم است‌که، کوچکترین وبزرگترین عدد، نمی‌توانند مرکزی ازسه‌تایی‌های متقارن باشند.

بنا بـه‌اثبات قبلی، تفاضل‌های مثبت می‌تـوانند تعدادی مقدارهای تکراری را قبول‌کنندکـه از ۲۱ کمتر نیست. بنابراین، وقتی از این مقدارها می‌توان دست‌کم ۱۴ سه‌تایی متقارن تشکیل داد، پس بسیاری ازمقدارهای تکراری، برای تفاضل‌های مثبت، «به‌درد بخور» نیستند: آن‌ها را نمی‌توان از عددهایی‌کـه روی ۴ کارت مختلف واقع‌انـد، تشکیل داد. اگـرهم تعداد سه‌تایی‌های متقارن بیشتراز ۱۴باشد، بی‌شك می‌توان بین‌آن‌ها، دست‌کم، دو سه‌تایی را با مرکز مشترك پیدا کرد. به این ترتیب، وجود جواب تضمین می‌شود.

[به‌این‌ترتیب، حکم مساله ثابت شد، ولی‌اکنون، بعد ازاتمام اثبات، بهتر است یکباردیگر، آن‌چه را که گفته‌ایم «تکرار کنیم» و، به‌صورتی کوتاه، اساسی‌ترین‌نکته‌ها را، بدون این‌که به‌خرده ریزهای تفصیلی بپردازیم، شرح دهیم.]

از ۱۶ کارت، می‌توان $۱۲۰ = \frac{۱۶ \times ۱۵}{۲}$ زوج مختلف تشکیل داد. (دو زوج را وقتی مختلف می‌دانیم‌که، در هرکدام ازآن‌ها، لااقل یك عضو وجود داشته باشدکه متعلق به زوج دیگر نباشد.)

اگر درهر زوج، عددکوچکتر را ازعـدد بزرگترکم‌کنیم، تفاضل‌های حاصل نمی‌توانند از ۹۹ مقدار مختلف تجاوزکنند، زیـراکـوچکترین آن‌ها برابر ۱ و بزرگترین آن‌هـا برابر ۹۹ است. بنابراین، دست کم ۲۱ مقدار تکراری است.

بخشی از مقدارهای تکراری، عـددهای سه‌تایی متقارن را بـه‌وجود می‌آورند، یعنی برابری‌هایی به‌این‌صورت

$$z-y=y-x$$

اگرعضو متوسط y را، درهمهٔ این‌گونه برابری‌ها، مختلف‌بگیریم، آن‌وقت، تعداد سه‌تـایی‌های متقارن، از ۱۴ تجاوز نمی‌کند (زیرا روی‌هـم ۱۶ عدد داریم، ولی با توجه به نابرابری $x>y<z$، بزرگترین وکوچکترین عدد نمی‌توانند به‌جای عضو وسط y واقع شوند).

هنوز مقدارهای تکراری باقی می‌ماند که تعداد آن‌ها کمتر از ۷ نیست. دو حالت پیش می‌آید:

I. یکی از این مقدارها، سه‌تایی متقارنی به‌وجود می‌آورد که در بین ۱۴ سه‌تایی قبلی پیدا نمی‌شود. در این‌صورت، عدد وسطی y، بر عدد وسطی یکی از سه‌تایی‌های قبلی منطبق می‌شود، یعنی دو برابری زیر، باهم برقرارند:

$$z_1 - y = y - x_1 \ ,$$

$$z_2 - y = y - x_2$$

ولی، در این صورت داریم:

$$2y = x_1 + z_1 \ ,$$

$$2y = x_2 + z_2$$

و از آنجا

$$x_1 + z_1 = x_2 + z_2$$

II. هیچ‌کدام از ۷ مقدار تکراری باقی‌مانده، سه‌تایی متقارن تشکیل نمی‌دهند. در این صورت، تفاضل‌های برابر، متناظرند با زوج‌های مختلف کارت‌ها (یعنی دو زوجی که شامل عضو مشترکی نیستند). در این حالت، عددهای واقع بر ۴ کارت مختلف، در برابری زیر صدق می‌کنند:

$$p - q = r - s$$

و بنابراین

$$p + s = r + q$$

بنابراین، در هر حالت، می‌توان ۴ کارت پیدا کرد که باشرط مساله سازگار باشند و، در نتیجه، حکم مساله، ثابت شده است.

یادداشت ۱. اگر حکمی را که باید ثابت کنیم، به‌صورت زیر تنظیم کرده باشیم، آن‌وقت، می‌توان حالت‌های *I* و *II* را ـ که در بالا بررسی کردیم ـ به یک حالت تبدیل کرد.

این‌طور نیست که همهٔ مقدارهای تکراری تفاضل‌های مثبت، سه‌تایی‌های

متقارنی ازعددها به‌وجود آورند. درواقع، اگر خلاف آن را درنظر بگیریم، آن وقت (چون جمله‌های وسطی سه‌تایی‌های متقارن، نمی‌توانند بیش از ۱۴ مقدار مختلف باشند، درحالی که مقدار تفاضل‌های مثبت، دست کم، ۲۱ بار تکرارمی‌شوند)، لااقل دوسه‌تایی متقارن با جملهٔ وسط مشترك وجود دارد. این دوسه‌تایی، شامل تنها ۵ عددند و، باتوجه به تقارن، تفاضل دو عدد اول، درآن‌ها، برابراست با تفاضل دو عدد آخر. به این ترتیب مقداری تکراری برای تفاضل‌ها به‌دست می‌آوریم که، نه سه‌تایی متقارن، بلکه دو زوج عدد را تشکیل می‌دهند که دارای جملهٔ مشترکی نیستند. تناقضی که حاصل می‌شود، معرف اشتباه درفرض نخستین است.

استدلال‌هایی از این گونه را، اثبات «غیرمستقیم» (یا «برهان خلف») می‌نامند. ما درحل مساله‌ها، ترجیح داده‌ایم «به‌طور مستقیم» جلو برویم (البته، اگر چنین امکانی وجود داشته است).

یادداشت ۲. اثبات حکم موردنظر یوشکا، در واقع براین اساس است که تعداد زوج کارت‌ها، ازتعداد مقدارهایی که به‌عنوان تفاضل‌های مثبت عددهای روی کارت‌ها به‌دست می‌آید، بیشتراست. حل مساله، نتیجه‌ای از نابرابری زیر است:

$$\frac{۱۶\times۱۵}{۲}>۹۹+۱۴$$

یادآوری می‌کنیم که اگر تعداد کارت‌ها را، به‌جای ۱۶، به طورکلی n بگیریم، برای این‌که بتوانیم ۴ کارت سازگار با شرط مساله پیدا کنیم، باید نابرابری زیر را داشته باشیم:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}>۹۹+(n-۲)$$

که هم‌ارز با نابرابری زیراست:

$$n(n-۳)>۱۹۴$$

که هرعدد $n\geqslant ۱۶$ در آن صدق می‌کند، ولی $n=۱۵$ درآن صادق نیست

(۱۹۴ > ۱۸۰ = ۱۲ × ۱۵). ولی‌این، هنوز به‌معنای آن نیست که‌مسأله، به‌ازای $n = ۱۵$، جواب ندارد. «خراب‌شدن» نابرابری، تنها به‌این‌معناست که، روش انتخابی ما برای مقایسهٔ تعداد زوج‌ها ومقدار تفاضل‌های مثبت در این مسأله، برای ۱۵ کارت، قابل قبول نیست.

۲۳. بیشتر بیندیشیم

یوشکا خیال داشت مجموعه‌ای بسازد که شامل عددهای کوچکتر از ۱۰۰ باشد، تفاضل‌های مثبت برابر نداشته باشند (بدون توجه به‌حالت‌هایی که سه‌تایی متقارن تشکیل می‌دهند) و، تا آن‌جا که ممکن است، جمله‌های بیشتری داشته باشد. آندراش کار نادرستی نکرده بود، ولـی با آغازکردن از۴، برای مجموعهٔ خود، (به‌جای ۱)، شانس خود را، برای به‌دست‌آورن حداکثر تعداد جمله‌ها، کم کرده بود. می‌توان از هرعضو مجموعهٔ او ، سه واحد کم‌کرد وآن را این‌طور آغازکرد.

۱، ۲، ۹، ۱۳، ۱۵،...

در واقع، با این تغییر ، تفاضل هر دو جملهٔ مجموعه، تغییر نمی‌کند، ولی باکوچکترکردن آن‌ها، احتمال این‌که بتوانیم تعداد بیشتری ازعددهای کوچکتر از ۱۰۰ را درآن «جا بدهیم» بیشتر می‌شود.

۲۴. بازهم بیشتر بیندیشیم

شانی گمراه شده بود. قانونی‌که او کشف کرده بود، این مجموعه را به‌وجود می‌آورد:

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹

که تنها از ۱۰ جمله تشکیل شده است. ولی، اگـر این قانون را در نظـر نگیریم، می‌توانیم مجموعهٔ

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۰، ۳۹، ۵۳، ۷۴، ۹۵

را بسازیم کـه ۱۲ جمله دارد و با همهٔ شرطهای مورد نظر ما، سازگار است.

[این‌مثال به‌خوبی‌نشان می‌دهدکه، برای تعمیم نمی‌توان سهل‌اندیش بود و به‌تصورهای نخستین دل بست. هر قانـونی را تنها بـرای موردهایی می‌توان به‌کار بردکه، درستی آن، برای آن‌ها ثابت شده باشد.]

۲۵. آیا درست است؟

نه! در واقع، مجموعه‌ای که آندراش، شانی و یوشکا ساختند، تنها در مقایسه با مجموعه‌های قبلـی (۴،۵،۱۲،۱۶،۱۸،... و ۱،۲،۹، ۱۳، ۱۵،...)، شامل «کمترین‌ها» بود. از هیچ جای این بحث نمی‌تـوان به‌این رسید که، اگر روش دیگری بـرای انتخاب جمله‌های مجموعهٔ مورد نظـر خود درنظربگیریم، نمی‌توانیم به‌محصول بهتری‌برسیم (یعنی به‌مجموعه‌ای که شامل جمله‌های بیشتری باشد).

[این بدگمانی ما، کاملاً به‌جاست، زیرا در مجموعـهٔ «کمترین‌ها»، همیشه با حداقل تفاضل‌های ممکن سروکار داریـم و، بنابراین، ابتـدا از تفاضل‌های هرچه کوچکتر استفاده می‌کنیم و به‌تدریج، به «گام‌های بزرگتر» می‌رسیم.]

مثال مشخص نشان می‌دهد کـه، در واقـع، مجموعهٔ «کمترین‌ها» بهترین‌مجموعهٔ ممکن‌نیست. مثلاً، مجموعهٔ زیر، به‌جای ۱۲ جمله، شامل ۱۳ جمله است:

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۲۱، ۲۹، ۳۷، ۴۶، ۶۰، ۷۱، ۸۳، ۹۳

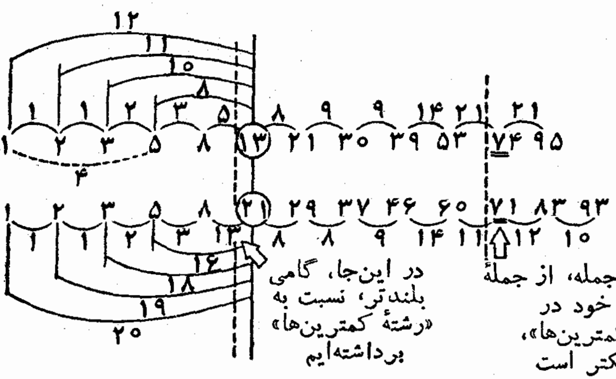
در این مجموعه هم، نمی‌توان ۴ عدد طوری انتخاب‌کردکه مجموع (یا تفاضل) دو تا از آن‌ها، برابر با مجموع (یا تفاضل) دوتای دیگر باشد.

به‌این نکته هم توجه کنیدکه، در مجموعهٔ جدید، آخرین (سیزدهمین) عدد، از آخرین (دوازدهمین) عدد مجموعهٔ «کمترین‌ها»، کوچکتر است.

[در برخورد اول، عجیب به‌نظر می‌رسد کـه در مجموعهٔ اخیر، کـه

برای تشکیل آن، قانون «هربار، نزدیک‌ترین عدد مجاز را انتخاب کنید» رعایت نشده است، به‌جملهٔ آخر کوچکتری، نسبت به‌مجموعهٔ «کمترین‌ها» برسیم. چگونه ممکن است چنین وضعی پیش آید؟ موضوع این است‌که ما، ضمن تشکیل مجموعهٔ «کمترین‌ها»، همچون کدبانوهای بد، تنها به‌نیازهای «فوری» توجه می‌کنیم و هیچ گونه دل‌واپسی و توجهی نسبت به‌آینده نداریم. وقتی‌که جمله‌ای را انتخاب می‌کنیم، توجه ما تنها در این جهت است‌که، آن را، تا حد ممکن، به‌جملهٔ قبلی نزدیکتر بگیریم و اصلاً به‌فکر بزرگی جمله‌های دورتر نیستیم و طبیعی است‌که، نداشتن دور اندیشی، در هرجایی می‌تواند خطرناك باشد.

نتیجهٔ این «نزدیك‌بینی» را می‌توان در شکل ۶۲ دید. در این شکل، دومجموعه با هم مقایسه شده‌اند: مجموعهٔ «کمترین‌ها» (که برای تشکیل آن، تنها یك هدف «تاکتیکی» دنبال شده است و، در هر گام، «کوچکترین عددممکن درآن لحظه» انتخاب شده است) ومجموعهٔ تازه (که برای‌تشکیل آن، ملاحظه‌ای «استراتژیك» درنظر گرفته شده است).



شکل ۶۲

درمجموعهٔ «کمترین‌ها»، به‌دنبال۸، جملهٔ برابر۱۳ را انتخاب‌کردیم. ۱۳ را به‌این مناسبت درنظر گرفتیم که، اندازهٔ «گام» خود را به‌حداقل‌ممکن برسانیم (این عدد، کوچکترین مقدار ممکن مجاز «درلحظهٔ مفروض» است)

و، این حداقل، برابر ۵ است (گامی برابر ۴ واحد ممکن نیست، زیرا، گام از ۱ تا ۵ برابر است با ۴). ولی، وقتی که به‌دنبال عدد ۸، گامی برابر ۵ واحد برداریم، در واقع، ۸ واحد با عدد ۵، ۱۰ واحد با عدد ۳، ۱۱ واحد با عدد ۲ و ۱۲ واحد با عدد ۱ فاصله گرفته‌ایم. بنابراین، در سمت راست عدد ۸، گام‌های به‌طول ۸، ۱۰، ۱۱ یا ۱۲ واحد را، تنها می‌توانیم در حالت تقارن تکرار کنیم، ولی از آن‌جا که هرعدد نمی‌تواند بیش از یکبار، به‌عنوان عدد وسط یك سه‌تایی متقارن درنظر گرفته شود، نمی‌توانیم در دنبالهٔ کار، ازتفاضل‌های برابر ۱۰، ۱۱ و ۱۲ استفاده کنیم. به‌این‌ترتیب، تنها امکان مجازی که برای آینده باقی می‌ماند، گامی برابر ۹ واحد است.

درمجموعهٔ دوم، بعد از عدد ۸، یك پرش انجام دادیم: گامی برابر ۱۳ واحد برداشتیم که، در نتیجهٔ آن، به‌تفاضل‌های بزرگتری رسیدیم (این تفاضل‌ها، برابرند با ۱۶، ۱۸، ۱۹ و ۲۰). بنابراین، تفاضل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ هم، برای استفادهٔ ما، باقی می‌مانند؛ و این امکان، به‌ما اجازه می‌دهد که گام‌های بعدی را، کوتاه‌تر برداریم.]

این نتیجه‌گیری‌ها را تعمیم دهیم

با مطالعهٔ مسأله‌های ۱۵ تا ۲۳ و حل آن‌ها، می‌توانیم تعمیم نسبتاً کوتاهی از نتیجه‌های حاصل، به‌دست آوریم:

اگر تعداد عددهای طبیعی (یعنی، عددهای درست و مثبت) مفروض، کمتر از ۱۶ نباشد، همیشه می‌توانیم، ازبین آن‌ها، ۴ عدد طوری انتخاب کنیم که مجموع (یا تفاضل) دو تا از آن‌ها، برابر با مجموع (یا تفاضل) دو تای دیگر باشد.

ولی اگر، به‌جای ۱۶، تنها ۱۳ عدد در اختیار داشته باشیم، این حکم قدرت خود را ازدست می‌دهد (زیرا می‌توان حالتی را درنظر گرفت که، از۱۳ عدد مفروض، نتوان ۴ عدد بامجموع‌ها یا تفاضل‌های دوبه‌دو برابر، به‌دست آورد).

پیش‌بینی این‌که، در حالت ۱۴ یا ۱۵ عدد مفروض، باچه وضعی

روبه‌رو می‌شویم، کار دشواری است. آیا مـی‌توان ، برای ۱۴ عـدد هم، مثالی پیدا کردکه، شبیه حالت ۱۳ عدد، حکم ما را نفی کند؟ پیدا کـردن این مثال، حتی برای ۱۳ عدد هم، چندان ساده نبود (از این گذشته، از بین روش‌هایی که تاکنون شناخته شده است، ما کوتاه‌ترین آن‌ها را در این‌جـا مطرح کردیم . این جواب، به‌کمك کامپیوتر به‌دست آمـده است). برعکس، درمورد ۱۵ عدد، می‌توان تقریباً اطمینان داشت که، پیدا کردن‌چنین نمونه‌ای خارج ازتوانایی‌ماست. به‌نظر می‌رسدکه، بهترین راه خروج ازاین بن‌بست، این باشد که، مسأله را، برای همهٔ انواع ممکن انتخاب ۱۵ عدد (کـه از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کنند) آزمایش کنیم. ولی، این آزمایش، به‌کار چندین‌ساعتهٔ کامپیوتر نیاز دارد و بسیار پرخرج ازآب در می‌آید. ازآن‌جا که تنها بایك مسألهٔ منطقی سرگرم کننده (اگرچه بسیار آموزنده) سروکار داریم ، ارزش آن را ندارد که، به‌خاطرحل آن، مخارج زیادی را متحمل شویم. همچنین، نمی‌ارزدکه، به‌خاطرآن، نیروهای ذهنی فوق‌العاده زیادی را، به‌هدردهیم. احتمالا، این مطلب، درمورد حالت کلی، یعنی وقتی که به‌جای ۱۰۰ کارت، تعداد غیرمشخصی را در نظر بگیریم و مسأله را به‌صورت کلی‌تری طـرح کنیم، بازهم صادق است.

K را عدد طبیعی دلخواه و مفروضی می‌گیریم. عدد طبیعی n چگونه باید باشد تا، به‌ازای هر n عدد دلخواهی که از K تجاوز نمی‌کنند، بتوان ۴ عدد انتخاب کردکه دارای ویژگی زیرباشند: مجموع (یا تفاضل) دو تا از آن‌ها، برابر باشد با مجموع (یا تفاضل) دوتای دیگر.

اگر ازبین خوانندگان ما، کسی توانست موفقیتی در حل این مسأله پیداکند وچیزی را کشف کند که تاکنون شناخته نشده است و ، ضمناً، خیلی هم بغرنج نباشد، محبت کند و به‌ما اطلاع دهد.

یادداشت. اگر حالت کلی را درنظر بگیریم (یعنی به‌جای عدد ۱۰۰، عدد طبیعی و دلخواه K را درنظر بگیریم)، نابرابری را کـه در یادداشت بعد ازحل مسالهٔ ۲۲ آوردیم، می‌توان چنین نوشت:

$$n(n-۳)>۲k-۶$$

و ازآن‌جا، برای ارزیابی n ازطرف پایین، به‌دست می‌آید:

$$n>[۱/۵+\sqrt{۲k-۴}] \qquad (*)$$

علامت کروشه، در این‌جا ، به‌معنای آن است که باید بخش درست عدد داخل آن را در نظرگرفت (یعنی، بزرگترین عدد درستی‌که از آن تجاوز نمی‌کند).

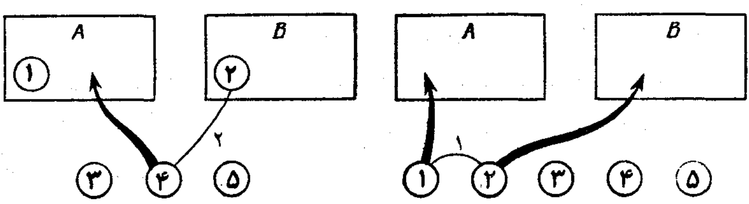
اگرعدد n درنابرابری (*) صدق کند، حتماً دارای ویژگی موردنظر است. ولی ظاهراً، عددهای کوچکتری هم، دارای این ویژگی هستند.

۲۶. پیشتا دوباره به‌دشواری برمی‌خورد

موقعیت پیشتا را چیزی تهدید نمی‌کند: مسألهٔ پیشنهادی خانم معلم، جواب ندارد.

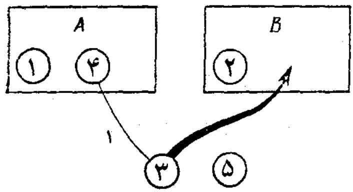
[ساده‌ترین راه، برای رسیدن به‌این نتیجه، این است که، با تقسیم عددها به‌دوگروه، هریك از حالت‌های ممکن را مورد آزمایش قرار دهیم.]

A را گروهی می‌گیریم که، عدد ۱، درآن قرار داشته باشد. عدد ۲ نمی‌تواند متعلق به‌گروه A باشد، زیرا در این صورت، ۱ — ۲ برابر ۱ می‌شودکه عضوی از همین گروه است. بنابراین، عدد ۲ را باید در گروه دیگری قرار دادکه ما، آن را، B می‌نامیم (شکل ۶۳). برعکس، عدد ۴ را باید درگروه A قرار داد، زیرا اگر عدد ۴ درگروه B قرارگیرد، تقاضل دوعدد ۴ و ۲ برابر ۲، یکی ازعددهای همان‌گروه، می‌شود (شکل ۶۴).

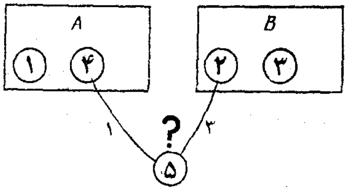


شکل ۶۴ شکل ۶۳

سپس، وضعی برای ما پیش می‌آید کـه در شکل ۶۵ نشان داده شده است. به‌سادگی روشن می‌شود که، عدد ۳ را، نمی‌توان در گروه A قـرار داد، زیرا تفاضل دوعدد ۴ و ۳، از این گروه، برابر با ۱ می‌شود که متعلق به‌همین گروه است. به‌این ترتیب، عدد ۳ باید به گروه B تعلق داشته باشد.



شکل ۶۵



شکل ۶۶

اکنون، تنها عدد ۵ باقی‌مانده است. ولی، این عدد را، نه درگروه A می‌توان‌قرارداد (زیرا ۴ — ۵ برابر ۱ می‌شود) ونه‌درگروه B (زیرا، در این صورت، ۳ — ۵، برابر ۲، یکی از عددهای همین‌گروه می‌شود). به‌این ترتیب، ۵ عدد طبیعی نخستین را، نمی‌توان به‌دو گروه چنان تقسیم‌کردکه با شرط مسألهٔ خانم معلم سازگار باشد (شکل ۶۶).

یادداشت ۱. بدون جواب‌بودن این مسأله را، به‌طریق‌های مختلفـی می‌توان ثابت‌کرد. مثلاً، می‌توان همهٔ تقسیم‌های ممکن ۵ عدد را به‌گروه نوشت (که روی هم، ۱۰ حالت وجود دارد) و متوجه شدکه، در هرحالت، دست‌کم دریکی‌از گروه‌ها، دوعدد وجود داردکه تفاضل‌آن‌ها، متعلق به‌همان گروه است.

ولی، صرف دقت، بـرای تنظیم همهٔ حالت‌های ممکن، هیچ لزومـی ندارد. اثبات بی‌جوابـی مسأله را می‌توان خیلـی «کوتاه‌تر» انجـام داد. مناسب‌ترین روش‌ها، براین اساس است‌که، با توجه به شرط مسأله، متوجه شویم‌که بعضی از عددها نمی‌توانند در یك‌گروه قرارگیرد (و ما در بالا، از یکی ازهمین روش‌ها استفاده کردیم). در این شیوهٔ کار، روشن می‌شود که، اگر بعضی از عددها می‌توانند در هردو گروه جا بگیرند (اگرچه، دیر یا زود، باید سرانجام جایی برای آن‌ها دریك گروه پیدا کرد)، عددی هم وجود دارد

که نمی‌تواند به‌هیچ‌کدام از دو گروه تعلق داشته باشند. مثلاً، در اثباتی که داشتیم، وقتی عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را در دو گروه تقسیم کردیم، جائی برای عدد ۵ باقی نماند: آن را نه درگروه A می‌شد جا داد و نه درگروه B. اگر از عددهای ۱، ۲، ۴ و ۵ آغاز می‌کردیم، آن‌وقت، عدد ۳ «بدون جا» باقی می‌ماند. درهرحالت، بی‌جواب بودن مسأله، به‌خودی خود، ثابت می‌شود، زیرا، اگر برای مسأله جوابی وجود داشته باشد، باید «آدرس» مشخصی هم برای ۳ و ۵ پیدا شود و، برعکس، اگر ۳ و ۵ را بتوان در گروهی جا داد، به‌معنای آن است که مسأله جواب دارد.

یادداشت ۲. از این مطلب که، خانم معلم، مسأله‌ای به‌بچه‌ها داده است که جواب ندارد، نباید نتیجه گرفت که او، معلم خوبی نیست. چه از نظر ریاضی و چه از نظر آموزشی، مسأله‌های بدون جواب، به‌هیچ‌وجه، ارزشی کمتر از مسأله‌های معمول و «منظم» ـ که دارای جواب هستند ـ ندارند.

یادداشت ۳. ضمناً باید گفت که طرح چنین مسأله‌هایی برای دانش‌آموزان، آن‌ها را آماده می‌کند تابتوانند درك ریاضی ومنطقی خود را، برای شرکت درمسابقه‌های ریاضی و المپیادها، بالا ببرند. همین مسأله‌ای که، در این‌جا، آورده‌ایم، به‌صورت زیر، در المپیاد ریاضی داخلی مجارستان، در سال ۱۹۶۱ به‌شرکت‌کنندگان داده شده بود:

«عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را، به‌صورتی دلخواه، به‌دو گروه تقسیم کرده‌ایم. ثابت‌کنید که، همیشه می‌توان، در یکی از دوگروه، دو عدد پیدا کرد که تفاضل آن‌ها، برابر با یکی ازعددهای همان‌گروه باشد».

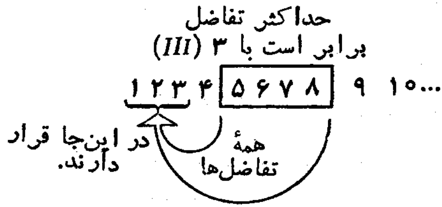
۲۷. هزار به‌جای پنج

قبل از این‌که، نسنجیده، پاسخ منفی به‌پرسش مسأله بدهیم، تلاش می‌کنیم بفهمیم که چه‌چیزی موجب دشواری کار پیشتای کوچك در مسألهٔ قبلی شده بود. روشن است که، این دشواری، از این‌جا ناشی شده بود که تفاضل‌های دوبه‌دوی عددهای (۱، ۲، ۳، ۴، ۵)، برابرند با عددهای (۱،

۲، ۳، ۴). اگرمی‌شد کاری کرد که، خود عددها، غیر از تفاضل‌های دو به‌دوی آن‌ها باشند، مسأله، بدون هیچ زحمتی، حل می‌شد.

با روش‌های زیـادی، می‌توان به‌این هدف رسید. مثلاً، اگر در یك گروه، فقط عددهای فرد را قرار دهیم، روشن است که، تفاضل بین‌هردو عدد دلخواه از این گـروه، عددی نیست که متعلق به گروه بـاشد، زیرا تفاضل هردو عدد فرد، همیشه عددی است زوج.

ولی چون در عمل، تقسیم عددها به‌چند گروه، به‌این سادگی نیست، می‌توان به‌تـرتیب دیگری عمل کرد: برای قراردادن عددها در گروه‌هـای مختلف، نه یکی‌یکی، بلکه ردیفی ازچند عددرا موردبررسی قرار می‌دهیم. استثنا، فقط در پاره‌خط آغـازی رشته عددهـای طبیعی پیش می‌آید: عدد ۲ نمی‌تواند بلافاصله بعد ازعدد ۱ قرار گیرد، وگروه اول را هم نمی‌توان، تنها شامل عدد ۱ دانست، زیرا در این‌صورت، صحبت از تفاضل، دربـارهٔ آن، بی‌معنی خواهد بود.



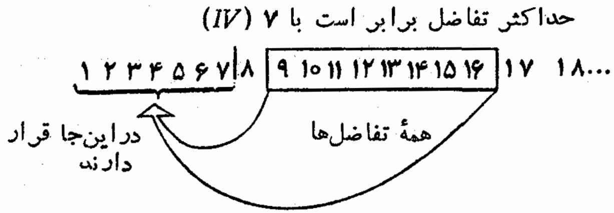
شکل ۶۷

راه‌حل اول. گروه I را شامل عددهای ۱ و ۴ وگروه II را شامل عددهای ۲ و۳ می گیریم. به‌روشنی دیده می‌شودکه، این‌دو گروه، بـا شرط مسأله سازگارند (در هیچ کدام، تفاضل دوعدد، جزو گروه نیست).

عددهای ۵، ۶، ۷ و ۸ را درگروه III قرار می‌دهیم. این گروه‌هم، بـا شرط مسأله سازگار است، زیرا بزرگترین تفاضل، در این گروه، برابر است‌با ۵ — ۸یعنی۳، وکوچکترین عدد این گروه برابر است با ۵ (شکل۶۷).

به‌همین‌ترتیب جلومی‌رویم: درگروه IV، عددهای طبیعی تا۸×۲، یعنی ۱۶ را قرار می‌دهیم (۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶). در

این گروه، حداکثر تفاضل برابر ۷ و کوچکترین عدد متعلق به‌گروه برابر ۹ است (شکل ۶۸).



شکل ۶۸

به‌طورکلی ، هرگـروه از عددهای طبیعی متوالی تشکیل می‌شود ، به‌نحوی‌که ، همهٔ این‌عددها ، از بزرگتر عددگروه قبلی بزرگتر باشند و از دوبرابرآن تجاوز نکنند. اگر بزرگترین عددگروه قبلی، برابر k باشد، آن وقت ، گروه بعدی شامل همهٔ عددهای $k+۱$، $k+۲$، $k+۳$، ...، $۲k$ خواهد بود. در واقع، در این‌گروه بزرگترین تفاضل برابر است با

$$۲k-(k+۱)=k-۱$$

درحالی‌که کوچکترین عدد این‌گروه، برابر است با $k+۱$.

طبق این‌تقسیم،

در دوگروه اول (I و II) ، عددهای از ۱ تا ۴ ، یعنی روی‌هم $۲^۲$ عدد داخل شده است.

در سه‌گروه اول (I ، II ، III) ، عددهـای از ۱ تا ۸ داخل شده است، یعنی روی‌هم $۲^۳$ عدد،

در چهارگروه اول (I، II، III، IV)، عددهای از ۱ تا ۱۶،یعنی روی‌هم $۲^۴$ عدد، داخل شده است،

به‌همین‌ترتیب ، از آن‌جـاکه تعداد عددهای هرگروه، دوبرابر تعداد عددهای گروه قبل‌ازآن است، درپنج‌گروه اول ، به‌اندازهٔ $۲^۵$ عدد، در شش گروه اول، به‌اندازهٔ $۲^۶$ عدد وغیره، داخل شده‌اند.

به‌این ترتیب ، در ۱۰ گروه اول، همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا ۲^۱۰ (یعنی ۱۰۲۴) وارد می‌شوند؛ و این، به‌معنای‌آن است که عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ را می‌توان به‌۱۰ گروه تقسیم کرد.

راه‌حل دوم. خواننده‌ای که بادستگاه‌عددنویسی به‌مبنای ۲ آشنا باشد، می‌تواند همین راه‌حل را ساده‌تر تنظیم کند. در واقع ، باید عددهای متعلق به‌هر گروه را، در دستگاه به‌مبنای ۲ ، بنویسد.

گروه I : ۱، ۱۰۰ (۱ و ۴).

گروه II : ۱۰، ۱۱ (۲ و ۳).

گروه III: همهٔ عددهای از ۱۰۱ تا ۱۱۱ (از ۵ تا ۷).

گروه IV : همهٔ عددهای چهار رقمی در دستگاه عددشماری به‌مبنای ۲، یعنی از ۱۰۰۰ تا ۱۱۱۱ (از ۸ تا ۱۵).

. . . .

گروه IX: همهٔ عددهای نه‌رقمی در دستگاه عددشماری به‌مبنای ۲.

گروه X : همهٔ عددهای ده‌رقمی در دستگاه به‌مبنای ۲، که از عدد ۱۰۰۰ تجاوز نمی‌کنند (عدد دهدهی ۱۰۰۰، دردستگاه عددنویسی به‌مبنای ۲، به‌صورت ۱۱۱۱۱۰۱۰۰۰ نوشته می‌شود).

به‌سادگی روشن می‌شود که ، تفاضل هردوعدد متعلق به‌یك گروه، عددی است که به‌گروه قبلی‌آن تعلق دارد و، بنابراین ، شرط مسأله برقرار است.

راه‌حل سوم. اکنون به‌اندیشه‌ای برمی‌گردیم که، قبل از بیان راه‌حل اول، مطرح کردیم. روشن است که همهٔ عددهای فرد را، می‌توان در یك گروه قرار داد. ولی، با عددهای زوج، چه باید کرد؟ در این جا، تفاضل‌ها هم، عددهایی زوج‌اند. به‌نظر می‌رسد، عددهای بخش‌پذیر بر ۴ ، در ردیف عددهای زوج، دارای همان موقعیتی هستندکه، عددهای زوج، در ردیف عددهای درست دارند: درردیف عددهای زوج، هرعدد دوم، بر ۴ بخش‌پذیر است (مضربی است از ۴)، وهمهٔ عددهای زوجی که بین‌آن‌ها قرار گرفته‌اند، بر ۴ بخش‌پذیر نیستند. عددهای اخیر را می‌توان به صورت $4k+2$ نشان داد. تفاضل هر دو عدد از این گونه (که بر ۴ بخش‌پذیر نیستند) ، بر ۴

بخش‌پذیر است:

$$(۴n+۲)-(۴m+۲)=۴(n-m)$$

بنابراین، همهٔ عددهای زوجی را که بر ۴ بخش‌پذیر نیستند، می‌توان دریك گروه، قرار داد. عددهـای بخش‌پذیر بر ۴ را هم می‌توان، به‌نوبهٔ خود، به‌دو بخش تقسیم کرد: عددهـایی که بر ۸ بخش‌پذیرند و عددهـایی که بر ۸ بخش‌پذیرندنیستند. عددهایی‌راکه بر۴ بخش‌پذیرند، ولی بر ۸ بخش‌پـذیـر نیستند، می‌توان دریك گروه جاداد. در گروه بعدی، عددهایی قرارمی‌گیرند که بر ۸ بخش‌پذیرند، ولی بر ۱۶ بخش‌پـذیـر نیستند، و گروه بعد ازآن، شامل عددهایی می‌شود که بر ۱۶ بخش‌پذیرند، ولی بر۳۲ بخش‌پذیر نیستند.

به‌سادگی دیده می‌شود که تقسیم عددها به‌گروه‌ها را می‌توان، طبق قاعدهٔ سادهٔ زیر، انجام داد.

گروه I: عدد ۱ و همهٔ عددهایی‌که، بعد ازآن، به‌طور یك درمیان قرارگرفته‌اند.

گروه II: در ردیف عددهایی که بـاقی‌مانده است، کوچکترین عدد و همهٔ عددهایی‌که، بعد ازآن، یك‌درمیان قرارگرفته‌اند.

گروه III: تکرار همان قاعده.

گروه IV: تکرار همان قاعده.

. . . .

چندگروه نخستین را، طبق این‌قاعده، پیدا می‌کنیم.

گروه I: ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ...

همهٔ این‌عددهـا فردند. تفاضل هردوعدد دلخواه ازآن، عددی زوج است و، بنابراین، به‌این‌گروه تعلق ندارد.

این عددها باقی می‌ماند:

$$۲,\ ۴,\ ۶,\ ۸,\ ۱۰,\ ۱۲,\ ۱۴,\ldots$$

یعنی

$$۱\times۲,\ ۲\times۲,\ ۳\times۲,\ ۴\times۲,\ ۵\times۲,\ ۶\times۲,\ ۷\times۲,\ldots$$

گروه II: ۲×۱، ۲×۳، ۲×۵، ۲×۷، ...

همهٔ این عددها، مضرب فردی از ۲ هستند. تفاضل هردوعدد از این گروه، مضرب زوجی از ۲ می‌شود و، بنابراین، به‌این گروه تعلق ندارد.

این‌عددها باقی می‌ماند:

۲×۲، ۴×۲، ۶×۲، ۸×۲، ۱۰×۲، ۱۲×۲، ۱۴×۲،...

یعنی

۱×۴، ۲×۴، ۳×۴، ۴×۴، ۵×۴، ۶×۴، ۷×۴، ...

گروه III: ۴×۱، ۴×۳، ۴×۵، ۴×۷،...

همهٔ این‌عددها، مضرب فردی از ۴ هستند؛ تفاضل هردوعدد از این گروه، مضرب زوجی از ۴ می‌شود و، بنابراین، متعلق به‌این گروه نیست.

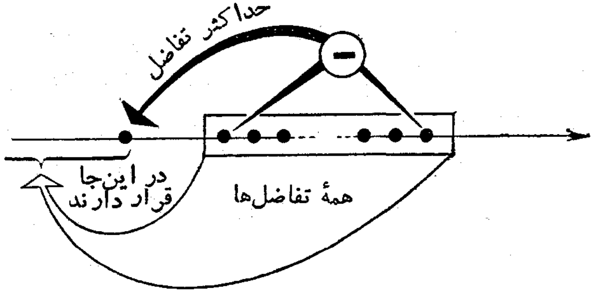
به‌همین‌ترتیب، می‌توان همهٔ بقیهٔ گروه‌ها را نوشت.

در گروه دهم، تنها عدد ۵۱۲ باقی می‌ماند؛ برای این‌که، این گروه هم، دست‌کم شامل دوعدد باشد، می‌توان مثلاً، عدد ۱ را از گروه اول، به‌این‌جا منتقل کرد.

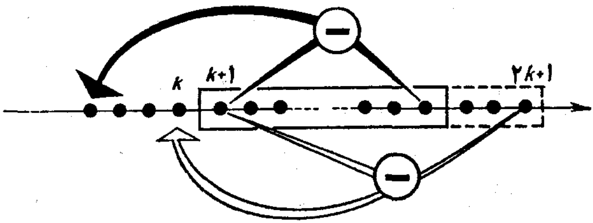
۲۸. تاکجا؟

تا $N=$ ۱۲۷۹.

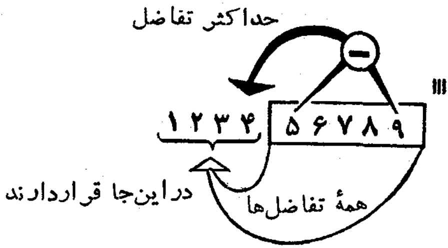
برای این‌که ازدرستی تقسیم‌اطمینان داشته‌باشیم (بنابر شرط مسأله، تفاضل هردو عدد ازیك گروه، نباید با عددی از همان گروه برابر باشد)، در راه حل اول مسألهٔ ۲۷، از روش زیر برای تحقیق، استفاده‌کرده‌ایم: اختلاف بزرگترین وکوچکترین عدد هر گروه (یعنی حداکثر تفاضل)، باید «بیرون از مرز» گروه قرار گیرد، یعنی ازکوچکترین عددگروه، کمتر باشد (شکل ۶۹). بنابراین، اگر بین بزرگترین تفاضل وکوچکترین عدد عضو گروه، «شکافی» وجود داشته باشد (یعنی، کوچکترین عدد گروه، بلافاصله بعد از بزرگترین تفاضل نباشد)، آن وقت، می‌توان گروه را، به‌ترتیبی‌که، مثلاً درشکل ۷۰ نشان داده شده است، توسعه‌داد. بنابراین، بعد ازتشکیل



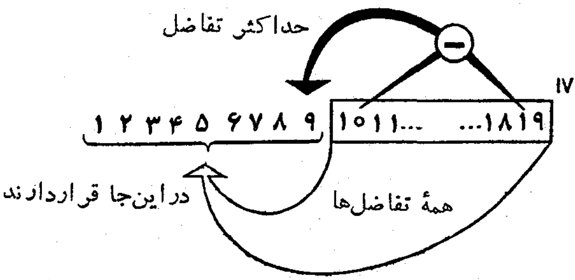
شکل ۶۹



شکل ۷۰



شکل ۷۱



شکل ۷۲

گروه‌های I و II، می‌توان راه‌حل را به‌این ترتیب ادامه داد.

در گروه III، عددهای ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ را قرار دهیم (شکل ۷۱). در این صورت، تفاضل هر دو عدد دلخواه از این گروه از ۴ تجاوز نمی‌کند، و کوچکترین عدد این گروه برابر است با ۵.

به‌همین ترتیب، در گروه بعدی (گروه IV)، می‌توان همهٔ عددهای بعدی را تا $۱۹ = ۱ + ۹ \times ۲ = ۹ + ۱۰$ جاداد، یعنی عددهای ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹ (شکل ۷۲) . در این صورت، اختلاف بین هردوعدد دلخواه از گروه IV، از ۹ تجاوز نمی‌کند، و کوچکترین عدد گروه برابراست با ۱۰.

در حالت کلی، درهر گروه باید دنباله‌ای از عددهای طبیعی را قرار داد که ازآخرین (بزرگترین) عدد گروه قبلی، بزرگتر باشند؛ آخرین عدد این گروه، یك واحد بیشتر از دو برابر بزرگترین عدد گروه قبلی است. اگر بزرگترین عدد گروه قبلی برابر k باشد، گروه بعدی شامل عددهای $k+۱$، $k+۲$، $k+۳$، ...، $۲k$، $۲k+۱$ خواهد بود. اختلاف هردو عدد دلخواه، از این گروه، از

$$۲k+۱-(k+۱)=k$$

تجاوز نمی‌کند، درحالی‌که کوچکترین عدد این گروه برابر است با $k+۱$ (شکل ۷۰).

طبق این تقسیم

در سه گروه اول، عددهای طبیعی از ۱ تا ۹، یعنی تا $۱۰ - ۱$ قرار دارد؛

درچهار گروه اول (I، II، III و IV)، عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۹، یعنی تا $۲ \times ۱۰ - ۱$ قرار دارد؛

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که، بزرگترین عدد هر گروه، یك واحد بیشتر از دوبرابر بزرگترین عدد گروه قبل از خود است.

در پنج گروه اول (I تا V)، همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا

$$۲ \times ۱۹ + ۱ = ۳۹ = ۴ \times ۱۰ - ۱ = ۲^۲ \times ۱۰ - ۱$$

قرار دارند؛

در شش گروه اول (I تا VI)، عددهای طبیعی از ۱ تا

$$۲ \times ۳۹ + ۱ = ۷۹ = ۸ \times ۱۰ - ۱ = ۲^۳ \times ۱۰ - ۱$$

در هفت گروه اول (I تا VII)، عددهای طبیعی از ۱ تا

$$۲(۲^۳ \times ۱۰ - ۱) + ۱ = ۲^۴ \times ۱۰ - ۲ + ۱ = ۲^۴ \times ۱۰ - ۱$$

در هشت گروه اول (I تا $VIII$)، عددهای طبیعی از ۱ تا

$$۲(۲^۴ \times ۱۰ - ۱) + ۱ = ۲^۵ \times ۱۰ - ۲ + ۱ = ۲^۵ \times ۱۰ - ۱$$

و به طور کلی، در k گروه نخست، عددهای طبیعی از ۱ تا $۲^{k-۳} \times ۱۰ - ۱$.

بنابراین، در ده گروه اول (I تا X)، عددهای طبیعی از ۱ تا $۲^۷ \times ۱۰ - ۱$، یعنی تا ۱۲۷۹ جا داده شده‌اند.

۲۹. نه‌گروه

بله، ممکن است

این تقسیم را می‌توان به‌ترتیب زیر انجام داد:

گروه I: عددهایی که به‌یکی از رقم‌های ۱، ۴، ۶ و ۹ ختم می‌شوند.

گروه II: عددهایی که به‌یکی از رقم‌های ۲، ۳، ۷ و ۸ ختم می‌شوند.

گروه III: عددهایی که به ۵ ختم می‌شوند.

گروه IV: عددهایی به ۱۰، ۴۰، ۶۰ یا ۹۰ ختم می‌شوند.

گروه V: عددهایی که به ۲۰، ۳۰، ۷۰ یا ۸۰ ختم می‌شوند.

گروه VI: عددهایی که به ۵۰ ختم می‌شوند.

گروه VII: ۱۰۰، ۴۰۰، ۱۰۰۰.

گروه $VIII$: ۲۰۰، ۳۰۰.

گروه IX: ۵۰۰، ۶۰۰، ۷۰۰، ۸۰۰، ۹۰۰.

تحقیق مربوط به‌درستی این تقسیم را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

[این تحقیق، به‌هیچ دشواری برخورد نمی‌کند، زیرا تحقیق دربارهٔ گروه I، به‌معنای تحقیق دربارهٔ گروه IV هم هست؛ همچنین تحقیق گروه II، به معنای انجام تحقیق دربارهٔ گروه V است. گروه‌های III و VI، نیازی به‌تحقیق ندارند: درستی آن‌ها روشن است. به‌جای گروه‌های VII، $VIII$ و IX، می‌توان از گروه‌های I، II و III مسألهٔ قبل استفاده کرد.

ضمن تحقیق، باید به‌این نکته توجه کنیم که ممکن است عدد بزرگتر به‌رقم کوچکتر ختم شده باشد، مثلاً، از عددی که به ۱ ختم شده است، می‌توان عددی را کم کرد که رقم آخر آن ۴ است (که تفاضل آن، به‌۷ ختم می‌شود). بنابراین، برای هردوعددی که رقم آخر آن‌ها را دراختیار داریم، باید ۲ تحقیق انجام داد (مثلاً

$$...۷ = ...۴ - ...۱ \text{ و } ...۳ = ...۱ - ...۴).]$$

۳۰. همه چیز را از اول آغاز کنیم

نیاز به گروه چهارم، وقتی پیدا می‌شود که به عدد ۱۴ برسیم.

هیچ‌کدام از عددهای ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳ یا ۱۴ رانمی‌توان در گروه III جاداد (مثلاً به‌این علت‌که اگر ۵ را ازآن‌ها کم‌کنیم، به‌تفاضل‌هایی می‌رسیم‌که، خود، متعلق به‌گروه III هستند). علاوه برآن، این ۵ عدد متوالی را نمی‌توان، با هم، دریکی از گروه‌های I یا II قرارداد. درواقع، دوعدد متوالی، نمی‌توانند به‌گروه I تعلق داشته باشند (زیرا تفاضل آن‌ها برابر ۱ می‌شود). بنابراین، دست‌کم یکی از دو عدد ۱۰ و ۱۱ باید به‌گروه II برود. ولی دراین صورت، عددهایی‌که ۲ یا ۳ واحد با۱۰ و۱۱ اختلاف دارند (۱۲ و ۱۳ یا ۱۳ و ۱۴)، جایی در گروه II نخواهند داشت و، از آن جا که اختلاف آن‌ها برابر واحد است، در گروه I هم، جایی ندارند.

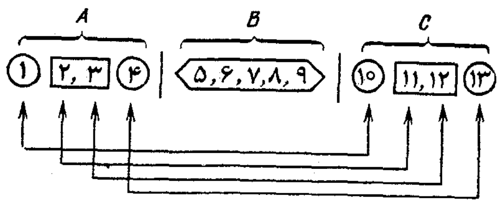
سپس، چون این عددها از۱۴ تجاوز نمی‌کنند (بزرگترین آن‌ها، برابر

است با ۳+۱۱=۱۴) ، بنابراین حرفی دربارهٔ تعلق آن‌ها به گروه III هم نمی‌توان زد. به‌این ترتیب، تنها یك راه باقی می‌ماند: گروه جدیدی را تشکیل بدهیم.

ولی، اگر عددها را تا ۱۳ درنظر بگیریم، می‌توان آن‌ها را به‌سه گروه تقسیم کنیم: ابتدا عدد ۱۰ را به‌گروه I می‌بریم، بعد عددهای ۱۱ و ۱۲ را در گروه II جا می‌دهیم و، سرانجام، عدد ۱۳ را دوباره وارد درگروه I می‌کنیم.

۳۱. یك گروه بیشتر

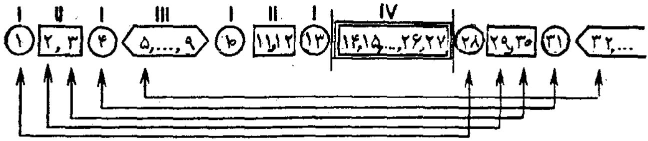
روش قبل، برای تقسیم، تقارن عجیبی را به‌وجودآورد (شکل ۷۳). برای تشکیل بخش B، از اندیشه‌ای استفاده کرده‌ایم که، در باره آن، به‌تفصیل درحل مسألهٔ ۲۸ بحث شده است. بخش‌های A و C، کاملاً به‌هم



شکل ۷۳

شبیه‌اند و، با گامی به‌اندازهٔ ۹ واحد، یکی به‌دیگری می‌رسد. به‌زبانی دقیق‌تر، اگر ازهرعدد بخش C، ۹ واحد کم کنیم، به‌عدد کوچکتری می‌رسیم که، باعدد بزرگتر، در یك گروه قرار دارد.

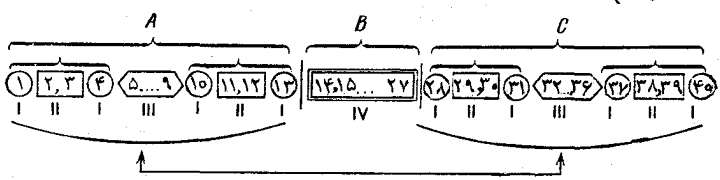
برای ادامهٔ کار هم، ضمن تقسیم به‌گروه‌ها، سعی می‌کنیم از تقارنی که کشف کرده‌ایم، استفاده کنیم.



شکل ۷۴

روش حل مسألهٔ ۲۸ ، به ما اجازه می‌دهد که، همهٔ عددهای طبیعی از ۱۴ تا ۱۴+۱۳، یعنی ۲۷ را در گروه *IV* قرار دهیم. (بنابراین ، بزرگترین تفاضل در این گروه ، از کوچکترین عدد متعلق به‌آن ، کمتر می‌شود.)

عدد۲۸ را نمی‌توان درگروه *IV* جا داد، ولی این، به‌معنای ضرورت گروه تازه‌ای نیست، زیرا هیچ‌مانعی برای تعلق آن به‌گروه *I* وجود ندارد. عدد ۲۹ را می‌توان در گروه *II* جا داد. عدد ۳۰ هم می‌تواند درکنار عددهای گروه *II* قرار گیرد، ولی عدد ۳۱، راهی برای ورود به‌گروه *II* ندارد (۲ = ۲۹ — ۳۱، و عدد ۲، یکی از عددهای این گروه است). ولی درعوض، مانعی برای ورود عدد ۳۱ به‌گروه *I* وجود ندارد. عدد بعدی، یعنی ۳۲ را نمی‌توان درگروه *I* یا گروه *II* جا داد، ولی به‌راحتی درگروه *III* جا می‌گیرد. فرض‌می‌کنیم (شکل ۷۴)، عددهای طبیعی بزرگتر از۲۷، ضمن تقسیم به‌گروه‌ها، درهمان ردیف دستگاه متقارنی قرار بگیرند، که عددهای طبیعی کوچکتراز۱۳ هستند (مثل این‌که، تمامی‌دستگاه، ازعددهای طبیعی۱ تا ۱۳ تشکیل شده است که، درطول محورعددی، ۲۷ واحد به‌سمت راست برود).



شکل ۷۵

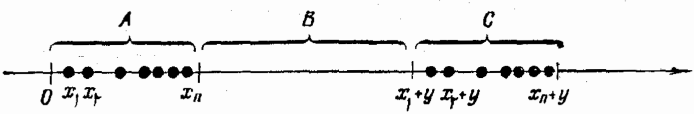
دراین صورت، عددهای طبیعی از ۲۸ تا ۴۰، کاملاً شبیه عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۳، بین سه‌گروه تقسیم می‌شوند (شکل ۷۵) و هردو عددی‌که اختلافی برابر ۲۷ داشته باشند، دریك گروه قرار می‌گیرند.

با درنظرگرفتن مجموعهٔ تفاضل‌ها، می‌توان به‌سادگی قانع شدکه، شرط مساله، درمورد این تقسیم، صدق می‌کند. اگر کمی بیندیشید، متوجه خواهید شدکه لزومی ندارد همهٔ تفاضل‌ها را، به‌طورجداگانه، مورد بررسی

قرار دهید، زیرا دستگاه دارای تقارن است. تحقیق نشان می‌دهد که، نوع تقسیمی که از ۴۰ عدد طبیعی نخستین به ۴ گروه در شکل ۷۵ داده شده است، با شرط مساله سازگار است.

۳۲. از گروه قدیم به گروه جدید

در گروه گسترده، به‌سادگی، دوبخش تشخیص داده می‌شود: یکی از این دوبخش از جمله‌های گروه «قدیم» تشکیل شده است و بخش دیگر، که ازمجموع عدد y با هریك از عددهای x_1، x_2، ...، x_n به‌دست آمده‌است، گروه «تازه» را تشکیل می‌دهند (شکل ۷۶). باید تحقیق کنیم که، آیاتمامی گروه گسترده با شرط مساله سازگار است؟ یعنی، باید ثابت کنیم که تفاضل هر دوعدد دلخواه ازآن، با هیچ‌یك از عددهای گروه برابر نیست.



شکل ۷۶

برای محاسبهٔ تفاضل‌ها، ۳ حالت مختلف زیر، ممکن است:

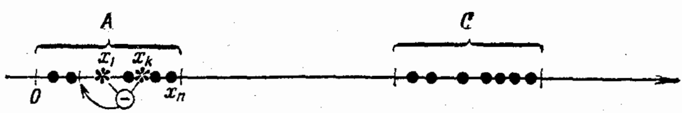
a) هردو جمله، متعلق به گروه «قدیم»اند،

b) هردو جمله، متعلق به گروه «تازه»اند،

c) یکی از جمله‌ها، متعلق به گروه «قدیم» و دیگری متعلق به گروه «تازه» است.

هریك ازاین حالت‌ها را، به‌طور جداگانه، بررسی می‌کنیم.

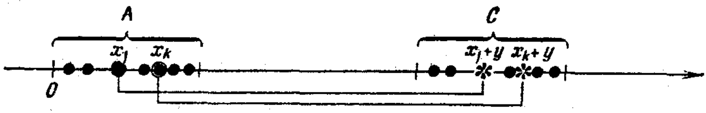
a) تفاضل دو جمله از گروه قدیم، نمی‌تواند به گروه قدیم یا به گروه جدیدمتعلق باشد، زیرا، این تفاضل، به‌عددهای مجموعهٔ A مربوط‌می‌شود، که عددهای آن از x_n کوچکترند (شکل ۷۷).



شکل ۷۷

b) تفاضل دوجمله از گروه جدید، برابراست باتفاضل دوجملهٔ متناظر آن در گروه قدیم (شکل ۷۸) و، بنابـر اثبات قسمت a)، نمی‌تواند برابر یکی از جمله‌های گروه گسترده باشد:

$$(x_k+y)-(x_i+y)=x_k-x_i$$



شکل ۷۸

c) اگر جمله‌ای ازگروه قدیم را از جملهٔ دلخواهی از گروه جدیدکم کنیم، تفاضل حاصل را می‌توان چنین نوشت:

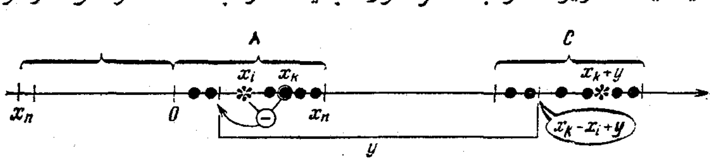
$$(x_k+y)-x_i=(x_k-x_i)+y \qquad (*)$$

یعنی به صورت مجموع y با تفاضل دو جمله ازگروه قدیم. دو حالت پیش می‌آید:

۱. اگر تفاضل دوجمله ازگروه قدیم، مثبت باشد، مسلماً به‌مجموعهٔ A تعلق دارد:

$$0<x_k-x_i<x_n$$

وبنابراین، دربین عددهای گروه نیست (شکل ۷۹). وقتی‌کـه y را به آن اضافه‌کنیم، عددی از مجموعهٔ C به‌دست می‌آیدکه، البته، جمله‌ای ازگروه جدید نیست، زیرا هـر جمله از گروه جدیـد، از جملهٔ متناظر خود درگروه



شکل ۷۹

قدیم حاصل می‌شود (به‌زبان ریاضی‌دانان، هرجمله از گروه جدید، نگاشتی از جملهٔ متناظر خـود درگروه قدیم است). بـه‌این‌ترتیب، تفاضل عددهای

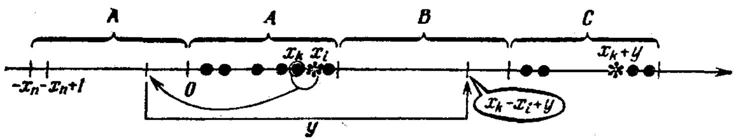
x_k+y و x_i نه به گروه قدیم تعلق دارد و نه به گروه جدید و، در نتیجه، عضوی از گروه گسترده نیست.

۲. به‌حالتی می‌پردازیم که تفاضل دوجملهٔ گروه قدیم، عددی منفی باشد. (وقتی تفاضل دوجمله از گروه را محاسبه می‌کنیم، همیشه جملهٔ کوچکتر را ازجملهٔ بزرگتر کم می‌کنیم. با این‌همه، ممکن است حالتی پیش آیدکه، با وجود این‌که x_k+y از x_i بزرگتر است، مقدار x_k از مقدار x_i کمتر یا با آن مساوی شود و، درنتیجه، تفاضل x_k-x_i درعبارت (*)، مثبت از آب درنیاید و، بنابراین، بـه مجموعهٔ A متعلق نباشد.) دراین حالت، تفاضل x_k-x_i، درنابرابری‌های زیرصدق می‌کند:

$$-x_n<x_k-x_i\leqslant 0$$

که درنتیجه، متعلق به‌مجموعهٔ A' است (شکل ۸۰). اگر به همهٔ جمله‌های این نابرابری‌ها ، y را اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$y-x_n<(x_k-x_i)+y\leqslant y<x_i+y$$



شکل ۸۰

این نابرابری‌ها نشان می‌دهندکه تفاضل دوجمله ازگروه قدیم وگروه جدید، متعلق به‌مجموعهٔ A (و بنابراین، مجموعهٔ C) نیست، و درمجموعهٔ B قرار می‌گیرد کـه بین مجموعه‌های A و C قرار دارد (شکل ۸۰)، یعنی ازهرجملهٔ گروه قدیم بزرگتر و از هـرجملهٔ گروه جدید کوچکتر است. به‌این ترتیب، دراین حالت هم، تفاضل، به گروه گسترده تعلق ندارد.

۳۳. تنها ۷ گروه

تقسیم بـه گروه‌ها را، نه‌یکباره، بلکه بـه‌تدریج و گام به‌گام انجام می‌دهیم و، هربارعددهای تازه‌ای به گروه‌ها اضافه‌می‌کنیم. ضمناً، به‌نوبت، دو

روش را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

α) هروقت که گروه تازه‌ای می‌سازیم، هربار ردیفی از عددهای طبیعی متوالی را، تا آن‌جا، درآن قرارمی‌هیم که، بزرگترین تفاضل عددهای آن، کمتر ازکوچکترین عدد گروه گسترده (که از اجتماع گروه‌های قدیم و گروه جدید به دست آمده است) باشد. اگر a، بزرگترین عددی باشدکه در گروه‌های قدیم وارد شده است و، بنابراین، گروه جدید با $a+1$ آغازشده باشد، آن‌وقت، درگروه جدید، این عددها وارد می‌شود:

$$a+1, a+2, a+3, \ldots, 2a-1, 2a, 2a+1$$

(تمامی گروه‌جدید، شامل $a+1$ عدداست). دراین‌صورت، بزرگترین تفاضل، برابر است با

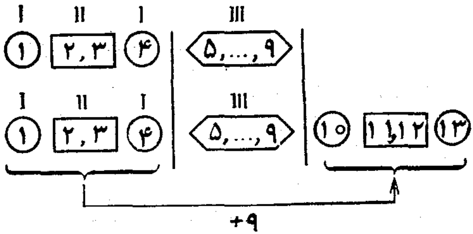
$$2a+1-(a+1)=a$$

یعنی، عددی که، کوچکترین عدد گروه $(a+1)$، بلافاصله بعد ازآن قرار گرفته‌است و، ضمناً، عدد $2a+2$ دیگرنمی‌تواند درگروه جدید وارد شود. (ما ازاین روش، برای حل مسالهٔ ۲۸ استفاده کردیم.)

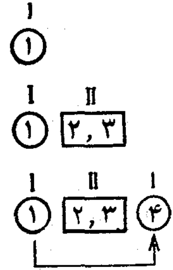
β) بعد از هر گامی که با روش α برداشتیم، گروه قدیم را «از یك طرف» گروه‌جدید (که‌با گام α ساخته‌شده است)، به«طرف‌دیگر» آن‌می‌بریم، به‌همان نحو که در حل مسالهٔ ۳۲ دیدیم. ضمناً، به هریك از عددهای ۱، ۲، ...، a، که به گروه قدیم (که قبل ازگام α به‌وجود آمده است)تعلق دارند، عدد $2a+1$ را اضافه می‌کنیم وآن را، درگروهی قرار می‌دهیم که همان شمارهٔ گروه قدیم را دارد. در گروه گسترده (به مفهومی که در حل مسالهٔ ۳۲ به‌کار بردیم)، عددهای $2a+2$، $2a+3$، ...، $3a+1$ وارد می‌شوند. این‌که، هیچ‌کدام از تفاضل‌ها، درگروه گسترده، برابر با هیچ یك ازجمله‌های این گروه نیست، درحل مسالهٔ قبلی ثابت شده است. همهٔ شرطها برقرارند، زیرا «مقدار اضافی» $2a+1$ ازعدد a بزرگتر است و، بزرگترین عددگروه‌های قدیم، از a کمتر نیست.

ببینیم، این‌مسیر پلکانی‌چند مرحله‌ای، درعمل، به‌چه‌صورت درمی‌آید:

α_1: گروه I را تشکیل می‌دهیم. عدد ۱ را درآن وارد می‌کنیم.



شکل ۸۲



شکل ۸۱

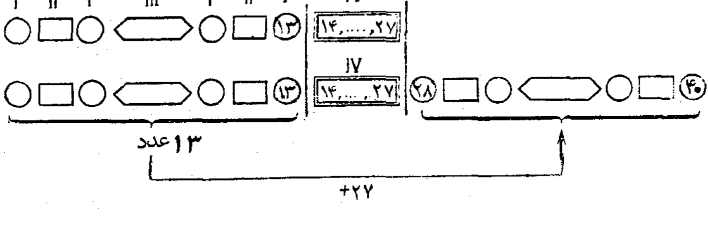
β_1: چون هنوز گروه‌دیگری وجود ندارد، گروه I را «پهلوی چیزی نمی‌توان قرار داد».

α_2: گروه II را تشکیل‌می‌دهیم. عددهای ۲و۳را درآن واردمی‌کنیم.

β_2: گروه قدیمی I را به‌طرف دیگر گروه II می‌بریم. عدد ۴ داخل درگروه I می‌شود (شکل ۸۱).

α_3 : گروه III را تشکیل می‌دهیم. عددهای ۵،۶،۷،۸و ۹ را درآن قرار می‌دهیم (همهٔ عددهای طبیعی از ۱+۴ تا ۱+۴×۲: شکل۸۲).

β_3 : گروه‌های قدیم I و II را، به‌طرف دیگر گروه III مـی‌بریم. مقدار جا به جایی (مقداری که به‌هریك از جمله‌های گروه‌های قدیم اضافه می‌شود) برابر است با ۹، یعنی ۱+۴×۲ (که از دوبرابر بزرگترین‌عدد درهریك ازگروه‌های قدیم، بزرگتر است و، درنتیجه، شرط‌مسألهٔ ۳۲برقرار است؛ شکل۸۲).

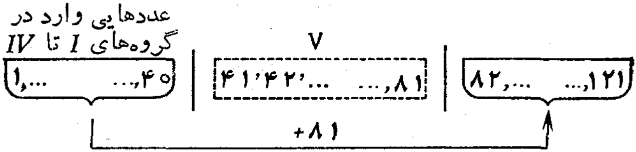


شکل ۸۳

α_4: گروه IV را تشکیل می‌دهیم. عددهای ۱۴، ۱۵، ...،۲۷ را در

آن قرار می‌دهیم (همهٔ عددهای طبیعی از ۱۳+۱ تا ۲×۱۳+۱؛ شکل ۸۳).

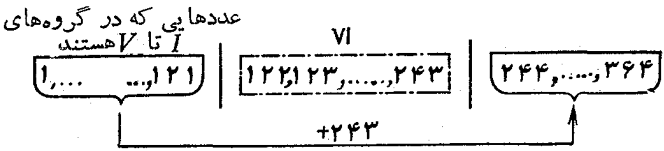
β_4: گروه‌های قدیم I، II و III را، به‌طرف‌دیگر گروه IV می‌بریم مقداری که به‌آن‌ها اضافه‌می‌شود، برابراست با۲۷، یعنی عدد ۲×۱۳+۱



شکل ۸۴

α_5: گروه V را تشکیل می‌دهیم. درآن، عددهای ۴۱، ۴۲، ...، ۸۱ جا می‌گیرند (عددهای طبیعی از ۴۰+۱ تا ۲×۴۰+۱).

β_5: گروه‌های قدیم I، II، III و IV را، به‌طرف دیگر گروه V می‌بریم، به‌اندازهٔ ۲×۴۰+۱=۸۱، (شکل۸۴). به هریك از عددهای طبیعی از ۱ تا ۴۰، به‌اندازهٔ ۸۱ واحد اضافه می‌کنیم وعدد حاصل را، در گروهی با همان شمارهٔ قبلی خود، قرار می‌دهیم.



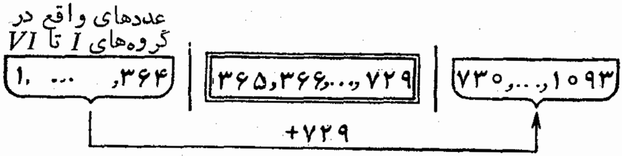
شکل ۸۵

α_6: گروه VI راتشکیل‌می‌دهیم. درآن، عددهای ۱۲۲، ۱۲۳، ...، ۲۴۳ قرار می‌گیرند (عددهای طبیعی از ۱۲۱+۱ تا ۲×۱۲۱+۱).

β_6: گروه‌های قدیمی I تا V را؛ به اندازهٔ ۲×۱۲۱+۱=۲۴۳ جلومی‌بریم (شکل۸۵).

α_7: گروه VII را تشکیل می‌دهیم. همهٔ عددهای طبیعی از۳۶۵ تا ۷۲۹ درآن‌جا می‌گیرند (عددهای طبیعی از ۳۶۴+۱ تا ۲×۳۶۴+۱).

β_7 : گروه‌های قدیم I تا VI را به اندازهٔ ۷۲۹ واحد جلو می‌بریم (شکل ۸۶).



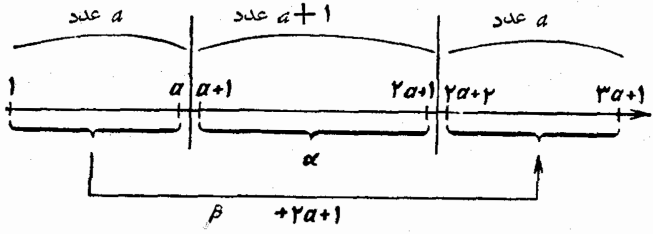
شکل ۸۶

می‌بینیم که، با این‌روش، می‌توانیم عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۹۳ را، فقط در ۷ گروه تقسیم کنیم.

یادداشت ۱. به سادگی می‌توان ، بزرگترین عدد طبیعی N را پیدا کرد که، به‌کمك این روش، بتوان همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا N را در n گروه تقسیم‌کرد.

اگر قبل از تشکیل گروه kام تقسیم، همهٔ عددهای طبیعی از ۱تا a، در گروه‌ها (یعنی در $k-1$ گروه قبلی) جا گرفته باشند، آن وقت، برای تشکیل گروه k ام، در گام α_k ، باید عددهای از $a+1$ تا $2a+1$ را، یعنی روی‌هم $a+1$ عدد، درآن‌جا داد. سپس‌باید گام β_k را برداشت، یعنی به‌گروه‌های قدیم، جمله‌هایی به‌تعداد عددهای وارد درگروه‌های قدیم ـ تا تشکیل گروه k ام ـ واردکرد (یعنی روی هم a جمله).

به‌این ترتیب،اگر a عدد طبیعی نخستین را در گروه‌ها جا داده‌باشیم با برداشتن گام بعدی وساختن گروه جدید، روی‌هم، عددهای طبیعی از ۱ تا $3a+1$ درگروه‌ها جا می‌گیرند (شکل ۸۷).



شکل ۸۷

در گروه I ، قبل ازتشکیل گروه II ، تنها عدد ۱ را قرار دادیم.

باتشکیل گروه II ، می‌توانیم تقسیم به ۲ گروه را تا آن‌جا ادامه دهیم که به عدد $۳ \times ۱ + ۱$، یعنی ۴ برسیم (بعدازاین مرحله است که باید به تشکیل گروه III بپردازیم).

با تشکیل گروه III ، مـی‌توانیم تقسیم به۳ گـروه را تاآن‌جا ادامه دهیم که به عدد

$$۳(۳+۱)+۱=۳^۲+۳+۱=۱۳$$

برسیم (وبعدازآن، به‌تشکیل گروه IV بپردازیم).

به‌سادگی دیده می‌شود که، عدد ۱۳ رامی‌توان‌به صورت $\frac{۱}{۲}(۳^۳-۱)$ نوشت. به‌همین ترتیب، بزرگترین عدد طبیعی N ، که بـه ازای‌آن بتوان عددهای طبیعی از ۱ تا N را به ۲ یا ۱ گروه تقسیم کرد، به ترتیب، برابر است با $\frac{۱}{۲}(۳^۲-۱)$ و $\frac{۱}{۲}(۳^۱-۱)$.

به‌سادگی، متوجه قانون‌کلی می‌شویم:

با روشی‌که دراین‌جا طرح‌کردیم، می‌توان عـددهای طبیعی از ۱ تا $\frac{۱}{۲}(۳^n-۱)$ را در n گروه، تقسیم‌کرد.

این قانون برای $n=۱,۲,۳$ درست است (حتی، برپایهٔ عددهایی که درحل مسأله به‌دست‌آوریم، می‌توانیم بگوییم که، قانون مفروض، تا$n=۷$ درست‌است). همین رابطه (بین عدد n و بزرگترین عدد طبیعی کـه، تاآن، تقسیم به n گروه ممکن است)، برای هر مقدار دیگر n هـم درست است، زیرا، اگر برای تقسیم به k گروه بتوان تا عدد طبیعی $\frac{۱}{۲}(۳^k-۱)$جلورفت بعد ازبرداشتن گام‌های α و β، می‌توان تقسیم به $(k+۱)$ گروه را تا عدد

$$۳\times\frac{۳^k-۱}{۲}+۱=\frac{۳\times۳^k-۳}{۲}+۱=\frac{۳^{k+۱}-۳+۲}{۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲}(۳^{k+۱}-۱)$$

جلو بردکه با قانون مفروض، تطبیق می‌کند.

یادداشت ۲. درمسألهٔ ۲۷ ، تقسیم عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ را به ۱۰ گروه انجام دادیم. باوجودی‌که ازچندروش، برای این تقسیم استفاده کردیم(وباوجودی که‌می‌دانیم، بیش‌از ۱۰۰۰ عددطبیعی‌رامی‌توان‌به۱۰ گروه تقسیم کرد)، هیچ کدام ازاین‌روش‌ها، برای‌تقسیم ۱۰۰۰ عددطبیعی‌نخستین، به‌تعداد کمتری گروه، مناسب نیستند. حتی روش کامل‌تر حل‌مسأله ۲۸ هم، نتوانست، تعداد گروه‌ها را کاهش دهد. تنها درمسألهٔ ۲۹ ، به روشی دست یافتیم که، تعداد گروه‌ها را، به ۹ تقلیل‌داد. حتی‌همین روش‌هم، به‌اندازهٔ کافی به‌حیله وظرافت کار نیاز داشت. ولی، به‌قول ریاضی‌دانان، اندیشه‌ای عمیق لازم بود تا بتوان عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ را، فقط در۷ گروه جا داد.

به‌طورطبیعی، این‌پرسش پیش می‌آیدکه: آیا نمی‌توان روش‌ظریف‌تری (واحتمالاً بغرنج‌تر) پیداکردکه، به‌کمك آن، بشود عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ را به ۶ گروه تقسیم‌کرد؟

ظاهراً چنین روشی، وجود ندارد.

درواقع، می‌دانیم که‌تقسیم به ۵ گروه ممکن‌نیست. می‌توان این‌قضیه را ثابت‌کرد: اگر عددهای طبیعی از ۱ تا N ، طوری به n گروه تقسیم‌شده باشندکه، تفاضل هردو عدد دلخواه ازیك گروه، باهیچ‌کدام ازعددهای همان گروه برابر نباشد، نامساوی زیر برقرار است:

$$N < ۳n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times N \times ۳$$

واین، به معنای‌آن است که، عددهای طبیعی از ۱ تا N را، وقتی می‌توان به ۵ گروه تقسیم‌کردکه، N ؛ کوچکتر باشد از:

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۳ = ۳۶۰$$

(رابطهٔ‌دقیق‌تر بین N و n، دراین‌قضیه، به‌صورت $N < n!e$ می‌باشد که درآن، e عبارت است از مبنای لگاریتم‌های طبیعی. اثبات این‌قضیه، تا حدی دشوار است، ودرنظریهٔ عددها انجام می‌گیرد.)

به ازای $n = ۶$، مقدار N ، که درنابرابری صدق می‌کند، از۱۰۰۰ بزرگتر می‌شود، ولی ازاثبات قضیه نمی‌توان فهمیدکه‌تقسیم عددهای‌طبیعی از ۱ تا N را ، به n گروه، چگونه باید انجام داد! قضیه، تنها تاکیدمی‌کند

که، n گروه، کافی است، ولی هیچ «نسخه‌ای» برای تقسیم، در اختیار ما نمی‌گذارد.

یادداشت ۳. روشی که، دراین‌جا، برای تقسیم به ۷ گروه، آوردیم، به اندازهٔ کافی ساده است و، برای تحقیق درستی آن، نیازی به ریاضیات ندارد. عیب این روش درآن است که، امکان، ساختن هر گروه را، جدا از گروه‌های دیگر وبدون ارتباط باآن‌ها، دراختیار مانمی‌گذارد. مثلاً، ازقبل نمی‌توان پیش‌بینی کرد که چه عددهایی در گروه III جامی گیرند. عضوهای گروه III، تنها وقتی مشخص می‌شوند که همهٔ گروه‌ها را، تاپایان، تشکیل داده باشیم. روش دیگری، برای تقسیم عددهای طبیعی به گروه‌ها، وجود دارد که، این نقص را برطرف می‌کند.

طبق این روش، برای تقسیم به‌گروه‌هایی که درشرط مسأله صدق کنند، کافی است، عددهایی را درگروه i ام قرار دهیم‌که، درتقسیم بر ۳^i، این باقی مانده‌ها را بدهند:

$$\frac{۱}{۲}(۳^{i-۱}+۱),\frac{۱}{۲}(۳^{i-۱}+۱)+۱,\frac{۱}{۲}(۳^{i-۱}+۱)+۲,\ldots,۳^{i-۱}$$

(i عدد طبیعی دلخواهی است: ۱، ۲، ۳، ...).

درگروه I، عددهایی وارد می‌شوند که، درتقسیم بر $۳^۱$ (یعنی ۳)، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند، یعنی عددهای به‌صورت $۳k+۱$:

$$۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۹, \ldots$$

درواقع، از«نسخهٔ» کلی نتیجه‌می‌شود که، دراین حالت، داریم: $i=۱$ و $۳^{i-۱}=۱$. بنابراین، نخستین باقی‌مانده برابر است با $\frac{۱}{۲}(۱+۱)=۱$ و، درعین حال، این‌تنها باقی مانده‌ای است که باید به‌آن توجه‌کرد.

درگروه II، باید عددهایی را قرارداد که، در تقسیم بر $۹=۳^۲$، به باقی ماندهٔ ۲ یا ۳ برسند، یعنی عددهای صورت $۹k+۲$ و $۹k+۳$:

$$۲, ۳, ۱۱, ۱۲, ۲۰, ۲۱, ۲۹, ۳۰, \ldots$$

دراین حالت داریم: $i=۲$ و، بنابراین، نخستین باقی‌مانده برابر است با

$۲=(۱+۳^۱)\frac{۱}{۳}$. باقی ماندهٔ دوم، یك واحد بزرگتر است، یعنی برابراست با ۳. چون $۳=۳^۱$. بنابراین، همین عدد، آخرین باقی مانده است.

به‌سادگی دیده می‌شود، که وقتی عددها را با ایـن روش تقسیم کنیم، بین عددهای گروه I و گروه II هیچ گونه بستگی وجود ندارد.

در گروه III، بایدعددهاییر اقرارداد، که‌درتقسیم بر $۲۷=۳^۳$، یکی ازباقی‌مانده‌های ۵،۶،۷،۸یا۹ را بدهند، یعنی عددهای به‌صورت $۲۷k+r$ که درآن، $r=۵,۶,۷,۸,۹$:

$$۵,۶,۷,۸,۹,۳۲,۳۳,۳۴,۳۵,۳۶,۵۹,۶۰,۶۱,۶۲,۶۳,...$$

در این‌جا، کوچکترین باقی مانده، برابر است با $۵=(۱+۳^۲)\frac{۱}{۳}$؛ وبقیهٔ باقی‌مانده‌ها، عبارتند از عددهای طبیعی بعداز ۵، تا عدد۹.

ضمن ساختن گروه III، ظاهراً، به‌یك اشتباه روشن برمی‌خوریم: در این گروه، عدد ۷ (همچنین ۳۴ و۱۶ و، به‌طورکلی، همهٔعددهای به صورت $۲۷k+۷$، که ضمن تقسیم بر۳، به باقی‌ماندهٔ ۱ مـی‌رسند) وارد شده است کـه، قبلاً، درگـروه I هم بودند. ولی درواقع، این، اشتباه نیست: خیلی ساده، مابیشتر ازآن چه صورت مسأله خواسته است، انجام داده‌ایم. کسی‌که برای نخستین‌بار می‌خواهد این‌مسأله ومسأله‌های۲۷ و ۲۹ را حل‌کند، وقتی راضی‌می‌شودکه موفق شود نوعی تقسیم را پیداکندکه، به ازای‌آن، هریك ازعددها، دست‌کم، متعلق به‌یکی از گـروه‌ها باشد. درروش اخیر، موفقیت بیشتری هم به‌دست می‌آید: تقسیمی را پیداکنیدکه، درآن، برخی ازعددها، نه به‌یك گروه، بلکه به‌چندگروه تعلق داشته باشند.

ضمناً، اگرکسی علاقه‌مند باشدکه، هر عدد طبیعی، تنها به یك گروه تعلق داشته باشد، باکمال میل، خـواست او را انجام می‌دهیم. برای ایـن منظور، مـی‌توانیم مثلاً شرط کنیم: همهٔ عددهایی راکه می‌توانند در چند گروه شرکت‌کنند، درگروهی قرارمی‌دهیم‌که شمارهٔکوچکتری دارد. باوجود این، نباید ازنظر دور داشت‌که، به‌این ترتیب، گروه‌ها، استقلال خود را از دست می‌دهند: ضمن تشکیل گروه‌ها، باید شماره‌های‌آن‌ها را دنبال‌کرد وبـه

گروه‌های باشماره‌های کمتر، نسبت به گروه‌های باشماره‌های بیشتر، امتیازی قایل شد.

درگروه IV ، عددهای به‌صورت $۸k+r$ وارد می‌شوند، که در آن، داریم:

$$r = ۱۴, ۱۵, \dots, ۲۶, ۲۷$$

یعنی عددهای طبیعی از ۱۴ تا ۲۷ ، از ۹۵ تا ۱۰۸ ، از ۱۷۶ تا ۱۸۹ ،...

شرح بقیهٔ گروه‌ها را، به عهدهٔ خوانندهٔ می‌گذاریم. ولی، به‌گمان ما لزومی ندارد، وقت خودرا دراین‌باره صرف‌کنید، بهتراست، به اثبات حکم زیر بپردازیم:

درمجموعهٔ عددهای متعلق بهnگروه اول، همهٔعددهایی شرکت دارندکه ضمن تقسیم‌بر۳^n، باقی‌مانده‌هایی‌کوچکتر یا برابر $\frac{۳^n}{۲}$ دارند.

دربین عددهای‌طبیعی نخستین، آن‌هایی‌هم هستندکه در تقسیم بر۳^n، خارج قسمتی برابر صفر دارند. (یعنی کوچکترین عدد از دسته عددهایی که درتقسیم بر ۳^n دارای یك باقی‌مانده هستند):

$$۱, ۲, ۳, \dots, \frac{۳^n - ۱}{۲}$$

بنابراین، طبق این روش ، می‌توان، عددهای طبیعی متوالی از ۱ تا $\frac{۱}{۲}(۳^n - ۱)$ را به n گروه تقسیم‌کرد.

اثبات این حکم را، با روش استقرای ریاضی می‌دهیم.

با توجه به عددهایی که، در بالا، برای نخستین گروه‌ها به دست آورده‌ایم، می‌توان درستی حکم را، برای $n = ۱, ۲, ۳$ تحقیق‌کرد.

اگرحکم. برای $n=i$ درست باشد، برای $n=i+۱$ هم درست‌است بنابر فرض استقرا، درمجموعهٔ عددهای متعلق‌بهi گروه‌نخست، همهٔعددهایی قرار دارند که، ضمن تقسیم بر ۳^i، یکی از باقی مانده‌های ۱، ۲، ...، $\frac{۱}{۲}(۳^i - ۱)$ را می‌دهند.

a. بین این عددها، ضمناً، همهٔ عددهایی وجود دارندکه، درتقسیم بر 3^{i+1}، یکی از باقی‌مانده‌های 1، 2، ...، $\frac{1}{2}(3^i-1)$ را می‌دهند.

b. ولی، در این مجموعه، عددهایی هم وجود دارند که، در تقسیم 3^{i+1} به یکی از باقی مانده‌های

$$3^i+1\text{،}\ 3^i+2\text{،}\ \ldots\text{،}\ \frac{1}{2}(3^{i+1}-1)=3^i+\frac{1}{2}(3^i-1)$$

می‌رسند. دراین مجموعه، عددهای دیگری‌هم وجود دارد ، ولی نیازی به آن‌ها نیست، زیرا

c. ازخود روش تقسیم نتیجه‌می‌شود که، درگروه $(i+1)$ ام، چنان عددهایی وجود دارد که ، در تقسیم بر 3^{i+1}، یکی از باقی مانده‌های $\frac{1}{2}(3^i+1)$ ، $\frac{1}{2}(3^i+1)+1$ ، ...، 3^i را می‌دهند. باقی‌مانده‌های جدید، درمیان باقی‌مانده‌هایی قراردارندکه در **a** برشمردیم، یاآن‌ها که در **b** دربارهٔ آن‌ها صحبت‌کردیم. اگر همهٔ این عددها را با هم بگیریم، دستگاه‌کاملی از باقی‌مانده‌های تقسیم بر 3^{i+1} را تشکیل می‌دهندکه از $\frac{1}{2}(3^i+1)$ تجاوز نمی‌کنند. اگرباقی‌مانده‌هایی راکه در **a** ، **b** و **c** برشمردیم، یکی‌کنیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\underbrace{1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(3^i-1)}_{\mathbf{a}}\ ,\ \underbrace{\frac{1}{2}(3^i+1), \frac{1}{2}(3^i+1)+1, \ldots, 3^i,}_{\mathbf{b}}$$

$$\underbrace{3^{i+1}, \ldots, \frac{1}{2}(3^{i+1}-1)}_{\mathbf{c}}$$

(تفاضل بین عددهای $\frac{1}{2}(3^i+1)$ و $\frac{1}{2}(3^i-1)$ ، برابر است با 1).

به این ترتیب، گروه‌هایی‌که با روش جدید ساخته‌ایم، با شرط مسألهٔ

سازگارند.

این حکم، ار این‌جا نتیجه می‌شودکه، در تقسیم تفاضل هر دو عدد دلخواهٔ متعلق به گروه iام بر 3^i، باقی‌مانده‌هایی به‌دست می‌آیدکه‌نمی‌توانند برباقی‌مانده‌های مربوط به‌تقسیم عددهای همین گروه، منطبق شوند.

اثبات. اگر ازعدد با باقی‌ماندهٔ بزرگتر، عدد باباقی‌ماندهٔ کوچکتر را کم کنیم، تفاضل باقی‌مانده با باقی‌ماندهٔ تفاضل‌ها برابر می‌شود و، بنابراین ازعدد

$$3^{i-1}-\frac{1}{2}(3^{i-1}+1)=\frac{1}{2}(3^{i-1}+1)$$

تجاوز نمی‌کند، یعنی کمتر ازکوچکترین باقی مانده‌ای می‌شودکه ازتقسیم عضوهای گروه iام بر 3^i به‌دست می‌آیند.

برعکس، اگر عدد با باقی‌ماندهٔ بزرگتر را ازعدد با باقی‌ماندهٔ‌کوچکتر کم‌کنیم، آن‌وقت، باقی‌مانده تفاضل برابر می‌شود با 3^i به اضافهٔ (یامنهای) تفاضل باقی‌مانده‌ها و، بنابراین، ازعدد

$$3^i+\frac{1}{2}(3^{i-1}+1)-3^{i-1}=\frac{1}{2}(2\times 3\times 3^{i-1}+3^{i-1}+1-2\times 3^{i-1})$$

$$=\frac{1}{2}(5\times 3^{i-1}\times 1)=2\times 3^{i-1}+\frac{1}{2}(3^{i-1}+1)$$

کمتر نیست. بنابراین، دراین‌حالت، باقی‌ماندهٔ تفاضل، ازبزرگترین تفاضلی که ضمن تقسیم جمله‌های‌گروه iام بر 3^i به‌دست می‌آیند، بیشتراست.

۳۴. یولیشکا جست وخیز را دوست دارد

محاسبه را به‌تدریج وازآغاز انجام می‌دهیم. از پلکانی‌که تنها یك پله داشته باشد، یولیشکا ؛ بایك روش می‌تواند بالا برود. پلکان ۲ پله‌ای را به دوطریق می‌تواند پشت‌سر بگذارد: یا پا را روی پلهٔ اول بگذارد ویایکباره به پلهٔ دوم بپرد. برای بالا رفتن از پلکان ۳ پلـه‌ای، سه روش وجود دارد: یا ازطریق پله‌های اول وسوم، یا از طریق پله‌های دوم وسوم ویا، بالاخره

ازطریق پله‌های اول ودوم وسوم. عبور ازپلکان ۴پله‌ای، به ۵طریق‌ممکن است: باپا گذاشتن به‌پله‌های اول، دوم، سوم وچهارم، یا دوم، سوم‌وچهارم یا اول ، سوم و چهارم ، یا اول ، دوم و چهارم و یا بالاخره ، پله‌های دوم و چهارم.

ولی، برای بالا رفتن از ۵ پله، چند طریق وجود دارد؟ بهتر است، این بار، از محاسبهٔ مستقیم استفاده نکنیم، ویك قانون‌مندی را دنبال کنیم: آخر، هر چه تعداد پله‌ها زیادتر شود، جداکردن همهٔ حالت‌های ممکن، دشوارتر می‌شود. بنابراین، تلاش می‌کنیم، نوعی نظم را پیداکنیم. یك‌چیز را مشخص‌کرده‌ایم: می‌دانیم ازپلکانی‌که، تعداد پله‌های آن، عدد دلخواهی از ۱ تا ۴ باشد، به چند طریق می‌توان بالا رفت. آیا نمی‌توان محاسبهٔ مربوط به‌۵ پله را، باتکیه برآن چه‌دربارهٔ پله‌های‌کمتر می‌دانیم، انجام‌داد؟

چرانمی‌شود؟ یولیشکا، به‌دوطریق‌می‌تواند خود را به‌پلهٔ‌پنجم برساند: یا ازپلهٔ سوم ویا از پلهٔ چهارم. بنابراین، برای رسیدن به‌پلهٔ پنجم، می‌توان

یا اول به هر طریقی که ممکن است خود را به پلهٔ سوم برساند و، سپس، ازآن‌جا، به‌پلهٔ پنجم، ویا به هرطریقی‌که ممکن است، تا پلهٔ چهارم بیاید و، بعد، پا را بر پلهٔ پنجم بگذارد.

هیچ راه دیگری، برای رسیدن به پلهٔ پنجم وجود ندارد و، ضمناً، دو طریق مذکور هم، بایکدیگر فرق دارند.

بنابراین، تعداد روش‌های بالا رفتن از ۵ پله، برابراست با مجموع تعداد روش‌هایی که برای بالا رفتن از ۴ پله و از۳ پله لازم است، یعنی ۸ = ۳ + ۵ روش مختلف.

با همین استدلال، می‌توان قانع شدکه، تعداد روش‌های بالا رفتن از ۶ پله، برابراست با تعداد روش‌هایی‌که، روی هم، برای بالا رفتن از ۵ پله و ۴ پله لازم است، یعنی ۱۳ = ۵ + ۸ روش مختلف.

به‌این‌ترتیب، حکم زیر، برای حالت‌کلی درست است:

تعداد روش‌هایی‌که برای بالارفتن از n پله (n، عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر یا مساوی ۳ است) وجود دارد، برابر است با تعداد روش‌هایی‌که برای بالا رفتن از $n-۱$ و $n-۲$ پله لازم است.

در واقع، یولیشکا، برای پا نهادن به پلهٔ nام، دو راه بیشتر ندارد: یا گام‌آخررا بایك پله برداشته است ویا با دو پله، درحالت اول، برای رسیدن به پلهٔ nام، همان‌قدر روش وجود دارد که برای رسیدن به‌پلهٔ $(n-1)$ام، و در حالت دوم، تعداد حالت‌های مختلف (برای رسیدن بـه پلهٔ nام) برابر است با تعداد حالت‌هایی‌که برای رسیدن به پلهٔ $(n-2)$ ام لازم دارد.

به‌این ترتیب، یولیشکا، بالا رفتن از یك پله را، با ۱ روش و بالارفتن از دو پله را با ۲ روش انجام می‌دهد و بـرای موردهای دیگر ، به ترتیب به‌دست می‌آید:

برای ۳ پله: $۱+۲=۳$ روش،
برای ۴ پله: $۲+۳=۵$ روش،
برای ۵ پله: $۳+۵=۸$ روش،
برای ۶ پله: $۵+۸=۱۳$ روش،
برای ۷ پله: $۸+۱۳=۲۱$ روش،
برای ۸ پله: $۱۳+۲۱=۳۴$ روش،
برای ۹ پله: $۲۱+۳۴=۵۵$ روش،
برای ۱۰ پله: $۳۴+۵۵=۸۹$ روش،
برای ۱۱ پله: $۵۵+۸۹=۱۴۴$ روش،
برای ۱۲ پله: $۸۹+۱۴۴=۲۳۳$ روش.

به‌این‌ترتیب، یولیشکا باید ۲۳۳ بار ازپلکان مدرسه بالابرود، تامعلم به او اجـازهٔ شرکت در انجمن ریـاضی بزرگسالان را بدهـد و، برای ایـن منظور، دست‌کم، به ۲۳۳ روزنیاز دارد. انتظار اوبعد ازگذشت این‌روزها، به‌پایان می‌رسدو، امیدواریم بتواند جای‌نمایانی دربین بزرگسالان پیداکند.

یادداشت ۱. دنبالهٔ عددهای

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ۲۳۳، ۳۷۷، ۶۱۰، ...

که درحل مساله‌پیدا شد، ویژگی جالبی دارد: نخستین عدد این دنباله برابر ۱ و دومین عدد آن برابر ۲ است و، از آن بـه بعد، هرجمله برابر است با مجموع دوجملهٔ قبل ازآن. عضوهای این دنبالـه را، عـددهای فیبوناچی

می‌گویند. این‌عددها، اهمیت ونقش زیادی درریاضیات دارند.

[یادداشت ۲. دوباره به مساله ۲۴ بر می‌گردیم. نخستین جمله‌ها، ازمجموعهٔ عددهایی که‌آندراش، یوشکا وشانی، براساس «انتخاب کوچکترین عدد ممکن» ساختند، باعددهایی که درحل این مساله به‌دست‌آوردیم، منطبق بودند. شانی، که این قانون‌مندی را دربارهٔ چند جملهٔ اول عددهای حاصل مشاهده‌کرد، به‌این نتیجه رسیدکه در «انتخاب کوچکترین عددهای ممکن»، به دنبالهٔ فیبوناچی می‌رسیم. ولی دیدیم که، تصور او، درست نبود و، در گام هشتم، می‌شد به‌جای عدد ۳۴، عدد کوچکتر ۳۰ را قرار داد. ولی، از این‌جا، نباید پولیشکا انتظار داشته باشدکه اوهم می‌تواند به‌نحوی از تعداد روش‌های خود، برای بالا رفتن از پلکان، کم‌کند. عددهای مربوط به تعداد روش‌های بالارفتن ازپلکان را، نه‌کم می‌توان کرد ونه زیاد و پولیشکا باید تا پایان ۲۳۳ روز صبرکند.]

۳۵. بلیت‌های تراموا

درواقع، برای حل‌مساله، لزومی ندارد، تعداددقیق همهٔ ترکیب‌های ممکن سوراخ‌ها را، درمورد بلیت‌های تراموا درشهر برگن، محاسبه کنیم. کافی‌است‌معین‌کنیم، درکدام یك ازدونوع بلیت، تعداد ترکیب‌های بیشتری برای سوراخ‌ها، وجود دارد.

باوجود این، یك بررسی سطحی، ما را قانع می‌کندکه، برای مقایسهٔ دو روش سوراخ‌کردن بلیت، نمی‌توانیم بـه هیچ مبنای اساسی دست یابیم. بنابراین، تنها راهی که‌باقی‌می‌ماند، همان محاسبهٔ تعداد ترکیب‌های ممکن، درروش سوراخ‌کردن بلیت، درترامواهای شهربرگن است.

این محاسبه را، چگونه باید انجام داد؟

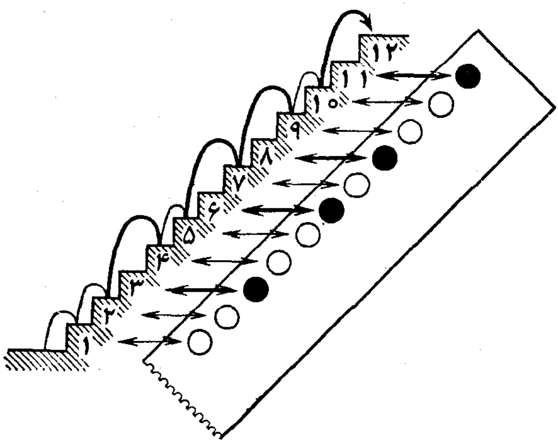
چون، بنابر شرط مساله، نباید دو خانهٔ مجاور سوراخ شود، روشن است‌کـه خانه‌های سوراخ شـده و سوراخ نشده، بـه‌تناوب ظاهر می‌شوند. بنابراین، حل این مساله‌را، می‌توان به حل مسالهٔ قبل منجرکرد، که درآن، صحبت از تناوب پله‌ها دربالا رفتن پولیشکا از پلکان مدرسه بود.

پیدا کردن تناظر بین دومساله دشوار نیست، به‌شرطی که توجه کنیم، بین خانه‌هایی از بلیت‌های شهر برگن که سوراخ شده‌اند و پلکانی که پولیشکا ازوسط می‌اندازد، تناظری برقرار است: باتوجه به‌شرط مسالهٔ ۳۴، پولیشکا نمی‌تواند، ضمن بالارفتن از پلکان، دو پله را ازوسط بیندازد (شکل ۸۸).

تنها باید به‌دو اختلاف توجه کرد.

۱. پولیشکا باید، در هر حال، برپلهٔ آخر (پلهٔ دوازدهم) قدم بگذارد، درحالی که دربلیت تراموا، ضرورتی نداردکه‌خانهٔ‌آخر، حتماً، بدون سوراخ بماند.

۲. پولیشکا، ضمن‌بالا رفتن ازپلکان، می‌تواند همهٔ پله‌ها را، به‌ردیف، طی کند، یعنی هیچ پله‌ای را از وسط نیندازد. در حالی که، دربلیت تراموا، باید دست‌کم یکی از خانه‌ها، به‌وسیلهٔ دستگاه سوراخ شود.



شکل ۸۸

ازاختلاف اول می‌توان صرف‌نظرکرد، زیرا این اختلاف به‌معنای آن است‌که، در ۱۱ خانهٔ بلیت، هرگونه ترکیبی از سوراخ‌ها مجاز است (البته، با حذف همهٔ ترکیب‌هایی که، درآن‌ها، دو خانهٔ مجاور سوراخ شده باشد)، ولی خانهٔ دوازدهم را (که درواقع، وجود ندارد)، نمی‌توان سوراخ کرد. بنابراین، شباهت بین دو مساله کامل می‌شود، زیرا پولیشکا هم، در همهٔ

حالت‌ها، باید پا را برپلهٔ دوازدهم بگذارد. اختلاف دوم هم، تنها یك‌حالت ممکن را حذف می‌کند.

به‌این‌ترتیب، می‌توانیم خانه‌های بلیت تراموا را، که به‌وسیلهٔ‌دستگاه سوراخ می‌شوند، با پله‌هایی‌که باید یولیشکا بالا برود، مقایسه‌کنیم. در این صورت، هرترکیب مجازی ازسوراخ‌های بلیت، متناظراست با یکی (و تنها یکی) ازروش‌های بالا رفتن ازپلکان مدرسه (آن‌طورکه معلم خواسته است). برعکس، هربارکه یولیشکا از پلکان بالا می‌رود، (ودرهرمورد دست‌کم یکبار پله‌ای را از وسط می‌اندازد)، متناظر است با یکی (و تنها یکی) از ترکیب‌های مجاز سوراخ‌های بلیت. بنابراین، تناظر بین روش‌های بالا رفتن از پلکان با ترکیب‌های مختلف سوراخ‌ها، تناظری یك به یك (یك ارزشی) است. اگر ترکیب‌های مجاز سوراخ‌ها، یعنی x، متناظر با روش‌های بالا رفتن از پلکان، یعنی y، باشد، آن وقت، روش‌های y هم متناظر با ترکیب‌های xخواهد بود. بنابراین، تعداد روش‌های سوراخ‌کردن بلیت‌های تراموا‌های شهر برگن، برابر است با تعداد روش‌های بالا رفتن یولیشکا از پلکان، منهای یك واحد (که متناظر با حالتی است‌که یولیشکا، به‌ترتیب، بر همه پله‌ها پا می‌گذارد).

بنابراین، تعداد حالت‌ممکن‌مجاز، درسوراخ‌کردن بلیت‌های ترامو‌های شهر برگن، برابر است با ۲۳۲، که نسبت به‌تعداد ترکیب‌های ممکن در سوراخ‌های شهر بوداپست‌کمتر است.

۳۶. گردن‌بند

تعداد روش‌های به‌نخ کشیدن ۳ مهرهٔ قرمزو ۸ مهرهٔ سفید، همان است که یوشکا پیدا کرد (اگرچه، محاسبهٔ شانی هم، به‌کلی بی‌اعتبار نیست).

[ابتدا ببینیم، شانی، عدد ۸۴ را چگونه به‌دست‌آورده است. شانی، آن را از مسالهٔ ۳۵ «اقتباس» کرده است. او به‌این نکته توجه‌کرده است‌که اگر، در بلیت تراموا‌های بوداپست، قرار باشد، فقط ۳ سوراخ ایجاد شود، ۸۴ حالت مختلف به‌دست می‌آید. درواقع، ۳ مهرهٔ قرمز را می‌توان متناظر

شکل ۸۹

با ۳ سوراخ بلیت دانست. ولی، چگونه می‌توان بین ۹ خانه‌ای که درمسالهٔ ۳۵ مطرح است، با ۱۱ مهرهٔ این مساله، تناظر برقرار کرد؟

قبل از آن‌که مهره‌ها را به‌نخ بکشیم، عاقلانه‌تر این است که، آن‌ها را، به‌طور عینی موردآزمایش قرار دهیم: اگر معلوم شود که دو ردیف مهره‌ها، شبیه هم درآمده‌اند، به‌سادگی می‌توانیم اشتباه را اصلاح کنیم (تغییر ردیف مهره‌ها، درگردن‌بند آماده، دشوارتر است).

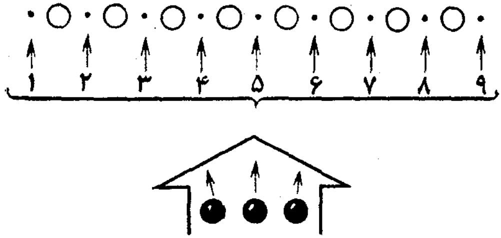
اگر ردیفی از مهره‌ها در جایی نامناسب باشد (مثلاً، شبیه ردیف دیگری درآمده باشد)، آن‌وقت، می‌توان‌آن را تجدیدساختمان‌کرد و، مثلاً، مهره‌های قرمز را به جاهای دیگری منتقل‌کرد (شکل ۸۹). مهم این است که در ردیف‌های مختلف، جای مهره‌های قرمز با یکدیگر فرق داشته باشد (هر دو ردیفی، باید دست کم، موضع یکی از مهره‌های قرمز، با هم متفاوت باشند).

[از ۳مهرهٔ قرمز و۸ مهرهٔ سفید، چند زنجیر می‌توان درست‌کرد؟ مهره‌های قرمز، درچند محل، می‌توانند واقع شوند؟]

۱. گردن‌بندها را، به‌طریق زیر می‌توان درست کرد.

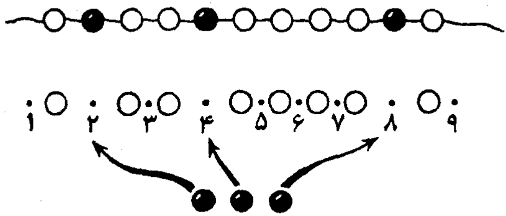
ابتدا ۸ مهرهٔ سفید را، روی میز و به‌ترتیب، بچینید، سپس، ۳ مهرهٔ قرمز را دربین آن‌ها جا دهید؛ به‌شرطی‌که به نتیجهٔ موفقیت‌آمیزی رسیدید، آن‌ها را به‌نخ بکشید. مهره‌های قرمزرا می‌توان قبل از نخستین مهرهٔ سفید، بین هردو مهرهٔ سفید و، بالاخره، بعد از همهٔ مهره‌های سفید قرارداد. به‌این ترتیب، مهره‌های قرمز را می‌توان، در ردیف مهره‌ها، در هرکدام ازاین ۹ محل جا داد (شکل ۹۰)، ضمناً باید توجه کردکه، دو مهرهٔ قرمز، در کنار هم قرار نگیرند.

با این «نسخه» می‌توان، گردن‌بندهای «مختلف» را، بنابر میل خود، با مهره‌ها ساخت.



شکل ۹۰

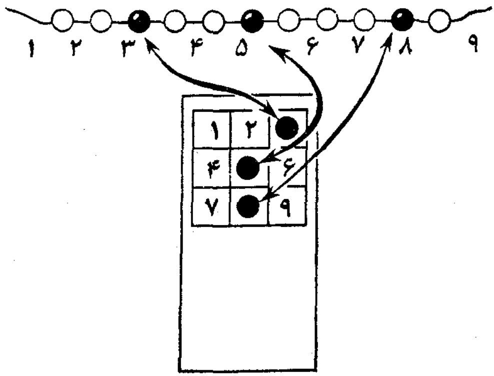
اگر کسی درحکم اخیر تـردیـد دارد، می‌توان آن را، به‌ترتیب زیر، ثابت کرد. یکی از گردن‌بندها را، کـه با شرط مساله سازگار است، انتخاب می‌کنیم، آن را روی میـز قـرار مـی‌دهیم، نخ را ازآن بیرون می‌کشیم و مهره‌های قرمز را ازآن جدا می‌کنیم. دربرابر ما، همان رشتهٔ نخستین قرار می‌گیردکه از ۸ مهرهٔ سفید تشکیل شده است؛ اکنون باید تشکیل گردن‌بند تازه را، طبق «نسخه‌ای»کـه دراختیار داریم، بـه‌انجام برسانیم: مهره‌های قرمزرا درجای سابق خود قرار می‌دهیم و، سپس، بدون این‌که جای مهره‌ها را عوض‌کنیم، آن‌ها را به‌نخ می‌کشیم. درنتیجه، به‌همان گردن‌بند نخستین می‌رسیم‌که، نه به‌طورتصادفی، بلکه طبق نسخهٔ ما، به نخ‌کشیده شده است (شکل ۹۱).



شکل ۹۱

شانی، ظاهراً، گمان‌کرده بود که قراردادن ۳ مهرهٔ قرمز در ۹ محل را، می‌توان متناظر باروش‌هایی دانست‌که، به‌کمك آن‌ها، می‌شد ۳ سوراخ درخانه‌های مربع شکل بلیت تـرامـواهای بوداپست به‌وجود آورد (شکل

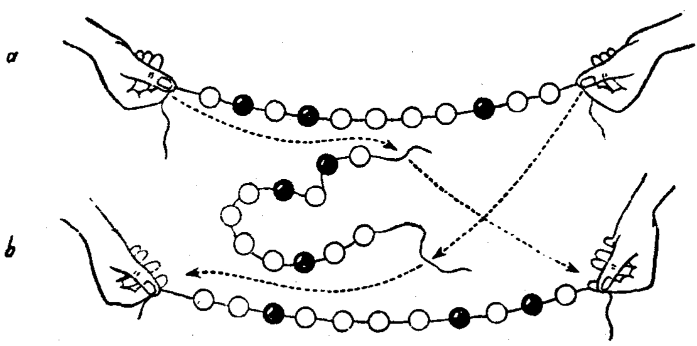
۹۲). بنابراین، طبق تصور شانی، تعداد حالت‌های مختلف گردن‌بند، برابر است با تعداد همهٔ حالت‌های مختلفی که ۳ سوراخ را می‌توان در بلیت تراموا به‌وجود آورد. این عدد در مسالهٔ ۳۵ داده شده و برابر است با ۸۴.



شکل ۹۲

آیا این استدلال شانی درست است؟

۲. نه! استدلال شانی به شرطی درست بود که دو انتهای نخ یکسان نبود و می‌شد، یکی از دو انتها را، راست و انتهای دیگر را، چپ به‌حساب آورد (مثلاً، اگر یکی از دو انتهای نخ، آبی و انتهای دیگر سبز بود). ولی از آن جا که این‌طور نیست، تعداد گردن‌بندهایی را که با «نسخهٔ» بالا



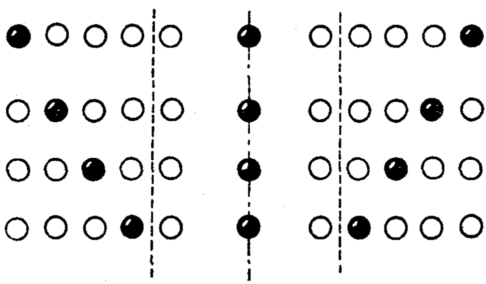
شکل ۹۳

به‌دست آوردیم، باید نصف کرد (زیرا، برای ما، سمت چپ وسمت راستی، برای نخ وجود ندارد). در واقع، اگر جای دوانتهای نخ را، در مورد گردن‌بندی، با هم عوض کنیم، خود گردن‌بند تغییر نمی‌کند و تنها، آن را به‌صورت دیگری نگه داشته‌ایم. درشکل ۹۳، یك گردن‌بند را، به دوصورت مختلف، نشان داده‌ایم. اگر بخواهیم طبق «نسخهٔ» شانی عمل کنیم، باید گردن‌بند a را، غیر از گردن‌بند b بدانیم (زیرا، جای مهره‌های قرمز را، همیشه، ازچپ به‌راست، شماره گذاری کرده‌ایم).

آیا، به‌این ترتیب، باید حق را به زولی داد؟ آیا نباید، به‌جای عدد ۸۴، نصف آن را درنظر گرفت و تعداد حالت‌های مختلف گردن‌بند را، ۴۲ دانست؟

۳. زولی، تنها تا اندازه‌ای، حق دارد. در واقع، «نسخه‌ای» را که، برای به‌نخ کشیدن مهره‌ها، ارائه دادیم، همهٔ گردن‌بندها را، دوبار، به ما نمی‌دهد: گردن‌بندهای متقارنی که شکل آن‌ها، با جا به‌جا کردن دوانتهای راست وچپ نخ، تغییر نمی‌کند، تنها یك‌بار به‌دست می‌آیند.

چند گردن‌بند متقارن وجود دارد؟



شکل ۹۴

درگردن‌بندهای متقارن، یکی از مهره‌های قرمز، حتماً باید در وسط قرارگیرد (در غیر این‌صورت، تعداد مهره‌های قرمز، در یك نیمهٔ گردن‌بند، با تعداد مهره‌های قرمزدرنیمهٔ دیگر، برابرنمی‌شود وتقارن به‌هم می‌خورد). دو مهرهٔ مجاور این مهرهٔ قرمز مرکزی (اولین مهرهٔ سمت راست و اولین مهرهٔ سمت چپ آن)، باید حتماً سفید باشند (طبق شرط، دو مهرهٔ قرمز

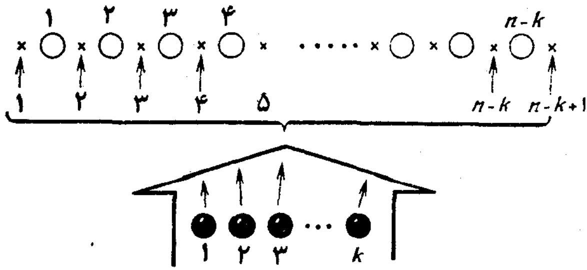
نمی‌توانند پهلوی هم‌قرار گیرند). درنتیجه، درهرطرف، ۴ مهره باقی‌می‌ماند، که‌یکی ازآن‌ها می‌تواند قرمزباشد؛ ضمناً مهره‌های قرمز، باید قرینهٔیکدیگر باشند (شکل ۹۴). مهرهٔ قرمز را، در هر طرف، دریکی از ۴ محل می‌توان قرارداد و، وقتی که‌جای مهرهٔ قرمزدریك طرف معلوم باشد، جای‌مهرهٔ قرمز طرف دیگر، خود به‌خود معلوم است، زیرا درست درنقطهٔ قرینهٔ مهرهٔ قرمز اول نسبت به‌مرکز، قرار می گیرد.

طبق «نسخهٔ ما»، از۷۴ گردن‌بند مختلف، ۴ تا متقارن‌اند و، هر کدام ازآن‌ها، تنهایك‌باربه‌دست می‌آیند. ۸۰ حالت باقی‌مانده را، باید نصف‌کرد، زیرا، هرکدام از این ۴۰ مورد را، دوبار درنظر گرفته‌ایم: یکبار از راست به‌چپ و، باردیگر، ازچپ به‌راست. بنابراین، روی‌هم ۴۴ گردن‌بند مختلف به‌دست می‌آید: حق با یوشکا بود.

[ولی، آیا یوشکا، دریك‌نکتهٔ‌کوچك، اشتباه نکرده است؟ خواه‌ناخواه، هرکسی دچار تردید می‌شود. آیـا ، به‌واقع ، این استدلال‌که ، دو گردن‌بند مختلف‌را یکی دانستیم، بی‌عیب بود؟ مگر نه این است‌که، اگردو گردن‌بند یکسان باشند، باید درمحل‌هایی‌که شماره‌های یکسان دارند، مهره‌هـایی از یك‌رنگ داشته‌باشیم؟

می گوییم ، یك‌گردن‌بند ، وقتی «شکل خطی» به‌خـود می گیردکه ، مهره‌های‌آن، یکی‌پس‌ازدیگری‌به‌دنبال‌هم وموازی بایك‌خط‌راست قرار گیرند. وقتی که نخ‌های دو گردن‌بند، به‌چنین‌شکل خطی‌باشند، آن‌وقت، دو گردن‌بند را یکسان می‌نامیم ، به‌شرطی که، مهره‌های با شماره‌های یکسان درآن‌ها ، هم‌رنگ باشند.

هرشکل خطی‌گردن‌بند ، متناظر است بـا یك (و تنها یك) دنباله از مهره‌ها، برعکس، هردنباله‌ای از مهره‌ها، متناظر است بـا یك یـا دو (و نه بیشتر) شکل خطی. دنباله‌ای از مهره‌ها را، تنها به‌دو طریق می‌توان روی خط راست قرارداد: یا از راست به‌چپ ویا از چپ به‌راست . این‌دو روش، منجر به‌دو شکل خطی‌گردن‌بند می‌شوند که یا بـا هم اختلاف دارند و یـا یکسان‌اند. دوشکل خطی گردن‌بند، وقتی‌یکسان‌اندکه دنبالهٔ‌مهره‌ها، متقارن



شکل ۹۵

باشد. درحالتی که دنبالهٔ مهره‌ها متقارن نباشد، دوشکل خطی مختلف برای گردن‌بند به‌دست می‌آید.

به‌این ترتیب، تعداد دنباله‌های مختلف مهره‌ها، برابراست بامجموع تعداد شکل‌های خطی متقارن گردن‌بند، به‌اضافهٔ نصف تعداد شکل‌های خطی نامتقارن.]

یادداشت. دراین‌جا، بی‌مناسبت نیست، برخی‌ازجنبه‌های حل‌سه‌مسألهٔ اخیر را باهم مقایسه کنیم.

روشن است که، شانی، در واقع تعداد بلیت‌های تراموا درشهر برگن را، که می‌توانند سه‌سوراخ داشته‌باشند، پیداکرده است. به‌همین ترتیب، می‌توان‌تعدادهمین بلیت‌ها را، برای‌حالت‌هایی‌که ۱، ۲، ۴، ۵ و ۶ سوراخ، در آن‌ها، به‌وجودآمده باشد، محاسبه کرد. (از قبل روشن است‌که: ۱۱ بلیت با ۱ سوراخ و ۱ بلیت با ۶ سوراخ وجود دارد. برای حالت‌های دیگر، باید از روش شانی استفاده کرد.) برای این‌که ناچار نباشیم در هرمورد جداگانه، استدلال را تکرارکنیم، حالت‌کلی را بررسی می‌کنیم: از n مهره که، ازآن‌ها، k مهره، قرمزرنگ و بقیه سفید است، به‌چندطریق می‌توان یك‌دنباله درست کرد، به‌نحوی که‌دومهرهٔ قرمزکنارهم قرارنگیرند(شکل۹۵). تعداد روش‌هایی‌که، برای به‌خط‌کردن n مهره به‌صورت مجاز، وجوددارد، برابر است با تعداد حالت‌هایی‌که می‌توان k مهره را در $n-k+1$ محل

جاداد. این‌تعداد را «تعداد ترکیب‌های $n-k+1$ شیء k به k» گویند و به صورت $\binom{n-k+1}{k}$ یا C^k_{n-k+1} نشان می‌دهند (اثبات حکم را، در این‌جا، نمی‌آوریم). روشن است که

$$\binom{n-k+1}{k}=\frac{(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots(n-2k+2)}{1\times2\times3\times\dots\times k}$$

[در مخرج کسر سمت‌راست، حاصل‌ضرب عددهای طبیعی از ۱ تا k و، در صورت، حاصل‌ضرب k عدد طبیعی متوالی قرار دارد که، بزرگترین آن‌ها، برابر $n-k+1$ است.]

تعداد روش‌هایی که، به‌کمك آن‌ها، می‌توان بلیت‌های تراموا‌های شهر برگن را سوراخ کرد (از ۱ تا ۶ سوراخ) به‌این‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\binom{11}{1}+\binom{10}{2}+\binom{9}{3}+\binom{8}{4}+\binom{7}{5}+\binom{6}{6}=$$

$$=\frac{11}{1}+\frac{10\times9}{1\times2}+\frac{9\times8\times7}{1\times2\times3}+\frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}+$$

$$+\frac{7\times6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=$$

$$=11+45+84+70+21+1=232$$

در حل مسألهٔ ۳۵ گفته شد که سوراخ کردن بلیت‌های ۱۱ خانه‌ای تراموا‌های شهر برگن را، می‌توان در تناظر متقابل یك‌به‌یك با روش‌هایی قرارداد که، به‌کمك‌آن‌ها، پولیشکا، از پلکان ۱۲ پله‌ای مدرسه بالا می‌رود. به‌سادگی‌دیده می‌شود که، همین‌تعداد، متناظراست باتعداد روش‌های‌بالارفتن پولیشکا، به‌شرطی که از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ پله بپرد (روشن است که، نه به‌این ردیف، بلکه‌همهٔ پله‌ها را یکبار یك‌درمیان، یکباردودرمیان،...). به‌این ترتیب، راه‌حل دیگری هم، برای مسألهٔ ۳۵، به‌دست می‌آید. راه‌حل قبلی، به‌اندازهٔ کافی بغرنج بود، ولی درعوض نتیجه‌های «ضمنی» دیگری،

که ازآن راه به دست آمد، این عیبآن را جبران می‌کند.

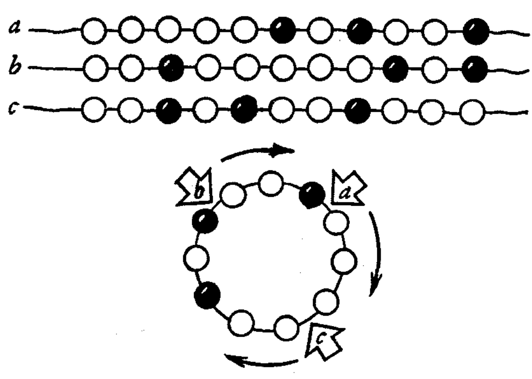
درپایانیادآوری می‌کنیم که درالمپیاد ریاضی سال ۱۹۷۰ مجارستان، حل یکی از مسأله‌ها ، به‌این‌جا منجر می‌شد که از بین ۹۰ کارت شماره‌دار (از ۱ تا ۹۰)، ۵ کارت را طوری جداکنیم که ، درآن‌ها ، دو شمارهٔ متوالی وجود نداشته‌باشد. ازآن‌چه گفته‌ایم، می‌توان نتیجه گرفت که ، این انتخاب را، می‌توان به

$$\binom{۸۶}{۵}=\frac{۸۶\times ۸۵\times ۸۴\times ۸۳\times ۸۲}{۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵}$$

روش انجام‌داد. اگر یولیشکا می‌خواست از ۹۱ پله بالابرود واز او خواسته بودندکه، هر بار، ۵ پله یکی برود، باز هم برای تعداد روش‌های بالا- رفتن او، همین عدد به دست می‌آید.

۳۷. دستبند ازگردن‌بند

یه‌ووچکا، اندیشهٔ خوبی را به‌دانش‌آموزان داد که، ازگردن‌بند خود، یك‌دستبنددرست کنند؛ ولی‌این‌دستبندها، مختلف درنخواهندآمد: ازدوگردن‌بند مختلف، ممکن است دو دستبند یکسان به‌دست‌آید . مثلاً، گردن‌بندهایی که



شکل ۹۶

در شکل ۹۶ داده شده است، بـا هم فرق دارند، ولی کافی است دو انتهای آن‌را به‌هم وصل کنیم تا معلوم شود که، در هرسه مورد، یك‌دستبند حـاصل می‌شود.

[این مطلب را، ساده‌تر از همه، از این راه می‌توان آزمـایش کرد که دایره‌هـای کوچکی («مهره‌ها») را روی محیط یك‌دایره رسم‌کنیم و ، از هر نقطه‌ای که با پیکان مشخص شده است ، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم. در این‌صورت، دنبالهٔ مهره‌ها به‌همان‌صورتی به‌دست می‌آید که در سه گردن‌بند وجود داشت (به‌شرطی که، در گردن‌بندها ، از چپ به‌راست حرکت کنیم)].

۳۸. دستبندها

[مسأله‌را می‌توان به‌این‌ترتیب حل کرد که، تعداد دستبندهای یکسان را محاسبه کنیم، ولی این‌راه‌حل، دشوار است. تعداد دستبندهای مختلف‌را، می‌توان با روش سریع‌تری محاسبه کرد.

در یك‌مورد باید مواظب بود . اگر دستبند را برگردانیم و از طرف دیگر به آن نگاه کنیم (مثلاً ، دستبند را دربرابرآئینه قراردهیم و به‌تصویر آن نگاه‌کنیم)، روشن است که خود دستبند، تغییر نمی‌کند. بنابراین ، بـاید نشانه‌ای را پیدا کنیم کـه ، به‌کمك‌آن، بتوان دو دستبند مختلف را از هم تمیز داد. یکی از راه‌های ساده، استفاده ازکوتاه‌ترین دنبالهٔ مهره‌های سفید است.]

۳ مهرهٔ قرمز، دستبند را به ۳ بخش تقسیم می‌کنند . از این به‌بعد ، برای سادگی کار، این‌بخش‌هارا «کمان» می‌نامیم. کوچکترین کمان را، کمانی می‌گیریم که تعداد مهره‌های سفیدآن کمتر باشد.

کوچکترین کمان، وقتی‌به‌دست می‌آید که، درآن، مهرهٔ سفیدی وجود نداشته‌بـاشد . این‌حـالت ، وقتی پیش می‌آید که، در دوطرف گردن‌بند (که دستبندرا ازآن‌ساخته‌ایم)، مهره‌های قرمز وجود داشته‌باشد. چون‌نمی‌توان به‌ترتیب دیگری، دومهرهٔ قرمز را درکنـارهم قرارداد، کـوچکترین کمان ـ

که شامل مهرهٔ سفید نباشد، تنها ازهمین‌راه حاصل می‌شود.

تعداد مهره‌های سفید کوچکترین کمان، نمی‌تواند از ۲ بیشتر باشد. اگر در واقع، تعداد مهره‌های سفید کوچکترین کمان، برابر ۳ شود، آن‌وقت هر کدام از دو کمان دیگر، باید دست کم شامل ۳ مهرهٔ سفید باشند و، در نتیجه، روی‌هم باید لااقل ۹ مهرهٔ سفید داشته باشیم، در حالی‌که ۸ مهرهٔ سفید بیشتر نداریم.

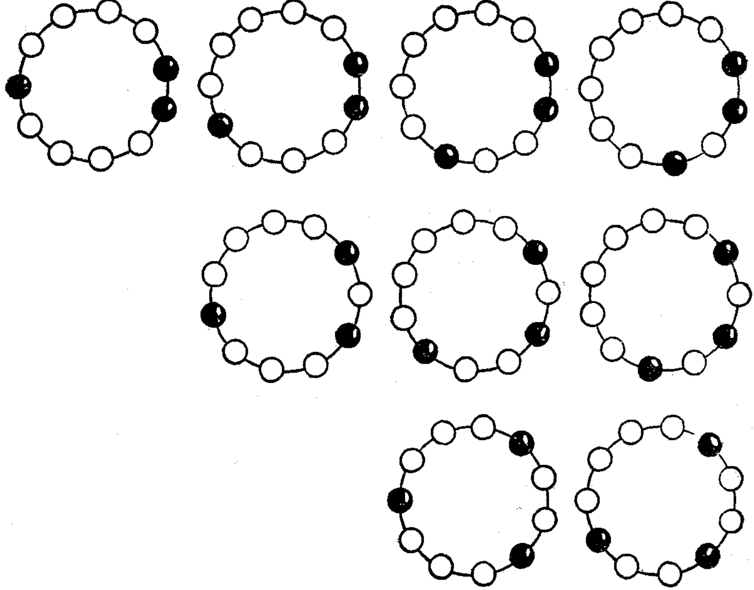
با توجه به‌این نکته، اکنون می‌توانیم، همهٔ حالت‌های ممکن تقسیم مهره‌های سفید را، در کمان‌ها، محاسبه کنیم.

تعداد مهره‌های سفید در کوتاه‌ترین کمان	تعداد مهره‌های سفید در دو کمان دیگر
۰	۱،۷
	۲،۶
	۳،۵
	۴،۴
۱	۱،۶
	۲،۵
	۳،۴
۲	۲،۴
	۳،۳

روی هم ۹ دستبند که در شکل ۹۷ نشان داده شده‌اند (که در واقع، تعدادی زیادی نیست).

[دیدیم که، این فهرست، کامل است و دستبند دیگری وجود ندارد. ضمناً روشن است که، این دستبندها، دوبه‌دو باهم اختلاف دارند، زیرا

a) اگر کوتاه‌ترین کمان‌ها، در دو دستبند، شامل تعداد متفاوتی مهرهٔ سفید باشند، نمی‌توان آن‌ها را یکسان دانست؛



شکل ۹۷

b) اگر کوتاه‌ترین کمان‌ها، در دو دستبند دارای تعداد یکسانی مهرهٔ سفید باشند، آن‌وقت، بلندترین کمان‌ها باهم فرق دارند و، بنابراین، آن‌ها را نمی‌توان یکسان دانست.]

بخش سوم

۳۹. زاغچه

[در صورت مسأله گفته شده است، از سکه‌هایی که به‌وسیلهٔ زاغچه پنهان شده است، چند تا سکهٔ ریز (به ارزش ۱ یا چند فیلر) و چند تا سکهٔ درشت (به‌ارزش ۱ فورینت یا بیشتر) وجود دارد. بنابراین، مـی‌توانیم در این تلاش باشیم که بدانیم چـه بخشی از ۱۳ فورینت و ۴۰ فیلر، مـربوط

به‌سکه‌های ریز است. اگردراین کار، موفق شویم، آن‌وقت، مسألهٔ ما، به‌دو مسألهٔ ساده‌تر و مستقل تبدیل می‌شود.]

ازآن‌جا که، ارزش سکه‌های درشت برحسب فورینت، عددی درست است، بنابراین، سکه‌های ریز (یعنی سکه‌های کمتر از یك فورینت)، در مجموع، برابرند با ۴۰ فیلر یا ۱ فورینت و ۴۰ فیلر یا ۲ فورینت و ۴۰ فیلر وغیره.

در واقع، نیازی به‌ادامهٔ مجموع، به‌بیش از ۲ فورینت و ۴۰ فیلر نیست، زیرا حداکثر مقدار سکه‌های ریز، برابر است با ۲ فورینت و ۵۰ فیلر: ۵ سکهٔ ۵۰ فیلری. این حداکثر را، نمی‌توان تا ۲ فورینت و ۴۰ فیلر پایین‌آورد، زیرا اگر حتی یکی از سکه‌های ۵۰فیلری را، باسکهٔ کوچکتری عوض‌کنیم، مجموع‌آن‌ها، دست‌کم، ۳۰ فیلر پایین می‌آید (۲۰ — ۵۰).

به‌همین‌ترتیب، زاغچه نمی‌توانست تنها ۴۰ فیلر سکهٔ کوچك مخفی کند، زیرا حداقل مبلغی که، برای ۵ سکهٔ کوچك به‌دست می‌آید، برابر است با ۱۰ × ۵، یعنی ۵۰ فیلر، تنها یك‌حالت ممکن، باقی‌ماند.

مبلغ سکه‌های ریزکمتر از ۱ فورینت تنها می‌تواند ۱ فورینت و ۴۰ فیلر باشد.

حالا روشن می‌کنیم، این مبلغ، از چه سکه‌هایی می‌تواند باشد. با سکه‌های کمتر از ۵۰ فیلر، نمی‌توان بیش‌از ۱ فورینت‌انتخاب کرد (۲۰ × ۵). بنابراین، بین سکه‌های کوچك کمتر از ۱ فورینت، نمی‌تواندکمتر از دو سکهٔ ۵۰ فیلری وجود داشته‌باشد. در واقع، اگر فقط یك‌سکهٔ ۵۰ فیلری در نظر بگیریم و ۴ سکهٔ دیگررا ۲۰ فیلری انتخاب‌کنیم، روی‌هم ۱ فورینت و ۳۰ فیلر به‌دست می‌آید. همچنین، روشن است که تعداد سکه‌های ۵۰ فیلری نمی‌تواند از ۲ بیشتر شود (۱۴۰ > ۵۰ × ۳). بنابراین، مسلم است‌که، بین‌سکه‌های ریز، درست ۲سکهٔ ۵۰ فیلری بوده است. ۴۰ فیلر باقی‌می‌ماند و، روشن است‌که، تنها به‌یك‌طریق می‌توان سه‌سکهٔ ۱۰ و ۲۰ فیلری را را به‌مجموع ۴۰ فیلر انتخاب‌کرد: ۱۰ + ۱۰ + ۲۰.

برای پنج سکهٔ درشت (که کمتر از ۱ فورینت نیستند)، ۱۲ فورینت

(۱/۴۰ — ۱۳/۴۰) می‌ماند. دربین این‌سکه‌های درشت، سکهٔ ۱۰فورینتی وجود ندارد، زیرا، اگر یك‌سکه از این نوع مخفی شده‌باشد، برای ۴سکه، ۲ فورینت باقی‌ماندکه دیگر به‌معنای سکه‌های ۱ فورینتی و یا بیشتر ازآن، نیست. ازسکه‌های ۵ فورینتی هم، بیش ازیکی نمی‌تواند وجود داشته‌باشد، زیرا اگر دوسکهٔ ۵ فورینتی داشته‌باشیم، برای ۳ سکهٔ باقی‌مانده ، فقط ۲ فورینت باقی‌می‌ماند. ولی، وجود یك‌سکهٔ ۵ فورینتی لازم است، زیرا با ۵ سکهٔ ۲ یا ۱ فورینتی نمی‌توان به ۱۲ فورینت رسید (حداکثر ۲ × ۵، یعنی ۱۰ فورینت خواهیم داشت).

به‌این ترتیب، بین سکه‌هایی‌که زاغچه مخفی‌کرده است، یك (و تنها یك) سکهٔ ۵ فورینتی بوده است. ۴ سکه باقی‌می‌ماند به‌مبلغ ۵ — ۱۲، یعنی ۷ فورینت. به‌سادگی معلوم می‌شودکه ۴ سکه به‌مبلغ ۷ فورینت را از بین سکه‌های ۱ و ۲ فورینتی ، تنها به‌یك‌طریق می‌توان انتخاب‌کرد: ۱ سکهٔ ۱ فورینتی و ۳ سکهٔ ۲ فورینتی.

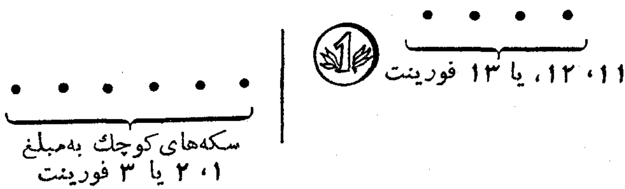
به‌این ترتیب، نتیجهٔ‌کامل به‌دست می‌آید. مسأله ، یك‌جواب منحصر دارد. زاغچه، این‌سکه‌ها را مخفی‌کرده است:

۱ سکه به‌ارزش ۵ فورینت،
۳ سکه به‌ارزش ۲ فورینت،
۱ سکه به‌ارزش ۱ فورینت،
۲ سکه به‌ارزش ۵۰ فیلر،
۱ سکه به‌ارزش ۲۰ فیلر،
۲ سکه به‌ارزش ۱۰ فیلر.

۴۰. سرقت ادامه دارد

مبلغ‌سکه‌های ریز، نمی‌تواندکمتر از ۱ فورینت وبیشتر از ۳ فورینت (۵۰ × ۶) باشد، یعنی این مبلغ ، باید برابر ۱ یا ۲ یا ۳ فورینت باشد . ولی، هنوز درموقعیتی نیستیم‌که بتوانیم، ازاین سه‌حالت، یکی‌را بردیگران ترجیح‌دهیم. بنابراین، به‌بخش دیگرمسأله می‌رویم وتلاش می‌کنیم مبلغ‌کل

سکه‌هایی را پیدا کنیم که، هر کدام آن‌ها، کمتر ازیك فورینت نیستند.
چون تعداد سکه‌های ۱ فورینتی، بیشتر از تعداد سکه‌های ۵ فورینتی است، بنابراین، در بین سکه‌های درشتی که به‌سرقت رفته است ، دست‌کم ، یك‌سکهٔ یك‌فورینتی وجود دارد. بقیهٔ سکه‌ها، می‌توانند برابر ۱۱ یا ۱۲ یا ۱۳ فورینت باشند (شکل ۹۸).

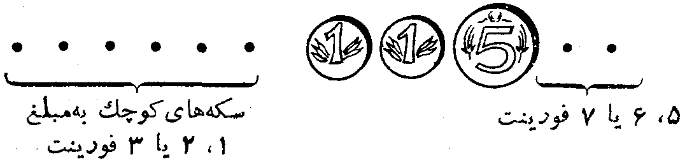


شکل ۹۸

از صورت مسأله روشن است که ، در برابر هرسکهٔ ۱۰ فورینتی ، دست‌کم یك‌سکهٔ ۲ فورینتی وجود دارد. این‌دو سکه ، روی‌هم برابر ۱۲ فورینت می‌شوند که ، با دوسکهٔ باقی‌مانده، دست‌کم، ۱۴ فورینت به‌دست می‌آید که خیلی زیاد است. بنابراین، دربین سکه‌هایی که زاغچه پنهان کرده است، نمی‌تواند سکهٔ ۱۰ فورینتی باشد.

در عوض، دست‌کم یك‌سکهٔ ۵ فورینتی باید حتماً وجود داشته باشد، زیرا درغیراین‌صورت، از۴ سکهٔ باقی‌مانده،حداقل ۱۱ فورینت به‌دست نمی‌آید (2×4، تنها برابر ۸ فورینت می‌شود). ولی‌باواردکردن هرسکه ۵فورینتی، باید دست‌کم یك‌سکهٔ یك‌فورینتی هم‌واردکنیم (زیرا، سکه‌های ۱ فورینتی، بیشترازسکه‌های ۵فورینتی هستند). بنابراین،تنهادوسکهٔ‌مجهول باقی‌می‌ماند که، ارزش هرکدام، کمتر از ۱ فورینت نیست وروی‌هم، ۵، ۶ یا ۷فورینت می‌ارزند (شکل ۹۹). به‌این‌ترتیب ، به‌ناچار باید یك‌سکهٔ ۵ فورینتی دیگر هم وجودداشته‌باشد، زیرا درغیر این‌صورت،حداکثر مبلغ دوسکهٔ‌باقی‌مانده، برابر ۴ فورینت می‌شود . همراه با این سکهٔ ۵ فورینتی، باید یك‌سکهٔ ۱ فورینتی هم داخل کرد. به‌این ترتیب ، تعداد سکه‌های ۵ فورینتی و حداقل تعداد سکه‌های ۱ فورینتی معلوم می‌شود.

تا این‌جا ، مبلغ کل سکه‌های درشت ، برابر ۱۳ فورینت می‌شود



شکل ۹۹

(۵×۲+۱×۳) و، بنابراین، برای سکه‌های ریز، ۲ فورینت باقی‌می‌ماند که تنها به‌یك‌طریق ممکن است: ۳×۵۰+۲×۲۰+۱۰.

(این‌که ۲ فورینت را، تنها با همین روش، می‌توان بین سکه‌های کوچك تقسیم کرد، کاملاً شبیه قبل اثبات می‌شود: سکه‌های به‌ارزش ۵۰ فیلر، نه‌کمتر از ۳ عدد و نه بیشتر از ۳ عدد نمی‌توانند باشند. دنبالهٔ‌مطلب هم روشن است.)

بنابراین، مسأله، یك‌جواب منحصر دارد:

۲ سکه به‌ارزش ۵ فورینت،

۳ سکه به‌ارزش ۱ فورینت،

۳ سکه به‌ارزش ۵۰ فیلر،

۲ سکه به‌ارزش ۲۰ فیلر،

۱ سکه به‌ارزش ۱۰ فیلر.

۴۱. آیا فرق نمی‌کند؟

نه! گزاره‌های (۱) و (۲) هم‌ارز نیستند: گزارهٔ (۲) نتیجه‌ای ازگزارهٔ (۱) است، ولی عکس‌آن درست نیست، یعنی‌گزارهٔ (۱) ازگزارهٔ (۲) نتیجه نمی‌شود.

فرض کنید، مبلغی پول باکمترین تعداد اسکناس‌ها پرداخت شده باشد. این، به‌معنای‌آن‌است که حتی یکی ازاین‌اسکناس‌هارا نمی‌توان بااسکناس‌های دیگری عوض‌کرد، زیرا اگر چنین تعویضی ممکن‌بود، حسابدار می‌توانست همین مبلغ را، با تعداد بیشتری اسکناس بپردازد.

ولی، ممکن است این وضع پیش‌آیدکه نتوان هیچ‌کدام از اسکناس‌ها را عوض کرد، ولی مبلغ پرداختی، با کمترین تعداد اسکناس‌ها نباشد. مثلاً فرض کنیدکه بایده ۱۱۰ فورینت پرداخت شود. حسابدار می‌تواند، یك اسکناس ۵۰ فورینتی و ۳ اسکناس ۲۰ فورینتی بپردازد. روشن است که اسکناس ۵۰ فورینتی را نمی‌توان با اسکناس‌های ۲۰ فورینتی عوض کرد. ولی از این‌جا نباید نتیجه گرفت که ۱۱۰ فورینت با حداقل تعداد اسکناس‌ها پرداخت شده است. همهٔ این مبلغ را می‌توان با تنها ۲ اسکناس پرداخت کرد (یك اسکناس ۱۰۰ فورینتی و یك اسکناس ۱۰ فورینتی).

[ممکن‌است، به‌حق، به‌استدلال مااعتراض کنند و بگویندکه عمویانوش نمی‌تواند حقوقی به‌این‌کمی داشته‌باشد. اگر به‌۱۱۰ فورینت، ۵ چك‌بانکی ۵۰۰فورینتی‌اضافه کنیم (وهمان‌استدلال‌را درنظربگیریم)، حقوق‌عمویانوش، تا ۲۶۱۰ فورینت بالا می‌رود.]

۴۲. پرداخت «اقتصادی»

نه! این استدلال درست نیست ونمی‌تواند درست باشد.

در واقع، صندوق‌دار با شنیدن خواهش اگون برگ، به‌احتمال زیاد، ابتدا ۲ سکهٔ ۱۰ دوکاتی به او می‌دهد (زیرا سکهٔ با ارزش بیشتری وجود ندارد)، سپس ۲ سکهٔ ۲ دوکاتی و ۱ سکهٔ ۱ دوکاتی؛ به‌این ترتیب، اگون‌برگ، روهم ۵ سکه دریافت می‌کند.

ولی اگر صندوق‌دار، کمی استعداد خود را به‌کار بیندازد، متوجه می‌شودکه پرداخت را، نه از سکه‌های ۱۰ دوکاتی، بلکه از سکه‌های ۸ دوکاتی‌آغاز کند و، به‌مشتری خود، سه‌سکهٔ ۸ دوکاتی ویك سکهٔ ۱دوکاتی، یعنی روی‌هم ۴ سکه بدهد.

به‌این ترتیب، اگر صندوق‌دار، خواهش مشتری خود راکه گفته بود «بزرگترین سکه‌های ممکن» را به‌من بدهید، به‌این معنا بگیردکه، ابتدا، از بزرگترین سکه‌آغاز کند و«تاآن‌جاکه ممکن است» ازبزرگترین سکه استفاده کند و، سپس، برای مبلغ باقی‌مانده، به‌سکه‌های کوچکتر روآورد، لزوماً،

تعداد سکه‌ها، کمترین تعداد ممکن نخواهد بود. حداقل تعداد سکه‌ها، وقتی تضمین می‌شود که، صندوق‌دار، مقدار متوسط ارزش سکه‌هایی را که می‌پردازد (یعنی نسبت مبلغ پرداخت شده به تعداد سکه‌ها)، به‌حداکثر مقدار ممکن برساند (و این، همان کاری بود که صندوق‌دار، در حالت دوم، برای پرداخت ۲۵ دوکات، انجام داد). تعداد سکه‌ها، در این روش، به‌حداقل مقدار خود می‌رسد، زیرا وقتی صورت کسر (مبلغ پرداختی) مفروض باشد، مقدار نسبت، وقتی به حداکثر خود می‌رسد که، مخرج (تعداد سکه‌ها)، به‌حداقل خود رسیده باشد.

یادداشت ۱. در واقع، مشکل در این‌جاست که خواهش اگون‌برگ را (درباره پرداخت ۲۵ دوکات «با سکه‌هایی که، در حد امکان، حداکثر ارزش را داشته‌باشد»)، نمی‌توان به‌طور یك ارزشی تفسیر کرد. این خواهش را، می‌توان این‌طور تفسیر کرد که: صندوق‌دار باید، ابتدا، از بزرگترین سکه‌ها آغاز کند و، سپس، به‌سکه‌های کوچکتر بپردازد. در تفسیر دوم، صندوق‌دار باید مبلغ موردنظر مشتری را، طوری بپردازد که، ارزش متوسط سکه‌های پرداختی، حداکثر مقدار ممکن باشد. اگر صحبت برسردستگاه پولی رایج درمجارستان بود، درهردوحالت، به‌یك نتیجه می‌رسیدیم، ولی دراین‌مسأله، صحبت برسر دستگاه پولی شهر برگن است و، همان‌طور که دیدید، درآن‌جا، به‌نتیجه‌های متفاوت می‌رسیم.

اگربیشتر دقت کنیم، درواقع، خواهش اگون‌برگ را (درباره پرداخت پول او «با سکه‌هایی به‌ارزش حداکثر»)، به‌جز این‌دو تفسیر، به‌صورت دیگری هم می‌توان تفسیر کرد. مثلاً، به‌این ترتیب: کوچکترین سکه‌ای که برای پرداخت ۲۵ دوکات مورداستفاده قرار می‌گیرد، باید حداکثر ارزش ممکن را داشته باشد.

انتخاب این یاآن تفسیر، چیزی نیست که به‌ریاضیات مربوط باشد. مسأله مفروض، وقتی معنای ریاضی پیدا می‌کند که، ابتدا، تعریف دقیقی از خواهش مشتری‌را در اختیار داشته‌باشیم. باهمهٔ این‌ها، درك این مطلب که، مفهومی، تعریف دقیق ندارد و به‌صورت‌های مختلفی قابل تفسیر است،

به‌اندیشهٔ ریاضی نیاز دارد.

یادداشت ۲. به سادگی می‌توان فهمید که در این دستگاه پولی ـ که در صورت مسأله دربارهٔ آن صحبت شده است ـ مبلغ ۲۵ دوکات را نمی‌توان با تعدادی کمتر از ۴ سکه پرداخت. پرداخت با ۴ سکه را هم، تنها به همان طریقی می‌توان انجام داد که، در حل مسأله، آوردیم (۳ سکهٔ ۸ دوکاتی و ۱ سکهٔ ۱ دوکاتی) . اثبات این حکم را، به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

یادداشت ۳. با روش اول (که درآن، هربار «بزرگترین سکهٔ ممکن» را، برای پرداخت مبلغ موردنظر انتخاب می‌کنیم)، هرمبلغی‌را درهردستگاه پولی، تنها به‌یك طریق می‌توان پرداخت. ولی اگر ضمن پرداخت مبلغ، بخواهیم از حداکثر مقدار متوسط سکه‌های صندوق استفاده‌کنیم، همیشه یك جواب منحصر ندارد (دستگاه پولی مجارستان طوری است‌که، در این روش‌انتخاب سکه‌ها، به‌یك جواب منحصر می‌رسیم، ولی درهمهٔ دستگاه‌های پولی، این‌طور نیست). در دستگاه پولی شهر برگن هم، که در مسأله باآن سروکار داریم، ممکن است جواب منحصر نداشته‌باشیم. مثلاً، برای پرداخت ۳۲ دوکات، دست‌کم، به ۴ سکه نیازداریم (سه‌سکه کافی نیست، زیرا سکهٔ بیش از ۱۰ دوکاتی وجود ندارد و با سه‌سکهٔ ۱۰ دوکاتی هم، تنها ۳۰دوکات پرداخت می‌شود)؛ ولی ۳۲ دوکات‌را با۴ سکه، به‌دوطریق می‌توان پرداخت: ۲ × ۱ + ۱۰ × ۳ یا ۸ × ۴.

یادداشت۴. این که، هردونوع تفسیر مربوط به‌خواهش اگون‌برگ در- بارهٔ پرداخت پول‌او، دردستگاه پولی مجارستان، منجر به‌یك نتیجه می‌شود، امری طبیعی است. ولی اثبات دقیق‌آن، چندان ساده نیست و نمی‌توانیم، آن‌را، به‌عهدهٔ خوانندهٔ علاقه‌مند بگذاریم.

در این زمینه، پرسش بسیار جالبی پیش می‌آید: در چه دستگاه‌های پولی، این‌دوروش پرداخت، منجر به‌دونتیجهٔ مختلف می‌شوند و،چه‌وقت، نتیجه‌های یکسانی را به‌دست می‌دهند. خوانندهٔ علاقه‌مند، می‌تواند، در زمینهٔ این‌پرسش، مسأله‌های مختلفی را طرح کند ودربارهٔ آن‌ها بیندیشد.

I. حل.

[مسأله، چندان ساده‌نیست. اگرحکم درست باشد، باید تأکیدکردکه، برای‌هرعدد درستی، صادق است، یعنی هرمبلغ صحیحی رامی‌توان‌با سکه‌های ۳ و ۵ تالری پرداخت (به‌استثنای مبلغ‌های ۱، ۲، ۴ و ۷ تالری، که برای پرداخت آن‌ها ، باید بازپرداختی وجود داشته‌باشد) . و اگر حکم مسأله نادرست باشد، باید بتوان عدد صحیحی پیداکرد که، این‌حکم ، دربارهٔ آن صدق نکند، یعنی مبلغی را پیدا کنیم‌که، با هیچ روشی، نتوان‌آن‌را به‌کمك سکه‌های ۳ و ۵ تالری پرداخت‌کرد (واگر صحبت از مبلغ ۱، ۲، ۴ یا ۷ تالر باشد، نتوان آن را، چه همراه با بازپرداخت و چه بدون‌آن، به‌دیگری داد) .

با همهٔ این‌ها ، هرگونه تلاشی برای پیداکردن یك‌مثال، که بتواند حکم مسأله‌را نقض‌کند، بیهوده است. هرعدد صحیحی راکه درنظر بگیریم، بعد از تلاشی کم و بیش طولانی ، روشن می‌شودکه ، اگر پولی برحسب تالر، برابر این‌عدد باشد، با سکه‌های ۳ و ۵ تالری قابل‌پرداخت است. این امر، گواه برآن است که، حکم مسأله، باید درست باشد.

ولی، قبل از آن که به اثبات حکم، برای حالت کلی ، بپردازید، عاقلانه‌تر است که، ابتدا، آن‌را درمورد عددهای طبیعی نخستین ، آزمایش کنید.]

پرداخت ۱ تالر را، مثلاً، می‌توان به‌این‌ترتیب انجام‌دادکه ۲ سکهٔ ۳ تالری بدهیم و ۱ سکهٔ ۵تالری بگیریم. این‌پرداخت را، به‌طور خلاصه، می‌توان این‌طور نوشت:

$$۱ = ۲ \times ۳ - ۵$$

به‌همین‌ترتیب، ۲ تالر را به‌این شکل می‌توان پرداخت که یك‌سکهٔ ۵تالری بدهیم و یك سکهٔ ۳ تالری پس بگیریم:

$$۲ = ۵ - ۳$$

۳ تالر هم‌که با یك سکه قابل‌پرداخت است.

پول به‌مبلغ ۴ تالر را ، می‌توان همچون «دوبار» پرداخت ۲ تالری درنظر گرفت:

$$۴ = ۲ \times ۵ - ۲ \times ۳$$

۵ تالر با یك سکهٔ ۵ تالری و ۶ تالر با دوسکهٔ ۳ تالری پرداخت می‌شود:

$$۶ = ۲ \times ۳$$

برای پرداخت ۷ تـالر ، ابتدا می‌توان درنظرگرفت: $۳ + ۴ = ۷$ ، سپس، ۴ تـالر را طبق آن‌چه قبلاً گفته شد پرداخت‌کرد و ، بعد ، یك سکهٔ ۳ تالری به‌آن افزود. ولی از روش دیگری هم می‌توان استفاده‌کرد:

$$۷ = ۲ \times ۵ - ۳$$

۸ تالر را می‌توان؛ به‌عنوان ۴×۲ درنظرگرفت و «دوبار، هربار۴ تالر»پرداخت: $۳ \times ۴ - ۵ \times ۴ = ۸$، ولی راه‌کاملاً ساده‌تری وجوددارد. ساده‌ترین نوع پرداخت ۸ تالر چنین است:

$$۸ = ۵ + ۳$$

[با رسیدن به ۸ تالر، در مرز مهمی قرار می‌گیریم: طبق حکم، باید بتوانیم هرمبلغ درستی‌را، از ۸ تالر به‌بعد، بدون هیچ‌بازپرداختی بپردازیم.

از آن‌جـاکه، به‌این‌ترتیب، نمی‌توانیم حکم را برای هرعدد صحیحی آزمایش‌کنیم، باید باآغاز از عددی، یك‌رابطهٔ‌کلی پیداکرد و ثابت‌کردکه ، این‌رابطه، برای همهٔ‌عددهای بعدی درست‌است. به‌زبان دیگر باید ثابت‌کرد که، اگر بتوان مبلغی راکه با عدد صحیح بیان می‌شود، به‌کمك سکه‌هـای ۳ و ۵ تالری (بدون بازپرداخت) پرداخت‌کرد، حتماً برای مبلغی هم‌که ۱ تالر بیشتر از مبلغ قبلی است، این‌پرداخت ممکن است.

فرض‌کنیم، n تالر روی میزچیده باشیم، وبخواهیم، نه n تالر، بلکه $(n+۱)$ تالر بپردازیم . اگر سکهٔ ۱ تـالری وجود نداشته‌بـاشد ، چگونه می‌توان مبلغ روی میز را ۱ تالر بیشترکرد؟

به‌یاد می‌آوریم که، عدد ۱ را، می‌توان به‌این‌ترتیب نشان‌داد:

$$۱=۲\times۳-۵$$

بنابراین، اگر یك سکهٔ ۵ تالری از روی میز برداریم و دوسکهٔ ۳ تالری به‌جای‌آن بگذاریم، به‌مبلغ $(n+1)$ تالر می‌رسیم.

این‌درست! ولی، اگر دربین سکه‌های روی میز، اصلاً سکهٔ ۵ تالری وجود نداشته‌باشد، چه‌بایدکرد؟ (مثلاً ، در حالت $n=۹$، روی میز ، سه سکهٔ ۳ تالری و، در حالت $n=۱۸$، ۶ سکهٔ ۳ تالری گذاشته شده‌باشد.) خروج ازاین‌دشواری، وقتی ممکن است که، عدد ۱ را، این‌طورتصورکنیم:

$$۱=۲\times۵-۳\times۳$$

یعنی، برای اضافه‌کردن ۱ تالر، به‌مبلغ روی میز، باید سه‌سکهٔ ۳ تالری را برداشت و دو سکهٔ ۵ تالری را به‌جای آن گذاشت.

ولی ، در حالتی‌که روی میز نتوان سه‌سکهٔ ۳ تالری یا یك‌سکهٔ ۵ تالری پیداکرد، چه‌وضعی پیش‌می‌آید؟ این‌حالت، تنها وقتی پیش می‌آیدکه، روی میز، فقط دوسکهٔ ۳ تالری وجود داشته‌باشد. اگر یك‌سکه به‌آن‌ها اضافه‌کنیم، آن‌وقت، یا سه‌سکهٔ ۳ تالری در اختیار خواهیم داشت و یا یك سکهٔ ۵ تالری. بنابراین، در این‌حالت، روی میز، ۶ تالر قراردارد و ما می‌دانیم‌که نمی‌توان‌آن‌را به ۷ تالر تبدیل‌کرد، زیرا پرداخت ۷ تالر، بدون بازپرداخت ، ممکن نیست . به‌این‌ترتیب ، برای این‌که بتوان مبلغ روی میز را، یك‌تالر بالابرد، باید مبلغ‌آن‌کمتر از ۸ تالر نباشد.]

بنابراین، این‌چیزها برای ما روشن شد:

وقتی‌که مبلغ‌روی میز، از۸ تالرکمتر نباشد، دربین سکه‌های‌روی‌میز

(a) یا یك‌سکهٔ ۵ تالری وجود دارد،

(b) ویا دست‌کم، سه‌سکهٔ ۳ تالری.

در حالت (a) ، یك‌سکهٔ ۵ تالری را از روی میز برمی‌داریم و ، به‌جای‌آن، دوسکهٔ ۳ تالری می‌گذاریم.

در حالت (b)، سه‌سکهٔ ۳ تالری را ازروی میز برمی‌داریم و دوسکهٔ

۵ تالری را به‌جای‌آن می‌گذاریم.

در هردوحالت ، می‌توانیم مبلغ روی میز را، یك تـالر زیادتر کنیم، یعنی اگر n تالر داشته‌باشیم، همیشه می‌توانیم $(n+۱)$ تالر را بپردازیم، بدون این‌که نیاز به‌بازپرداخت باشد.

دیدیم‌که ۸ تالر را می‌توان روی میز قرارداد، بنابراین، برای‌رسیدن به‌هرمبلغی، می‌توان با استفاده از روش (a) ویا روش (b)، مرتباً، یك‌تالر به‌مبلغ قبلی اضافه‌کرد وکار را تـاآن‌جا ادامه دادکه به‌مبلغ موردنظر خود برسیم. به‌این‌ترتیب، حکم مورخ شهر برگن درست است.

یادداشت. استدلالی راکه دراین‌جاآوردیم، درریاضیات «اثبات وجود» می‌نامند. در واقع، توانستیم ثابت‌کنیم، روشی وجود داردکه، به‌کمك‌آن، می‌توان هرپرداختی را ــ که مبلغ درستی باشد ــ انجام‌داد. ولی ، بااین‌که امکان پرداخت هرمبلغی، به‌طور اصولی، ثابت شد، تحقق این امکان چندان ساده نیست. مثلاً ، اگـر بخواهیم شیوهٔ پرداخت ۴۹ تالـر (البته ، بدون بازپرداخت) را بدانیم ، بـاید به‌ترتیب زیر عمل‌کنیم. ابتدا، $۸=۵+۳$ تالر را روی میز قراردهیم (یعنی یك‌سکهٔ ۵ تـالری و یك سکهٔ ۳ تالری)، سپس به‌ترتیب ، بـا عوض‌کردن بعضی از سکه‌های روی میز بـا سکه‌های دیگری، مرتباً یك‌تالر به‌موجودی میز بیفزاییم. روی میز، به‌ترتیب، این سکه‌ها، پدیدار خواهد شد:

تعداد سکه‌های ۳ تالری	تعداد سکه‌های ۵ تالری	مبلغ کل (برحسب تالر)
۱	۱	۸
۳	۰	۹
۰	۲	۱۰
۲	۱	۱۱
۴	۰	۱۲
۱	۲	۱۳
. . .	. . .	. . .

روشن است که ، اگر به همین ترتیب جلو برویم ، سرانجام به مبلغ ۴۹ تالر خواهیم رسید ؛ ولی برای رسیدن به این هدف ، باید خود را ، برای انجام یك رشته عمل‌های طولانی آماده کنیم. در عمل ، بهتر است از روش ساده‌تری استفاده کنیم. مسألهٔ ۴۸ ، ارتباط مستقیمی با این موضوع دارد.

II. راه حل کوتاه‌تر

مبلغ‌های از ۱ تا ۱۰ تالر را ، به‌همان صورتی که در حل I نشان دادیم، می‌پردازیم، از آن‌جا که باقی‌ماندهٔ هرعدد n بر ۳، برابر با یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۲ می‌باشد، عدد n را می‌توان به‌یکی از صورت‌های زیر نوشت:

$$n=3k \ (I)،\ n=3k+1 (II)،\ n=3k+2 (III).$$

بنابراین، برای حالت $n>10$ داریم:

درحالت I: $n-9=3k-9=3(k-3)$،

درحالت II: $n-10=3k+1-10=3k-9=3(k-3)$،

درحالت III: $n-8=3k+2-8=3k-6=3(k-2)$.

به‌این ترتیب، در هرحالت، با مضرب درست و مثبتی از ۳ سر و کار پیدا می‌کنیم. پرداخت به‌این صورت انجام می‌گیرد:

درحالت I، ۹ تالر می‌پردازیم،

درحالت II، ۱۰ تالر می‌پردازیم،

درحالت III، ۸ تالر می‌پردازیم،

و سپس ، $(k-3)$، $(k-3)$ و $(k-2)$ سکهٔ ۳ تالری، به‌ترتیب، برای حالت‌های I، II و III می‌پردازیم که، در نتیجه، مبلغ n تالری موردنظر پرداخت خواهد شد.

به‌این نکته توجه کنیم که طرح تازه دستگاه پولی، سکهٔ ۵ تالری را از دستگاه قبلی به‌ارث برده است و، به‌جای سکهٔ ۳ تالری، سکهٔ ۸ تالری را قرار داده است.

I. حکم اول پیشنهاد دهندهٔ طرح جدید واضح است.

درواقع، چون داریم: $8-5=3$، اگر اجازه داشته باشیم، پرداخت را با بازپرداخت انجام دهیم، هیچ مشکلی پیش نمی‌آید: در هرمبلغی که با سکه‌های ۳ و ۵ تالری تنظیم شده است، می‌توان به‌جای هرسکهٔ ۳ تالری، یك سکهٔ ۸ تالری پرداخت و، درعوض، یك سکهٔ ۵ تالری پس گرفت.

II. حکم دوم پیشنهاد دهندهٔ طرح جدید هم درست است (اگرچه، چندان واضح نیست).

I. نتیجه می‌شود که «اضافهٔ» یك تالر را ، که در حل مسألهٔ قبل، به‌صورت‌های

$$1=2\times 3-5$$

$$1=2\times 5-3\times 3$$

نشان دادیم، می‌توان در این‌جا، به‌صورت دو «نسخهٔ» تازه درآورد:

$$1=2\times 3-5=2(8-5)-5=2\times 8-3\times 5,$$

$$1=2\times 5-3\times 3=2\times 5-3(8-5)=5\times 5-3\times 8$$

این «نسخه‌ها» به‌ما امکان می‌دهند تا بتوانیم به‌هرمبلغ دلخواهی، ۱ تالر اضافه کنیم. ولی ما علاقه‌مند به‌پرداختی هستیم که بازپرداخت نداشته باشد. بنابراین، باید ببینیم، درچه حالت‌هایی می‌توان از مبلغی که «روی میز گذاشته شده است»، ۳ سکهٔ ۵ تالری یا ۳ سکهٔ ۸ تالری برداریم.

روشن است که، برای این منظور و هم برای امکان ادامهٔ کار، باید از مبلغی آغاز کرد که، اولاً با سکه‌های ۵ و ۸ تالری، بدون بازپرداخت، قابل پرداخت باشد، ثانیاً دست‌کم سه سکه ازیك نوع (۵تالری یا ۸تالری) وجود داشته باشد.

معلوم است که ۲۶ تالر، بـا شرط اول سازگار، ولـی با شرط دوم ناسازگار است:

$$۲ \times ۵ + ۲ \times ۸ = ۲۶$$

۲۷ تالر را هم، بدون بازپرداخت، نمی‌توان به کسی داد: برای پـرداخت ۲۷ تالر یا باید ۴ سکهٔ ۸ تالری بدهیم ویك سکهٔ ۵ تالـری پس بگیریم، و یا ۷ سکهٔ ۵ تالری بدهیم و یك سکهٔ ۸ تالری پس بگیریم:

$$۲۷ = ۴ \times ۸ - ۵ = ۷ \times ۵ - ۸$$

نخستین مبلغی که با هر دو شرط سازگار است، ۲۸ تالر است:

$$۲۸ = ۸ + ۴ \times ۵$$

۲۸ تالر را می‌توان، به طورکامل پرداخت کرد و، بـرای مبلغ‌های بیشتر از ۲۸ تالر، این حکم درست است: اگر مبلغی را بتوان، بدون باز-پرداخت، با سکه‌های ۵ و ۸ تالری پرداخت‌کرد، حتماً مبلغی را هم‌که یك تالر بیشترباشد، می‌توان با همین سکه‌ها (بازهم بدون بازپرداخت) پرداخت کرد. برای‌این منظور، می‌توان۲ سکهٔ ۸ تالری را به جای ۳ سکهٔ ۵تالری گذاشت و یا ۵ سکهٔ ۵ تالری را به جای ۳ سکهٔ ۸ تالری.

۴۵ بحث ادامه دارد

[پاسخ مثبت، در مسالهٔ قبل، برچه پایه‌ای استوار بود؟ بر این پایه که، واحد پولی تازه را مـی‌توانستیم بـه صورت مجموع دو واحـد قدیم بنویسیم: $۵+۳=۸$. این امراجازه داد تا، برای «حذف» واحد قدیم، از واحدهای تازه استفاده‌کنیم: $۵-۸=۳$.]

در هرسه حالت، حکم مسأله درست است.

I. به همان ترتیب مسالهٔ قبل، در این جا هم می‌توان از واحدهای قبلی (۵ و ۸ تالری) به‌واحد جدیدطرح‌پیشنهادی A رسید: واحدهای‌جدید را به‌صورت ۸ و $۱۳ = ۵ + ۸$ نشان می‌دهیم. این وضع، اجازه‌می‌دهد که واحد «حذف شده» را به‌صورت تفاضل دو واحد پولی جدید، مشخص‌کنیم:

$$۵ = ۱۳ - ۸$$

با استفاده از این رابطه، می‌توان «نسخه‌هایی» را که در حل مسالهٔ قبل برای بیان واحد پیدا کردیم، به «نسخه‌های» تازه‌ای، برای مسالهٔ مفروض، تبدیل کنیم و، سپس، کوچکترین عددی را به دست آوریم که، با آغاز از آن، بتوان با تبدیل سکه‌ها، یك تالر به‌مبلغ «روی‌میز» اضافه کرد. (انجام این محاسبه‌ها را به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم.)

II. اگر برای دو سکه با ارزش‌های a و b تالر ($a<b$)، معلوم باشد که از مبلغی به بعد، می‌توان هر مبلغ دلخواه را، بدون بازپرداخت به‌کمك سکه‌های a و b تالری پرداخت کرد، در آن صورت، با استدلالی شبیه آن چه در I داشتیم، می‌توان ثابت کرد که، همین حکم، دربارهٔ سکه‌های به ارزش a و $a+b$ تالر درست است.

بنابراین ، اگر دو عدد دلخواه متوالی از دنبالهٔ فیبوناچی را ، به عنوان واحدهای پولی، در نظر بگیریم، باز هم این حکم به قوت خود باقی خواهد بود. (دنباله فیبوناچی را به یاد بیاوریم:

۱، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۸ ، ۱۳ ، ۲۱ ، ۳۴ ، ۵۵ ، ۸۹ ، ۱۴۴ ، ۲۳۳ ، ...

که درانتهای یادداشت از حل مسالهٔ ۳۴ به دست آوردیم.)

بنابراین، حکم مساله، دربارهٔ هر یك از زوج عددهای ۸ و ۱۳ ، ۲۱ و ۳۴، ۱۴۴ و ۲۳۳ صحیح است و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۶. عددهای جدید

دربارهٔ هیچ‌کدام از پیشنهادهای (D) ، (E) و (F)، این حکم را نمی‌توان کرد.

از طرح (D) آغاز می‌کنیم. سکهٔ ۸ تالری را می‌توان با ۴ سکهٔ ۲ تالری عوض کرد. بنابراین، اگر ادعای صاحب این طرح (دراین‌باره که، هرمبلغ درستی را، می‌توان با سکه‌های به‌ارزش ۲ و ۸ تالر پرداخت کرد) درست باشد، آن‌وقت، باید بتوان هرمبلغ درستی را، باسکه‌های ۲ تالری هم پرداخت کرد ولی، این مطلب ، به‌روشنی نادرست است: با سکه‌های ۲

تالری، تنها می‌توان مبلغ‌هایی را پرداخت که، برحسب تالر، عددهایی زوج باشند. البته، برای چنین پرداخت‌هایی، هیچ گونه بازپرداختی هم لازم نیست.

درمورد طرح (E) هم، همین وضع وجود دارد: به‌کمك سکه‌های ۳ و ۲۱ تالری، تنها می‌توان مبلغ‌هایی را پرداخت کرد که عدد آن‌ها، مضربی از ۳ باشد. (یعنی، بدون باقی‌مانده، بر ۳ بخش‌پذیر باشد).

حالت (F) هم، تنها دربرخورد اول، بغرنج‌تر به‌نظرمی‌آید. درواقع از آن‌جا که داریم:

$$۲۱ = ۷ \times ۳$$

$$۱۴۴ = ۴۸ \times ۳$$

بنابراین، هم سکهٔ ۲۱ تالری و هم سکهٔ ۱۴۴ تالری را می‌توان باسکه‌های ۳ تالری عوض کرد. بنابراین، اگر بتوان مبلغ صحیحی را با سکه‌های ۲۱ و ۱۴۴ تالری پرداخت کرد، باید به‌کمك سکه‌های ۳ تالری هم قابل پرداخت باشد. ولی روشن است که، تنها با سکه‌های ۳ تالری، نمی‌توان هرمبلغی را پرداخت: سکه‌های ۲۱ و ۱۴۴ تالری، تنها امکان پرداخت مبلغ‌هایی را ایجاد می‌کنند که عدد این مبلغ‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

یادداشت. نامناسب‌بودن هرسه طرح را می‌توانستیم، یکباره، ثابت کنیم، به‌شرطی‌که توجه می‌کردیم، عددهای ۲ و ۸ بر ۲ بخش‌پذیرند و عددهای ۳ و ۲۱ و، همچنین، ۲۱ و۱۴۴ بر ۳. درهرسه طرح، یك ویژگی ریاضی وجود دارد. براساس این ویژگی، می‌توان گفت: اگر دو عدد درست مقسوم علیه مشترکی داشته باشند. (البته، به‌جز واحد)، به‌کمك سکه‌هایی‌که ارزش آن‌ها برابر این دوعدد باشد، نمی‌توان هرمبلغ درستی را (چه بدون بازپرداخت و چه با آن) پرداخت کرد.

۴۷. چرخش ناگهانی

بله، درست است.

اندیشهٔ اصلی راه‌حل را می‌توان ازمسأله‌های ۴۳ و ۴۴ اقتباس کرد. بعد از تلاشی نه‌چندان زیاد، معلوم می‌شود که، با گذاشتن ۳ سکهٔ کوچك به‌ارزش ۴ تالر درروی میز وبرداشتن یك‌سکهٔ ۱۱ تالری، می‌توان، مبلغ روی میز را، به‌اندازهٔ یك‌تالر افزایش داد. همین وضع ، در حالتی هم پیش می‌آید که ۳ سکهٔ ۱۱ تالری روی میز بگذاریم و ، سپس ، ۸ سکهٔ ۴ تالری از روی‌آن برداریم.

$$(*)\quad \begin{cases} ۳\times۴-۱\times۱۱=۱ \\ ۳\times۱۱-۸\times۴=۱ \end{cases}$$

اگر دوطرف هریك از رابطه‌های(*) را در k ضرب‌کنیم ، به‌دست می‌آید:

$$۳k\times۴-k\times۱۱=k$$

$$۳k\times۱۱-۸k\times۴=k$$

این رابطه‌ها ، به‌معنای آن‌هستندکه k تالر را (k عدد دلخواه‌درستی است) می‌توان به‌این‌ترتیب پرداخت‌که، یابه‌اندازهٔ $۳k$ سکهٔ ۴ تالری‌بدهیم و، بعد،به‌اندازهٔ k سکهٔ ۱۱ تالری بگیریم، ویا به‌اندازهٔ $۳k$ سکهٔ۱۱تالری بدهیم و به‌اندازهٔ $۸k$ سکهٔ ۴ تالری پس‌بگیریم.

از برابری‌های (*) نتیجه می‌شودکه، باآغاز از ۳۰ تالر ، می‌توان هرمبلغی را، بدون بازپرداخت، تأدیه‌کرد. در واقع داریم:

$$۳۰=۲\times۱۱+۲\times۴$$

$$۳۱=۱۱+۵\times۴$$

و از این به‌بعد ، برای افزایش مبلغ می‌توان ، یا سکهٔ ۱۱ تالری را با ۳ سکهٔ ۴ تالری عوض‌کرد و یا سه سکهٔ ۱۱ تالری را به‌جای ۸ سکهٔ ۴تالری گذاشت .

تعمیم

بعد از همهٔ بحث‌هایی‌که دربارهٔ اصلاح پولی داشتیم، حتماً این‌پرسش برای هرخواننده‌ای پیش می‌آید: دوعدد a و b چگونه باشند تا با سکه‌های

به‌ارزش a و b تـالر، بتوان هرپولی را پرداخت و، ضمناً، برای پرداخت پول‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ، نیازی به‌بازپرداخت نباشد؟

پاسخ: این دوعدد می‌توانند هردو عدد دلخواهی بـاشندکه مقسوم‌علیه مشترکی، جز واحد، ندارند (یعنی، دوعددی‌که نسبت به‌هم اول‌اند).

باطرح این‌پرسش، به‌هیچ‌وجه خیال‌نداریم راه‌حل تازه‌ای برای‌مسألهٔ مربوط به «عاقلانه‌ترین دستگاه پولی» به‌دست‌آوریم، زیرا برای این‌منظور به‌آگاهی‌هایی از نظریهٔ عددها نیازمندیم (و قبل از همه، نظریهٔ معادله‌های دیوفانتی درجه اول).

ما تنها درپی‌کسب‌آگاهی‌هایی هستیم‌که، برای پاسخ به‌پرسش مربوط به‌عددهای موردعلاقهٔ ما، لازم‌اند.

قضیهٔ ۱. اگر a و b، دوعدد طبیعی و نسبت به‌هم اول باشند، همیشه می‌توان عددهای درست x' و y' را پیدا کرد، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$ax'+by'=1$$

اثبات. همهٔ عددهای درست به‌صورت $ax+by$ را درنظرمی‌گیریم، که درآن، x و y، عددهای درست دلخواهی باشند. ازبین آن‌ها، عددهای مثبت را جدا می‌کنیم، یعنی موردهایی‌که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$ax+by>0$$

m را کوچکترین آن‌ها می‌گیریـم (چنین عددی، بی‌تردید، پیدا مـی‌شود، زیرا در هر مجموعهٔ عددهای درست مثبت، همیشه، کوچکترین عدد، وجود دارد). فرض می‌کنیم، این حداقل مقدار به‌ازای $x=x'$ و $y=y'$ به‌دست آید، یعنی داشته باشیم:

$$m=ax'+by'$$

ثابت می‌کنیم که $m=1$. عدد درست $ax+by$ را درنظرمی‌گیریم و مضرب‌های درست عدد m را تا جایی ازآن‌کم می‌کنیم‌که، تفاضل‌حاصل، نامنفی وکوچکتر از m بشود، یعنی تا جایی‌که، این نابرابری برقرارباشد:

$$m>(ax+by)-km\geqslant 0$$

به‌جای m، مقدار آن را قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$m>(ax+by)-k(ax'+by')\geqslant 0$$

$$m>a(x-kx')+b(y-ky')\geqslant 0$$

به‌این ترتیب، عددهای نامنفی به‌دست مـی‌آید که به‌صورت $ax+by$ و کوچکتر از m است. چون m، کوچکترین عدد مثبت از این گونه بود، عدد حاصل، تنها می‌تواند برابر صفر باشد. بنابراین

$$(ax+by)-km=0$$

$$ax+by=km$$

به‌این تـرتیب، همهٔ عددهای مثبت به‌صورت $ax+by$ ، به‌صورت مضرب‌های درستی از عـدد m در می‌آیند. این نتیجه، باید در مورد خـود عددهای a و b هم صدق کند، زیرا آن‌ها هم به‌صورت $ax+by$ هستند:

$$a=a\times 1+b\times 0 \text{ و } b=a\times 0+b\times 1$$

ولی، این نتیجه، به‌معنای آن است که، عدد m، مقسوم‌علیه مشترك دوعدد a و b است و، چون این‌دوعدد نسبت به‌هم اول‌اند، بنابراین $m=1$.

یادداشت ۱. ما به‌هیچ‌وجه ادعا نکردیم که، $ax'+by'$، تنهاشکل نمایش عدد ۱ می‌باشد. بعداً خواهیم دید که، چنین ادعایی، درست‌نیست.

یاداشت ۲. مسألهٔ پیداکردن‌عددهای x' و y' ، تنها به‌ازای $a>1$ و $b>1$ جالب است (درغیر این‌صورت، حکم قضیه واضح است).

قضیهٔ ۲. اگر داشته‌باشیم: $a>1$ و $b>1$، آن‌وقت، عددهای x'و y' در رابطهٔ

$$ax'+by'=1$$

علامت‌هایی مخالف هم دارند.

اثبـات. هـر دو عـدد x' و y' نمی‌تـوانند مثبت باشنـد، زیـرادر این‌صورت، رابطهٔ $ax'+by'=1$ به‌نـابرابری $ax'+by>1$ تبدیل می‌شود. هیچ‌کدام از دوعدد x' و y' نمی‌توانند برابر صفر باشند وهردوی

آن‌ها نمی‌توانند منفی بشوند.

قضیهٔ ۳. اگر عدد ۱ را بتوان به‌صورت

$$ax'+by'=1$$

نشان‌داد ($a>1$ ، $b>1$، a و b نسبت به‌هم اول‌اند) . آن‌وقت می‌توان آن‌را به‌صورت

$$ax''+by''=1$$

هم نشان‌داد ؛ ضمناً ، عددهای x' و x'' و همچنین عددهای y' و y'' ، علامت‌های مختلفی دارند.

اثبات. مقدار $kab-kab=0$ را به‌سمت چپ برابری

$$ax'+by'=1$$

اضافه می‌کنیم (k ، عدد درست دلخواهی است) و ، آن‌را ، به‌این‌صورت می‌نویسیم :

$$ax'+akb+by'-bka=1,$$

$$a(x'+kb)+b(y'-ka)=1$$

عددهای داخل پرانتزها را با x'' و y'' نشان می‌دهیم:

$$x'+kb=x'' \text{ و } y'-ka=y''$$

مقدار k را (که منفی هم می‌تواند باشد) طوری انتخاب می‌کنیم‌که دوعدد $x'+kb$ و x' ، علامت‌های مختلفی داشته‌باشند. دراین‌صورت، بنابرقضیهٔ ۲، y'' و y' هم، علامت‌های مختلفی پیدا می‌کنند.

قضیهٔ ۴. اگر $a>1$ و $b>1$ ، دو عدد طبیعی و نسبت به‌هم اول باشند، هرعدد طبیعی c را می‌توان به‌صورت

$$ax_1+by_1=c$$

نشان‌داد.

اثبات. دیدیم که، دست‌کم به‌یك‌صورت، می‌توان عدد ۱ را به شکل

$$ax'+by'=1$$

نشان داد. دوطرف این برابری را در c ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a(x'c)+b(y'c)=c$$

و به‌این ترتیب، حکم قضیه ثابت می‌شود ($x_1=x'c$ ، $y_1=y'c$)

قضیه ۵. اگر c، عدد طبیعی به‌قدر کافی بزرگی باشد، می‌توان آن را به صورت

$$ax_1+by_1=c$$

نمایش دادکه، درآن، x_1 و y_1، عددهایی غیر منفی باشند:

$$x_1 \geqslant 0 \quad , \quad y_1 \geqslant 0$$

اثبات. فرض کنید:

$$ax'+by'=1 \qquad (1)$$

$$ax''+by''=1 \qquad (2)$$

برابرهای معرف واحدباشند، ضمناً $x'>0$ و $y''>0$ (وجود این برابری‌ها، از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود). مقدار k را طوری می‌گیریم که، عددهای x_1 و y_1 از رابطهٔ

$$ax_1+by_1=k \qquad (3)$$

در نابرابری‌های زیرصدق کنند:

$$x_1 \geqslant x' \quad و \quad x_1 \geqslant |x''|,$$

$$y_1 \geqslant |y'| \quad و \quad y_1 \geqslant y''$$

روشن است که، به ازای مقدارهای بزرگ k، نابرابری‌های $x_1 \geqslant 0$ و $y_1 \geqslant 0$ برقراراست. به‌این‌ترتیب، توانستیم عدد k را، به‌صورت موردـ نظر، بنویسیم. ثابت می‌کنیم که هر عدد طبیعی بزرگتر از k را هم می‌توان به‌صورت $ax+by$، با مقدارهای غیر منفی x و y، نشان داد.

از مجموع برابری‌های (۱) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$a(x_1+x')+b(y_1+y')=k+1$$

چون $x_1+x'>0$ و $y_1+y'\geqslant 0$، با نشان دادن عددهای داخل پرانتزها با x_2 و y_2، عدد $k+1$ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$ax_2+by_2=k+1 \qquad (4)$$

اکنون، اگر رابطه‌های (۲) و(۴)را باهم جمع کنیم، به‌دست‌می‌آوریم:

$$a(x_2+x'')+b(y_2+y'')=k+2$$

ویا به‌صورت دیگر

$$ax_3+by_3=k+2 \qquad (5)$$

ضمناً

$$x_3=x_2+x''=x_1+x'+x''=(x_1+x'')+x'\geqslant x'>0,$$
$$y_3=y_2+y''>y_2>0$$

به‌این‌ترتیب، توانستیم $k+2$ را به‌صورت ax_3+by_3 بنویسیم، که‌درآن، x_3 و y_3، عددهایی مثبت‌اند.

حالا، برابری‌های(۳) و(۵) را جمع می کنیم. چون، برای سمت‌راست آن‌ها، نابرابری $k+2>k$ صدق‌می‌کند، برای سمت چپ‌آن‌ها هم‌خواهیم داشت:

$$ax_3+by_3>ax_1+by_1$$

ولی چون a و b عددهایی مثبت‌اند، باید دست‌کم یکی از دو نابرابری زیر برقرارباشد: (I) $x_3>x_1$، (II) $y_3>y_1$. اگرنابرابری‌های (۵) و (۲) را بـه حالت I ونابرابری (۵) و (۱) را بـه حالت II اضافه‌کنیم، نمایش موردنظرعدد $k+3$ را (با مقدارهای مثبت x و y) به‌دست می‌آوریم.

با تکرار استدلال اخیر ، می‌توانیم عددهای طبیعی بزرگتر و بزرگتر را به‌صورت $ax+by$، با x و y مثبت، نشان دهیم.

*

قضیه‌هایی که دربالاآوردیم، مبنای‌ریاضی انتخاب را، برای‌حالت‌های

مختلف واحد پول درشهر برگن، به‌ما می‌دهند.

نتیجهٔ‌حاصل‌را می‌توان، به‌عنوان‌حالت‌خاصی ازقضیهٔ‌کلی‌تر زیردرنظر گرفت:

اگر a، b و c عددهایی مثبت و درست باشند و، ضمناً، c بر بزرگترین مقسوم علیه مشترك a و b بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت معادلهٔ

$$ax+by=c \qquad (*)$$

برای عددهای درست x و y ، همیشه دارای جواب است (و ضمناً، نه یك، بلکه بی‌نهایت جواب).

واگر عدد c (نسبت به‌عددهای a و b) به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آن وقت معادلهٔ (*)، برای عددهای درست وغیرمنفی x و y، دارای جواب‌است.

اثبات. d را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b می‌گیریم. دوطرف معادلهٔ (*) را بر d تقسیم می‌کنیم. دراین صورت، عددهای

$$\frac{a}{d}=a_1 \ , \ \frac{b}{d}=b_1 \ , \ \frac{c}{d}=c_1$$

عددهایی درست‌اند، و درمعادلهٔ

$$a_1x+by=c_1$$

ضریب‌های a_1 و b_1 نسبت‌به‌هم اول‌اند. بنابراین، حکم‌قضیهٔ‌کلی، به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌های ۴ و ۵ به‌دست می‌آید.

[اگر دریك معادله با ضریب‌های درست، تنها به‌جواب‌های صحیح‌آن علاقه‌مند باشیم، آن‌وقت، معادله را دیوفانتی گویند (به‌افتخار دیوفانت، ریاضی‌دان دوران باستان). به‌این‌ترتیب، درقضیه‌ای‌که ثابت‌کردیم، صحبت برسر حل معادله‌های دیوفانتی درجهٔ اول است.]

درمثال مورد بررسی ما، عددهای a و b به معنای ارزش واحدهای اصلی‌پول، وc، به‌معنای پولی است‌که‌باید پرداخت‌شود. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b، برابراست با ۱ و، بنابراین، هرعدد درست c، برآن بخش‌پذیر است.

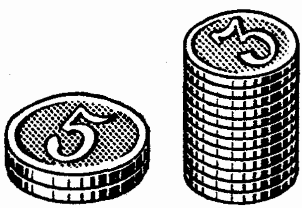
قضیهٔ کلی، که دراینجا، ثابت کردیم، از جملهٔ «قضیه‌های وجودی» است: این قضیه تنها می‌گوید که، جواب وجود دارد، ولی دراین باره که جواب را چگونه باید پیدا کرد، سکوت می‌کند. ولی ازاین‌جا نباید نتیجه گرفت که، برای پیدا کردن جواب، باید به‌قضا و قدر متوسل شد.

۴۸. راه حل نامنتظر

راه حل اول. برای پرداخت ۴۹ تالر، چند سکهٔ ۵ تالری ممکن است لازم باشد؟

بدون تردید، به‌سکه‌های ۵ تالری هم نیازمندیم، زیرا تنها باسکه‌های ۳ تالری نمی‌توان ۴۹ تالر را پرداخت: عدد ۴۹، مضربی از ۳ نیست. یك سکهٔ ۵ تالری کافی نیست (زیرا ۵ — ۴۹، یعنی ۴۴ تالر مضربی از ۳ نیست)، ولی‌دوسکهٔ ۵ تالری‌کافی است (زیرا ۱۰ — ۴۹، یعنی‌۳۹، مضربی است از ۳).

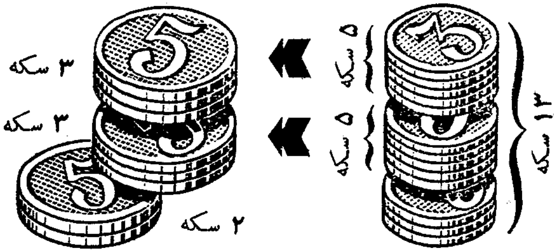
به این ترتیب، یکی ازجواب‌ها به‌دست می‌آید: ۴۹ تالر را می‌توان با ۲سکهٔ ۵ تالری و۱۳ سکهٔ ۳تالری پرداخت (۴۹ = ۳ × ۱۳ + ۵ × ۲) (شکل ۱۰۰).



شکل ۱۰۰

روشن‌است که‌اختلاف جواب‌های دیگر بااین‌جواب، به‌این امربستگی دارد که چند سکهٔ ۳ تالری را بتوانیم با تعدادی ازسکه‌های ۵ تالری عوض کنیم. بنابراین، برای این‌که ازجواب اول به‌جواب دیگر برسیم، بایدمبلغی از سکه‌های سه‌تالری را پیدا کنیم که بتوان، آن را با سکه‌های پنج تالری

هم‌ارز کرد. این مطلب به معنای آن است که، تعداد تالرهای موجود دراین مبلغ، باید مضربی ازعددهای ۳ و ۵ باشد. ولی، درعدد ۳۹، تنها دومضرب مشترك برای دوعدد ۳ و ۵ وجود دارد: ۱۵ و ۳۰. بنابراین، برای دسترسی به‌جواب‌های دیگر، تنها دوراه وجود دارد: پنج سکهٔ ۳ تالری (به‌ارزش کل ۱۵ تالر) را برداریم و به جای آن سه سکهٔ ۵ تالری (با همان ارزش) بگذاریم؛ یاده‌سکهٔ ۳ تالری را باشش سکهٔ۵تالری عوض‌کنیم (شکل ۱۰۱).



شکل ۱۰۱

این استدلال به‌ما امکان می‌دهد، دوجواب دیگر را به دست آوریم: جواب دوم شامل پنج سکهٔ ۵ تالری و هشت سکهٔ ۳ تالری ($۴۹ = ۳ \times ۸ + ۵ \times ۵$) و جواب سوم شامل هشت سکهٔ ۵ تالری و سه سکهٔ ۳ تالری است ($۴۹ = ۳ \times ۳ + ۵ \times ۸$).

ازخود استدلال روشن است که جواب دیگری وجود ندارد. بنابراین، ۴۹ تالررا (با توجه به‌همهٔ شرطهای مساله)، به‌سه‌طریق می‌توان پرداخت.

راه حل دوم. می‌دانیم‌که، عددهای مضرب ۵، به‌۰ یا۵ ختم شده‌اند. بنابراین، اگر عددهای مضرب ۵ را از ۴۹ کم‌کنیم، عدد باقی‌مانده، به ۹ یا ۴ ختم خواهد شد. ازاین‌جا می‌توان نتیجه‌گرفت که مبلغ سکه‌های ۳ تالری (که از ۴۹ کمتر است)، عددی است که به ۹ یا ۴ ختم می‌شود و، البته، مضربی از ۳ است.

تنها سه عدد ازاین گونه وجود دارد: ۹، ۲۴، ۳۹. بنابراین، برای پرداخت ۴۹ تالر، می‌توان ۹ یا ۲۴ و یا ۳۹ تالر را با سکه‌های ۳ تالری پرداخت. درنتیجه، ۴۹ تالر را، تنها به سه‌طریق می‌توان با سکه‌های ۳

تالری و ۵ تالری پرداخت‌کرد:

$$۳ \times ۳ + ۸ \times ۵ = ۴۹,$$

$$۸ \times ۳ + ۵ \times ۵ = ۴۹,$$

$$۱۳ \times ۳ + ۲ \times ۵ \times ۴۹.$$

یادداشت ۱. کوچکترین مضرب مشترك دوعدد ۳ و ۵، برابر است با ۱۵. بقیهٔ مضرب‌های مشترك ۳ و ۵ (بنا به‌قضیهٔ معروفی از نظریهٔ عددها)، مضربی از ۱۵ می‌شوند:

$$۱ \times ۱۵,\ ۲ \times ۱۵,\ ۳ \times ۱۵,\ ۴ \times ۱۵, \ldots$$

یادداشت ۲. حل مساله را می‌توانستیم بااین پرسش آغاز کنیم: برای پرداخت ۴۹ تالر، به چند سکهٔ ۳تالری نیازداریم؟ ۳ را از ۴۹کم می‌کنیم، بعد از باقی‌مانده دوباره ۳ را کم می‌کنیم و، این عمل را، تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که به‌عددی بخش‌پذیر بر ۵ برسیم. بعد از سه گام بـه چنین عددی می‌رسیم ($۴۹ - ۳ \times ۳ = ۴۰$)، کـه با جوابی‌کـه قبلاً به‌دست آورده‌ایم، تطبیق می‌کند.

روش اول ساده‌تـر بـود، زیرا، دربین عـددهای طبیعی‌کمتر از ۴۹، مضرب‌های ۵، نسبت به مضرب‌های ۳، کمترند.

یادداشت ۳. اگراین محدودیت را کناربگذاریم که، نباید بازپرداختی وجود داشته باشد، آن‌وقت می‌توان، به‌جای این که‌هر۵سکهٔ ۳ تالری را با ۳ سکهٔ ۵ تالری عوض‌کنیم، بسته به‌میل خود، تعداد سکه‌های ۵ تالری یا تعداد سکه‌های ۳ تالری را اضافه‌کنیم. درحـالت اول، از جواب سومی که به‌دست آورده بودیم، این جواب‌ها به‌دست می‌آید:

$$۱۱ \times ۵ - ۲ \times ۳ = ۴۹,$$

$$۱۴ \times ۵ - ۷ \times ۳ = ۴۹,$$

$$۱۷ \times ۵ - ۱۲ \times ۳ = ۴۹,$$

و درحالت دوم (از جواب اول)، این جواب‌ها:

$$-۱\times ۵+۱۸\times ۳=۴۹,$$
$$-۴\times ۵+۲۳\times ۳=۴۹,$$
$$-۷\times ۵+۲۸\times ۳=۴۹,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

در واقع، این دودنباله، به‌کلی بی ارتباط با هم نیستند. هردو دنباله از این‌جا به‌دست می‌آیندکه، در رابطهٔ کلی

$$(۳k+۲)۵-(۵k-۱۳)۳=۴۹$$

به‌جای k، عددهای

$$\ldots -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$$

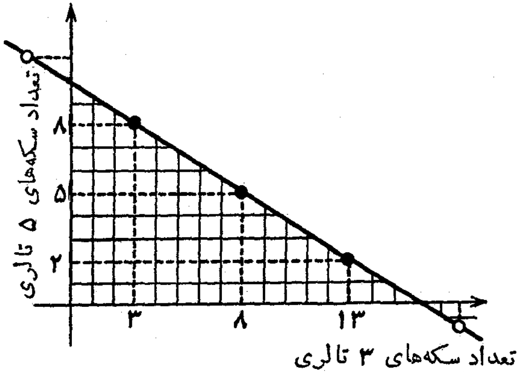
را قراردهیم. اگر تعداد سکه‌های ۵ تالری، هربارسه سکه نسبت به دوسکهٔ نخستین، تغییرمی‌کند، تعداد سکه‌های ۳ تالری، هربار ۵ سکه نسبت به ۱۳ سکهٔ نخستین، اضافه‌یاکم می‌شود. هرعدد k، متناظر است بایکی ازروش‌های پرداخت ۴۹ تالر.

یادداشت ۴. حل مسالهٔ ۴۸، ازنظرریاضی، منجربه‌حل معادلهٔ‌دیوفانتی درجه اول

$$۳x+۵y=۴۹ \qquad (۱)$$

می‌شود (که‌درواقع، باید جواب صحیح x و y را پیداکرد). اگر خط راستی را کـه نمودار معادلهٔ (۱) دردستگاه محورهـای مختصات قائم است، رسم کنیم و در ربع اول (جایی‌کـه مختصات هـر نقطه، با عددهای مثبت بیان می‌شود) همهٔ نقطه‌های با مختصات صحیح را، روی این خط راست، نشانه بگذاریم، درواقع، به جواب‌های مساله رسیده‌ایم (شکل ۱۰۲).

همان طورکه‌درهرحل نموداری پیش‌می‌آید، دراین‌جا هم ممکن‌است، جواب‌های تقریبی به‌دست‌آید و لازم باشد آن‌ها را مورد تحقیق قرار دهیم. اگر ضریب مجهول‌ها، عـددهـای بـزرگی باشنـد، استفاده ازاین روش، با دشواری‌هـای زیـادی همراه می‌شود. بـا همهٔ این‌هـا ، می‌خواستیم روش



شکل ۱۰۲

«بی‌دردسری» را معرفی کنیم که، به کمك آن، بتوان جواب‌ها را باهرضریبی پیدا کرد.

معادلهٔ خط راست را، نسبت به‌مجهولی که ضریبی کوچکتر دارد (ودر این‌جا، نسبت به x) حل می‌کنیم:

$$x=\frac{۴۹-۵y}{۳} \qquad (۱a)$$

درسمت راست، تقسیم را انجام می‌دهیم. یعنی بخش صحیح کسر سمت‌راست را بیرون می‌کشیم:

$$x=۱۶-y+\frac{۱-۲y}{۳} \qquad (۱b)$$

چون x و y ، باید عددهای درست باشند، برابری $(۱b)$، تنها وقتی برقرار است که

$$\frac{۱-۲y}{۳}$$

عدد صحیح باشد که ما آن را $t_۱$ می‌نامیم:

$$\frac{۱-۲y}{۳}=t_۱ \qquad (۲)$$

اگر مخرج را از بین ببریم، به‌دست می‌آید:

$$۳t_۱+۲y=۱ \qquad (۲a)$$

این‌معادله، نسبت‌به‌معادلهٔ قبلی، ضریب‌های کوچکتری دارد. باتکرار همان عمل‌ها، خواهیم داشت:

$$y=\frac{۱-۳t_۱}{۲}, \qquad (۲b)$$

$$y=-t_۱+\frac{۱-t_۱}{۲}, \qquad (۲c)$$

$$\frac{۱-t_۱}{۲}=t_۲ \qquad (۳)$$

($t_۲$، عددی است درست)،

$$t_۱+۲t=۱ \qquad (۳a)$$

$$t_۱=۱-۲t_۲ \qquad (*)$$

این‌بار، $t_۱$ و $t_۲$ بایك رابطهٔ خطی و بدون دخالت هیچ‌کسری، به‌هم مربوط شده‌اند، بنابراین، دیگرلزومی به‌ادامهٔ عمل‌ها نیست. اگردر (۲c)، به‌جای $t_۱$، بخش سمت راست (*) را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$y=-(۱-۲t_۲)+t_۲=۳t_۲-۱$$

اکنون این مقدار را، به‌جای y، درسمت راست (۱) قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{۴۹-۵(۳t_۲-۱)}{۳}=-۵t_۲+۱۸$$

دستورهای

$$\begin{cases} x=-۵t_۲+۱۸ \\ y=۳t_۲-۱ \end{cases} \qquad (۴)$$

امکان می‌دهند تا همهٔ جواب‌های صحیح x و y را پیدا کنیم.

ازآن جاکه ما، تنها به جواب‌های غیر منفی علاقه‌مندیم، برای $t_۲$ باید تنها عددهایی رادرنظربگیریم که، به‌ازای آن‌ها، داشته باشیم: $x \geqslant ۰$ ، و $y \geqslant ۰$، یعنی

$$-۵t_۲ + ۱۸ \geqslant ۰$$
$$۳t_۲ - ۱ \geqslant ۰$$

از آن‌جا

$$t_۲ \leqslant ۳/۶ \quad و \quad t_۲ \geqslant \frac{۱}{۳}$$

که تنها عددهای درست ۱، ۲ و ۳، دراین دو نابرابری، به‌طور هم زمان، صدق می‌کنند. به کمك همین سه‌عدد، می‌توان جواب‌های مثبت و صحیح معادلهٔ اصلی را به‌دست‌آورد:

$t_۲$	۱	۲	۳
$x = -۵t_۲ + ۱۸$	۱۳	۸	۳
$y = ۳t_۲ - ۱$	۲	۵	۸

می‌بینیم که، هرسه جواب، باجواب‌هایی که قبلاً به‌دست آورده‌ایم، تطبیق می‌کنند.

یادداشت ۵. روندی که، برای به‌دست آوردن دستورهای (۴) مورد استفاده قراردادیم، کاملاً «بی‌خدشه» است.

درواقع، از یك طرف، همیشه می‌توان ازاین روند استفاده کرد و، بنابراین، هرجواب xوy ازمعادلهٔ اصلی، باید به‌همان صورتی که به دست آمده‌اند، باشند. ازطرف دیگر، اگر xوy با دستورهایی شبیه (۴) داده شده باشند، وقتی‌که پارامتر $t_۲$ مقدارهای مختلف را اختیارکند، همهٔ جواب‌های صحیح معادلهٔ اصلی به‌دست می‌آید.

[مفهوم دقیق بحث فوق‌را، می‌توان به این ترتیب شرح داد. اگر

مقدارهای درست t_2 را در(۳) قراردهیم، می‌توانیم مقدارهای صحیح‌متناظر t_1 را از ($3a$) پیداکنیم. بامعلوم بودن t_1، رابطهٔ ($2a$) مقدارهای صحیح y را به ما می‌دهد، سپس، اگربه ردیف عکس عمل‌کنیم، می‌توانیم از ($2c$) به ($2b$)، از ($2b$) به ($2a$) و، بالاخره، از ($2a$) به (۲) برسیم. اگر سمت چپ دستور (۲) ومقدارقبلامحاسبه شدهٔ y در ($1b$) را درنظربگیریم، به‌مقدار x می‌رسیم که در ($1b$) صدق می‌کند که، ضمناً، عددی درست است (زیرا t_1 و y، عددهای درستی بودند). ولی اگررابطهٔ ($1b$) برقرارباشد، معادله‌های هم‌ارزآن، ($1a$) و (۱) هم، برقرار خواهند بود.]

یادداشت ۶. طبیعی است، به‌این‌فکربیفتیم که مقدارهای به‌دست‌آمدهٔ xوy را موردآزمایش قراردهیم و ببینیم درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کنند یا نه:

$$۳(-۵t_۲+۱۸)+۵(۳t_۲-۱)=-۱۵t_۲+۵۴+۱۵t_۲-۵=۴۹$$

این آزمایش «مستقیم»، به‌مراتب ساده‌تر ازروشی است که دربالا، برای تحقیق درستی جواب‌ها، به‌کار بردیم. این‌که دراین‌جا، از ضریب‌های معین ومشخص استفاده کرده‌ایم، اهمیت چندانی ندارد ومی‌توان، درحالت کلی‌هم، به‌همین ترتیب عمل‌کرد.

یادداشت ۷. جواب‌هایی‌که قبلاً (در یادداشت۳) پیدا کردیم، به اصطلاح به‌صورت پارامتری بودند:

$$x=۳k+۲,\quad y=۱۳-۵k \qquad (۵a)$$

که ظاهراً باجواب‌هایی‌که دریادداشت ۵ به‌دست‌آورده‌ایم، تفاوت دارند:

$$x=۳t_۲-۱,\quad y=۱۸-۵t_۲ \qquad (۵b)$$

ولی این‌ها، در واقع امر، با هم تفاوتی ندارند. جواب‌هایی که از ($5a$) به ازای

$$k=\dots,-۱,۰,۱,۲,\dots$$

برای xوy به‌دست می‌آید، همان‌ها هستندکه از ($5b$) به‌ازای

$$t_۲=\dots,۰,۱,۲,۳,\dots$$

می‌توان به‌دست‌آورد. اگرپارامتر t_2 را یك واحد بیشترازپارامتر k بگیریم، ازهردو «نسخه» به‌یك‌جواب می‌رسیم.

یادداشت ۸. اختلاف بین دوجواب را، که به‌صورت‌های پارامتری $(5a)$ و $(5b)$ داده شده‌اند، می‌توان در این جا هم دید که، مقدارهای اولیه، در حالت اول عبارتند از $x_1 = 2$ و $y_1 = 13$ و در حالت دوم: $x_2 = -1$ و $y_2 = 18$.

درحالت کلی، ازهرجواب معادلهٔ دیوفانتی درجهٔ اول دو مجهولی، می‌توان (باروشی‌که دریادداشت ۵آوردیم)، همهٔ جواب‌های دیگر را به دست‌آورد.

*

به‌نظر می‌رسدکه، دربارهٔ معادله‌های دیوفانتی درجهٔ اول دومجهولی، بیش ازاندازه بحث‌کردیم. علت این امرآن است که، اغلب، به مسأله‌هایی برمی‌خوریم‌که، حل‌آن‌ها، منجر به‌حل معادله‌ای ازاین‌گونه می‌شود. تنها دومثال دراین مورد می‌آوریم.

۱. برای‌کسانی‌که درالمپیاددبیرستانی موفق شده بودند، شکلاتهایی به‌عنوان جایزه، به‌ارزش‌های ۵و۸ فورینت درنظرگرفتند (برای حل مسألهٔ دشوارتر، شکلات ۸ فورینتی و برای حل مسأله‌های ساده‌تر، شکلات ۵ فورینتی). گردانندگان المپیاد، برای خرید جایزه‌ها، ۱۰۰ فورینت کنار گذاشته‌اند.

با این پول، چندشکلات ۸فورینتی وچند شکلات ۵ فورینتی می‌توان خرید؟ گردانندگان المپیاد به‌چندطریق می‌توانند نسبت این دونوع شکلات را تغییردهند (چه بساکه هردانش‌آموزی، دیر یا زود، راه حل هر مسأله را پیداکند)؟

۲. برای آوردن ۲۸۶ مهمان از مینیبوس‌های هفده و نوزده نفره استفاده‌کرده‌اند. چند مینیبوس ازاین یاآن نوع برای انتقال مهمان‌ها لازم است، به‌نحوی که درهیچ‌کدام ازآن‌ها، حتی یك‌صندلی خالی باقی نماند؟

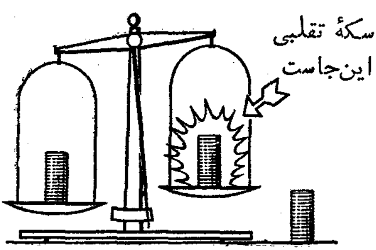
(این مسأله، درالمپیاد ریاضی سال۱۹۷۳ مجارستان، به‌دانش‌آموزان داده شده بود.)

کسی که با نظریهٔ معادله‌های دیوفانتی درجهٔ اول آشنا نباشد؛ ناچار است برای حل چنین مسأله‌هایی، خیلی فکر کند و عمل‌های زیادی انجام دهد (نظریهٔ معادله‌های دیوفانتی، جزو برنامهٔ دبیرستانی نیست). ولی ما کوشش کردیم، به‌بهانهٔ طرح اصلاح پولی مردم برگن بدون این‌که اشکالی ایجاد شود، همهٔ زاویه‌های مطلب را روشن کنیم.

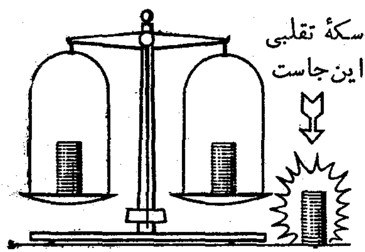
بخش چهارم

۴۹. کدام سکه تقلبی است؟

چون ۲۷ × ۳ = ۸۱، بنابراین، ۸۱ سکه را می‌توان به سه بخش ۲۷ سکه‌ای تقسیم کرد. دوبخش را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و هر کدام را در یکی از کفه‌های ترازو قرار می‌دهیم. اگر دو کفه درحالت تراز باشند، به معنای آن‌است که، سکه‌تقلبی، دراین‌دوبخش نیست. بنابراین، دراین‌حالت، سکهٔ تقلبی جزو بخش‌سوم است (شکل ۱۰۳). درحالتی هم که یکی‌از کفه‌ها پایین بیاید ودیگری بالابرود، سکهٔ تقلبی دربخش سبک‌تر است(شکل ۱۰۴).



شکل ۱۰۴



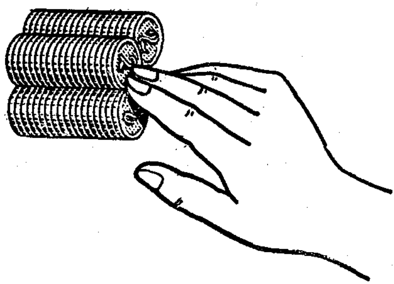
شکل ۱۰۳

به‌این ترتیب، بایک‌بار وزن‌کردن، می‌توانیم متوجه شویم که، سکه تقلبی، درکدام‌بخش ۲۷ سکه‌ای است.

چون ۹ × ۳ = ۲۷، دوباره بخشی را که شامل سکهٔ تقلبی است به سه‌بخش برابر تقسیم می‌کنیم ودوبخش‌ازآن را دردوکفهٔ ترازو قرارمی‌دهیم

دراین‌آزمایش، معلوم می‌شودکه سکهٔ تقلبی، درکدام بخش ۹ سکه‌ای است.
همین‌روند را، دوباردیگرتکرارمی‌کنیم(۳ × ۳ = ۹ و ۱ × ۳ = ۳).
بعدازآزمایش چهارم، سکهٔ تقلبی پیدا می‌شود.

یادداشت ۱. درصورت مسأله گفته نشده است که‌آیا صندوق دار، به سنگ ترازو دسترسی داشته است یا نه! در واقع، وجود یا عدم‌وجود سنگ ترازو، هیچ‌تغییری در آزمایش‌های ما نمی‌دهد و، وجود سنگ ترازو، کار کشف سکهٔ تقلبی را ساده‌تر نمی‌کند. به همین مناست ، در صورت مسأله ، دربارهٔ آن‌ها سکوت شده است.



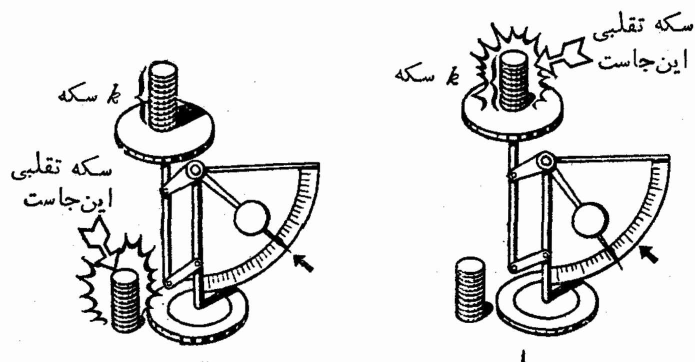
شکل ۱۰۵

یادداشت ۲. به این نکته توجه‌کنیم‌که، دراین مسأله، وزن سکه‌ها را به‌کمك ترازو به‌دست نمی‌آوریم، بلکه تنها سکهٔ تقلبی را «می‌شناسیم» و جدا می‌کنیم، یعنی، ازمجموعهٔ مفروض، عضوی را بیرون می‌کشیم که، نسبت به دیگران، ویژگی خاصی دارد. (استفادهٔ ازترازو اجباری نیست، زیرا در صورت مسأله به‌روشنی گفته شده است که، سکهٔ تقلبی، سبك‌تر ازسکهٔواقعی است، ولی بدون ترازو، صندوق‌دار باید یك یك سکه‌ها را از نظر بگذارند و، این مستلزم وقت زیادی است.)

یادداشت ۳. چون صندوق‌دار عجله‌دارد، لازم‌نیست برای تقسیم ۸۱ یا ۲۷ یا ۹ سکه به سه‌بخش، آن‌هارا بشمارد، کافی است آن‌ها را در سه ستون برابر قراردهد(شکل ۱۰۵). اگرچه شمردن سکه‌ها، این فایده رادارد که، احتمالاً قبل‌از استفاده ازترازو، سکهٔ تقلبی را پیداکند.

[اگر تعدادی ازاین ۶۴ سکه را انتخاب‌کنیم ودرکفه ترازوی یک کفه‌ای قرار دهیم، همیشه معلوم می‌شود که سکهٔ تقلبی در کجاست: بین سکه‌های انتخابی یابین سایر سکه‌ها! درواقع، اگرعقربهٔ ترازو، درست‌روی یکی ازتقسیم‌ها (که نمایندهٔ تعداد سکه‌هاست) قرار گیرد: به معنای آن است که، سکهٔ تقلبی، بین سکه‌های انتخابی نیست (شکل ۱۰۶-a). ولی، اگر سکه‌های انتخابی ، وزن «درستی» را نشان ندهند، آن‌وقت، سکهٔ تقلبی در بین آن‌هاست (شکل ۱۰۶-b).

بنابراین، وزن‌کردن باترازوی یک‌کفه‌ای هم، همان‌نقشی را به‌عهده دارد که، درمسأله قبل، ترازوی دوکفه‌ای به‌عهده داشت. تنها تفاوت دو حالت این‌است‌که، دراین‌جا، به‌جای سه‌بخش، ازبین دو بخش می‌توان یکی را انتخاب‌کرد (که سکهٔ تقلبی درآن است). به‌این ترتیب، در این‌جا باید، هر بار، سکه ها را به دو بخش برابر تقسیم گرد (نه مثل مسأله قبل، به سه‌بخش).]



شکل ۱۰۶

بله، درست است: همیشه شش‌بار وزن‌کردن کافی‌است.

۶۴ سکهٔ دوفورینتی را به‌دوبخش برابر تقسیم می‌کنیم و یکی از دو «نیمه» رادرکفهٔ‌ترازو قرار می‌دهیم. اگرعقربهٔ ترازو، روی‌یکی ازتقسیم‌ها قرارنگیرد (یعنی وزن‌کامل را نشان ندهد)، به‌معنای آن است که، سکهٔ‌تقلبی

در همین «نیمه» است. ولی، اگر ترازو، وزن درستی را نشان دهد، سکهٔ تقلبی درآن «نیمه»ای است که روی کفه ترازو قرارندارد (آزمایش اول).

اکنون، دوباره نیمه‌ای راکه شامل سکهٔ تقلبی‌است برمی‌داریم، آن‌را به‌دوبخش تقسیم می‌کنیم، یکی از بخش‌ها را درکفه ترازو قرار می‌دهیم و، مثل سابق، معلوم می‌کنیم که سکهٔ تقلبی درکدام بخش (یعنی درکدام‌یك از ۱۶ سکه) قراردارد (آزمایش دوم).

به همین ترتیب، ۱۶ سکه شامل سکهٔ تقلبی‌را، به دوبخش ۸ سکه‌ای تقسیم وبخش شامل سکهٔ تقلبی‌را معلوم می‌کنیم (آزمایش‌سوم).

درآزمایش بعد، معلوم می‌شودکه، سکهٔ تقلبی، دربین‌کدام ۴سکه‌است (آزمایش چهارم).

باتکرارآزمایش، جای سکهٔ تقلبی دربین‌یکی ازدوسکه معلوم می‌شود (آزمایش پنجم).

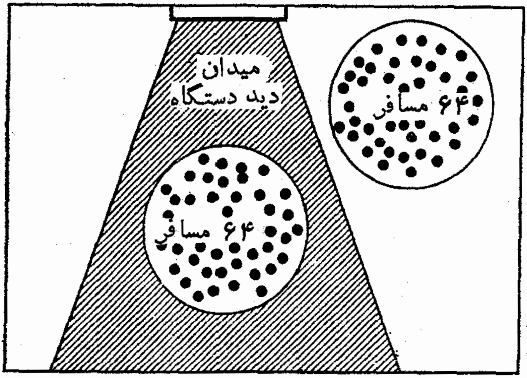
و سرانجام (درآزمایش ششم)، سکهٔ تقلبی مشخص می‌شود.

۵۱. پیش‌آمد در فرودگاه

کافی است ۷ بار، چشم الکترونیك دستگاه را باز کنیم.

نمایندهٔ شرکت هوائی می‌تواند، مسافران را به ۲ گروه مساوی تقسیم‌کند(در هر گروه ۶۴ نفر) و از یکی از گروه‌ها خواهش‌کند در مقابل چشم الکترونیك دستگاه قرار گیرند (شکل ۱۵۷). اگر علامت خطر دستگاه روشن شد، به‌معنای این است‌که، مرد مسلح، درمیان همین‌گروه ازمسافران است؛ ولی اگر عضو حساس دستگاه، علامت نداد، به‌معنای آن‌است‌که، فرد مسلح، درمیان ۶۴ مسافری است‌که در «خارج ازدید» چشم الکترونیك دستگاه، قراردارند.

گروه ۶۴ نفری مسافران را، که فرد مسلح در میان آن‌هاست، دوباره به دوگروه مساوی (هرگروه ۳۲ نفر) تقسیم واز یکی از دوگروه خواهش می‌کند در«میدان دیددستگاه» بایستند. دراین‌جاهم، شبیه‌حالت قبل،مشخص می‌شودکه، فرد مسلح، درمیان‌کدام‌گروه قرار دارد.



شکل ۱۰۷

اگر همین روش تقسیم ادامــه پیدا کند، بعد از آزمایش ششم، دونفر باقی می‌ماند که، طبعاً، یکی از آن‌ها مسلح است. اگر یکی ازاین دونفر در برابرچشم الکترونیك دستگاه فلزیاب قرار گیرد، یا چراغ خطر دستگاه روشن می‌شود، یعنی خود او مسلح است و یــا چراغ خطر خاموش می‌ماند، یعنی نفر باقی‌مانده مسلح است. وبه‌این ترتیب، دست‌کم ۷ آزمایش، برای یافتن فرد مسلح لازم است.

اگر نمایندهٔ شرکت، تقسیم به گروه‌ها را به‌ترتیب دیگری انجام دهد، ممکن است ۷ آزمایش، بـرای پیداکـردن فرد مسلح، کافی نباشد. درواقع، اگر مسافران را به دو گـروه نامساوی تقسیم کند ، ممکن است معلوم شود که فرد مسلح درمیان افرادی است کــه گروه بزرگتری را تشکیل می‌دهند. مثلاً ، اگر درآزمایش ششم، گروه ۴ نفری را به‌دو زیرگروه ۳ نفری ویك نفری تقسیم کند ومعلوم شود که، فرد مسلح، دربین افراد زیرگروه ۳ نفری است، آن‌وقت، ممکن است با یك‌آزمایش بعدی نتوان فرد مسلح را پیداکرد و با ۷ آزمایش، کار بــه پایان نرسد. همیشه تقسیم بــه دو گروه مساوی، مناسب‌ترین راه است.

۵۲. یك جعبه سکه‌های تقلبی

[روشن است که اگر بخواهیم ۱۰۰ بار وزن‌کنیم، باید وقت زیادی را صرف‌کنیم و، ضمناً، متحمل مخارج فراوانی بشویم. بنابراین، بایدراهی را برای کشف سکه‌های معیوب پیدا کرد که ارتباطی به‌تعداد آن‌ها نداشته باشد. برای این منظور، جعبه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم که، برای تشخیص هرجعبه، تنها به شمارهٔ آن، مراجعه‌کنیم.]

برای تشخیص جعبهٔ حاوی سکه‌های ناقص، به‌بیش ازیك بار وزن کردن، نیاز نداریم.

همهٔ جعبه‌ها را، به‌ترتیب، با عددهای درست متوالی، از ۱ تا ۱۰۰، شماره‌گذاری می‌کنیم. ازهرجعبه، به‌تعداد شماره‌ای که درروی‌آن قراردارد، سکه برمی‌داریم و همهٔ این سکه‌ها را، به‌کمك ترازوی الکترونیك، وزن می‌کنیم (به‌این ترتیب، ازجعبهٔ اول ۱ سکه، ازجعبهٔ دوم ۲ سکه، ازجعبهٔ سوم ۳ سکه، ...، و بالاخره، از جعبه صدم، ۱۰۰ سکه برداشته‌ایم). اگر سکه‌های معیوب درجعبهٔ nام باشد، روی ترازوی الکترونی هم، درست n سکهٔ ناقص وجود خواهد داشت. بنابراین، کسری وزن در ترازو، درست برابر n گرم می‌شود. به‌این‌ترتیب، بایك‌باروزن‌کردن، می‌توان شمارهٔ جعبهٔ حاوی سکه‌های ناقص را پیداکرد.

روی ترازو، به‌تعداد

$$۱+۲+۳+\ldots+۹۹+۱۰۰=$$
$$=(۱+۱۰۰)+(۲+۹۹)+(۳+۹۸)+\ldots+(۵۰+۵۱)=$$
$$=۵۰\times ۱۰۱=۵۰۵۰$$

سکه گذاشته شده‌است. بنابراین، به‌سادگی‌می‌توان محاسبه‌کردکه، درصورت سالم‌بودن همهٔ سکه‌ها، وزن آن‌ها، چندگرم باید باشد.

۵۳. دوجعبه سکه‌های تقلبی

استدلال درست نیست: دوبار وزن‌کردن، به‌ترتیبی‌که درصورت مساله

گفته شده است، برای تشخیص دوجعبهٔ حاوی سکه‌های ناقص، کافی نیست.

درواقع، بعد ازنخستین آزمایش (یعنی، بعد ازآن‌که معلوم شود، چندگرم درمجموع سکه‌های مورد آزمایش، کسری وجود دارد)، مجموع شماره‌های دوجعبهٔ حاوی سکه‌های معیوب، روشن می‌شود. آزمایش دوم هم، مجموع شماره‌های جدید همین دوجعبه را به ما می‌دهد (شماره‌گذاری قدیم و ازآخر به‌اول است). ولی، ازآن جاکه مجموع دو شمارهٔ قدیم و جدید هر جعبه، برابراست با ۱۰۱، نتیجهٔ آزمایش دوم را می‌توان از روی نتیجهٔ آزمایش اول پیش‌بینی کرد: مجموع شماره‌های جدید دو جعبه، برابر است با تفاضل مجموع شماره‌های قدیم از ۲۰۲.

بنابراین، آزمایش دوم، هیچ آگاهی تازه‌ای به‌ما نمی‌دهد، یعنی نتیجهٔ دو آزمایش، همان است که از آزمایش اول به دست آورده‌ایم: مجموع شماره‌های دو جعبهٔ حاوی سکه‌های ناقص برای ما معلوم می‌شود. و این آگاهی، برای تشخیص شمارهٔهریك ازدوجعبه، به‌طورجداگانه، کافی نیست.

۵۳a. بازهم دربارهٔ دوجعبهٔ پراز سکه‌های تقلبی

طبق طرحی که درصورت مسالهٔ شمارهٔ قبل داده‌شد، نمی‌توان بادوبار وزن‌کردن، دوجعبهٔ حاوی سکه‌های ناقص را پیداکرد، ولی از این‌جا نباید به‌این نتیجه رسیدکه، گویا، دوبار وزن‌کردن، همیشه ناکافی است. چه‌بسا، اگرطرح‌عاقلانه‌تری‌بریزیم، بتوانیم بادوآزمایش، این‌دوجعبه راکشف‌کنیم.

آزمایش اول را تغییر نمی‌دهیم، زیرا به کمك آن می‌توانیم مجموع شماره‌های دوجعبهٔ حاوی‌سکه‌های ناقص را پیداکنیم. اگرراهی‌پیداکنیم‌که، به‌کمك‌آن‌بتوانیم تفاضل شماره‌های دوجعبهٔ موردنظررا هم به‌دست آوریم، آن‌وقت‌کشف شمارهٔ هرجعبه، به‌طور جداگانه، به‌هیچ مشکلی برنمی‌خورد.

تفاضل این دوشماره، ضمن وزن‌کردن، وقتی به‌دست می‌آیدکه شمارهٔ یکی ازآن‌ها درجهت قبلی، وشمارهٔ دیگری درجهت عکس باشد.

مجموع شماره‌های دو جعبه، به‌ماکمك می‌کندکه نقطهٔ آغاز شماره‌گذاری را (دردوجهت) پیداکنیم. فرض‌کنید، این مجموع برابر ۱۲۸ بشود.

دراین صورت، شمارهٔ دوجعبه، می‌تواند یکی ازحالت‌های زیر باشد:

شمارهٔ ۶۳ و شمارهٔ ۶۵

شمارهٔ ۶۲ و شمارهٔ ۶۶

شمارهٔ ۶۱ و شمارهٔ ۶۷

و غیره. به‌روشنی دیده می‌شودکه جعبهٔ شمارهٔ ۶۴ (۲ : ۱۲۸) ازهرکدام ازاین «زوج جعبه‌ها» به‌یك فاصله است: شمارهٔ یکی ازاین دوجعبه همان‌قدر از ۶۴ «جلوتر» است که دیگری به‌همان اندازه ازآن «عقب» مانده است.

سکه‌ها را، به‌این ترتیب، انتخاب می‌کنیم:

ازجعبه‌های با شماره‌های ۶۳ و ۶۵، هرکدام یك سکه،

ازجعبه‌های با شماره‌های ۶۲ و ۶۶، هرکدام ۲ سکه،

از جعبه‌های با شماره‌های ۶۱ و ۶۷، هرکدام ۳ سکه،

وغیره (به‌طورکلی، ازجعبه‌های با شماره‌های $۶۴-k$ و $۶۴+k$، هرکدام k سکه). همهٔ این سکه‌های انتخابی را روی ترازو قرارمی‌دهیم. اگرمعلوم شودکه، دربین این سکه‌ها، $۲n$ سکهٔ ناقص وجود دارد، شمارهٔ جعبه‌های با سکه‌های تقلبی، عبارت است از $۶۴-n$ و $۶۴+n$.

مجموع شماره‌های دوصندوق، ممکن است‌عددی فرد و، مثلاً، برابر ۹۳ باشد. دراین حالت، شمارهٔ جعبه‌های حاوی سکه‌های سبك‌تر، یکی از موردهای زیراست:

شمارهٔ ۴۶ و شمارهٔ ۴۷،

شمارهٔ ۴۵ و شمارهٔ ۴۸،

شمارهٔ ۴۴ و شمارهٔ ۴۹،

وغیره. دراین حالت، شماره‌گذاری در دو جهت را، باید از صندوق «شمارهٔ $۴۶\frac{۱}{۲}$ (۲ : ۹۳)» آغازکرد، یعنی ازعددی‌که بین دو عدد ۴۶ و ۴۷ قرار دارد و، هریك از زوج عددهای فوق، به‌یك فاصله ازآن هستند.

سکه‌ها را، به‌این ترتیب، از جعبه‌ها برمی‌داریم:

از شماره‌های ۴۶ و ۴۷، هر کدام یك سکه،

از شماره‌های ۴۵ و ۴۸، هر کدام ۲ سکه،

از شماره‌های ۴۴ و ۴۹، هرکدام ۳ سکه،

وغیره (به‌طور کلی، ازجعبه‌های با شماره‌های $۴۷-k$ و $۴۶+k$، هرکدام k سکه). همهٔ این سکه‌ها را روی ترازو قرار می‌دهیم. اگر معلوم شود که، دربین این‌سکه‌ها، $۲n$ سکهٔ سبك‌تروجود دارد، به‌معنای‌آن است که‌جعبه‌های با شماره‌های $۴۷-n$ و $۴۶+n$ حاوی سکه‌های ناقص‌اند.

به‌این ترتیب، برای تشخیص دو جعبهٔ مورد نظر ، دوبار وزن‌کردن کافی است. وزن‌کردن اول، کاملاً شبیه حل مسالهٔ ۵۲ انجام می‌شود. اگر معلوم شودکه a گرم‌کم آمده است، باید جعبه‌ها را، دوباره، و در دوجهت مختلف شماره گذاری کرد. این شماره گذاری جدید، درحالت زوج بودن a، از $\frac{a}{۲}$، و درحالت فرد بودن a از فاصلهٔ بین $\frac{a-۱}{۲}$ و $\frac{a+۱}{۲}$ آغازمی‌شود. سپس، به تعداد شمارهٔ هرجعبه، سکه‌ها را از جعبه‌ها برمی‌داریم وهمهٔ آن‌ها را وزن می‌کنیم. اگر، دراین وزن‌کردن، $۲b$ گرم‌کسری پیدا شود، آن‌وقت شمارهٔ جعبه‌های حاوی سکه‌های ناقص، چنین است:

$$\frac{a}{۲}-b \quad \text{و} \quad \frac{a}{۲}+b \quad \text{درحالت زوج بودن } a$$

$$\frac{a+۱}{۲}-b \quad \text{و} \quad \frac{a-۱}{۲}+b \quad \text{درحالت فرد بودن } a$$

۵۴. مسالهٔ «جواهر فروش»

a. بااین «وزنه‌ها» می‌توان هرچند گرم طلا را، وزن‌کرد.

b. هرچند گرم، با آغاز از ۲۸ (یعنی بیشتر از ۲۷ گرم).

درمسالهٔ ۴۴ دیدیم که، با سکه‌های ۵ و ۸ تالری، می‌توان هرمبلغی

را (که برحسب تالر، عددی درست باشد) پرداخت کرد و، اگر مبلغ بیشتر از ۲۷ تالر باشد، این پرداخت، می‌تواند بدون هیچ بازپرداختی انجام گیرد.

وقتی که بتوانیم از وزنه‌های ۵ و ۸ گرمی برای دوکفهٔ ترازواستفاده کنیم، درواقع، به‌همان مساله می‌رسیم: وزنه‌های واقع دریک کفه متناظر با پرداخت و وزنه‌هایی که درکنار طلاها، درکفهٔ دیگر قرار دارند، متناظر با بازپرداخت است.

یادداشت. اگر جواهرساز، به‌جای وزنه‌های ۵ و ۸ گرمی، وزنه‌های ۳ و ۵ گرمی (مسالهٔ ۴۲) یا ۸ و ۱۳ گرمی، ۲۱ و ۳۴ گرمی یا ۱۴۴ و ۲۳۳ گرمی (مسالهٔ ۴۵) یا ۴ و ۱۱ گرمی (مساله ۴۷) و یا به‌طورکلی، وزنه‌های a و b گرمی (به‌شرطی که a و b نسبت به‌هم اول باشند) دراختیار داشت، بازهم می‌توانست مشکل خود را حل کند.

بخش پنجم

---

۵۵. چند جفت جوراب؟

a. ۳ جوراب. چون‌درجعبه، تنها جوراب‌هایی از دورنگ وجوددارد (سیاه وسفید)، سه‌جوراب نمی‌توانند از سه رنگ متفاوت باشند. بنابراین، دست‌کم، دو جوراب هم‌رنگ خواهند بود و از آن‌ها می‌توان یك جفت جوراب انتخاب کرد. انتخاب دوجوراب ازجعبه، ممکن است کافی نباشد، زیرا چه‌بساکه‌این دوجوراب هم رنگ‌نباشند وباهم یك‌جفت جوراب‌تشکیل ندهند.

b. ۲۲ جوراب. ازآن‌جاکه، درجعبه، بیش از ۲۰ جوراب سیاه‌وجود ندارد، بین ۲۲ جورابی که انتخاب‌کرده‌ایم، دست‌کم، دو جوراب سفید پیدا می‌شود. روشن است که اگر تعداد کمتری جوراب برداریم، ممکن است در بین آن‌ها نتوان دوجوراب سفید پیداکرد.

c. ۵ جوراب. ۴ جوراب کافی نیست، زیرا ممکن است ۳ جوراب‌از

یك‌رنگ وجوراب چهارم ازرنگ دیگرباشد، ولی ۵ جوراب کافی است،زیرا

یا هر ۵ جوراب ازیك رنگ است،

یا ۴ جوراب ازیك رنگ و ۱ جوراب ازرنگ دیگری است،

یا ۳ جوراب ازیك رنگ و ۲ جوراب از رنگ دیگری است.

دردوحالت اول، می‌توان دوجفت جوراب یك رنگ و درحالت سوم یك جفت ازرنگ اول و یك جفت از رنگ دوم به‌دست‌آورد.

d. ۷ جوراب. درواقع، ۶ جوراب هنوزکم است، زیرا ممکن است۳ جوراب ازیك رنگ و۳ جوراب ازرنگ دیگر باشد، ولی دربین ۷ جوراب، همیشه می‌توان دست‌کم ۴ جوراب یك رنگ پیداکرد.

e. ۲۲جوراب. درواقع، ۲۱ جوراب کافی نیست، زیرا ۲۰ تا ازآن‌ها ممکن است ازیك رنگ باشد.ولی با برداشتن ۲۲ جوراب، حتی اگر ۲۰ تا از یك رنگ باشند، بازهم ۲ جوراب (یعنی یك جفت) از رنگ دیگر وجود خواهد داشت. بنابراین، در ۲۲ جوراب، حتماً یك جفت سیاه و یك جفت سفید پیدا می‌شود.

f. ۲۴ جوراب. استدلال شبیه حالت **b** است.

g. ۱۱ جوراب. استدلال شبیه حالت **c** است.

h. ۲۶ جوراب. درواقع، ۲۵ جوراب‌کم است، زیرا ممکن است ۲۰ تا ازآن‌ها سیاه باشد وبا ۵جوراب سفید، نمی‌توان سه‌جفت درست‌کرد، ولی در۲۶جوراب‌همیشه می‌توان۶جوراب سفیدپیداکرد (زیرا تعداد جوراب‌های سیاه، نمی‌تواند از ۲۰ عدد بیشتر شود).

۵۶. انتخاب جوراب

$۲k+۱$جوراب. (روشن است‌که مساله، تنها وقتی جواب داردکه، در جعبه، دست‌کم $۲k+۱$ جوراب وجود داشته باشد، یعنی داشته باشیم: $n>۲k$.)

درواقع، $۲k$ جوراب‌کم است، زیـرا ممکن است حالتی پیش آید که تعداد جوراب‌های هر رنگ، عددی فرد شود و، بنابراین، ضمن جفت‌کردن

جوراب‌ها، ۱ جوراب سیاه و ۱ جوراب سفید باقی بماند و نتوان، از آن‌ها، یك جفت جوراب تشکیل داد. به‌این ترتیب، از $۲k$ جوراب، نمی‌توان بیش از $(k-۱)$ جفت جدا کرد.

ولی $۲k+۱$ جوراب، همیشه کافی است. وقتی که $۲k+۱$ جوراب، درتاریکی، برداریم، حتماً تعداد یکی از رنگ‌ها، عددی زوج و تعداد رنگ دیگر، عددی فرد می‌شود (زیرا مجموع دوعدد زوج یا مجموع دوعدد فرد، عددی زوج می‌شود، درحالی‌که $۲k+۱$، عددی فرد است). بنابراین، اگر از رنگی که‌تعداد جوراب‌های آن فرداست، یکی برداریم، ازبقیهٔ $۲k$ جوراب می‌توان k جفت انتخاب کرد.

یادداشت. می‌خواهیم نظرخواننده را، به‌موقعیت مهم زیرجلب کنیم: راه حلی که دراین‌جا آوردیم، ازراه حل مسالهٔ ۵۵ — c ساده‌تراست. تعمیم، نه‌تنها مساله را بغرنج‌تر نکرد، بلکه روشنی بیشتری برمساله انداخت وراه ساده‌تری، برای حل مساله، دربرابرما گذاشت.

۵۷. سفارش بعدی

نه، درست نیست: ایلونکا اشتباه می‌کند. تعداد جوراب‌هایی کـه باید از جعبه بیرون آورد ، وقتی تغییر نمی‌کـرد کـه ایلونکا مطمئن بود، تعداد درخواستی جوراب‌های سفید از ۶ جفت تجاوز نمی‌کند. درچنین حالتی، چه قبل وچه بعد ازسفارش جدید، لازم است ۳۲ جوراب از جعبه بیرون‌بیاورد، زیرا تنها از این تعداد جوراب می‌توان ۶ جفت سیاه، همیشه به دست‌آورد (و سفارش اول را انجام داد). درعین حـال، در بین ۳۲ جوراب، همیشه، دست‌کم ۶ جفت جوراب سفید هم پیدا می‌شود (یعنی سفارش دوم هم، خود به‌خود، انجام می‌شود). ولـی، اگر سفارش بعدی ۷، ۸، ۹ ویـا ۱۰ جفت جوراب سفید باشد، آن‌وقت، ایلونکا باید، به‌ترتیب، ۳۴، ۳۶، ۳۸ ویا ۴۰ جوراب از جعبه بیرون آورد.

a. ۴ جوراب. چون درجعبه، تنها سه رنگ جوراب وجود دارد، همیشه می‌توان از۴ جوراب، دست‌کم، ۲ جوراب هم‌رنگ (یعنی یك‌جفت) انتخاب‌کرد. اگرکمترازه۴ جوراب ازجعبه برداریم، ممکن است، همهٔ‌آن‌ها، از رنگ‌های متفاوتی باشند.

b. ۵۲ جوراب. درواقع، تعداد جوراب‌های غیر سفید داخل جعبه، برابر است با ۵۰.

c. ۴۲ جوراب.

d. ۳۲ جوراب.

e. ۶ جوراب.

برای حل این مساله، همهٔ حالت‌های ممکن را مطرح نمی‌کنیم، زیرا تعداد ترکیب‌های ممکن جوراب‌های با رنگ‌های سفید و سیاه و قهوه‌ای خیلی زیاد می‌شود. به‌جای آن به راه‌حل ساده‌تری متوسل می‌شویم.

راه حل اول. درواقع، ۵ جوراب کافی نیست، زیرا دربین‌آن‌هاممکن است ۱ جوراب از یك رنگ، ۱ جوراب از رنگ دوم و ۳ جوراب ازرنگ سوم‌باشد. درچنین حالتی، تنهایك جفت می‌توان از۵ جوراب به‌دست‌آورد.

برعکس ، اگر ۶ جوراب برداشته باشیم، در بین آن‌ها، حتماً تعداد جوراب‌های یکی ازرنگ‌ها، عددی‌زوج‌می‌شود، زیرا اگر تعدادجوراب‌های هریك از سه‌رنگ، عددی فرد باشد،آن‌وقت، مجموع این سه‌عدد فرد، خود عددی فرد می‌شود و، بنابراین، نمی‌تواند برابربا ۶ باشد.

اگراین عدد زوج برابرصفر باشد (یعنی، اگربین ۶ جوراب انتخابی، از یکی از رنگ‌ها، اصلاً وجود نداشته باشد)، آن‌وقت،تعداد جوراب‌های دورنگ دیگربرابر۶می‌شود و، این تعداد، همان‌طورکه‌درحل مسالهٔ ۵۵-c ثابت‌کردیم، برای جداکردن ۲ جفت از آن‌ها کافی است (این‌که درمسالهٔ ۵۵-c ، از هررنگ جوراب، ۱۰ جفت وجود داشت و، دراین‌جا، با تعداد دیگری سروکار داریم، اهمیت ندارد، زیرا درحل مسالهٔ ۵۵-c ازتعدادکل جوراب‌های داخل جعبه، استفاده نکردیم).

اگراین عدد زوج، برابر ۲ باشد (یعنی ۲ جوراب ازیك رنگ داشته باشیم)، آن‌وقت، درهمین‌جا، ۱ جفت جوراب آماده است. آن‌چه می‌ماند، ۴جوراب است از دورنگ. همان‌طورکه درحل مسالهٔ ۵۵-a ثابت کردیم، این تعداد، برای انتخاب یك‌جفت جوراب، کاملاً کافی است.

سرانجام، اگراین عددزوج برابر۴ یا ۶ باشد (یعنی، بین جوراب‌های انتخابی، ۴ یا ۶ جوراب هم رنگ داشته باشیم)، آن‌وقت، هردوجفت لازم را می‌توان، ازبین آن‌ها، انتخاب کرد.

این راه‌حل، ظریف وزیبا به‌نظر می‌رسد، ولی درواقع این‌طورنیست. مساله، راه‌حل بسیارساده‌تری دارد. برای‌پیداکردن این راه حل، ازاستدلالی استفاده می‌کنیم‌که درحل مسالهٔ ۵۶ آوردیم.

راه حل دوم. این‌که، ۵ جوراب‌کافی نیست واین‌که، برای ۶جوراب، تعداد فرد جوراب‌های یك‌رنگ، نمی‌توان بیش از دومورد پیش‌آید، عین‌راه حل اول ثابت می‌شود.

برای درست‌کردن جفت، می‌توان به‌این‌ترتیب عمل‌کرد:

ازرنگی‌که تعداد جوراب‌ها زوج است، همهٔ جوراب‌ها «تا آخر»مورد استفاده قرار می گیرد؛

ازرنگی‌که‌تعدادجوراب‌ها فرد است، یك جوراب‌کنار گذاشته‌می‌شود، و بقیه جفت می‌شوند.

بنابراین، تعدادجوراب‌هایی‌که‌کنار گذاشته‌می‌شود، ازتعدادگروه‌هایی که حاوی تعداد فردی از جوراب‌های یك رنگ هستند، تجاوز نمی‌کند. در راه حل قبلی‌ثابت‌کردیم‌که، با تعداد فرد درجوراب‌های یك رنگ، نمی‌توان بیش از۲باربرخوردکرد، بنابراین، تعدادجوراب‌هایی‌که درتشکیل «جفت‌ها» شرکت‌نمی‌کنند، نمی‌تواند از ۲ تجاوزکند. درنتیجه، دست‌کم از ۴ جوراب (۴—۶) ، می‌توان «جفت‌ها» را درست‌کرد، یعنی لااقل ۲ جفت جوراب به‌دست می‌آید.

راه حل دوم، نه‌تنها از جهت ساده‌تربودن خود ، بلکه ضمناً از جهت کلی‌تربودن خود، برراه حل اول ترجیح دارد. ازاین راه حل می‌توان برای حالتی هم استفاده کرد که ، به جای ۲ جفت ، صحبت از هر چند جفت

جوراب باشد.

f. ۱۲ جوراب. (راه‌حل دوم مسالهٔ **e** را ببینید).

g. ۳۳جوراب. درواقع، ۳۲ جوراب کم است، زیرا ممکن است ۳۰ جوراب قهوه‌ای، ۱ جوراب سفید و ۱ جوراب سیاه باشد. ولی، درهرحالتی ۳۳جوراب کافی است، زیرا ازبین آن‌ها، بیش از ۳۰ جوراب یک رنگ نمی‌تواند وجود داشته باشد (۳۰ جوراب، تنها از رنگ قهوه‌ای می‌تواند باشد) و، بنابراین همیشه می‌توان یک جفت جوراب از رنگی که، غیراز رنگ اول است، انتخاب کرد (حل مسألهٔ ۵۵-**a** را ببینید).

h. ۱۰ جوراب. درواقع، ۹جوراب کم است، زیرا ممکن است، ازهر رنگ، ۳ جوراب وجود داشته باشد. ولی اگر ۱۰ جوراب انتخاب شود، دست کم، ۴تا ازآن‌ها ازیک رنگ خواهند بود که، ازبین آن‌ها، می‌توان دو جفت انتخاب کرد.

i. ۲۲جفت. (حل مسألهٔ **h** راببینید).

j. ۳۷جوراب. (ونه ۴۰ = ۳ × ۱۳ + ۱ جوراب، آن‌طور که ممکن است ازحل دومسالهٔ قبل، به نظرآید). در واقع، ۳۶ جوراب کافی نیست، زیرا ممکن است ۱۰جوراب سفید، ۱۳جوراب سیاه و ۱۳ جوراب قهوه‌ای دراختیار داشته باشیم. اکنون فرض می‌کنیم، ۳۷ جوراب برداشته باشیم. دراین‌صورت، حتی اگر ۱۰تای آن‌ها سفیدباشد (والبته، این‌ها، برای‌درست کردن ۷ جفت جوراب یک‌رنگ کافی نیستند)، آن‌وقت، ازیکی از دو رنگ دیگر، دست کم، ۱۴جوراب دراختیار خواهیم داشت.

k. ۵۲ جوراب. درواقع، ۵۱جوراب کم است، زیرا ممکن است ۳۰ جوراب قهوه‌ای، ۲۰جوراب سیاه و ۱ جوراب سفید بیرون‌آمده باشد. ولی ۵۲جوراب کاملاً کافی است، زیرا اگرحتی بین آن‌ها، ۳۰جوراب«بی‌مصرف» قهوه‌ای وجود داشته باشد، ۲۲ جوراب سیاه و سفید برای ما باقی می‌ماند که‌دربین آن‌ها، نمی‌تواند بیش از ۲۰ سیاه، یا ۱۰سفید، باشد. در نتیجه، در هر حالت، می‌توان ۱ جفت جوراب سفید و ۱ جفت جوراب سیاه انتخاب کرد.

l. ۴۲جوراب. (حل مسألهٔ **k** را ببینید).

m. ۵۲ جوراب. (اثبات را در حل مسألهٔ **k** ببینید).

n. ۵۲ جوراب. درواقع، ۵۱ جوراب کم است، زیرا ممکن است ۳۰ قهوه‌ای ۲۰ سیاه و ۱ سفید، از جعبه بیرون‌آمده باشد. ولی ۵۲ جوراب کافی است، زیرا حداکثر تعداد جوراب‌های به رنگ قهوه‌ای وسیاه، می‌تواند روی‌هم، ۵۰ باشد و ، بنابراین ، دست‌کم ، دو جوراب به‌رنگ سفید باقی می‌ماند.

o. ۵۶ جوراب. درواقع، ۵۵ جوراب کافی نیست، زیرا ممکن است ۳۰ قهوه‌ای، ۲۰ سیاه و ۵ سفید بیرون‌آمده باشد. ولی ۵۶ جوراب کافی‌است زیرا، تعداد جوراب های غیر سفید، حد اکثر برابر ۵۰ می‌تواند باشد و، بنابراین، دست‌کم، ۶ جوراب سفید باقی می‌ماند که، از آن‌ها، ۳ جفت‌درست می‌شود.

p. ۴۶ جوراب. (حل‌مسألهٔ **o** را ببینید).

q. ۳۶ جوراب. (حل مسألهٔ **o** را ببینید).

r. ۵۴ جوراب. ۵۳ جوراب کم است، زیرا ممکن است ۳۰ جوراب قهوه‌ای، ۲۰ جوراب سیاه و ۳ جوراب سفیدازجعبه بیرون آمده باشد. ولی ۵۴ جوراب کافی است، زیرا تنها ۵۰ جوراب سیاه وقهوه‌ای وجود داردو سیاه وسفید، تنها ۳۰ تا.

s. ۵۲ جوراب. (حل‌مسألهٔ **r** را ببینید).

t. ۵۴ جوراب. ۵۳ جوراب‌کم است، زیرا ممکن است ۳۰ جوراب قهوه‌ای، ۲۰ جوراب سیاه‌و۳ جوراب سفید بیرون‌آمده باشد. ولی۵۴ جوراب کافی است، زیرا تعداد جوراب‌های سیاه وقهوه‌ای، روی‌هم، بیش از ۵۰، تعداد جوراب‌های سفید وقهوه‌ای بیش‌از ۴۰ وتعداد جوراب‌های سفیدوسیاه بیش از ۳۰ نیست.

۵۹. چند جفت وچند رنگ؟

a. $2k+2$ جوراب. در این‌جا هم، می‌توان شبیه حل مسألهٔ ۵۸-**e** استدلال‌کرد. دراین‌جا، تنها باید اضافه‌کردکه، تعداد جوراب‌های دست‌کم یکی ازرنگ‌ها، باید زوج باشد، زیرا مجموع سه‌عدد فرد، عددی است‌فرد،

درحالی‌که $۲+۲k$، عددی است زوج.

b. اگر n زوج باشد، $۲k+n$ جوراب، واگر n فردباشد، $۲k+n-۱$ جوراب.

بنابراین، تعداد جوراب‌هایی که ازجعبه بیرون می‌آوریم، همیشه‌باید عددی زوج باشد.

درواقع، ضمن تنظیم جفت جوراب‌ها، جوراب «اضافی» وقتی وجود داردکه باتعداد فردی از جوراب‌های رنگ مفروض سروکار داشته باشیم. بنابراین، اگر n عددی زوج باشد، وقتی‌می‌توان به این حالت برخوردکه تعداد جوراب‌های هررنگ عددی فرد باشد (زیرا، مجموع تعداد زوجی از عددهای فرد، عددی زوج می‌شود) . اگر هم n عددی فرد باشد، تعداد جوراب‌های دست‌کم یکی ازرنگ‌ها بایدزوج‌باشد (زیرا مجموع تعدادفردی ازعددهای فرد، عددی فرد می‌شود).

اگر $[x]$ رابخش صحیح عدد x بگیریم، یعنی بزرگترین عددصحیحی که از x تجاوز نمی‌کند، آن‌وقت نتیجهٔ حاصل را، چه درحالت زوج بودن n وچه درحالت فرد بودن n، می‌توان بایک دستور نشان داد. از جعبه، باید به تعداد

$$۲\left(k+\left[\frac{n}{۲}\right]\right)$$

جوراب بیرون‌آورد.

۶۰. دستکش به‌جای جوراب

ازآن‌جاکه، بالمس دست، می‌توان دستکش چپ را ازدستکش راست تشخیص داد، فرض را براین می‌گیریم که دستکش‌های چپ وراست، به‌طور جداگانه، و مثلاً در جعبه‌های جداگانه‌ای، طبقه‌بندی شده باشند. به‌این ترتیب دریك طرف ۲۰دستکش سفید و۲۰دستکش سیاه چپ و، درطرف‌دیگر ۲۰دستکش سفید و۲۰دستکش سیاه راست گذاشته شده است.

a. ۱ دستکش راست و۲۱ دستکش‌چپ (یا برعکس، ۱ دستکش چپ

و۲۱ دستکش راست). در واقع، انتخاب ۲۰ دستکش از یـك دست (چپ یا راست)، ممکن است ازیـك رنگ درآیند و، این رنگ، بادستکش انتخابـی دست دیگر، فرق داشته باشد. ولی وقتی که ۲۱دستکش ازیك جعبه (چپ یا راست) برداریم، دست کم یکی ازدستکش‌ها رنگی غیر از بقیه خواهد داشت و، بنابراین، ۱ دستکش جعبهٔ دیگر، هررنگی داشته باشد، می‌توان یك جفت دستکش را درست کرد.

b. ۲۱دستکش چپ و۲۱ دستکش راست. اگرازهرکدام کمتراز۲۱عدد انتخاب کنیم، ممکن‌است دربین‌آن‌ها، حتی‌یك دستکش سفید هم پیدا نشود. ولی اگر ۲۱دستکش چپ و۲۱ دستکش راست‌برداریم، درمیان هـر کدام از آن‌ها، دست کم یك‌دستکش سفید وجود خواهد داشت.

c. ۲ دستکش چپ و ۲۲ دستکش راست (یا بـر عکس، ۲ راست و ۲۲ چپ). این تعداد کافی است، زیرا در بین ۲۲ دستکش راست، حتماً، ۲ دستکش سفید و۲دستکش سیاه پیدا می‌شودکه همراه با ۲دستکش چپ ازهر رنگی که باشند، دو جفت دستکش را تشکیل می‌دهند. دراین‌جا، روی هم، باید ۲۴ دستکش ازجعبه بیرون‌آورد.

تعداد کمتر، ممکن است کافی نباشد، زیرا برای در اختیار داشتن دو جفت دستکش، باید۲دستکش چپ و۲دستکش راست وجود داشته باشد.

ضمناً، چه برای راست وچه‌برای چپ، اگر کمتر از۲۱ دستکش‌انتخاب کنیم، ممکن است همهٔ دستکش‌های راست از یـك رنگ و همهٔ دستکش‌های چپ ازرنگ دیگرباشند.

ولی اگر تنها ۲۱ دستکش ازیك دست را بردازیم، بازهم ممکن است نتوان ازآن‌ها ۲جفت دستکش درست کرد (دراین مورد، حتی اگر۲۰دستکش هم ازدست دیگربرداشته باشیم، ممکن است مشکل را حل‌نکند. مثلاً وقتی که ۲۰دستکش سفید و ۱ دستکش سیاه ازدست راست و ۲۰ دستکش سیاه از دست چپ، از جعبه بیرون آمده باشد،که از آن‌ها ، تنها یك جفت دستکش می‌توان درست کرد).

[استدلال‌های سه‌بندِاخیر، بی‌اندازه مهم است‌و، بدون‌آن‌ها، نمی‌توان اثبات را کامل دانست. درواقع، باید روشن کردکه جواب دیگری‌هم‌وجود

دارد. لازم نیست ازیك جعبه ۲۲ دستکش راست بیرون بیاوریم، بلکه کافی است ۲۱ دستکش راست و۲۱ دستکش چپ انتخاب کنیم (زیرا، دراین‌صورت هم دربین دستکش‌های چپ، ازهر رنگ، دست‌کم یك‌عدد وجود دارد و، بنابراین به‌کمك‌آن‌ها، می‌توان ۲ جفت دستکش درست‌کرد).

ولی، باهمهٔ این‌ها، این‌را نمی‌توان جواب تازه‌ای به حساب آورد. زیرا، طبق شرط مسأله، باید دنبال جوابی باشیم‌که همراه با حداقل تعداد دستکش‌ها باشد. درحالت اخیر باید ۲۱+۲۱، یعنی ۴۲ دستکش انتخاب کنیم، درحالی‌که می‌توانیم با انتخاب ۲۲+۲، یعنی ۲۴ دستکش، مشکل خود را حل‌کنیم.]

d. ۲۲ دستکش‌چپ‌و۲۲ دستکش‌راست. درواقع، رابطهٔ دستکش‌های چپ وراست دراین مسأله، همان رابطهٔ جوراب‌های سیاه و سفید در مسألهٔ ۵۵ — **b** است.

e. ۳ دستکش چپ‌و۲۲دستکش راست(یابرعکس، ۳راست و۲۲چپ) درواقع، اگر ازدستکش‌های چپ آغازکنیم، همان طور که در مسألهٔ ۵۵-**a** دیدیم. ازآن‌ها باید ۳ عدد انتخاب کنیم. در این صورت، بین دستکش‌های چپ، دست کم، ۲دستکش‌هم‌رنگ پیدامی‌شود، برای‌این‌که، بین دستکش‌های راست، ۲ دستکش ازهمین رنگ وجود داشته باشد، باید ۲۲دستکش راست انتخاب‌کرد (حل مسألهٔ ۵۵-**b** را ببینید).

به‌این ترتیب، روی‌هم، ۲۵دستکش باید ازجعبه بیرون‌آورد. کمتراز این تعداد ممکن نیست، زیرا اگر از دستکش‌های چپ بیش از۳ عدد (ولی کمتر از۲۲عدد) دستکش چپ بیرون بیاوریم، روشن است که، بین آن‌ها، ۲ دستکش هم‌رنگ پیدا می‌شود.

f. ۲۱دستکش چپ و۲۱دستکش راست. درواقع، اگرازدستکش‌های چپ یا راست تعدادکمتری انتخاب کنیم، ممکن‌است همه‌ازیك رنگ باشند. ولی اگر ازهرنوع ۲۱ عدد برداریم، در هر مورد دست کم دو دستکش از رنگ‌های مختلف پیدا می‌شود. (پایان حل مسأله **c** را ببینید).

g. ۲۴ دستکش چپ و ۲۴ دستکش راست. رابطهٔ‌دستکش‌های چپ و راست دراینجا، همان رابطهٔ جوراب‌های سیاه وسفید درمسأله ۵۵- **f** است.

(این که دراین‌جا صحبت از دستکش‌های سیاه است و نـه دستکش‌های سفید، چندان مهم نیست، زیرا دستکش‌های سیاه و سفید، هر دو دریك جعبه قرار دارند).

h. ۱۱ دستکش چپ و ۲۶ دستکش راست (یا بـرعکس، ۱۱ دستکش راست و ۲۶ دستکش چپ). این تعداد کافی است، زیـرا ازبین ۱۱ دستکش چپ، همیشه می‌توان، دست کم، ۶ دستکش یك رنگ انتخاب‌کرد. در بین ۲۶ دستکش راست هم، همیشه لااقل ۶ دستکش سیاه وجود دارد. بنابراین، در هرحال، می‌توان ۶ جفت دستکش هم رنگ را جورکرد.

روی‌هم بایـد ۳۷ دستکش از جعبه بیرون آورد. باکمتر ازاین تعداد، ممکن است نتوان به‌نتیجه رسید، زیرا اگر، مثلاً ۱۰ دستکش چپ انتخاب کنیم، ممکن است ۵ تای آن‌ها سفید و ۵ تای دیگر سیاه باشند و ۶ دستکش چپ هم‌رنگ پیدا نشود. همچنین، دربین ۲۵ دستکش راست، ممکن است ۶ دستکش ازهررنگ وجود نداشته باشد ومثلاً ۲۰تای آن‌ها ازیك رنگ و ۵ تای بقیه از رنگ دیگر باشند.

به‌این‌ترتیب، ثابت‌می‌شودکه، نه‌تنها، ۳۷ دستکش کافی است، بلکه ضمناً برای تعدادکمتر ازآن (و یـا همین تعداد، منتهی با ترکیب دیگری از دونوع دستکش چپ وراست)، جوابی وجود ندارد.

i. ۵ دستکش چپ و۲۵ دستکش راست (یا برعکس، ۵ دستکش‌راست و ۲۵ دستکش چپ). این تعداد دستکش کافی است، زیـرا بین ۲۵ دستکش راست، دست کم، ۵ دستکش سفید و ۵ دستکش‌سیاه وجود دارد. درنتیجه، ۵ دستکش‌چپ، به‌هررنگی باشند، همیشه می‌توان ۵جفت دستکش راجورکرد.

روی هـم بایـد ۳۰ دستکش از جعبه بیرون آورد. انتخاب تعدادی کمترممکن نیست، زیرا ازهرکدام ازدستکش‌های چپ وراست باید، دست‌کم، ۵ عدد وجود داشته باشد. اگراز دستکش‌های راست، کمتراز۲۵ عددانتخاب کنیم، آن‌وقت، حتی ۲۰دستکش چپ‌هم ممکن است برای‌پیداکردن ۵جفت، کافی نباشد (مثلاً، درحالتی‌کـه ۲۰ سفید و ۴ سیاه ازدستکش‌های راست و ۲۰ سیاه ازدستکش‌هـای چپ دراختیار داشته بـاشیم). بنابـراین، اگر ۲۴

دستکش راست بیرون بیاوریم، ممکن‌است حتی۴۴دستکش هم، برای به‌دست آوردن ۵ جفت کافی نباشد.

[در این گونه موردها، آزمایش این مطلب اهمیت داردکه، بین دو عددی که برای تعداد دستکش‌های چپ وراست به‌دست می‌آید، عدد بزرگتر راکوچك وعددکوچکتر را بزرگ‌کنیم، چه پیش می‌آید! آیا می‌توان از ۲۱ چپ و ۲۴ راست ، یا از ۲۲ چپ و ۲۳ راست، ۵ جفت دستکش جور کرد (و همچنین، درمورد حالت عکس، وقتی‌که تعداد دستکش‌های چپ و راست را با هم عوض‌کنیم)؟ روشن است کـه، دراین موردها، اگرچه عدد بزرگتر، کوچك می‌شود، ولی تعدادکل آن‌ها (تعداد دستکش‌های چپ وراستی‌که باید ازجعبه بیرون‌آورد)، اضافه می‌شود.]

بنابـراین، با کمتر از ۳۰ دستکش نمی‌تـوان ۵ جفت را جورکرد و، ضمناً، عدد ۳۰ را هم تنها می‌توان بـه دو جملهٔ ۵+۲۵ تقسیم‌کرد و نه به صورتی دیگر.

j. ۲۶دستکش‌چپ و۲۶دستکش راست.درواقع، رابطهٔ‌بین‌دستکش‌های چپ و راست، دراین‌حا، همان رابطهٔ بین جوراب‌های سیاه و سفید درمسالهٔ ۵۵—**h** است.

یادداشت ۱. دیدیم‌که حل مساله‌های **d**، **g** و **j**، منجر به‌حل یکی از مساله‌های‌مربوط به‌جوراب‌ها شد. این‌پرسش پیش می‌آید: درچه موردهایی، حل‌مسالهٔ مربوط‌به‌دستکش‌ها، شبیه‌حل مسالهٔ‌مربوط به‌جوراب‌ها درمی‌آید؟

درچنین موردهایی، ۲ دستکش هم‌رنگ (چه‌چپ و چه‌راست)، متناظر است بایك جفت‌جوراب. بنابراین، تنها وقتی می‌توان حل مسالهٔ مربوط به دستکش‌هارا، به‌حل‌مسالهٔ مربوط به‌جوراب‌ها منجرکردکه، تعداد درخواستی جوراب‌های از هررنگ، عددی زوج باشد.

علاوه بـرآن، بایـد تعداد دستکش‌های داخل جعبه هم، از هررنگی، به‌تعداد زوج باشد. وقتی می‌توان ازاین شرط، صرف‌نظرکردکه تعداد جفت دستکش‌های این یا آن رنگ، به‌اندازهٔ کافی زیاد باشد (در مورد جوراب‌ها هم، وضع بـه‌همین‌گونـه است: اگر تعداد جوراب‌های جعبه به‌اندازهٔ کافی

زیاد باشد، به‌هیچ وجه مهم نیست که ازهررنگ چقدرباشد؛ تعداد جفت‌های هررنگ می‌تواند حتی فرد باشد).

اگر این دوشرط برقرار باشد و تعداد جفت دستکش‌های هر رنگ، که باید تشکیل دهیم، معلوم باشد؛ آن‌وقت، مسالهٔ مربوط به دستکش‌ها را می‌توان، منجر به مسالهٔ مربوط به‌جوراب‌ها کرد. (موقعیتی که درمساله‌های **d**، **g** و **j** وجود داشت).

به‌این ترتیب، در هرحال، به دونتیجه می‌رسیم.

I. مسالهٔ مربوط به دستکش‌ها را نمی‌توان، درحالتی‌که تعداد جفت دستکش‌های خواسته شده، تنها از یك رنگ و عددی فرد باشد، به مسالهٔ مربوط به‌جوراب‌ها منجر کرد.

II. برعکس، اگر

۱) تعداد جفت دستکش‌های داخل جعبه، از هررنگ، به‌تعداد زوج باشد، یا تعداد جفت دستکش‌ها، به‌اندازهٔ کافی زیاد باشد،

۲) تعداد جفت‌های هررنگ ـ که باید تشکیل داد ـ به‌طور جداگانه معین باشد،

۳) تعداد جفت‌های هررنگ، زوج باشد،

آن وقت، حل مسالهٔ مربوط به دستکش‌ها ، منجر به حل مسالهٔ مربوط به جوراب‌ها می‌شود.

(فرض براین است که، مسالهٔ جوراب‌ها حل شده است ویا «نسخه‌ای» برای حل آن وجود دارد.)

درواقع، اگر درصورت مساله، از ما خواسته باشندکه تعداد کاملاً معینی جفت دستکش را، ازهر رنگ، تشکیل دهیم؛ به‌معنای آن است که‌تعداد دستکش‌های چپ‌وراست‌ازهر رنگ،کاملاً معین است‌و، ضمناً‌تعداددستکش‌های چپ هر رنگ، با تعداد دستکش‌های راست همان رنگ، برابراست. (*)

حکم زیر، کاملاً روشن است:

اگردرصورت مساله گفته شده باشدکه چند دستکش واز چه‌رنگی باید، ازنوع چپ وراست، انتخاب کرد، آن وقت، دستکش‌های راست را می‌توان

کاملاً مستقل از دستکش‌های چپ انتخاب کرد (و برعکس). (**)
درواقع، مجموعهٔ دستکش‌های چپ (یا راست)، که درتاریکی انتخاب می‌شوند، یا شامل تعداد لازم دستکش‌های ازرنگ موردنظرهستند ویاشامل این تعدادنیستند، ودستکش‌های «دست‌دیگر» نمی‌توانند هیچ تغییری دروضع بدهند.
حکم‌های (*) و (**)، به ما امکان می‌دهند تا، بدون هیچ زحمتی، «قضیهٔ» بالارا، درموردمنجر کردن مساله‌های مربوط به‌دستکش‌ها به‌مساله‌های مربوط به‌جوراب‌ها، ثابت کنیم، زیرا انتخاب دستکش‌های هریك از دست‌ها، یك مسالهٔ مستقل را تشکیل می‌دهد. ولی انتخاب تعداد زوجی از جفت دستکش‌های راست یا چپ هررنگ، به‌نوبهٔ خود، معادل است با حل مسالهٔ متناظرآن دربارهٔتشکیل جفت‌جوراب‌ها ازهمان رنگ (تعداد جفت‌جوراب‌ها، نصف تعداد جفت دستکش‌ها است). چون تعداد دستکش‌های چپ وراست‌هر رنگ، باید باهم برابرباشند، بنابراین، دومسالهٔ‌مستقل‌مربوط به‌دستکش‌های چپ وراست، منجر به‌یك مساله از جوراب‌ها می‌شود.

*

اگر درصورت مساله، صحبتی ازرنگ دستکش‌هایی‌که باید جفت کرد، بـه میان نیامده باشد، کارکمی بغرنج‌تـر می‌شود: در این حالت، نمی‌توان دستکش‌های چپ وراست را، مستقل ازیکدیگر، انتخاب کرد. مثلاً درمسالهٔ **h** (که‌درآن، باید ازبین دستکش‌هایی‌که درتاریکی ازجعبه بیرون آورده‌ایم، ۶ جفت هم رنگ درست‌کنیم)، حـل را از دستکش‌هـای چپ آغاز کـردیم؛ بنابراین، شروع آن، معادل بامسالهٔ درست کردن ۳ جفت‌جوراب هم‌رنگ‌است (همهٔ‌دستکش‌های چپ را می‌توان «جوراب» به‌حساب‌آورد). ولی همین که ۶ دستکش‌چپ‌هم‌رنگ‌انتخاب شد، بایددرجست‌وجوی ۶ دستکش‌راست هم‌رنگ آن‌ها باشیم (این‌دستکش‌های راست‌را، نمی‌توان به‌طورساده هم‌رنگ‌انتخاب کرد، بلکه باید حتماً، همان رنگ دستکش‌های چپ انتخابی‌را داشته باشند).
می‌توان این‌حالت را هم تصور کرد که، انتخاب‌دستکش‌های چپ، منجر به یك مساله از جوراب‌هـا و انتخاب دستکش‌های راست، منجر بـه مسالهٔ دیگری ازجوراب‌ها بشود (مثلاً، درمسالهٔ **e**، به‌چنین حالتی برمی‌خوریم).

یادداشت ۲. «پاسخ» مساله‌های e، f و c را با هم مقایسه می‌کنیم. مسالهٔ c دقیقاً به‌مساله‌های e و f مربوط و، به‌تعبیری، «مجموع» آن‌هاست: برای این‌که‌مسالهٔ c حل‌شود، باید یامسالهٔ e راحل‌کرد ویامسالهٔ f را. ولی اگرکسی گمان‌می‌کندکه‌به‌کمك‌جواب c می‌توان، به‌نحوی، جواب‌مساله‌های e و f رابه‌دست‌آورد، خودرا گمراه‌کرده‌است. مسالهٔ c «وسیع‌تر»ازمساله‌های e و f است(درc، ازمجموعهٔ بزرگتری بایدانتخاب کرد، بنابراین‌به‌انتخاب تعداد کمتری دستکش منجرمی‌شود)، واین وضع، درجواب‌ها منعکس شده است.

۶۱. اگر فکر کنیم

a. باید ۱۴ دستکش چپ و ۱۴ دستکش راست ازجعبه بیرون آورد (روی هم ۲۸ دستکش).

درواقع، چه تعداد دستکش‌های چپ و چه‌تعداد دستکش‌های راست، نبایدکمتر از ۵ باشد.

اگرتنها ۵دستکش ازیك دست را انتخاب‌کنیم، ممکن است همهٔ آن‌ها سیاه باشند و، بنابراین، ناچاریم از دستکش‌های دست دیگر، دست کم، ۲۵ عدد برداریم (درغیراین‌صورت، ممکن است نتوانیم ۵ جفت را جورکنیم). به‌این ترتیب، حداقل باید ۳۰ دستکش ازجعبه خارج‌کرد.

اگربه‌جای ۵، تعداد دستکش‌های یك دست را ۶، ۷، ۸ یا ۹ بگیریم، وضع بدتر می‌شود، زیرا دراین موردها هم باید، مثل قبل، دست‌کم ۲۵ دستکش دست دیگر را برداشت.

اگر ۱۰ دستکش ازیك دست را برداریم، برای دستکش دست دیگر، ۲۴ عدد کافی است. از ۱۰ دستکش، دست‌کم یکی سفید است. دربین ۲۴ دستکش دست دیگر، ازرنگ سفید به اندازهٔ کافی پیدا می‌شود (دست‌کم ۱۵ عدد) و بدون شك ۴ دستکش سیاه هم (دست‌کم) درمیان آن‌ها وجود دارد. بنابراین، هرنسبتی‌که بین رنگ‌های سیاه و سفید ۱۰ دستکش انتخابی ازیك دست وجود داشته باشد، همیشه می‌توان ۵ جفت را جورکرد.

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کردکه، اگر۱۱ دستکش ازیك دست را

انتخاب‌کنیم، برای دست دیگر، ۲۳ دستکش کافی است. همچنین، اگر تعداد دستکش‌های یك دست ۱۲ عدد باشد، برای دست دیگر ۲۲ عدد کافی است. بالاخره، اگر ازیك دست ۱۳ عدد ازجعبه خارج‌کنیم، برای دست دیگر ۲۱ عدد کافی خواهد بود.

درهریك ازاین چهارحالت، باید روی هم، ۳۴ دستکش از جعبه‌خارج کنیم.

(*) ولی اگر۱۴ دستکش ازیك دست را انتخاب‌کنیم،برای جورکردن ۵ جفت دستکش، کافی است تنها ۱۴ عـدد از دست دیگر رااز جعبه بیرون بیاوریم. درواقع، ازبین ۱۴ دستکش، دست‌کم ۵ دستکش سفید است. به این ترتیب، کافی است روی هم، ۲۸ دستکش ازجعبه خارج‌کنیم.

دراین‌جا، همهٔ حالت‌هـا را بررسی‌کردیم، زیـرا انتخاب بیش از ۱۴ دستکش چپ یا راست ازجعبه، به روشنی بی‌معناست.

b. این مساله دوجواب دارد: می‌توان ازدستکش‌های چپ و راست، هرکدام، ۱۵ عدد، ویا ۵ دستکش ازیك دست و ۲۵ دستکش از دست دیگر، انتخاب‌کرد. (درهر دوحالت، باید ۳۰ دستکش ازجعبه بیرون آورد.)

تجزیه و تحلیل ترکیب‌های مختلف را، شبیه قبل (حالت **a**) می‌توان انجام داد، به‌همین مناسبت، تنها نتیجه‌های «بینابینی» را دراین‌جا می‌آوریم وبحث تفصیلی را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

تعداد دستکش‌های یك دست	تعداد دستکش‌های دست دیگر	تعداد کل دستکش‌های انتخابی
۵	۲۵	۳۰
۶،...،۱۰	۲۵	۳۱،...،۳۵
۱۱	۲۴	۳۵
۱۲	۲۳	۳۵
۱۳	۲۲	۳۵
۱۴	۲۱	۳۵
۱۵	۱۵	۳۰ (*)

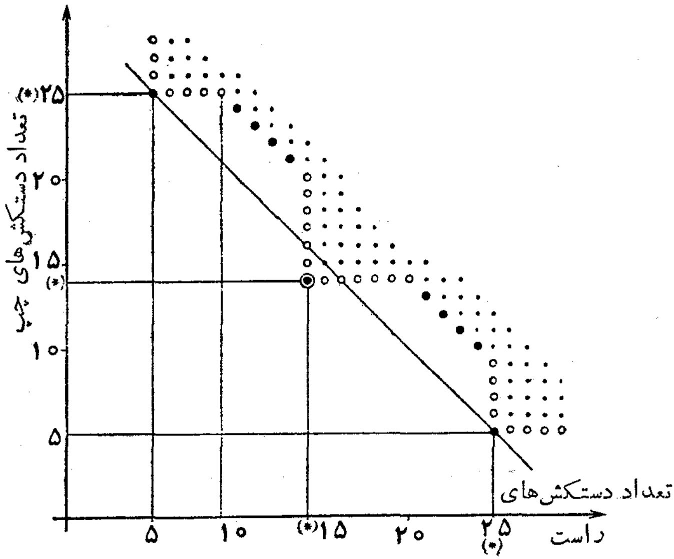
c. باید ۵ دستکش ازیك دست و ۲۵ دستکش از دست دیگر انتخاب کرد (روی‌هم، ۳۰ دستکش).

مثل حالت قبل، نتیجه‌ها را می‌دهیم وتجزیه وتحلیل تفصیلی را بـه عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

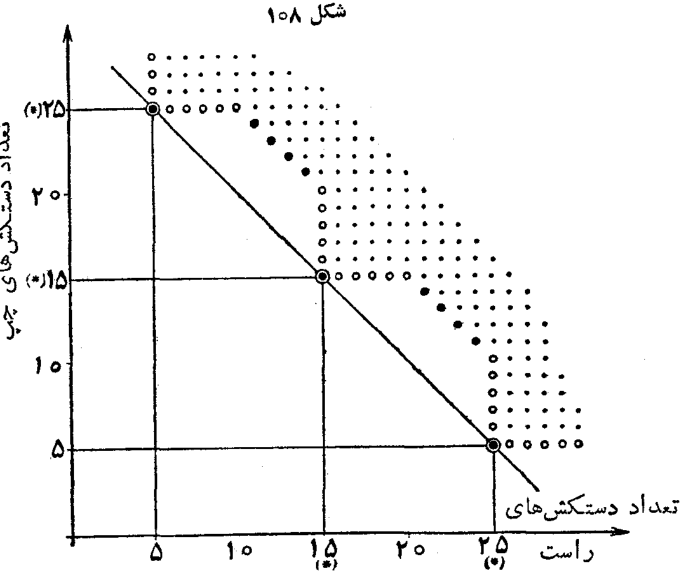
تعداد دستکش‌های یك دست	تعداد دستکش‌های دست دیگر	تعداد کل دستکش‌هایی‌که از جعبه بیرون می‌آوریم
۵	۲۵	۳۰
۶،...،۱۱	۲۵	۳۱،...،۳۶
۱۲	۲۴	۳۶
۱۳	۲۳	۳۶
۱۴	۲۲	۳۶
۱۵	۲۱	۳۶
۱۶	۱۶	۳۲ (*)

یادداشت۱. درحالت a ، مسأله، یك‌جواب منحصر دارد: ۱۴دستکش چپ و۱۴ دستکش راست. درحالت b ، مسأله، درواقع دارای ۳جواب‌است ۱۵ دستکش راست و۱۵دستکش چپ، ۵دستکش راست و ۲۵ دستکش چپ، ۲۵ دستکش راست و ۵ دستکش چپ. دو جـواب اخیر ، برجواب مسألـه درحالت c منطبق‌اند.

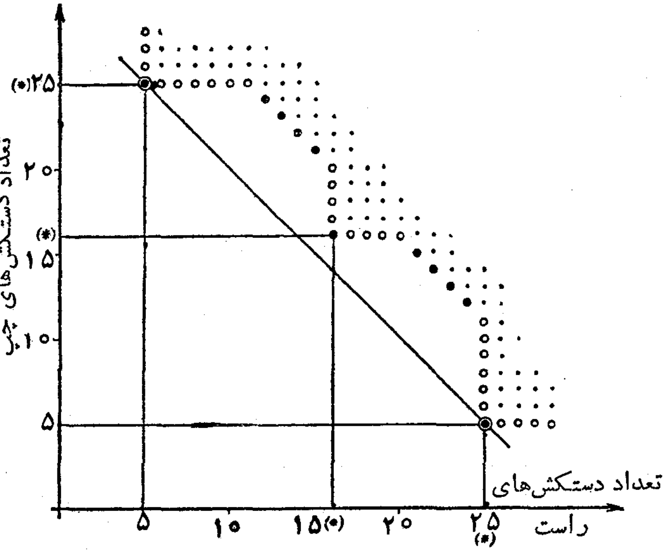
یادداشت۲. اگر ازنمودار استفاده‌کنیم (شکل‌های۱۰۸،۱۰۹و۱۱۰) ساده تر می‌توانیم به «ساختمان درونی» مسأله‌های a ، b و c پـی ببریم . تعداد دستکش‌های چپ وراست را، که به‌کمك آن‌ها می‌توان ۵جفت‌راتشکیل داد، به ترتیب، روی دو محـور مختصات نشان می‌دهیم. نقطه‌هـا نمایندهٔ انتخاب بیش از حـد لازم دستکش‌هاست: هنوز می‌توانیم باکـم‌کردن تعداد دستکش‌های چپ و راست درآن‌ها، ۵ جفت دستکش موردنیاز را جورکنیم. دایره‌های‌روشن‌نمایندهٔ‌انتخاب دستکش‌هایی‌است، که درآن‌ها، یا دستکش‌های چپ و یا دستکش‌هـای راست « ذخیره شده است » (یعنی می‌تـوان، تعـداد



شکل ۱۰۸



شکل ۱۰۹



شکل ۱۱۰

دستکش‌های چپ یا تعداد دستکش‌های راست را کم‌کرد). دایره‌های سیاه نمایندهٔ انتخابی ازدستکش‌هاست که، درآن‌ها، تعداد دستکش‌های یک‌دست را نمی‌توان، بدون بالا بردن تعداد دستکش‌های دست دیگر، تقلیل داد. ازاین انتخاب‌ها، آن‌هایی که متناظر با حداقل تعدادکل دستکش‌ها هستند، جواب مسأله‌اند. جواب‌ها، بادایره‌های دوگانه، نشان داده شده‌اند.

یادداشت ۳. به انتخابی از دستکش‌ها توجه کنید که با علامت (*) مشخص شده‌است. اگر درآن‌ها، تعداد دستکش‌های چپ یا راست را تغییر دهیم، تعداد دستکش‌های دیگر، به‌طور جهشی تغییر می‌کند.

۶۲. سریع‌تر انجام دهید

درجعبه ، چهار «نوع» دستکش وجود دارد: ۱) سفیدچپ؛ ۲) سفید راست؛ ۳) سیاه چپ؛ ۴) سیاه راست. ازهر«نوع»دستکش، ۲۰ عدد درجعبه

گذاشته شده است. ازاین «مخلوط» باید تعدادی دستکش بیرون‌آورد که، به کمك‌آن‌ها، بتوان جفت‌های مورد نیاز را جورکرد.

a. ۴۱ دستکش. درواقع، ۴۰ دستکش کم است، زیرا همهٔ آن‌ها ممکن است چپ ازآب درآیند (یا همه راست، یا همه سفید چپ وسیاه راست، یا همه سیاه چپ وسفید راست باشند). از ۴۱ دستکش، دست‌کم، ۲۱ عدد از یك رنگ‌اند، وبین ۲۱ دستکش هم‌رنگ، حتماً چپ و راست، ازهردو پیدا می‌شود (زیرا، درجعبه، تنها ۲۰ دستکش چپ و ۲۰ دستکش راست از هر رنگ وجود دارد).

b. ۶۱ دستکش. درواقع، دربین ۶۰ دستکش، ممکن است ۴۰ دستکش سیاه و ۲۰ دستکش سفید چپ وجود داشته باشد. ولی اگر ۶۱ دستکش انتخاب کرده‌باشیم، دست کم ۲۱ عدد آن‌هاسفیداست و از ۲۱ دستکش سفید، همیشه می‌توان یك‌جفت جورکرد (انتهای حل مسألهٔ **a** را ببینید).

c. ۴۲ دستکش. برای جورکردن ۲ جفت، دست‌کم به تعدادی‌دستکش نیاز داریم که، باآن‌ها، بتوان ۱ جفت درست کرد، یعنی حداقل ۴۱ دستکش. ولی، این مقدار، کافی نیست! درواقع، دربین ۴۱ دستکش، ممکن است فقط یك دستکش‌چپ (یاراست) وجود داشته باشد. ولی اگر۴۲دستکش دراختیار داشته باشیم؛ آن‌وقت، یا تعداد دستکش‌های سفید وسیاه باهم برابرند (یعنی ازهر رنگ ۲۱عدد)، ویا از۴۲ دستکشی که دراختیار داریم، می‌توان ۲۲ دستکش هم رنگ بیرون آورد (یا سیاه و یا سفید). در حالت اول، همیشه می‌توانیم یك‌جفت دستکش سفید ویك جفت دستکش سیاه جور کینم و، در حالت دوم، دست‌کم، ۲ جفت دستکش هم‌رنگ (درواقع، دربین ۲۲ دستکش هم رنگ، بیش از ۲۰ دستکش چپ وجود ندارد و، بنا براین، دست‌کم ۲ دستکش راست هم پیدا می‌شود؛ به همین ترتیب، روشن می‌شودکه، در بین این ۲۲ دستکش هم‌رنگ، لااقل ۲ دستکش چپ هم پیدا می‌شود؛ در نتیجه، همیشه می‌توانیم لااقل دوجفت دستکش جورکنیم).

d. ۶۲ دستکش. درواقع، اگر ۶۱ دستکش انتخاب‌کنیم. ممکن است ۴۰ عددسیاه و ۲۰سفید چپ باشد؛ وتنها یك دستکش سفید راست در آن‌ها پیدا شود. ولی اگر ۶۲دستکش انتخاب‌کرده باشیم، دست‌کم، ۲۲تای آن‌ها

سفیدند و، از ۲۲ دستکش سفید، همیشه می‌توان ۲ جفت درست کرد (پایان‌حل مسألهٔ **c** را ببینید).

e. ۴۳ دستکش. ۴۲ دستکش کم است، زیرا ممکن است شامل ۴۰ دستکش چپ، ۱ دستکش سفید راست و ۱ دستکش سیاه راست باشد. ولی اگر ۴۳ دستکش انتخاب کنیم، به‌ناچار ۲۲ عدد آن‌ها، هم‌رنگ‌اند و، بنابراین، از آن‌ها می‌توان ۲ جفت را جدا کرد.

f. ۶۱ دستکش. درواقع، بین ۶۰ دستکش، ممکن است حتی یک دستکش سفید راست پیدا نشود. ولی اگر ۶۱ دستکش برداریم، دست کم ۲۱ عدد آن‌ها سفید و ۲۱ عدد آن‌ها سیاه است و، بنابراین، همیشه می‌توان یک جفت سفید ویک جفت سیاه از بین آن‌ها جدا کرد.

g. ۶۴ دستکش.

h. ۵۱ دستکش. در ۵۰ دستکش، ممکن‌است ۴۰ دستکش چپ، ۵ سفید راست و ۵ سیاه راست وجود داشته باشد. ولی اگر ۵۱ دستکش از جعبه برداریم، تعداد دستکش‌های یکی از رنگ‌ها، کمتر از ۲۶ نمی‌شود و، بنابراین از بین آن‌ها می‌توان ۶ جفت را انتخاب کرد.

i. ۴۵ دستکش. دربین ۴۴ دستکش، ممکن است فقط ۴ دستکش راست وجود داشته باشد. ولی دربین ۴۵ دستکش، یادست کم ۲۰ سیاه و ۲۰ سفید وجود دارد ویا، دست کم، ۲۵ دستکش هم رنگ. در حالت اول، هنوز ۵ دستکش باقی می‌ماند که، همیشه، می‌توان به کمک آن‌ها، ۵ جفت راجور کرد. درحالت دوم، می‌توان ۵ جفت را ازهمان رنگی انتخاب کرد که بیش از ۲۵ عدد وجود دارد.

j. ۶۶ دستکش. درواقع، ۶۵ دستکش ممکن است شامل ۴۰ دستکش سفید، ۲۰ سیاه چپ وفقط ۵ سیاه راست باشد. ولی اگر ۶۶ دستکش از جعبه خارج کنیم، بین آن‌ها، دست کم ۲۶ سفید و ۲۶ سیاه پیدا می‌شود و، بنابراین ازهر رنگ می‌توان، دست کم، ۶ جفت تشکیل داد.

۶۳. اندیشه‌ها

راه حل اول. بامعرفت شهودی روشن است که، ممکن است با اضافه‌

شدن یک‌جفت ازیکی ازرنگ‌ها، به‌سفارش جوراب‌ها، لزومی به‌اضافه‌کردن تعداد جوراب‌های انتخابی نباشد. اگر حدس ما درست باشد ، باید بتوان مسأله را با «روش آزمایشی» حل کرد: مسأله‌های زیادی دربارهٔ جورکردن جوراب‌ها درنظر می‌گیریم و، در بین‌آن‌ها، نمونهٔ موردنظررا پیدامی‌کنیم. بدون تردید ، اگر پی‌گیری و تحمل لازم را داشته‌باشیم ، پاداش خود را خواهیم گرفت.

بله، به‌چنین حالتی برخورد خواهیم‌کرد. مثلاً، مسأله‌های ۵۸ — **b** و ۵۸ — **k** یا ۵۸ — **c** و ۵۸ — **l** را باهم مقایسه کنید.

[روشن‌است که «روش‌آزمایشی» نمی‌تواند دلیل این‌پیش‌آمد را برای ما روشن‌کند . این روش ، تنها می‌تواند ، درستی حدس ما را ، از راه جست وجوتأیید کند. روش‌مناسب‌ترآن‌است که بتوانیم، بدون جست‌وجوهای «زیادی» خود را به‌نمونهٔ موردنظر برسانیم؛ وچنین روشی، وجوددارد.]

راه‌حل دوم. برای حل مسألهٔ ۶۲ — **j** ، می‌توان فرض کردکه ، در جعبه «چهاررنگ جوراب» وجود دارد : «چپ سفید» ، «راست سفید» ، «چپ‌سیاه» و «راست سیاه» (۲۰ جوراب از هرنوع) . می‌خواهیم تعدادی جوراب از آن‌ها برداریم که بتوان ، از بین آن‌ها، ۲ جفت «چپ‌سفید» و «راست‌سفید» و ۳ جفت«چپ‌سیاه» و «راست‌سیاه» انتخاب کرد. همان‌طورکه درحل مسألهٔ ۶۲ — **j** دیدیم، همین تعداد جوراب، برای جورکردن ۳جفت جوراب «از همهٔ رنگ‌ها» کافی است ، یعنی ۳ جفت «چپ‌سفید» ، ۳ جفت «راست‌سفید»، ۳ جفت «چپ‌سیاه» و ۳جفت «راست‌سیاه».

۶۴. اندیشه‌های بعدی

نه، چنین امکانی وجود ندارد.

فرض می‌کنیم، فروشنده‌ای، درکنار جعبه ایستاده است ومی‌خواهد تعدادی دستکش یا جوراب را بردارد که برای جفت‌های بیشتری ازهررنگ کافی باشد؛ ولی تصادفاً یک‌جوراب یایک‌دستکش کمتر ازمقدار لازم برداشته

است. کمبود یك‌دستکش یا یك جوراب، می‌تواند در جور کردن یك جفت بیشتر، اثر بگذارد. اکنون فرض می‌کنیم توانسته باشیم، تعداد بیشتر جفت‌های هررنگ را، به‌استثنای جفتی از یکی از رنگ‌ها (که یکی کمتر از حد لازم دارد)، تشکیل دهیم. ولی از آن‌جا که، طبق صورت مسأله، باید تعداد جفت‌های هررنگ دست‌کم ۱ واحد اضافه شود، باید به‌این نتیجه رسید که، فروشنده می‌تواند تعداد اولیهٔ جفت‌های هررنگ را، باهمان دستکش‌ها یا جوراب‌هایی که از جعبه خارج کرده‌است، درست کند. یعنی، برای درست کردن تعداد جفت‌های اولیه، می‌توان ۱ جوراب یا ۱ دستکش کمتر انتخاب کرد و، برای تعداد بیشتری جفت ازهررنگ، باید دست‌کم، ۱ جوراب یا ۱ دستکش بیشتر انتخاب کرد.

یادداشت. اثبات را براساس استدلال‌هایی قراردادیم که در مسأله‌های مربوط به‌انتخاب چیزها به‌کارمی‌روند؛ چیزهایی که «درتاریکی بی‌تفاوت‌اند، ولی درروشنایی اختلاف خودرا ظاهر می‌کنند». ولی ازآن‌جا که مسأله‌های بسیار گوناگونی دراین مورد وجود دارد، نمی‌توان این حکم را، به‌صورتی کلی‌تر، تنظیم کرد.

۶۵. مسألهٔ عکس

وقتی‌که ۵۰ جوراب از جعبه بیرون بیاوریم، ممکن است حتی یك جوراب سفید هم در بین‌آن‌ها نباشد (زیرا ممکن است همهٔ جوراب‌های سیاه و همهٔ جوراب‌های قهوه‌ای را برداشته باشیم)، ولی در بین‌آن‌ها، حتماً ۵ جفت جوراب سیاه پیدا می‌شود (زیرا تعدادکل جوراب‌های سفید وقهوه‌ای ۴۰ عدد است و، بنابراین، در بین ۵۰ جورابی‌که از جعبه برداشته‌ایم، لااقل ۱۰ جوراب سیاه وجود دارد)، همچنین، دست‌کم ۱۰ جفت جوراب قهوه‌ای هم قابل جور کردن است (زیرا، تعدادکل جوراب‌های سفید وسیاه، برابر است با ۳۰).

اگر از جعبه، ۵۱ جوراب درآورده‌باشیم، بازهم ممکن است نتوان حتی یك جفت جوراب سفید به‌دست‌آورد (زیرا، ممکن است، ۵۰ جوراب

از رنگ‌های سیاه و قهوه‌ای باشند و، طبعاً، بایك جوراب سفید باقی‌مانده، نمی‌تـوان یك‌جفت درست‌کرد) ، ولی دست‌کم ۵ جفت جوراب سیاه (حتی اگر تمام جوراب‌های سفید و قهوه‌ای برداشته شده‌باشد، بازهم ۱۱جوراب سیاه دربین ۵۱ جوراب باقی‌می‌ماندکه می‌توان، باآن‌ها، ۵جفت جورکرد) ودست‌کم، ۱۰ جفت جوراب‌قهوه‌ای درست‌کرد (زیرا اگر همهٔ جوراب‌های سفید و سیاه هم برداشته شده‌باشد، بازهم ۲۱ قهوه‌ای باقی‌می‌ماند) .

بررسی بقیهٔ حالت‌هـا را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم . جدول تکمیل شده، در زیر داده شده است :

تعداد جوراب‌هایی که در تاریکی، از جعبه بیرون آورده‌ایم	تعداد جفت جورابهایی که می‌توان، از آن‌ها، درست کرد		
	سفید	سیاه	قهوه‌ای
۵۰	۰	۵	۱۰
۵۱	۰	۵	۱۰
۵۲	۱	۶	۱۱
۵۳	۱	۶	۱۱
۵۴	۲	۷	۱۲
۵۵	۲	۷	۱۲
۵۶	۳	۸	۱۳
۵۷	۳	۸	۱۳
۵۸	۴	۹	۱۴
۵۹	۴	۹	۱۴
۶۰	۵	۱۰	۱۵

یادداشت. اکنون می‌توانیم، با عمق بیشتری، به‌پرسش مسالهٔ ۶۳ نگاه‌کنیم. بعد از حل این مساله، می‌توانیم این پرسش «حیرت‌آور» را در برابر خود قرار دهیم : به‌چه ترتیبی ممکن است، یك مجموعه جوراب، که ازجعبه بیرون‌آورده‌ایم، درآینده «نیروبگیرد» وامکان درست‌کردن‌جفت‌های بیشتری را به‌وجود آورد ؟ البته، «نیروی» مجموعه تغییر نمی‌کند؛ تنها باید گفت که ما از مجموعه «نپرسیده بودیم» که آیا می‌توانند جفت‌های دیگری را تشکیل دهد یا نه ! و طبعاً او هم، در این باره «سکوت کرده بود».

۶۶. بازهم یك سفارش اضافی

تا حداکثر ۱۹ جفت.

۱. سفارش اضافی را تا ۱۹ جفت جوراب می‌توان انجام داد. در واقع، اگر سفارش قبلی ۲ جفت جوراب سفید باشد، ایلونکا با بیرون‌آوردن ۵۴ جوراب از جعبه، آن را انجام می‌دهد. اگر سفارش اضافی، ۷ جفت جوراب سیاه و ۱۲ جفت جوراب قهوه‌ای را، درکنار ۲ جفت جوراب‌سفید سفارش قبلی، خواسته باشد با همان ۵۴ جوراب می‌توان آن را انجام داد (جدول حل مسألهٔ قبل را ببینید).

۲. اگر سفارش اضافی، بیش از ۱۹ جفت باشد، قابل انجام نیست. از جدول حل مسالهٔ قبل دیده می‌شودکه اگر تعداد جوراب‌هایی‌که ایلونکا از جعبه بیرون آورده است، از ۵۴ تجاوز نکند، نمی‌توان سفارشی را که بیش از ۲ جفت جوراب سفید، ۷ جفت جوراب سیاه و ۱۲ جفت جوراب قهوه‌ای باشد، انجام داد. در سفارش تازه، نمی‌توان از هرسه رنگ‌جوراب صحبت کرد، زیرا همان‌طور که در حل مسالهٔ ۶۴ دیدیم ، جوراب‌های انتخابی از جعبه، برای انجام چنین‌سفارشی، کافی نیست. بنابراین، سفارش تازه، باید در باره جوراب‌هایی باشد که ، از رنگ آن‌ها ، بیشترین تعداد وجود دارد و، در نتیجه، از ۱۲+۷ تجاوز نمی‌کند. در واقع، وقتی‌که از ۵۴ جوراب ، جفت‌ها را تشکیل می‌دهیم، این دو عدد بزرگترین مجموع

را می‌دهند (ضمناً، از بین سه عدد، ۱۲، از همه بزرگتر است). اگر تعداد جوراب‌های انتخابی، کمتر از ۵۴ باشد، تعداد جفت‌ها بازهم کمتر می‌شود و ، بنابراین، تعداد جفت‌های هررنگ ، نمی‌تواند بیشتر از حالتی باشد که ۵۴ جوراب انتخاب کرده‌ایم.

[از این‌ها گذشته، همان‌طور که درحل مسألهٔ بعد خواهیم دید، تعداد جفت‌های هررنگ و، بنابراین، مجموع تعداد جفت‌های دو رنگ، بایدکمتر از حالتی باشدکه جفت‌ها را از ۵۴ جوراب درست می‌کنیم.]

۶۷. تعمیم اول

a. باید بدترین حالت ممکن را در نظر گرفت، یعنی حالتی‌که، دربین جوراب‌های انتخابی، علاوه بررنگ i ام، همهٔ جوراب‌های از رنگ‌های دیگرهم، بیرون آمده باشند. البته، روشن است‌که، به‌ندرت ممکن است، این بدترین حالت پیش آید. بین جوراب‌هایی‌که از جعبه بیرون می‌آوریم، وقتی (وتنها وقتی) می‌توان از وجود k_i جفت از رنگ i ام اطمینان داشت که، تعداد جوراب‌های انتخابی ، به اندازهٔ $2k_i$ عدد از مجموع همهٔ جوراب‌های رنگ‌های دیگر، بیشتر باشد.

این حکم را، می‌توان به‌صورت یك دستور نوشت. فرض می‌کنیم، A جوراب در جعبه موجود باشد؛ a_i را تعداد جوراب‌های i امین رنگ و n را، تعداد جوراب‌هایی می‌گیریم که ازجعبه بیرون‌آورده‌ایم. دراین‌صورت، تعداد جوراب‌های رنگ‌های دیگر (غیر ازرنگ iام)، که درجعبه نگهداری می‌شود، برابر است با $A-a_i$ وبنابراین

$$n=A-a_i+2k_i$$

البته، مساله تنها وقتی جواب داردکه، در جعبه، کمتر از k_i جفت جوراب از رنگ i ام وجود نداشته باشد ، یعنی وقتی که داشته باشیم: $a_i \geqslant 2k_i$. اگر به‌دستور توجه کنیم، به‌درستی این شرط قانع می‌شویم. اگر داشته باشیم : $a_i < 2k_i$ ، یعنی $-a_i+2k_i > 0$ ، به‌سادگی نتیجه

می‌شود $n>A$، یعنی باید، بیش از تعداد جورابی که در جعبه وجود دارد، ازآن بیرون آورد.

b. همان‌طور که درحل‌مسالهٔ a دیدیم، وقتی (وتنهاوقتی) می‌توانیم k_i جفت جوراب از رنگ i ام را درست کنیم که، تعداد n جورابی که از جعبه بیرون آورده‌ایم، دست‌کم به‌اندازهٔ $2k_i$ جوراب، از تعداد کل همهٔ رنگ‌های دیگر ، بیشتر باشد. بنابراین ، باید تعداد کل جوراب‌هایی از رنگ‌های دیگررا،که درجعبه وجود دارد، از nکم کرد. اگر تفاضل حاصل، عدد مثبت و زوج باشد، آن‌وقت، نصف آن، برابر است با تعداد جفت‌هایی که از رنگ n ام می‌توان درست کرد.

اگر این تفاضل مثبت نباشد (یعنی، وقتی‌که تعدادجوراب‌هایی که از جعبه بیرون آورده‌ایم ، بیشتر از تعداد جوراب‌های همهٔ رنگ‌های دیگر واقع درجعبه نباشد)، آن‌وقت، نمی‌توان اطمینان داشت که بتوان، حتی یك جفت جوراب رنگ iام درست کرد.

اگر تفاضل حاصل، مثبت ولی فرد باشد، آن وقت اگر تفاضل را یك واحد کوچکتر بگیریم و، سپس، آن را نصف کنیم، تعداد (k_i) جفت جوراب از رنگ i ام را، که می‌توانیم جور کنیم، به‌دست می‌آوریم ، زیرا می‌توان استدلال کردکه، عدد n، از مجموع جوراب‌های رنگ دیگر، کمتراز $2k_i$، بزرگتر نیست.

اکنون، این نتیجه‌ها را ، تنظیم می‌کنیم. A را تعداد جوراب‌های واقع در جعبه می‌گیریم‌که، در بین آن‌ها، a_i جوراب از رنگ i ام وجود دارد. دراین صورت اگر، در تاریکی، n جواب ازجعبه برداریم، به‌تعدادی جوراب‌های حاصل از رنگ iام می‌رسیم ، که برابر است با

$$k_i=\frac{n-(A-a_i)}{2}=\frac{n+a_i-A}{2}$$

(اگر این عدد مثبت وصحیح باشد) و یا برابر است

$$k_i=\frac{[n-(A-a_i)]-1}{2}=\frac{n+a_i-A-1}{2}$$

(اگر این عدد، مثبت و صحیح باشد). روشن است که k_i، تنها در یکی از این دوحالت می‌تواند عددی صحیح باشد. البته، ممکن است، در موردی، بتوان تعداد جفت‌های بیشتری از رنگ iام به‌دست‌آورد، ولی در این‌باره، اطمینانی وجود ندارد. در حالتی که k_i، مثبت‌نباشد، حتی یك جفت از رنگ iام را نمی‌توان درست کرد.

[اگر ازمفهوم «بخش‌صحیح عدد» استفاده‌کنیم (مسالهٔ ۵۹ راببینید)، می‌توان نتیجهٔ حاصل را، به‌صورت فشرده‌تری نوشت:

$$k_i = \begin{cases} \left[\dfrac{n+a_i-A}{۲}\right] & \text{(اگر این عدد مثبت باشد)} \\ ۰ & \text{(اگر این عدد مثبت نباشد)} \end{cases}$$

یادداشت. به‌سادگی دیده می‌شود که، اگر درعبارت

$$n=A-a_i+۲k_i$$

که در مسألهٔ **a** به‌دست آوردیم، عدد k_i با مقدار کسری داده شده باشد، نتیجه نادرست خواهد شد. این وضع، به‌این مناسبت پیش می‌آید که k_i، تنها برای مقدارهای درست، معنا دارد.]

۶۸. تعمیم دوم

a. تعداد جوراب‌های هررنگ را نباید کمتر از چیزی انتخاب‌کرد که از رابطهٔ

$$n=A-a_i+۲k_i$$

به‌دست می‌آید (حل مسألهٔ قبل، بخش **a** را ببینید). اگر این رابطه را به‌صورت

$$n=A-(a_i-۲k_i)$$

بنویسیم، می‌توانیم جواب را، مستقیماً، نتیجه بگیریم. تفاضل $(a_i-۲k_i)$ را، ماندهٔ iامین رنگ می‌نامیم (این عدد، عبارت‌است ازتعداد جوراب‌های

iامین رنگ، که بعد از برداشتن تعداد جوراب‌هائی از رنگ iام ، در جعبه باقی مـی‌ماند). آن‌وقت، با تـوجه به‌این رابطـه، می‌توان گفت : تعـداد جوراب‌هایی راکه ازجعبه بیرون می‌آوریم، تابتوان ازآن‌ها تعدادجفت‌های لازم یك (یا چند) رنگ را درست کرد ، باید برای رنگی درنظر گرفته شود که، ماندۀآن، کمترین است.

b. پاسخ به‌این پرسش، نتیجه‌ای است از پاسخ به‌پرسش بخش قبلـی مساله. اگر سفارش اضافی ، موجب کمتر شدن حداقل ماندۀ همۀ رنگ‌هـا می‌شود، آن‌وقت، برای انجام‌آن، باید تعداد دیگری جوراب ازجعبه‌خارج کرد (همان‌قدر که، مانده را کوچکتر کرده است). ولی اگر سفارش جدید، ماندۀ حداقل راتغییرندهد، برای انجام‌سفارش‌جدید، همان تعدادجوراب‌های قبلی، کافی خواهد بود.

یادداشت. در واقع مـا ، دوباره ، مسأله ۶۴ـ**a** را حل کـردیم. در واقع، اگر برای جوراب‌های هررنگی، سفارش اضافی برسد، ماندۀ هررنگ بایدکاهش یابد. بنابراین، برای‌انجام یك سفارش، به‌تعدادی ازجوراب‌های جعبه نیاز داریم‌که، برای درست‌کردن جفت جوراب‌ها از رنگی‌که، حداقل مانده را دارد، لازم است.

۶۹. اندیشه‌های تازه

نه،مسألۀ تازه‌ای به‌وجود نمی‌آید. می‌توانیم جوراب‌ها و دستکش‌ها را، ابتدا بـرحسب رنگ و ، سپس ، بـرحسب انـدازه طبقه‌بنـدی کنـیم (در مورد دستکش‌هـا ، علاوه براین ، تقسیم‌بندی چپ و راست هم وجود دارد). جوراب‌ها و دستکش‌های ازیك «نوع» (یعنی یك‌رنگ و یك‌اندازه) هیچ اختلافی با یکدیگر ندارند. بنابراین، هریك ازاین «نوع‌ها» رامی‌توان یك «رنگ» به‌حساب آورد. به این ترتیب، همان مسأله‌های قبلـی به‌دست می‌آید که ، برای حل آن‌هـا ، تنها «رنگ» اهمیت دارد: همان‌طور که از جوراب‌ها یا دستکش‌هـای با دو رنگ مختلف نمی‌توان جفت درست‌کـرد، جوراب‌ها یا دستکش‌های با اندازه‌های مختلف را هم، نمی‌توان جورکرد.

یادداشت ۱. اگر کسی بخواهد فرض کند که ، اندازه‌های پا یا دست چپ و راست با هم برابر نیست و، ضمناً برای او مهم نباشد که یك جفت جوراب یا دستکش هم‌رنگ باشند، درواقع، به‌مسالهٔ جدیدی می‌رسد. ولی همین مسأله، ضمن تنظیم جفت‌های هم اندازه، ولی با رنگ‌های مختلف هم، به‌وجود می‌آید، چیزی که آرایش دلقك‌های سیرك را به‌یاد می‌آورد.

یادداشت ۲. به‌طورکلی، بین رنگ با اندازه، یا با مدل و غیر آن، هیچ تفاوت اصولی وجود ندارد . اگر جوراب‌ها یا دستکش‌ها را طوری طبقه‌بندی کنیم که، در هر گروه جداگانه، هیچ اختلافی بین آن‌ها نباشد، آن‌وقت، مسألهٔ تشکیل جفت‌ها، به‌همان مسألهٔ تشکیل جفت جوراب‌ها و دستکش‌ها، برحسب رنگ آن‌ها، منجر می‌شود.

بین دستکش‌ها، یك اختلاف دیگرهم وجود دارد: چپ یا راست بودن. ولی تشکیل جفت دستکش‌ها را هم می‌توان به‌تشکیل جفت جوراب‌هامنجر کرد، با این شرط‌که بعضی از رنگ‌ها را (مثلاً «سفید چپ» با «سفیدراست») می‌توان باهم جفت کرد، ولی ازبعضی دیگر(مثل «سیاه‌های‌چپ») نمی‌توان جفت کرد.

بخش ششم

۷۰. تقسیم عادلانه

[فرض کنید یکی از جویندگان طلا، خرده طلاهای شسته شده را تقسیم کند و دونفر دیگر، هرکدام یك بخش را بردارند. تنها این مطلب را باید دنبال کرد، که هریك از این دو نفر، سهم خود را ، بدون ارتباط با دیگری انتخاب کند. زیرا ارتباط آن‌ها، ممکن است موجب کنارآمدن دو نفر با یکدیگر بشود و با طرح توطئه‌ای علیه نفر سوم ، تمام تلاش‌های مربوط به «اتحاد» از بین برود . راه حل مسأله، باید طوری باشد که از

هرگونه قراری بین دونفر از آن‌ها، جلوگیری کند.]

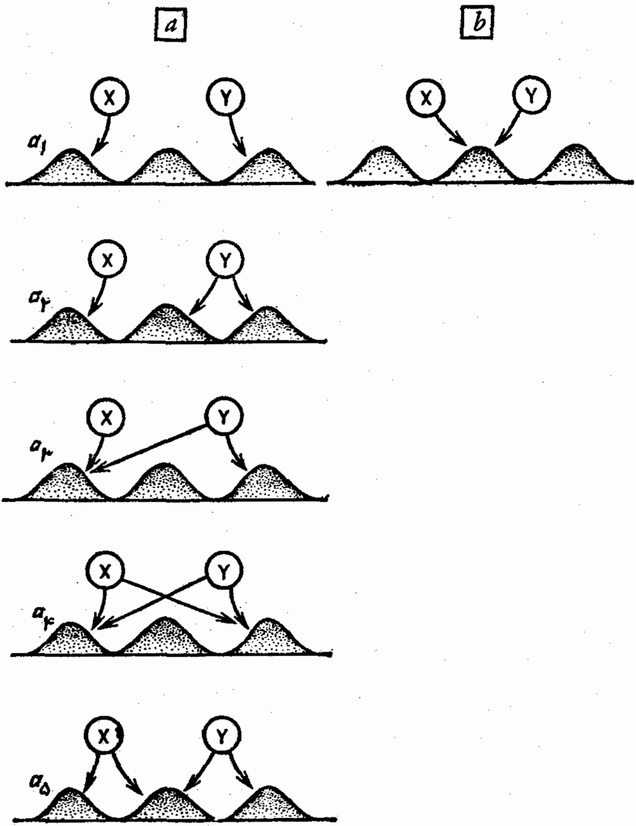
نفری که طلاهای شسته را تقسیم می‌کند، «بخش‌کننده»، و دو نفر دیگررا «تحویل‌دار» می‌نامیم. هرکدام از دو نفر «تحویل‌دار» یکی از بخش‌ها راکه گمان می‌کند به‌طورعادلانه تقسیم شده است، یعنی‌شامل $\frac{1}{3}$ طلاهاست، علامت می‌گذارد. دست‌کم، یکی از بخش‌ها، حتماً علامت‌گذاری می‌شود (زیرا، هر ۳ بخش، نمی‌توانند شامل‌کمتر از $\frac{1}{3}$ طلاها باشند).

a. اگر دوبخش وجود داشته باشدکه یکی ازآن‌ها را تحویل‌دار اول و ، دیگری را، تحویل‌دار دوم علامت زده باشد، می‌توان تقسیم طلاها را پایان یافته دانست: هریك از دو تحویل‌دار ، بخشی را که خود علامت گذاشته است (و در نتیجه، با انتخاب آن موافق بوده است) برمی‌دارد و بخش سوم ، به «بخش‌کننده» می‌رسدکه، طبق قرار قبلی، از حق انتخاب محروم است.

b. حالا فرض می‌کنیم، ۲ بخش متفاوت علامت‌گذاری نشده باشند، یعنی هردو تحویل‌دار، یکی از سه بخش را، مطابق تقسیم عادلانه بدانند و در نتیجه، هردوی آن‌ها، یکی از بخش‌ها را علامت زده باشند.

در این حالت، هیچ‌کدام از ۲ بخش دیگر، از نظر تحویل‌دارها، قابل قبول نیستند، یعنی گمان می‌کنند که، در هرکدام از این دوبخش، کمتر از $\frac{1}{3}$ طلاها وجود دارد. بنابراین ، هرکدام از این دو بخش ، می‌تواند برای «بخش‌کننده» باقی بماند. از آن‌جا که سهم «بخش‌کننده» کمتر از $\frac{1}{3}$ طلاها می‌شود، در دو بخش دیگر، بیش از $\frac{2}{3}$ طلاها وجود خواهد داشت . اگر دو نفر«تحویل‌دار»، این دوبخش را، طبق «نسخهٔ» تقسیم عادلانه، بین‌خود بخش کنند، آن‌وقت، تقسیم عادلانهٔ بین ۳ نفر، به‌پایان می‌رسد.

[بعد از آن که «بخش‌کننده» سهم خود را برداشت، یکی از دو «تحویل‌دار»، نقش «بخش‌کننده» را به‌عهده می‌گیرد: اوبقیهٔ طلاها را به‌دو



شکل ۱۱۱

بخش تقسیم مـی‌کند و ، تحویـل‌دار دوم ، هربخشی را کـه مایل بـود ، برمی‌دارد.]

این روش تقسیم، هرسه نفر را راضی می‌کند و، به‌هرکدام از آن‌ها، امکان می‌دهد تا بخشی راکه، به‌گمان او، کمتر از $\frac{1}{3}$ طـلاهـا نیست ، انتخاب کند.

اگر «بخش‌کننده»، طلاها را به‌سه‌قسمت برابر تقسیم‌کرده باشد، هیچ لطمه‌ای به‌او نمی‌خورد (درغیراین‌صورت، نباید ازکسی گله‌مند باشد، زیرا

کسی جز خودش مقصر نیست).

تحویل‌دارها، نباید بخشی را که مایل نیستند، انتخاب کنند. اگر «بخش کننده»، طلاها را به‌سه قسمت برابر تقسیم نکرده باشد، باید همان بخشی به‌او برسد که، تحویل‌دارها، از انتخاب آن سر باز زده‌اند (یعنی بخشی که، ظاهراً، شامل کمتر از $\frac{1}{3}$ طلاهاست). دراین صورت، به‌هریک از دو نفر تحویل‌دار، هرگز کمتر از $\frac{1}{3}$ طلاها نمی‌رسد.

حالت‌های مختلف تقسیم، که در **a** و **b** شرح داده شد، روی شکل ۱۱۱ دیده می‌شود.

۷۱. آن‌ها چهار نفر شدند

دنبالهٔ عمل‌ها، همان است که در حل مسألهٔ قبل نشان داده شده‌است. اگر در نخستین تقسیم، هرکسی نتواند به‌سهم عادلانهٔ خود (یعنی، انتخابی که همهٔ «تحویل‌دارها» را راضی کند) برسد، دست کم یکی ازجویندگان طلا، به‌سهمی که «خودش قبول دارد» می‌رسد (که ضمناً، همهٔ «تحویل‌دارها» هم آن‌را قبول دارند). به‌این‌ترتیب، بعد از آن‌که «بخش کنندهٔ» اول سهم خود را بردارد، فقط ۳ نفر دیگر باقی‌می‌مانند که می‌توانند باقی‌ماندهٔ طلاها را، طبق روش حل مسألهٔ قبل، بین خود تقسیم کنند.

بنابراین، روش کارچنین‌است: یکی ازجویندگان طلا («بخش کننده»)، خرده‌طلاهارا به ۴ بخش مساوی‌تقسیم‌می‌کند، وسه‌نفردیگر («تحویل‌دارها»)، هربخشی را که ترجیح می‌دهند، انتخاب می‌کنند. هرتحویل‌دار، روی بخش‌هایی که، به‌نظرش، باشرط تقسیم عادلانه سازگار است (یعنی، بخشی که، به‌نظر او، شامل کمتر از $\frac{1}{4}$ طلاهانیست)، علامت‌می‌گذارد. دست کم، یکی از چهاربخش، به‌وسیلهٔ تحویل‌دارها، دارای علامت می‌شود.

سه‌حالت پیش می‌آید.

I. یکی از بخش‌ها، به‌وسیلهٔ تحویل‌دارها، علامت‌گذاری نشده‌است. این بخش، متعلق به «بخش‌کننده» است، و سه‌بخش دیگر را ، تحویل‌دارها باید شبیه مسألهٔ قبل بین خود تقسیم‌کنند.

II. هیچ‌کدام از بخش‌ها ، بدون علامت نمانده‌اند ، ولی یکی از بخش‌ها ، تنها به‌وسیلهٔ یکی از تحویل‌دارها، علامت‌گذاری شده است . در این‌صورت، این بخش را باید به‌تحویل‌داری دادکه‌آن را علامت‌گذاشته است. روشن است‌که ، دنبالهٔ‌کار ، دوباره به‌مسألهٔ قبل منجر می‌شود (که به‌تقسیم عادلانهٔ طلاها، بین سه‌نفر، مربوط می‌شد).

III. هربخشی ، دست‌کم به‌وسیلهٔ دونفر علامت‌گذاری شده است. تعدادکل علامت‌ها، دراین‌حالت، از ۴ × ۲، یعنی ۸ کمتر نیست. بنابراین، تحویل‌دار A وجود داردکه، دست‌کم، سه‌بخش را علامت‌گذاری کرده‌است (درغیر این‌صورت، جمع‌کل علامت‌ها، از ۲ × ۳، یعنی ۶ تجاوزنمی‌کند)؛ و یکی از دو تحویل‌دار دیگر ، (که او را B می‌نامیم) باید دست‌کم ۲ بخش را علامت‌گذاشته باشد (در غیر این‌صورت ، تعدادکل علامت‌ها ، از ۶ = ۱ × ۲ + ۴ تجاوز نمی‌کند ، زیرا A نمی‌تواند بیش از ۴ بخش را علامت بگذارد). بنابراین ، اگر تحویل‌دار سوم C ، بخشی را برداردکه علامت‌گذاری‌کرده است (مسلماً چنین بخشی وجود دارد) ، آن‌وقت برای تحویل‌دار B، دست‌کم یکی ازدوبخشی‌که علامت زده است، باقی‌می‌ماند. بعد ازآن‌که B ، بخش خود را بردارد، برای A، دست‌کم یکی ازبخش‌های علامت‌گذاری شده به‌وسیلهٔ او، باقی‌می‌ماند . چهارمین بخشی‌که، بعد از انتخاب سه‌تحویل‌دار، باقی‌می‌ماند، بنابرتوافق‌قبلی، متعلق به «بخش‌کننده» است. وبه‌این‌ترتیب ، تقسیم عادلانهٔ طلا به‌پایان می‌رسد.

اگر بخش‌آخر حل مسألهٔ قبل را تکرارکنیم (وتنها به‌جای $\frac{1}{3}$ ، از $\frac{1}{4}$ استفاده‌کنیم)، روشن می‌شودکه، بااین‌روش تقسیم، هیچ‌کس گمان‌نخواهد کردکه کمتر از $\frac{1}{4}$ طلاها به‌او رسیده است.

ممکن است این‌طور به‌نظر برسدکه، حل دومسألـهٔ قبل، باید امکان تعمیم مسأله را ، برای تقسیم بین هرچندنفر ، به‌وجودآورد . ولی ، خیلی زود روشن می‌شودکه، این‌طور نیست. اگر حل مسألهٔ ۷۰ (و همچنین حل مسألهٔ ۷۱) را ازنظر بگذرانیم ، به‌روشنی می‌بینیم‌که بـا اضافه‌شدن تعداد شرکت‌کنندگان در تقسیم عـادلانه ، پیچیدگی‌آن به‌سرعت زیادتر می‌شود: به‌همین مناسبت، از تعمیم مسأله، برای تعداد دلخواهی از شرکت‌کنندگان در تقسیم، صرف‌نظر می‌کنیم. استدلالی که در حل مسألهٔ ۷۱ مورد استفاده قراردادیم، نوعی امید برای تعمیم مسأله ایجاد می‌کند، ولی این، آرزویی خام است، زیرا حتی وقتی‌که تعداد شرکت‌کنندگان درتقسیم، به‌۵نفربرسد، دیگر نمی‌توان از بحث مربوط به‌حالت III استفاده‌کرد.

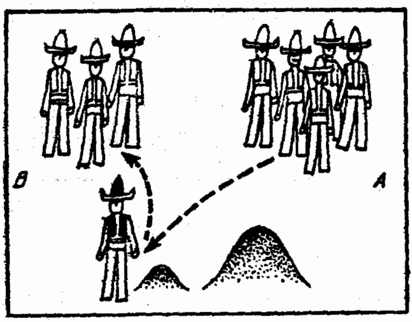
روش‌های تقسیم عادلانه را، تنها وقتی می‌توان برای تعداددلخواهی از شرکت‌کنندگان تعمیم دادکه ، ضمن پرهیز از پیچیدگی‌های فوق‌العاده ، بتوانیم «تجدید ساختمانی» دراین روش‌ها انجام‌دهیم. مثلاً ، اگر فرض‌کنیم که «بخش‌کننده»، به‌جای این‌که توجه خود را به‌تقسیم همهٔ طلاها معطوف کند، در ابتدا ، تنهـا به‌بخشی ازآن بپردازد ، ممکن است امکان‌هایی برای حل مسأله، درحالت‌کلی، به‌دست‌آید.

تعداد شرکت‌کنندگان درتقسیم را، n می‌گیریم. بنابراین، به‌هرکدام ازآن‌ها، باید سهمی برابر $\frac{1}{n}$ طلاها برسد. جویندگان طلا، می‌توانند تقسیم عادلانه را به‌طریق زیر انجام دهند.

قبل از هرچیز ، هرشرکت‌کننده در تقسیم ، شمـارهٔ خود را می‌گیرد (شماره‌ها از ۱ تـا n است و نوع تقسیم شماره‌هـا ، بین شرکت‌کنندگان ، اهمیتی ندارد). سپس، همهٔ طلاها را ، در جـایی در وسط می‌ریزند و خود آن‌ها، در نیمهٔ چپ یا راست طلاها جمع می‌شوند (نیمه‌ای از محل را، که جویندگان طلا در آن‌جا جمع شده‌اند ، A می‌نـامیم). شرکت‌کنندهٔ اول، به‌کوپهٔ طلا نزدیك می‌شود، بخشی از طلاها راکه ، به‌نظر او، $\frac{1}{n}$ تمـام

طلاها را تشکیل می‌دهد، جدا می‌کند و در کنار آن می‌ایستد. بعد به یك یك جویندگان طلا که در محل A ایستاده‌اند رو می‌کند و به‌ردیف شماره‌های آن‌ها، از آن‌ها می‌پرسد که، آیا موافقت می‌کنند که، او، این بخش جداشدهٔ طلاها را، به عنوان سهم خود، بردارد یا نه! (پرسش را باید از کسی که کمترین شماره را دارد، آغاز کند و به ترتیب ادامه دهد تا به‌بزرگترین شماره برسد، بدون این که کسی‌را از وسط بیندازد.) کسانی که با پیشنهاد او مخالفت ندارند، به نیمهٔ دیگر محل می‌روند که، آن را، B می‌نامیم (شکل ۱۱۲).

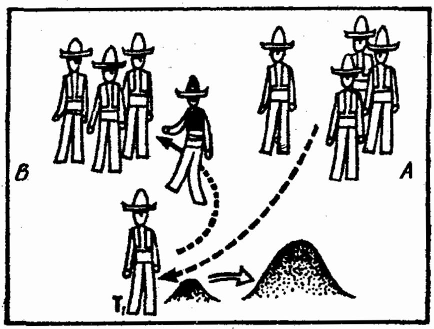
اگر همهٔ افراد باپیشنهاد اوموافق باشند، سهمی راکه خود جداکرده و دیگران هم به‌عادلانه‌بودن آن‌رأی داده‌اند برمی‌دارد و کنار می‌رود.



شکل۱۱۲

ولی، اگرکسانی باشند که، با این پیشنهاد، موافق نباشند، همیشه می‌توان در میان‌آن‌ها، کسی را پیداکرد که کمترین شماره را داشته باشد. او نخستین کسی است که، با پیشنهاد مخالفت کرده است. شمارهٔ او را T_1 می‌گیریم. اعتراض T_1 امین جویندهٔ طلا، به معنای آن است که، به اعتقاد او، کسی که در وسط ایستاده، بیشتر از $\frac{1}{n}$ همهٔ طلاها را برای خود جداکرده است: قاعدتاً T_1 امین جویندهٔ طلا، باید راضی باشد

که، این سهم، به او داده شود. علاوه بر آن، از آن‌جا که این فرد، مقدار جدا شده را زیاد می‌داند، باید موافقت داشته باشد که، این مقدار «زیادی» را از آن بردارد تا درست برابر $\frac{1}{n}$ طلاها بشود. T_1 امین جوینده طلا، مقداری را که، به گمان او، زیادی است برمی‌دارد و روی بقیه طلاها (که شامل $\frac{n-1}{n}$ کل طلاهاست) می‌ریزد. آن‌وقت، کسی که در وسط ایستاده بود به نیمه B می‌رود و T_1 امین نفر جای او را می‌گیرد (شکل ۱۱۳).



شکل ۱۱۳

نفر با شماره T_1، که در وسط ایستاده است، دوباره از همه کسانی که هنوز در نیمه A واقع‌اند، درباره عادلانه بودن این سهم، می‌پرسد و، حتی اگر یک مخالف وجود داشته باشد، همه جریان قبلی تکرار می‌شود (یعنی T_1 به نیمه B می‌رود و، از بین اعتراض کنندگان، آن که شماره کمتری دارد، جای او را می‌گیرد). این جریان تا آن‌جا که، حتی یک نفر در نیمه A باقی مانده باشد، ادامه پیدا می‌کند. دیر یا زود، لحظه‌ای فرا می‌رسد که یک نفر در کنار بخش جدا شده طلاها ایستاده باشد و، همه دیگران، به نیمه B رفته باشند. در این صورت، کسی که در وسط و کنار بخش جدا شده طلاها ایستاده است، می‌تواند این بخش را به عنوان سهم خود بردارد. $(n-1)$ جوینده طلا، که باقی مانده‌اند (و همه در نیمه B ایستاده‌اند)، باید دوباره همین روند را،

برای تقسیم بقیهٔ طلاها، دنبال کنند. بعد از دور دوم، $(n-2)$ جویندهٔ طلا باقی‌می‌ماند، بعد از دور سوم $(n-3)$ جویندهٔ طلا و غیره. این‌روند باید تـا آن‌جـا ادامه پیداکندکه ، همهٔ جویندگان طلا ، به‌سهم موردنظر خود رسیده‌باشند.

اکنون بـاید تحقیق‌کنیم ، آیـا این راه‌حل درست است وآیا با شرط تقسیم عادلانه،که در مسأله ۷۰ بـا حروف خوابیده مشخص شده، سازگار است: آیا هرشرکت‌کننده به‌سهمی‌که‌کمتر از $\frac{1}{n}$ کل طلاها نباشد،رسیده‌است (ویا اگرکسی سهم‌کمتری دریافت‌کرده است، مطمئن باشد که هیچ‌کس ، جز خود او، مقصر نیست)؟

۱. جویندهٔ طلائی‌که در وسط و درکنار بخش جداشدهٔ طلاها ایستاده است (اورا T می‌نامیم)و،درلحظه‌ای که‌همهٔ‌دیگران‌درنیمهٔ Bقرارگرفته‌اند، این بخش را به‌عنوان سهم خود برمی‌دارد، نمی‌تواند دلیلی برای نارضایتی خود داشته‌بـاشد ، زیرا او خود، این‌بخش را عادلانه می‌داند و برای خود انتخاب می‌کند.

۲. آن‌هاکه در نیمهٔ B ایستاده‌اند، یا بـا T موافق‌اندکه می‌تواند بخش جدا شده را به‌عنوان سهم خود بردارد ویا، بـا مقداری بیشتر از این بخش، به‌عنوان سهم $\frac{1}{n}$ موافقت داشته‌اند. بنابراین، اگر به T ، در واقع، بیشتر از $\frac{1}{n}$ طلاها رسیده باشد، تنها خود آن‌ها مقصرند ونه T.

۳. آن‌هایی هم‌که سهمی را برای خود جداکرده بودند، ولی به‌دلیل اعتراض دیگران نتوانستند آن‌را برای خود بردارند، نمی‌توانند هیچ‌گونه تأسفی داشته‌باشند، زیرا T ، سهمی‌کمتر از آن‌چه آن‌ها برای خود در نظر گرفته بودند، برداشته است و ، بنـابراین، نمی‌توانند سهم T را ناعادلانه بدانند.

یادداشت ۱. روشی‌راکه دراین‌جا، برای‌تقسیم عادلانه، شرح‌دادیم، می‌توان در مورد تقسیم هرمجموعه‌ای به n قسمت (برمبنـای بخش‌هـای

برابر) به‌کاربرد. در این روش، بعد از نخستین تقسیم، نه یك بخش، بلکه ($n-1$) بخش باقی‌می‌ماند. اگرچه، «کوچکترشدن» مجموعه، هیچ‌تغییری در وضع نمی‌دهد، ولی لااقل «جداشدن» $\frac{1}{n}$ مجموعهٔ اصلی، موجب می‌شود که راحت‌تر بتوانیم مقدار آن‌را «باچشم» ارزیابی‌کنیم. از این گذشته، از مقدار جداشده، می‌توان برای تقسیم بعدی مجموعه، استفاده‌کرد.

یادداشت ۲. این‌روش تقسیم عادلانه، به‌طور ریشه‌ای، باروش‌هایی که در مسأله‌های ۷۰ و ۷۱ به‌کاربردیم، فرق‌دارد. این‌روش، امکان‌تقسیم طلاها را بین ۳ و یا ۴ نفر در اختیار ما می‌گذارد، ولی با روشی‌که، به‌کلی، با روش‌های حل‌مسأله‌های ۷۰ و ۷۱ فرق می‌کند. بنابراین، به‌کمك این‌روش، می‌توان راه‌حل‌های تازه‌ای برای مسألهٔ تقسیم عادلانهٔ بین ۳ و ۴ نفر پیداکرد. ولی، اگر بحث برسر تقسیم عادلانهٔ بین ۲ نفر باشد، آن‌وقت، هردو روش به‌یك راه‌حل منجر می‌شوند، زیرا در روش جدید از همان مبنایی استفاده‌شده‌است که، به‌طور سنتی، برای‌تقسیم بین‌دونفر مورداستفاده قرار می‌گیرد (این مبنای سنتی تقسیم عادلانه، در صورت مسأله ۷۰، با حروف خوابیده مشخص شده است).

یادداشت ۳. البته، می‌توان از روش جدید، برای تقسیم عادلانهٔ بین ۳ یا ۴ نفر هم استفاده‌کرد، ولی به‌نتیجهٔ چندان جالبی نمی‌رسم: در حالتی‌که با تقسیم بین ۳ یا ۴ نفر سروکار داریم، روشی را که در حل مسأله‌های ۷۰ و ۷۱ مطرح‌کردیم، ساده‌تر ما را به‌نتیجه می‌رساند. امتیاز روش جدید تقسیم عادلانه، تنها به‌کلی‌بودن آن مربوط می‌شود و، ضمناً، روند این‌روش، به‌طور اصولی، ساده است، ولی در عمل، خیلی مفصل از آب درمی‌آید.

یادداشت ۴. تجربه به‌ما نشان می‌دهدکه، هرروش حل و هراثباتی‌را نمی‌توان تعمیم‌داد، بنابراین، از بعضی «وسوسه‌هایی» که، ضمن حل این یا آن مسأله پیش می‌آید، باید پرهیزکرد. اغلب، موفقیت و گشودن راه پیشرفت، بستگی به‌این داردکه قادر باشیم، رشته‌های «عادی» و «سنتی»

را پاره کنیم. بسیار پیش می‌آید که، برای حل هرمسأله‌ای ، باید راهی تازه وجدا از روش‌های شناخته شدهٔ قبلی، اندیشید.

۷۳. سوسمار چالاك

بله، ممکن است.

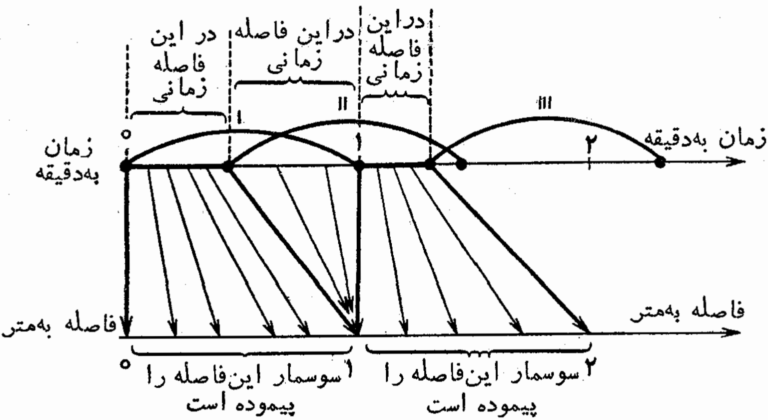
این پاسخ در نظر اول، عجیب به‌نظر می‌رسد. این شگفتی ناشی از آشنائی سطحی با صورت مسأله است. صورت مسأله را می‌توان این‌طور تفسیر کرد که، گویا، سوسمار در تمام دورهٔ شش‌دقیقه‌ای نظارت، در هردقیقه، ۱ متر جابه‌جا می‌شود. اگر، در واقع امر هم، به همین گونه بود، آن‌وقت، سوسمار می‌بایستی حرکتی یکنواخت و مستقیم‌الخط با سرعتی برابر ۱ متر در دقیقه داشته‌باشد و، بنابراین، در ۶ دقیقه ، ۶ متر را پشت‌سر بگذارد ، نه ۱۰ متر.

ولی صورت مسأله، به‌هیچ وجه، چنین چیزی را تأکید نمی‌کند. از صورت مسأله ، وقتی می‌توان به‌چنین نتیجه‌ای رسید که ، در هرلحظه از جریان این ۶ دقیقه، مرتباً ناظران تازه و تازه‌تری سوسمار را تعقیب کنند و، روشن است که، چنین چیزی ممکن نیست.

در صورت مسأله ، هیچ صحبتی در این‌باره نشده است که، حرکت سوسمار، یکنواخت ومستقیم‌الخط است. برعکس، اگر بپذیریم که آگاهی‌های ناشی از صورت مسأله درست است، ناچار به‌نتیجه‌ای مخالف آن می‌رسیم: حرکت سوسمار، یکنواخت و مستقیم‌الخط نمی‌تواند باشد . او، بخش‌های جداگانهٔ مسیر خود را ، گاه تندتر و گاه کندتر پشت سر گذاشته است ، و درست ازهمین حرکت‌های «ناهم‌آهنگ» است که باید راهی برای حل‌معمای خود پیدا کنیم.

به‌سادگی می‌توان متوجه شد که باید، این فاصله‌های زمانی دقیقه‌ای ــ که درجریان آن‌ها ناظران جداگانه، سوسمار را تعقیب کرده‌اند ــ یکدیگر را پوشانده باشند. اگر این فاصله‌های دقیقه‌ای یکدیگر را نپوشانده باشند،

یعنی ناظران در دقیقه‌های متصل به‌هم ، سوسمار را تعقیب کرده‌باشند (هریك از این دقیقه‌ها ، درست در لحظه‌ای تمام‌شود‌که دقیقهٔ بعدی آغاز می‌شود)، می‌شد این‌طورفرض کردکه، همهٔمشاهده‌های یك‌دقیقه‌ای،به‌وسیلهٔ یك‌نفر انجام گرفته است (یعنی ، ۶ مرحله یك دقیقه‌ای را ، پشت سرهم ، به‌مشاهده پرداخته است)؛ در چنین‌صورتی، سوسمار می‌توانست تنها ۶متر حرکت کند.



شکل ۱۱۴

به‌این ترتیب ، توانستیم روشن‌کنیم که : اگر سوسمار توانسته باشد ۱۰ متر را پشت‌سر بگذارد، آن‌وقت

۱) باید با سرعت متغیری حرکت‌کرده باشد؛

۲) دست‌کم، ۲ فاصلهٔ زمانی دقیقه‌ای ـ که درجریان‌آن‌ها، سوسمار را تعقیب‌کرده‌اند ـ یکدیگر را پوشانده‌اند.

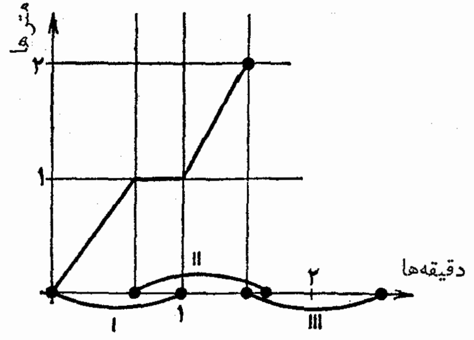
ببینیم، از این حکم‌ها، به‌چه نتیجه‌هایی می‌رسیم.

فرض می‌کنیم، سوسمار ، از همان آغاز دورهٔ شش‌دقیقه‌ای ، شروع به‌حرکت‌کرده و، در چند ثانیه، توانسته باشد ، ۱ متر جلو برود. سپس، حرکت خود را قطع‌کند و تا پایان دقیقهٔ اول، ساکن بماند . بعد از آن‌که

ناظر اول، مشاهدهٔ خود را قطع و ، ناظر دوم، مشاهدهٔ خود را آغاز کرد ، دوباره سوسمار آغاز به‌دویدن کند و ، در یک‌فاصله زمانی کوتاه (وقتی که هنوز، ناظر سوم،آغاز به‌تعقیب او نکرده است)، دوباره ۱ متر را پشت‌سر بگذارد .

به‌این ترتیب ، سوسمار توانسته است در مدتی که از ۱ دقیقه کمی بیشتر است، گاه با حرکتی سریع و گاه با استراحت، ۲ متررا پشت‌سربگذارد و هنوز، قبل از فرارسیدن دقیقه‌ای که ناظر سوم آغاز به‌مشاهده می‌کند، فرصتی برای او باقی‌مانده است و می‌تواند ، در این فاصله‌زمانی ، بازهم ۱ متر به‌جلو برود.

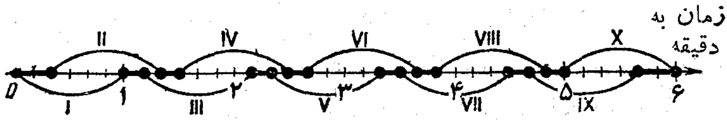
طرح حرکت سوسمار، در شکل ۱۱۴ داده شده است. روی محور زمان، دقیقه را، از آغاز دورهٔ شش دقیقه‌ای مشاهده، وعلامت گذاشته‌ایم. روی‌محورپایین، طول‌فاصله‌هایی‌را که سوسمار طی‌کرده‌است، نشان‌داده‌ایم. هرنقطه از محور زمان را ، به‌وسیله پیکان ، به‌نقطه‌ای وصل کرده‌ایم که سوسمار، در لحظهٔ زمانی مفروض، درآن‌جا قرار دارد. هرفاصلهٔ زمانی را، که در جریان‌آن، یکی از ناظران، سوسمار را تعقیب کرده است، با کمانی نشان‌داده‌ایم وشمارهٔ ناظر را (با رقم‌های رومی) روی‌آن گذاشته‌ایم.



شکل۱۱۵

برای کسانی که عادت دارند (و دوست‌دارند)، حرکت سوسمار را در دستگاه‌مختصات قائم نشان‌دهند، نمودار این‌حرکت‌را، درشکل۱۱۵داده‌ایم.

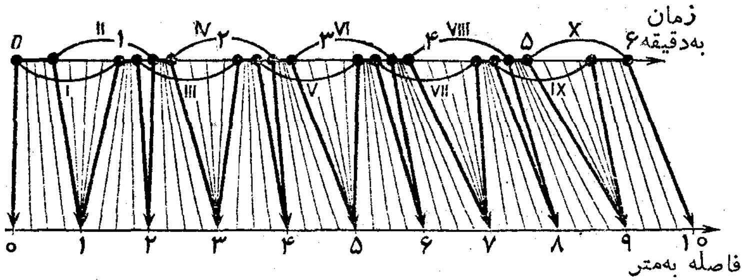
در واقع ، تـا همین‌جا ، جواب مسأله را به‌دست‌آورده‌ایم و لزومی ندارد، چیز دیگری به‌آن‌اضافه‌کنیم. دوره‌های یك‌دقیقه‌ای متوالی مشاهده، یکدیگررا پوشانده‌اند: وقتی که«نگهبانی» دوناظر هم‌زمان می‌شود،سوسمار حرکت نمی‌کند (تـا «محاسبه» دوناظر را به‌هم‌نزنند) ، ولی وقتی‌که نـاظر تنهائی وجود دارد، سوسمار در چندثانیه، ۱ متر به‌جلو می‌رود.



شکل ۱۱۶

تنها باید، با سکون‌ها و حرکت‌ها، طوری «بازی‌کرد» که ، سوسمار، بتواند ۱۰ متر را طی‌کند.

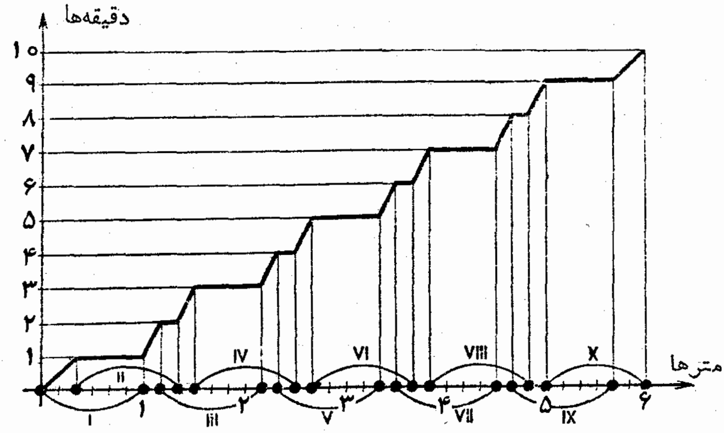
فرض می‌کنیم ۱۰ ناظر، درجریان ۶ دقیقه ، سوسمار را تعقیب کنند و «نگهبانی» نـاظران ، به‌نحوی بـاشدکـه در شکل ۱۱۶ نشان‌داده‌ایم . (فاصله‌های دقیقه‌ای را،که در جریـان آن‌هـا ، ناظران جداگانه به‌تعقیب سوسمار پرداخته‌اند ، باکمان‌هایی ، همراه بـا شمارهٔ ناظران نشان‌داده‌ایم. به‌روشنی دیده می‌شودکه، دنبالهٔ فـاصله‌های دقیقه‌ای، آن‌طورکه در شکل ۱۱۶ دیده می‌شود، با شرطهای مسأله سازگار است.)



شکل۱۱۷

ابتدا و انتهای فاصله‌های یك‌دقیقه‌ای، تمامی دورهٔ شش‌دقیقه‌ای را، به‌فاصله‌های کوچکتری (روی‌هم، ۱۹ فاصله) تقسیم می‌کنند. درطول‌زمانی

بعضی از این فاصله‌ها، ۲ ناظر با هم، سوسمار را تعقیب می کنند. در این فاصله‌های زمانی ، سوسمار بی‌حرکت است . در طول هریك از فـاصله‌های زمانی دیگر، تنها یك ناظر، سوسمار را تعقیب می کند (این فاصله‌ها را، با پاره‌خط‌های کلفت مشخص کرده‌ایم). در هریك از فـاصله‌ها، سوسمار ۱ متر به‌جلو می‌رود. ازآن‌جا که، روی هم، ۱۰ فاصله از این گونه وجود دارد، سوسمار هم،روی‌هم، ۱۰ متر حرکت کرده است. ضمناً، هرناظر، تنها یك‌متر از حرکت سوسمار را دیده است. در طول «نگهبانی» هرناظر، تنها یك‌بـار پیش می‌آید که، به‌جز او، «نگهبان» دیگری هم، سوسماررا تعقیب می کند.

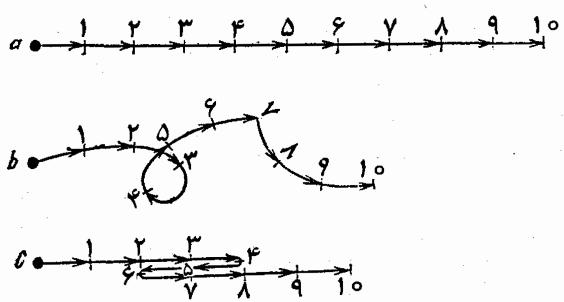


شکل ۱۱۸

نمودارهای متناظر حرکت‌سوسمار(شبیه نمودارهای شکل‌های ۱۱۴و ۱۱۵)، در شکل‌های ۱۱۷ و ۱۱۸ داده شده است.

یادداشت . هروقت کـه سوسمار، ۱ متر به‌جلو می‌رود، همیشه آن‌را به‌عنوان حرکتی به‌طرف جلو ، تعبیرکـردیم . ولی، چنین تفسیری ، برای حرکت «یك‌سویهٔ» سوسمار ضرورت ندارد . سوسمـار ، می‌تواند روی خط راست، حرکت نکند. مسیرهای «مستقیمی»که روی شکل‌های ۱۱۴ و۱۱۷ نشان داده شده است، تنها برای عینی‌تربودن مطلب آمده است.

جابه‌جـایی سوسمار را می‌توان ، نه‌تنها شبیه شکل ۱۱۹-a، بلکه



شکل ۱۱۹

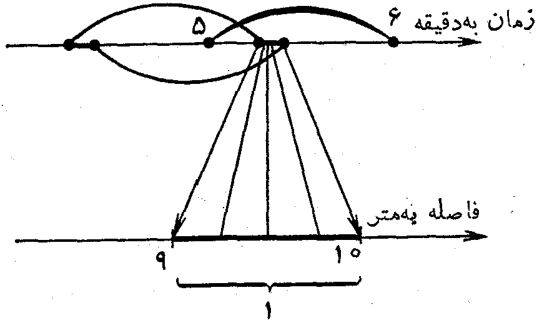
به‌صورت بغرنج‌تری هم در نظر گرفت؛ مثلاً، به‌صورت حرکت «حلقه‌ای» (شکل ۱۱۹–b) ویا حرکت «رفت و برگشت» (شکل ۱۱۹–c).

روی شکل ۱۱۹–c می‌بینید که، وقتی سوسمار گاهی به جلو و گاهی به‌عقب می‌رود، چگونه باید، مسافت طی‌شده را محاسبه کرد.

۷۴. با چهارچشم

ثانیه‌های اضافی، در چنان وضعی است، که سوسمار نمی‌تواند، با استفاده ازآن، فاصله‌ای بیش از ۱۰ متر را طی کند.

در واقع، در بین ناظران، یك ناظر وجود دارد که، سوسمار را، در پایان‌دورهٔ شش‌دقیقه‌ای مشاهده، تعقیب می‌کند. این ناظر، همان کسی است که در تمام مدت دقیقهٔ ششم، چشم از سوسمار برنمی‌دارد. بنابراین، فاصلهٔ چهارثانیه‌ای که، درجریان‌آن، اززوج پنجم ناظران، تنها ناظر دوم‌سوسمار را تعقیب می‌کند (این چهار ثانیه، در فاصلهٔ زمانی از ۵ دقیقه و ۱۶ ثانیه تا ۵ دقیقه و ۲۰ ثانیه، بعد ازآغاز مهلت شش‌دقیقه‌ای مشاهده، قراردارد)، به‌طور کامل‌درداخل همان‌یك‌دقیقه‌ای قراردارد که،آخرین ناظر، به«نگهبانی» مشغول است (شکل ۱۲۰). از این‌جا (اگر «برنامهٔ» حرکت سوسمار را به‌ترتیبی در نظر بگیریم که، در صورت مسأله، شرح داده شده است)، نتیجه می‌شود که، سوسمار، نمی‌تواند از ۴۰ ثانیهٔ «اضافی» برای حرکت بیشتری



شکل ۱۲۰

استفاده کند و ، در دقیقهٔ آخر ، تنها همان یک‌متر قبلی را (در مسألهٔ قبل) به‌جلو می‌رود.

۷۵. معجزه تا کی ادامه دارد؟

سوسمار ، در ۶ دقیقه، نمی‌تواند بیش از ۱۰ متر حرکت‌کند ؛ این ، حداکثر فاصلهٔ ممکن است.

[باید کاملاً احتیاط کرد! در برابر ما ، مسأله‌ای قرار دارد که از همهٔ مسأله‌های قبل، دشوارتر است : بـاید حکمی را ثابت کنیم که برای هرگونه تناوبی از ناظران و برای هر «برنامه‌ای» برای حرکت سوسمار، درست باشد.

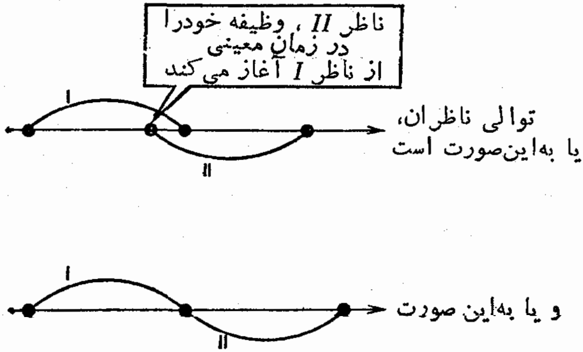
از چه چیزی باید استفاده کرد؟

«نقطه اتکایی» که به‌کمک آن بتوانیم. اگر نه کرهٔ زمین را، دست‌کم مسألهٔ خود را «به‌حرکت» آوریم، در اختیار ماست: باید از همان موقعیتی استفاده کرد که، ابتدا و در نظر اول، نامحتمل بود ، یعنی از این فرض که، سوسمار، می‌تواند در ۶ دقیقه ، ۱۰ متر را پشت سر بگذارد. این‌حلقه، که به‌ یـاری آن می‌توان تمامی زنجیر استدلال را تکان داد، عبارت است از ، این شرط مسأله، که بنابرآن ، سوسمار می‌تواند تحت‌نظارت هرناظر ، تنها ۱ متر جابه‌جا شود. همهٔ این‌ها درست! ولی مگر می‌توان تعداد ناظران را خیلی زیـاد کرد؟ برای رد کردن این نظر، به‌سختی می‌توان چیزی پیدا کرد، ولی (دست‌کم به‌یاری روش آزمایش و خطا) می‌توان قانع شد که، به‌ازای

هرتناوبی از ناظران، همیشه می‌توان تعدادی از آن‌ها را، که از ۱۰ تجاوز نمی‌کند، طوری انتخاب کردکه، نگهبانی‌های یك دقیقه‌ای آن‌هــا، تمامی مهلت شش‌دقیقه‌ای مشاهده را، پرکند. بنابراین، تناوب ناظران به‌هرترتیبی باشد، سوسمار نمی‌تواند، در ۶ دقیقه، بیش از ۱۰ متر جلو برود. تنها باید روشی کلی پیداکردکه، به‌کمك آن بتوان، بدون ارتباط بـا «برنامهٔ» حرکت سوسمار و بدون‌توجه به‌نوع تناوب ناظران، این ۱۰ ناظر را ، از بین همهٔ آن‌ها، جدا کرد.

روشن است که ، اگر نگهبانی برخی از نـاظران ، به‌یك زمان نیفتد (یعنی، لحظهٔ آغاز «نگهبانی» و، همچنین، لحظهٔ پایان آن، برای این افراد، برهم منطبق بـاشد) ، آن وقت، از چنین گروهی، می‌توان تنها یك نفر را نگه داشت، زیرا او به تنهـائی می‌تواند سوسمـار را تعقیب کند، وجود «دوبلورهای» او،تنها موجب بغرنج‌ترشدن راه‌حل می‌شودکه، بدون‌آن‌هم، به‌اندازه‌کافی دشواری دارد.]

بین ناظران، یکی وجود دارد که، سوسمار را، از همان آغـاز دورهٔ شش‌دقیقه‌ای تعقیب می‌کند. او را، ناظر اول می‌نامیم. از بین بقیهٔ ناظران، آن‌را در نظر می‌گیریم که، بعد از ناظر اول، ولی نه بعد ازآن‌که ناظر اول نگهبانی خود را تمـام‌کرده است، تعقیب سوسمار را آغاز کرده است و، او را، نـاظر دوم می‌نـامیم (شکل ۱۲۱). (نـاظر دوم، حتمـاً پیدا می‌شود ،

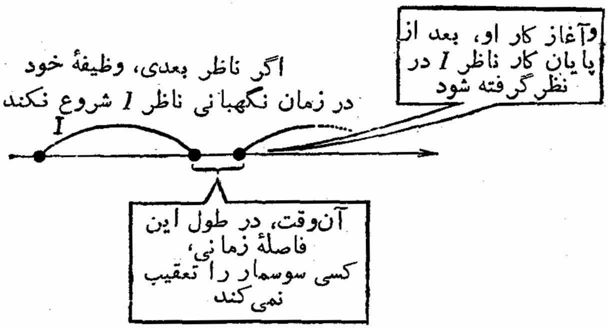


شکل ۱۲۱

زیرا همهٔ ناظران کار مشاهدهٔ خود را از ابتدای دورهٔ شش دقیقه‌ای، آغاز نکرده‌اند، بنابراین، ناظرانی وجود دارند که، کار نگهبانی خود را، بعد از ناظر اول شروع کرده‌اند. از بین این ناظران، می‌توان دست‌کم یک ناظر پیدا کرد که، در زمان نگهبانی ناظر اول، وظیفه خود را آغاز کرده است، زیرا در غیر این صورت، بین ناظران گسستگی پیش می‌آید، به نحوی که بین پایان نگهبانی ناظر اول و لحظهٔ آغاز نگهبانی ناظر بعدی، فاصله می‌افتد و، دراین فاصله، کسی نیست که سوسمار را تعقیب کند (شکل ۱۲۲).

ناظر دوم، وظیفهٔ خود را بعد از ناظر اول آغاز می‌کند و، بنابراین، نگهبانی او، بعد از پایان نگهبانی ناظر اول، تمام می‌شود.

از بین بقیهٔ ناظران، آن‌را انتخاب می‌کنیم که، بعد از ناظر دوم، ولی نه «بعد از آن‌که ناظر دوم، نظارت خود را قطع کرده است»، به‌وظیفهٔ خود مشغول شده است و، او را، ناظر سوم می‌نامیم. هر چه دربارهٔ ناظر دوم گفتیم، در بارهٔ ناظر سوم هم صدق می‌کند. روشن است که، نظارت ناظر سوم، بعد از پایان وظیفهٔ ناظر دوم، تمام می‌شود.



شکل ۱۲۲

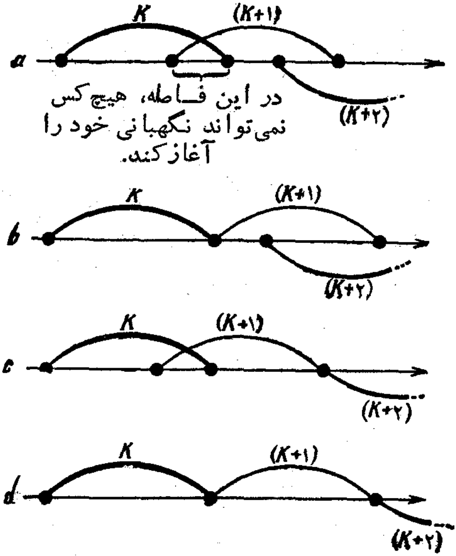
این‌شیوه را، تا جایی که ممکن است، ادامه می‌دهیم. انتخاب ناظر جدید، تنها وقتی ممکن نیست که، پایان نگهبانی آخرین نفر، برلحظه‌ای منطبق باشد که مهلت شش‌دقیقه‌ای مشاهده، به‌پایان رسیده است. در بقیهٔ موردها، همیشه می‌توان ناظری پیدا کرد که وظیفهٔ خود را، بعدازآغاز وظیفهٔ آخرین فرد انتخاب شده، به‌عهده بگیرد، زیرا باید کسی وجود داشته باشد که

کار تعقیب سوسمار را، قبل ازپایان نگهبانی‌آخرین فرد انتخاب‌شده، ادامه دهد. (از راه دیگری هم ، می‌توان به همین نتیجه رسید. از صورت مسأله پیداست که، ناظری وجود داردکه، نگهبانی او، هم‌زمان باپایان مهلت شش دقیقه‌ای، تمام می‌شود. بنابراین، تازمانی که نگهبانی نوبتی ناظران به‌پایان مهلت شش دقیقه‌ای نرسیده است، همیشه دست‌کم یك ناظر پیدا می‌شودکه، نگهبانی او، دیرترآغاز می‌شود و دیرتر به‌پایان می‌رسد. همان‌طور که ضمن انتخاب ناظر دوم و سوم متذکر شدیم، بین ناظرانی که کار تعقیب را بعد از آخرین نفر انتخاب شده، قبول می‌کنند، حتماً کسی پیدا می‌شودکه وظیفهٔ خود را، دیرتر از پایان کار نفر آخر، شروع نکند.)

روندانتخاب ناظران، مسلماً، بعدازتعداد معینی گام، به‌پایان می‌رسد، زیرا طبق شرط مسأله، تعدادکل ناظران ، محدود است. از آن‌چه گفتیم، نتیجه می‌شودکه کار نگهبانی آخرین ناظر، درست در لحظه‌ای تمام می‌شود که، مهلت شش‌دقیقه‌ای نظارت، به‌پایان رسیده است.

ازروش انتخاب ناظران، خودبه‌خود، روشن می‌شودکه، از هرسه‌ناظری که پشت سرهم قراردارند ، دوناظر اول و سوم نمی‌توانند ، به‌طور هم‌زمان، سوسمار را تعقیب‌کنند، یعنی از هرسه‌نفر متوالی ، ناظر سوم وقتی نگهبانی خود را آغاز می‌کندکه، ناظر اول، مدتی قبل از آن ، وظیفهٔ خود را تمام کرده است. در واقع، ناظر سوم، کار خود را، بعداز ناظر دوم، آغازمی‌کند، و در فاصله‌ای از زمان که ناظر دوم وظیفهٔ خود را آغاز کرده تا موقعی که ناظر اول کار خود را تمام می‌کند، هیچ‌یك از ناظران دیگر نمی‌توانند در نگهبانی باشند (زیرا، اگر چنین نگهبانی وجود داشته‌باشد، خود او، ناظر دوم می‌شود).

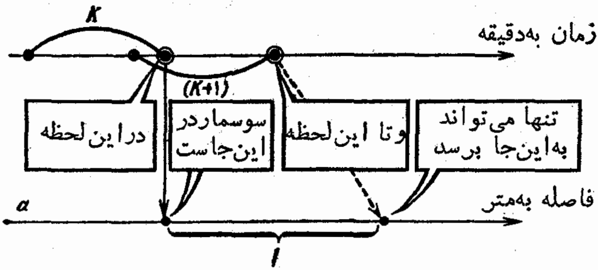
روی شکل ۱۲۳ نشان داده شده است که چگونه ، سه‌ناظری که انتخاب‌کرده‌ایم، می‌توانند جای‌خودرا، به‌ردیف شماره‌ها، باهم‌عوض‌کنند. به‌سادگی دیده می‌شودکه قانون‌مندی‌کلی فوق(«عدم برخورد» زمانی بین نگهبانی ناظران اول وسوم)، برای همهٔ حالت‌های ممکن توالی سه‌ناظر درست است وهمه این‌حالت‌ها را دربرمی‌گیرد.

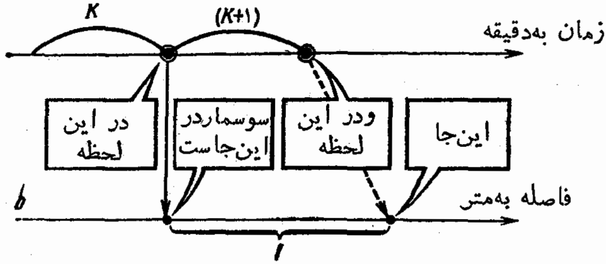


شکل ۱۲۳

به‌این ترتیب ، ناظران با شماره‌های فرد نمی‌توانند، به‌طورهم‌زمان در تعقیب سوسمار شرکت داشته‌باشند . از این‌جا نتیجه می‌شود که ، تعداد این‌گونه ناظران، از پنج تجاوز نمی‌کند ، زیرا بین نگهبانی‌های دقیقه‌ای پنج ناظر (باشماره‌های فرد متوالی)، فاصله‌هایی وجود دارد. به‌همین‌ترتیب، تعداد ناظران باشماره‌های متوالی زوج‌هم، ازپنج‌تجاوز نمی‌کند. بنابراین، به‌این‌نتیجه می‌رسیم که، تعداد ناظران انتخابی، نمی‌تواند از ۱۰ تجاوزکند.

در نزدیکی‌های پایان نگهبانی نوبتی ناظری‌که برای تعقیب انتخاب کرده‌ایم ، سوسمار می‌تواند ۱ متر دیگر (بعد از لحظه‌ای‌که ، ناظر قبلی ، دست از نظارت برداشته است) جلو برود. در واقع ، قبل ازآن‌که نگهبانی نوبتی یك‌ناظر آغاز شود، سوسمار ۱ متر به‌جلو رفته است ، ولی پایان نگهبانی ناظر قبلی ، متناظر با لحظه‌هایی است که ، در جریان آن ، ناظر مفروض، کارنگهبانی خودراآغازکرده‌است. (هرنگهبانی که انتخاب‌می‌کنیم، نگهبانی خود را درلحظه‌ای آغاز می‌کندکه دیرتر از پایان نگهبانی ناظر قبلی نیست .)





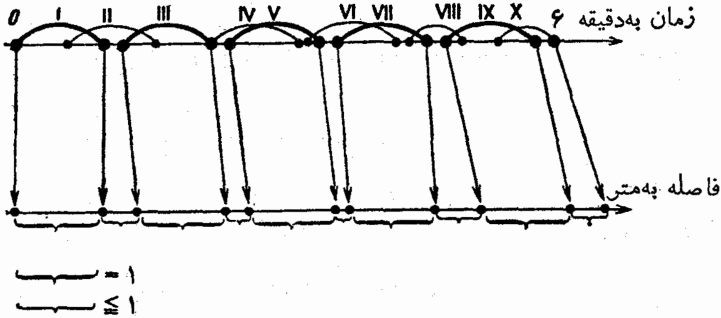
شکل ۱۲۴

در شکل ۱۲۴، دوحالتی که ممکن است، ضمن تعویض یك ناظر با دیگری، پیش‌آید، نشان‌داده شده است. در هردوحالت، در لحظهٔ پایانی نگهبانی قبلی، دوناظر با هم سوسمار را تعقیب می‌کنند: هم ناظر قبلی وهم ناظری که جای او را گرفته است.

در پایان نگهبانی ناظر اول (یعنی، در پایان دقیقهٔ اول)، سوسمار درست ۱ متر به‌جلورفته است. تعداد ناظران انتخابی بعدی، از ۹ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، بیش‌از۹ لحظه زمانی وجودندارد که، درآن‌ها، کارنگهبانی یکی ازناظران به‌پایان می‌رسد، وبنابراین، تاپایان‌آخرین نگهبانی (وقتی که دقیقهٔ ششم‌تمام می‌شود)، سوسمار نمی‌تواند بیش از ۹ متر دیگرحرکت کند. به‌این‌ترتیب، روی‌هم و در طول شش‌دقیقه، نمی‌تواند بیش از ۱۰ متر به‌جلو رفته باشد.

یادداشت ۱. این اثبات را، به‌صورت زیر هم، می‌توان خلاصه‌کرد:

در طول نگهبانی هرناظر با شمارهٔ فرد ، سوسمار می‌تواند درست ۱ متر حرکت کند. ولی در طول نگهبانی هرناظر با شمارهٔ زوج، حداکثر، به‌اندازهٔ ۱ متر جلو می‌رود.



شکل۱۲۵

این تفسیررا، روی‌شکل ۱۲۵ نشان‌داده‌ایم. روشن‌است که‌نگهبانی‌های نوبتی ناظران جداگانه را، می‌توان با روش‌های گوناگونی نشان داد.

یادداشت ۲. در اثباتی‌که در بالاآوردیم، بارها از محدودبودن تعداد ناظران استفاده‌کردیم. به‌همین مناسبت ، در پایان صورت مسأله ، تأکید کرده‌بودیم‌که ، تعداد ناظران را می‌توان به‌دلخواه زیاد گرفت، ولی در هرحال، باید تعدادی محدود داشته باشند.

۷۶. مترها و دقیقه‌ها

تعداد مترهایی‌که سوسمار می‌تواند جلوبرود ، برابر است با تعداد «نیم‌دقیقه‌هایی»که اورا تعقیب می‌کنند، منهای ۲ (یعنی، درn دقیقه، می‌تواند به‌اندازهٔ ($2n-2$)متر جلو برود).

اثبات این‌که، سوسمار می‌تواند در n دقیقه ، به‌اندازهٔ ($2n-2$) متر حرکت کند، شبیه حل مسألهٔ ۷۳ انجام می‌گیرد.

اثبات این‌که، سوسمار نمی‌تواند، در n دقیقه، بیش از($2n-2$)متر جلو برود، شبیه حل مسألهٔ ۷۵، انجام می‌گیرد.

بحث تفصیلی هردو مورد را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۷۷. بدون توقف

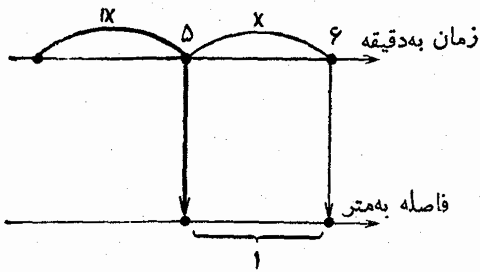
نه! وقتی‌که سوسمار، به‌طور پیوسته حرکت‌کند، مقدار حرکت او در ۶دقیقه، همیشه از ۱۰ مترکمتر است.

برای روشن‌شدن درستی این‌حکم، ثابت می‌کنیم که، اگر سوسماری با حرکت پیوسته و بدون توقف جابه‌جا شود، در مقایسه با سوسماری‌که با «خیزبرداشتن» حرکت می‌کند، در یك فاصلهٔ زمانی معین، فاصلهٔ کمتری را طی می‌کند. در واقع، از حل مسألهٔ ۷۵ می‌دانیم‌که، اگر سوسمار، با «خیزبرداشتن» حرکت‌کند، نمی‌تواند در ۶ دقیقه، بیش از ۱۰ متررا بپیماید. بنابراین، بااین‌مقایسه، روشن خواهدشدکه، سوسمار اول، درهمین۶دقیقه، فاصله‌ای‌کمتر از ۱۰ متر را طی خواهدکرد.

از بین ناظران موجود، همان‌هایی را انتخاب می‌کنیم‌که، در حل مسألهٔ ۷۵، در نظر گرفته بودیم. برای این‌که سوسمار بتواند ۱۰ متر را پشت‌سر بگذارد، باید تعداد این‌ناظران، از ۱۰ تجاوز نکند (این‌حقیقت، به‌خودی‌خود، اهمیتی ندارد، زیرا ماتنها به‌سه ناظر متوالی احتیاج‌داریم).

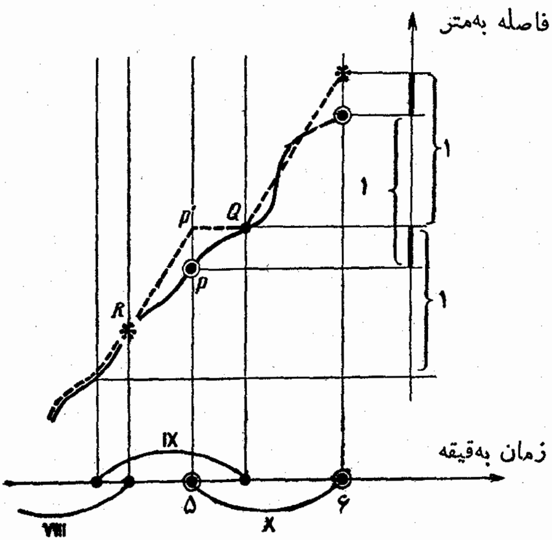
ابتدا، پیش قضیهٔ زیررا ثابت می‌کنیم: اگر آغاز نگهبانی ناظر دهم، برانتهای دورهٔ نگهبانی ناظر نهم منطبق باشد، آن‌وقت، سوسمار به‌هیچ‌ترتیبی نمی‌تواند ۱۰ متر را پشت‌سر بگذارد. در واقع، در این‌حالت، دقیقهٔ پنجم مشاهده، همراه با پایان نگهبانی ناظر نهم، تمام می‌شود. بنابراین، اگردقیقهٔ ششم وناظر دهم راکنار بگذاریم، زمان حرکت‌سوسمار، به۵دقیقه‌کاهش‌می‌یابد،ولی‌بقیهٔ شرطهای مسأله،تغییرنمی‌کند (شکل۱۲۶). ولی از حل مسألهٔ ۷۶، روشن است‌که سوسمار، در این ۵ دقیقه، بیش از ۸ متررا نمی‌تواند پشت‌سر بگذارد. در نتیجه، با به‌حساب‌آوردن دقیقهٔ ششم، سوسمار نخواهد توانست، بیش از ۹ متر به‌جلو برود. پیش قضیهٔ ثابت شد.

به‌این‌ترتیب، کافی است حالت‌هایی را مورد بررسی قراردهیم‌که،



شکل۱۲۶

موعد نگهبانی دو ناظرآخر (ناظر نهم و ناظر دهم)، در بخشی، یکدیگر را پوشانده باشند. برای عینی‌تر شدن مطلب، از نمودار استفاده می‌کنیم (شکل ۱۲۷) و زمان و فاصلهٔ حرکت سوسمار را، به‌عنوان محورهای یك دستگاه قائم مختصات درنظر می‌گیریم. حرکت بدون توقف سوسمار اول، در روی نمودار، متناظر است با خطی‌که نشان می‌دهد، در هرلحظهٔ بعدی،



شکل۱۲۷

فاصلهٔ بیشتری را ، نسبت به‌هرلحظهٔ قبلی ، طی کرده است : بستگی مسافت طی شده به‌زمان، «تابعی اکیداً صعودی» است (روی نمودار، این بستگی را، با خط کلفت نشان‌داده‌ایم).

فرض می‌کنیم، تا پایان نگهبانی ناظر هشتم ، سوسمار دوم ، درست به‌اندازهٔ سوسمار اول، حرکت کرده باشد و، سپس، از اولی جلو بیفتد و، در ابتدای نگهبانی ناظر دهم ، همان فاصله‌ای را پشت‌سر گذاشته باشدکه ، سوسمار اول ، توانسته است در انتهای نگهبانی ناظر نهم، به‌جلو بپرد (روی نمودار، بستگی فاصله‌ای که سوسمار دوم طی می‌کند، با زمان ، با خطچین داده شده است). از آن جا، سوسمار دوم، درانتهای دقیقهٔ پنجم، و در مهلتی که ناظر نهم او را تعقیب می‌کند، بازهم ۱ متر به‌جلومی‌رود، ودر خط پایان نگهبانی ناظر نهم، در جای خود ساکن می‌ماند.

از لحظه‌ای که سوسمار اول با سوسمار دوم در یك‌ردیف قرار گرفته است تا پایان دقیقهٔ ششم، سوسمار دوم می‌تواند ۱ متر به‌جلو برود، زیرا ازآغاز نگهبانی ناظر دهم تاآن‌وقت ، حرکتی نکرده است . سوسمار اول ، در زمان باقی‌مانده، فاصلهٔ کمتری را پشت سر می‌گذارد و دوباره عقب می‌ماند ، زیرا او بدون توقف حرکت می‌کند و بخشی از متری را که ، بنابرشرط مسأله، می‌تواند در مهلت نگهبانی ناظر دهم طی‌کند، در فاصلهٔ زمانی ازآغازنگهبانی ناظردهم تاپایان نگهبانی ناظرنهم، «مصرف‌می‌کند».

بنابراین ، به‌هرترتیب‌که نگهبانی‌های دقیقه‌ای ناظران انتخاب شده‌باشد و بستگی بین زمان و فاصله‌ای‌که سوسمار اول (با حرکت پیوسته وبدون توقف خود) طی می‌کند، هرچه‌باشد، سوسمار دوم، درمدت ۶ دقیقه، فاصلهٔ بیشتری را خواهد پیمود؛ یعنی، حداکثر فاصله‌ای راکه سوسمار اول می‌تواند طی‌کند، همیشه از ۱۰ متر کمتر است.

یادداشت ۱. برای رفع هر گونه شبهه‌ای، تأکید می‌کنیم‌که، آن‌چه‌را ثابت‌کردیم، به‌هیچ‌وجه نباید به‌این معنا گرفت‌که، برای یك نمودار مربوط به‌نگهبانی‌های ناظران انتخابی، سوسمار دوم ، فاصله‌ای بیشتر از سوسمار اول طی می‌کند . اثبات چنین حکمی دشوار است و ما هم، نیازی به‌آن

نداشتیم. ما حکم ضعیف‌تری را می‌خواستیم ثابت‌کنیم : ما تنها علاقه‌مند به‌این مطلب بودیم که‌آیا، سوسمار اول، می‌تواند در ۶ دقیقه، ۱۰ متر را پشت‌سر بگذارد. می‌خواستیم ثابت‌کنیم‌که، مسیر سوسمار اول، کمتر از ۱۰ متر است. به‌همین دلیل بودکه، سوسمار دومی را در نظرگرفتیم که حرکت آن در تمامی مدت ۶ دقیقه، با حرکت سوسمار اول هم‌آهنگ بود . ما با مقایسهٔ مسافتی که دو سوسمار طی می‌کنند، ثابت‌کردیم‌که، در یك فاصلهٔ زمانی مشخص (۶ دقیقه)، دومی، فاصلهٔ بیشتری را طی می‌کند . (این‌که، سوسمار دوم، در بخش اجباری مسیر، دقیقاً سوسمار اول را تعقیب می‌کند و به‌حداکثر فاصله نمی‌رسد، مطلب مهمی نیست.) لزومی نداردکه، حرکت سوسمار دوم، با نمودار نگهبانی‌هایی‌که برای تعقیب سوسمار اول انتخاب کرده‌ایم، تطبیق‌کند. تنهاچیزی‌که مهم‌است، این‌است‌که، برای‌هرنموداری، سوسمار دوم بتواند فاصله‌ای راکه بیش از ۱۰ متر نیست، پشت‌سر بگذارد اگر بخواهیم دقیق‌باشیم، باید بگوییم‌که، حرکت سوسمار دوم را، ناظران دیگری تعقیب می‌کنند و ، بنابراین، نمودار دیگری به‌دست می‌آید. تنها برای سادگی‌کار مقایسه‌بودکه، همان ناظران سوسمار اول‌را، برای‌سوسمار دوم هم درنظر گرفتیم.

یادداشت ۲. سوسمار دوم ناچار نیست به‌جلو «خیز بردارد» وبخشی از زمان را استراحت‌کند ، زیرا تنها باید ثابت‌کرد که سوسمار اول، در ۶ دقیقه، نمی‌تواند حداکثر فاصله را طی‌کند، یعنی سوسمار دیگری وجوددارد که، درهمین زمان، فاصلهٔ بیشتری‌را طی می‌کند. برای این‌منظور، کافی‌است ثابت‌کنیم‌که نقطهٔ P' در روی نمودار (شکل ۱۲۷) ، بالاتر از نقطهٔ P قرار دارد ، در این‌صورت، سوسمار دوم می‌تواند در دقیقهٔ آخر، ۱ متر از نقطهٔ P' بالاتر برود، در حالی‌که سوسمار اول، از نقطهٔ P، که پایین‌تر از P' است، ۱ متر بالاتر می‌رود.

۷۸. با دقتی کمتر

ممکن است.

اگر تعداد ناظران کمتر از ۶ نباشد، سوسمار می‌تواند درمدت ۶دقیقه، همان‌قدر متر جلو برودکه ناظر او را تعقیب می‌کند. چون تعداد ناظران را، می‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد ، بنابراین ، سوسمار می‌تواند در ۶ دقیقه ، هرفاصلهٔ دلخواهی را پشت سر بگذارد.

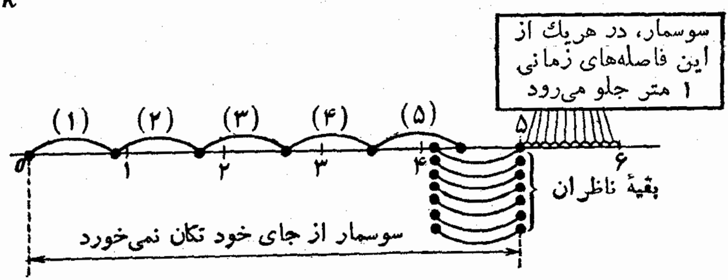
تعداد نـاظران را ، k می‌گیریم $(k\geqslant ۶)$. روی شکل ۱۲۸ نشان داده شده است که چگونه باید زمان نگهبانی ناظران را تنظیم کرد تاسوسمار بتواند k متر را از سرراه خود بـردارد . (در شکل ۱۲۸ ، $k=۱۲$. بحث زیر، خصلتی کلی دارد و به‌این مقـدار مشخص k، بستگی پیدا نمی‌کند.)

هرناظر، در دقیقه‌های اول، بـاید، به‌اندازهٔ $\left(۱-\frac{۱}{k}\right)$دقیقه،سوسمار را تعقیب کند، ضمناً، برنامهٔ نگهبانی آن‌ها بایدطوری تنظیم‌شود،که ۵دقیقهٔ اول را، به‌طور کامل، پر کنند. ازآن‌جاکه داریم:

$$k\left(۱-\frac{۱}{k}\right)=k-۱\geqslant ۵$$

تنظیم چنین برنامه‌ای، همیشه ممکن است. (مثلاً ، بـا آغاز از دقیقهٔ ۰ ، ۵ ناظر پشت سرهم، به‌نگهبانی می‌پردازند و بقیهٔ ناظران، با هم ، در بقیهٔ دقیقهٔ پنجم، به‌نظارت ادامه می‌دهند. روشن است که، بااین روش نگهبانی، تمام شرطهای مسأله، رعایت شده است.)

سرانجام، در جریان دقیقهٔ ششم، باید هرناظر، به‌طور مستقل، در $\frac{۱}{k}$



شکل۱۲۸

دقیقه سوسمار را تعقیب کند. وقتی که k ناظر، به‌نوبت و هر $\frac{1}{k}$ دقیقه یك‌بار، نگهبانی خود را عوض کنند، روی‌هم ۱ دقیقه طول می‌کشد.

سوسمار، درجریان ۵ دقیقهٔ اول، ازجای خود تکان نمی‌خورد (و در واقع، نیروهای خود را جمع می‌کند)، ولی در طول دقیقهٔ‌آخر (ششم)، در هر فاصلهٔ زمانی به‌طول $\frac{1}{k}$ دقیقه، ۱ متر به‌جلو می‌رود.

[به‌این‌ترتیب ، اگر از شرط پیوستگی نگهبانی هرناظر صرف‌نظر کنیم، به‌مسأله‌ای می‌رسیم که، در واقع ، مفهوم خود را از دست می‌دهد. می‌توان نمونه‌های بسیاری ازمسأله‌های بی‌معنی طرح کرد تا، به‌کمك‌آن‌ها، بتوان ثابت‌کردکه، وجود یك نکتهٔ «کوچك» درصورت مسأله، چه اهمیتی می‌تواند داشته‌باشد.]

۷۹. مسیر دایره‌ای I

طول جادهٔ دایره‌ای، ۳۶۰۰ کیلومتر و، مجموع ذخیرهٔ بنزین،۱۴۴ لیتر است. این مقدار سوخت، بـرای یك‌دور حرکت در این مسیر دایره‌ای کافی است (زیـرا ، در هر ۲۵ کیلومتر ۱ لیتر بنزین مصرف می‌شود و ، بنابراین، ۱۴۴ لیتر بنزین، برای ۲۵ × ۱۴۴ ، یعنی ۳۶۰۰ کیلومتر کافی است)، به‌شرطی‌که درهرپمپ بنزین، مقدار لازم بنزین برای اتومبیل وجود داشته‌باشد. اگر اگون‌برگن ازآبادی F به‌راه افتد، می‌تواند از تمامی مسیر دایره‌ای بگذرد.

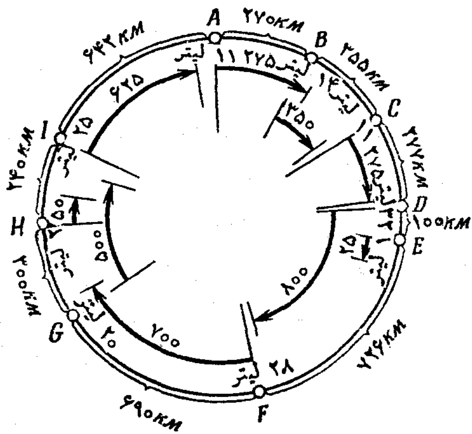
درستی این انتخاب را، برای دورزدن منطقهٔ بیابـانی ، به‌سادگی ، می‌توان ثابت‌کرد. روی‌شکل ۱۲۹ ، نشان داده‌ایم‌که ، اتومبیل، با بنزینی که در پمپ‌ها باقی‌مانده است، چندکیلومتر می‌تواند حرکت کند.

چگونه می‌توان مشخص‌کردکه، برای حرکت دراین مسیر دایره‌ای، باید درست ازآبـادی F آغازکرد؟ تنها استناد به‌کل‌بنزین، که‌برای‌سفر در این جـاده کفایت می‌کند ، کافی نیست ، زیرا ممکن است اتومبیل نتواند

به‌پمپ بنزین برسد و، در راه بین دوآبادی، متوقف شود. (ولی، اگر از آبادی F به‌راه بیفتند، چنین اتفاقی نمی‌افتد.)

نخستین چیزی که به‌ذهن آدم می‌رسد، این است که، پمپ‌بنزینی را انتخاب کنیم که ذخیرهٔ بنزین بیشتری‌دارد و، ازهمان‌جا، حرکت‌را آغاز کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که چنین روشی، برای انتخاب نقطهٔ آغاز حرکت، اشتباه است.

در واقع، در مثال ما، حداکثر مقدار بنزین (۳۲ لیتر) در پمپ‌بنزین آبادی D وجود دارد. ولی اگر مسافر، ۳۲ لیتر بنزین را در باك اتومبیل خود بریزد، می‌تواند خود را به‌آبادی E برساند، ولی حتی با اضافه‌کردن ذخیرهٔ بنزین موجود درآبادی E، نمی‌تواندخودرا، ازآن‌جا، به F برساند.



شکل۱۲۹

این‌هم بی‌معنی است که، حرکت خود را، ازجایی آغاز کندکه، ذخیرهٔ بنزین موجود درآن، حتی برای رسیدن به‌آبادی بعدی هم، کفایت نمی‌کند (B، C، E، H و I، از این گونه‌اند).

چرا، از بین بقیهٔ آبادی‌ها، برای‌آغاز حرکت، درست نقطهٔ F را

انتخاب کردیم؟ در واقع، انتخاب نقطهٔ آغاز حرکت را، باید باروش آزمایش و خطا معین کرد.

مثلاً، فرض کنیم، اتومبیل، از نقطهٔ A آغاز به‌حرکت کند. به‌روشنی دیده می‌شود که، در این صورت، مسافر می‌تواند به‌سلامت به‌آبادی B برسد و ، اگر ذخیرهٔ سوخت موجود درآبادی B را به‌اتومبیل خود اضافه کند، می‌تواند خود را به‌آبادی C هم برساند، ولی بعداً، در ۲ کیلومتری آبادی D، بدون بنزین می‌ماند (شکل ۱۲۹). قبلاً قانع شدیم که، نقطه‌های B و C را هم، نمی‌تواند به‌عنوان آغاز حرکت انتخاب کرد.

اگر حرکت را از D آغاز کند، در ۱ کیلومتری F می‌ماند. بنابراین، آبادی D هم، برای آغاز حرکت، مناسب نیست (نامناسب بودن آبادی E را هم، قبلاً یادآوری کرده‌ایم).

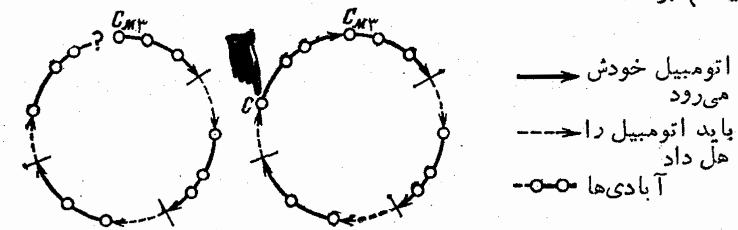
«نامزد» بعدی، برای آغازحرکت، نقطهٔ F است. وقتی که اگون برگ از F آغاز به‌حرکت کند ، به‌راحتی به‌آبادی‌های G، H، I و A می‌رسد. وقتی که به‌آبادی A می‌رسد ، هنوز به‌اندازهٔ ۳ کیلومتر راه ، بنزین دارد (خودتان محاسبه کنید) و ، این‌مقدار بنزین ، برای جبران ۲ کیلومتر و ۱ کیلومتری که قبلاً کسرآورده بود، کافی است (این کمبودها، مربوط به‌موقعی بود که از A یا D حرکت می‌کرد).

۸۰. مسیر دایره‌ای II

راه‌حل اول. این مسأله، در واقع، تعمیم مسألهٔ قبلی است . استفادهٔ از همان روش حل مسألهٔ ۷۹، در این‌جا هم ما را به‌موفقیت می‌رساند.

یك آزمایش ذهنی انجام می‌دهیم . فرض می‌کنیم ، خلبان هلی‌کوپتر راه را گم کند، جهت را از دست بدهد و ، کورکورانه، در یکی از آبادی‌ها بنشیند. رانندهٔ شجاع ، بی‌اطلاع از خطری که او را تهدید می‌کند ، بنزین را درباك ماشین خود می‌ریزد و، خوشحال، درجهت پیکان، به‌راه می‌افتد. اگر شانس بیاورد، تمام مسیر دایره‌ای را دور می‌زند، ولی ، اگر بدشانس

باشد، در جایی میان دوآبادی، بنزین تمام می‌کند . ممکن است اگون‌برگ به‌نزدیکترین آبادی (در جهتی که پیکان نشان داده است) برسد و ازآن‌جا، بعد از بنزین گیری مسیر خود را ادامه دهد. به‌این‌ترتیب، ممکن است هیچ مشکلی برای جهان‌گرد ما پیش نیاید و او بتواند ، با دورزدن بیابان ، به‌نقطهٔ اولیهٔ حرکت، برگردد. ولی، این‌هم بعید نیست که بنزین کم آورد و، در جایی، بین دوآبادی متوقف شود. درچنین صورتی، اگون‌برگ ناچار است ، آن‌قدر اتومبیل خود را هل‌دهد تا به‌نزدیکترین آبادی (در جهت پیکان) برسد.



شکل ۱۳۰ شکل ۱۳۱

به‌هرحال، اعم ازاین‌که پشت رل‌نشسته باشد ویا اتومبیل‌را هل‌دهد، سرانجام، اگون‌برگ می‌تواند خود را به‌همان آبادی برساند که ازآن‌جا حرکت‌کرده‌بود (ولی، ماامیدوازیم،آفتاب داغ کویری، خیلی موجب‌زحمت اگون‌برگ نشود). [در شکل ۱۳۰، این‌آبادی مبداء را، C_M نامیده‌ایم.]

اگون‌برگ، درآخرین لحظه‌ها ، به‌چه‌ترتیب، به‌نقطهٔ مبداء می‌رسد: بانیروی خود اتومبیل یا باهل‌دادن‌آن؟ ولی درواقع، حالت اخیر نمی‌تواند پیش‌آید. اگر موقع رسیدن به‌نقطهٔ اولیهٔ حرکت، باك بنزین خالی باشد و (بعد از آن‌که همهٔ ذخیرهٔ بنزین آبادی‌ها را در باك اتومبیل خود ریخته است)، بازهم ناچار شده باشد. در لحظه‌های‌آخر، با دست آن‌را هل بدهد، به‌معنی‌آن‌است‌که ، علی‌رغم شرط مسأله، مجموع ذخیرهٔ بنزین‌های همهٔ پمپ‌ها، برای دورزدن تمامی مسیر دایره‌ای،کافی نبوده‌است.

بنابراین، آقای برگ می‌تواند، با تحمل بعضی دشواری‌ها، تمام‌دایره را دور بزند و خود را به نقطهٔ حرکت آغازین برساند (شکل ۱۳۱). وقتی

که به C_M (جایی که، ازآن جا، حرکت خود را آغاز کرده بود) برسد، هنوز مقداری بنزین، درباك اتومبیل خود دارد. در واقع، اگون برگ، در طول مسیرحرکت‌خود، تمام ذخیرهٔ پمپ‌های بنزین را درباك اتومبیل خود ریخته است. این مقدار بنزین، برای حرکت درتمامی مسیر دایره‌ای شکل، لازم و کافی‌است. ولی، چون‌دربعضی فاصله‌ها، اتومبیل‌را با هل‌دادن به‌نزدیك‌ترین آبادی رسانده‌اند، در نتیجه، باید بنزین مصرفی این فاصله‌ها «صرفه جویی» شده باشد. بنزینی که در باك اتومبیل «ذخیره» شده است، به اندازه‌ای است که، برای حرکت‌آن درفاصله‌هایی که به‌خاطر نبودن سوخت با فشار دست حرکت کرده است، کفایت می کند.

اکنون، این بنزین اضافی، کـه به خاطر انتخاب نادرست مبداء حرکت باقی‌مانده‌است، به‌درد اگون برگ نمی‌خورد.

ولی اگر اگون برگ از نقطه‌ای آغاز به حرکت کرده بودکه، در سفر اخیر خود، برای آخرین‌بار بـا هل دادن اتومبیل به‌آن رسید (یعنی اگر از نقطهٔ C آغاز به‌حرکت می کرد)، می‌توانست تمامی مسیر را، بدون دغدغهٔ خاطر، طی کند، بدون این‌که درجایی، به‌خاطر بی‌بنزینی، متوقف شود.

درواقع، این بنزین اضافی، نمی‌توانست درنقطه‌ای قبل از C، ذخیره شده باشد، زیرا اگرچنین بود، ناچار نمی‌شد، برای رسیدن به C ازهل‌دادن اتومبیل استفاده‌کند. بنابراین، اگر اگون برگ ازآبادی C آغاز به حرکت می‌کرد، به‌راحتی می‌توانست خودرا به‌نقطه‌ای برساندکه، درآزمایش‌ذهنی، ازآن‌جاحرکت کرده‌بود؛ ولی دراین‌نقطه، به‌اندازهٔ فاصله‌هایی که، درآزمایش ذهنی، ناچار شده‌بود اتومبیل بی‌بنزین را هل بدهد، بنزین ذخیره درباك‌خود دارد و، بنابراین، اگربه‌راه خود ادامه دهد، دیگر درهیچ‌جایی بدون‌سوخت نمی‌ماند.

کوتاه شدهٔ این استدلال را، با تکیه بر مهم‌ترین نکته‌های آن، تکرار می کنیم.

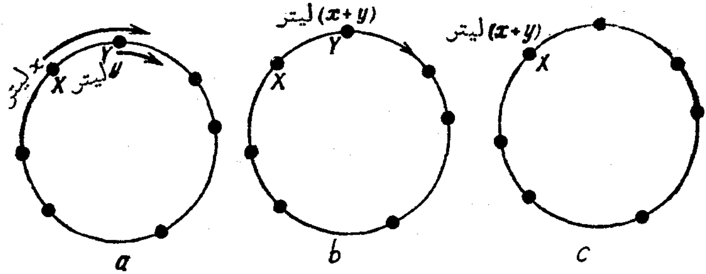
فرض کنید، اتومبیل، آغاز حرکت خود را، دریکی از آبادی‌ها (C_M) انتخاب کند. دوحالت ممکن است پیش‌آید: یا اتومبیل می‌تواند تمامی مسیر را، بدون اشکال طی کند ویا، درجایی، بنزین، کم می‌آورد و متوقف‌می‌شود.

درحالت اول، حکم مساله، به‌خودی خود، ثابت شده است. درحالت دوم، یك یا چند قطعه از مسیر (دربین دوآبادی) پیدا می‌شود که، درآن‌جا، بنزین قبل از موقع تمام می‌شود. این قطعه‌ها را باید پیاده رفت و، درعین حال، اتومبیل را هل داد، درنتیجه، به‌اندازهٔ سوخت لازم دراین فاصله، بنزین «صرفه‌جویی» می‌شود.

آخرین نقطه‌ای‌که، برای رسیدن به آن، باید پیاده‌روی‌کرد (آبادی C)، همان نقطه‌ای است‌که با شرطهای مساله سازگار است. در واقع، با حرکت ازنقطهٔ C، وقتی به C_M می‌رسیم، همان‌بنزین درباك اتومبیل ذخیره می‌شودکه، درمسافرت‌قبلی، باپیاده‌روی‌های خود «صرفه‌جویی»کرده‌بودیم. بنابراین، اگربااین ذخیرهٔ بنزین، حرکت‌خود را از C_M ادامه‌دهیم، به‌راحتی می‌توانیم خود را به نقطهٔ C برسانیم، بدون این‌که در جایی بدون سوخت بمانیم.

راه حل دوم. بنا برشرط مساله، مجموع ذخیرهٔ بنزین، در همهٔ پمپ‌بنزین‌ها کافی است‌تا بتوانیم، یك‌بار، منطقهٔ بیابانی را دوربزنیم. بنابراین، مقدارذخیرهٔ بنزین (x لیتر)، دست‌کم دریکی ازپمپ‌ها (x)، بایدبرای‌رساندن اتومبیل، به آبادی بعدی (y) کافی باشد (شکل ۱۳۲ ـ a). (درواقع، اگر حتی یك‌آبادی هم وجود نداشته باشدکه، ذخیرهٔ بنزین آن، برای رسیدن به آبادی بعدی کافی باشد، بـه‌معنای آن است‌که، مجموع ذخیره‌های بنزین، برای دورزدن مسیر دایره‌ای، کافی نیست.) اگر اتومبیل ازآبادی xحرکت کند، به راحتی به آبادی y می‌رسد که، درآن جا، می‌تواند y لیتر ذخیرهٔ بنزین آبادی y را درباك خود بریزد. بنابراین، می‌توان این طور فرض‌کرد که،درآبادی x، به‌اندازهٔ $(x+y)$ لیتربنزین ذخیره‌بوده‌است. به‌این‌ترتیب، می‌توان آبادی y را، درذهن خود، «ازروی زمین محوکرد» و ذخیرهٔ بنزین آن را بـه‌پمپ بنزین آبـادی x تحویل داد؛ در ایـن صورت، ازنظر انجام مسافرت دراین جادهٔ دایره‌ای، هیچ‌تغییری پدیدنمی‌آید (شکل۱۳۲ ـ b و c).

به‌این ترتیب، بااین عمل، یك واحد ازتعداد پمپ‌بنزین‌هاکم‌می‌شود، بدون این‌کـه در بقیهٔ شرطهای مساله، تغییری حاصل شود. بـا تکرار همین استدلال، وبا حفظ همهٔ شرطهای دیگر مساله، می‌توان آبادی دیگری راهم



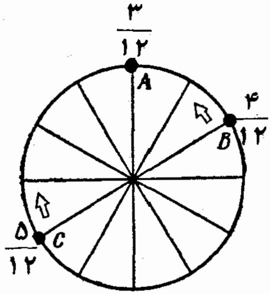
شکل ۱۳۲

حذف کرد و ذخیرهٔ بنزین موجود درآن را، بـه‌آبادی قبل ازآن انتقال داد. این روند را می‌توان، تا آن‌جا، تکرارکردکه درتمامی مسیر، تنها یك‌آبادی باقی بماند. در پمپ بنزین این آبادی، همان‌قدر بنزین ذخیره شده است‌که، قبلاً ، درهمهٔ پمپ بنزین‌ها، روی هم، وجود داشت. بنابراین، باحرکت ازاین آبادی، می‌توان تمامی مسیر را با اتومبیل دور زد.

این استدلال،کوتاه‌تـر (و در عین حال، ریاضی‌تـر) است، ولی دقت بیشتری را از خواننده طلب می‌کند.

یادداشت ۱. خواننده‌ای‌که با روش استقرای ریاضی آشنا باشد،متوجه می‌شودکه، استدلال فوق، درواقع، براساس همین روش، انجام‌گرفته است. بنابراین، باروش استقرای ریاضی، می‌توان حکم مساله را ثابت‌کرد.

یادداشت ۲. این‌که، درجادهٔ‌کمتربندی دور منطقهٔ بیابانی، تنها دریك جـهت مشخص (درجهت پیکان‌ها) می‌توان حرکت‌کرد، اهمیت‌جدی ندارد. مهم‌این است‌که، وقتی‌اتومبیل ازنقطه‌ای ودرجهتی حرکت می‌کند، تاپایان مسیرخود، جهت‌حرکت‌را عوض‌نکند.هرجهتی راکه برای حرکت‌انتخاب‌کنیم، موجب تغییری در شرطهای مساله نمی‌شود، منتهی درحالت‌کلی، نقطهٔ آغاز حرکت، برای جهت‌های مختلف، متفاوت است. این مطلب را می‌تـوان، به‌سادگی، روی مثال سادهٔ زیر تحقیق‌کرد. درشکل ۱۳۳، درکنار هریك از سه‌آبادی، سهم بنزینی‌که (ازکل بنزین لازم برای دورزدن مسیر لازم‌است) درآن وجود دارد، ذکر شده است (تمام مسیر را، به ۱۲ بخش برابر تقسیم



شکل ۱۳۳

کرده‌ایم). به‌روشنی دیده می‌شود که، اگر حرکت را ازنقطه A آغاز کنیم، نمی‌توانیم تمامی مسیررا طی کنیم، کسی که حرکت خود را از B آغازمی‌کند، به‌شرطی موفق می‌شودکه مسیر خود را درجهتی که پیکان نشان داده است، انتخاب کند (اگر درخلاف این جهت حرکت کند، بین راه دوآبادی B و C، بنزین خود را تمام‌می‌کند). به همین‌ترتیب، کسی که بخواهد حرکت خود را از C آغاز کند، وقتی می‌تواند تمامی مسیر را طی کندکه، حرکت خود را، درجهت پیکان ادامه دهد.

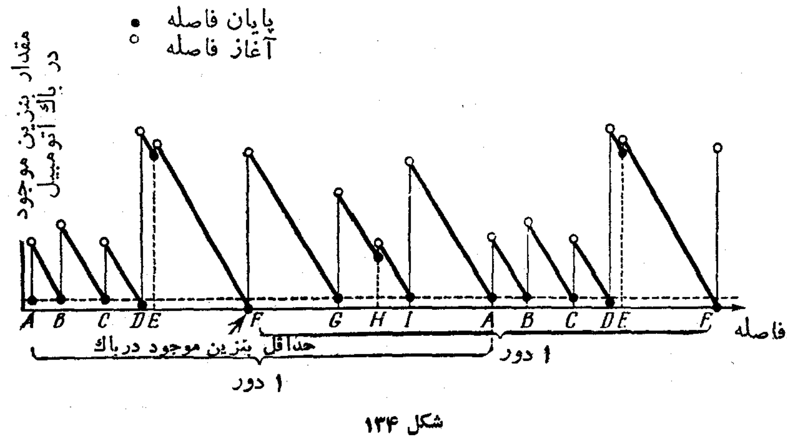
راه حل سوم. اگر فرض‌های زیر را در نظر بگیریم ، همه چیز ساده‌تر خواهد شد.

۱. فرض می‌کنیم، مسافر، درصندوق عقب اتومبیل خود، ظرف پراز بنزینی را پیدا کند که، به‌کمك آن، بتواند کمبود سوخت خود را، در هر فاصله‌ای جبران کند. دراین صورت، مسافر می‌تواند بدون نگرانی، از هر آبادی دلخواه، آغاز به‌حرکت کند وتمامی مسیر را بپیماید. حکم مساله به این‌ترتیب ثابت خواهد شدکه، بتوانیم روشن‌کنیم که، یك آبادی وجوددارد که با حرکت ازآن‌ها، هیچ نیازی به استفادهٔ از بنزین ظرف صندوق عقب پیدا نمی‌شود.

۲. فرض دوم، کمتر از فرض اول، تخیلی است. فرض می‌کنیم، پمپ‌های بنزین با دستگاه خودکاری مجهز شده باشندکه، ذخیرهٔ سوخت را، درمخزن پمپ، همیشه ثابت نگه دارند: وقتی‌که بعد از ریختن بنزین درباك

اتومبیل، سطح بنزین در مخزن پایین می‌آید، بعد از مدتی، دوباره سطح بنزین مخزن، به همان میزان اولیه برگردد (تاکید بر جملهٔ «بعد از مدتی» به‌این معناست که، اتومبیل، نمی‌تواند، دراین فاصلهٔ زمانی نسبتاً زیاد، صبر کند تا بنزین به‌مخزن پمپ وارد شود وبتواند، برای بار دوم، ازآن‌استفاده کند. ولی، در مدتی کـه اتومبیل جادهٔ کمربندی را دور می‌زند و به همین پمپ بنزین بـرمی‌گردد، سطح بنزین مخزن پمپ، به مقدار نخستین خود، برگشته است).

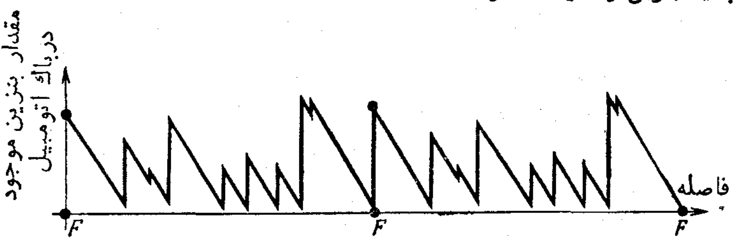
اگر ذخیرهٔ پمپ بنزین‌ها، برای یك‌بـار دور زدن منطقهٔ بیابانی کافی باشد، اتومبیل می‌تواند، با خالی‌کردن ذخیرهٔ پمپ‌های سرراه خود، هرچند بار که بخواهد، جاده دایره‌ای را دوربزنـد، زیرا درمدت غیبت او، خودکار هرپمپ بنزین، مخزن آن را تا میزان قبلی، پراز بنزین کرده است.



شکل ۱۳۴

ذخیرهٔ بنزین درباك اتومبیل، درفاصله‌های مختلف‌جاده، چگونه‌تغییر می‌کند؟ روشن است کـه، درفاصلهٔ بین دوپمپ بنزین، مقدار بنزین موجود درباك اتومبیل، به‌طور خطی نزول می‌کند و، در موقع خالی‌کردن هر پمپ بنزین، بـه‌طـور جهشی، صعود می‌کند. روی نمودار، بستگی مقدار بنزین موجوددرباك اتومبیل باموقعیت‌آن‌درجاده، به‌صورت خط‌شکسته اره‌مانندی نشان داده شده است (شکل ۱۳۴).

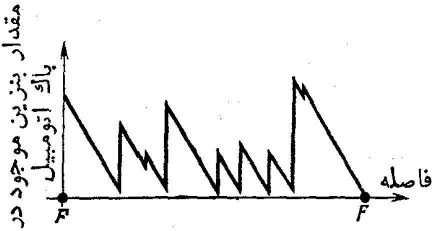
روی ایـن خط شکسته، یك نقطهٔ مهم وجود دارد. این نقطه متناظر است باکمترین مقدار بنزین موجود درباك اتومبیل. اگر نقطهٔ آغاز حرکت را ازجایی درنظربگیریم که، درآن‌جا، منحنی نموداراندازهٔ بنزین، به‌حداقل خود رسیده است،آن‌وقت، درهیچ‌کدام ازفاصله‌های بین آبادی‌ها، به‌استفادهٔ ازذخیرهٔ بنزین صندوق عقب احتیاجی نخواهیم داشت. درواقع، اگر ازاین نقطه‌آغاز به‌حرکت‌کنیم، مصرف بنزین، درهیچ قطعه‌ای، ازمقدار بنزینی‌که که درآن ریخته شده است تجاوزنمی‌کند، ضمناً، تنها وقتی ممکن است‌بنزین به حداقل خود برسد که اتومبیل به آبادی رسیده باشد، زیرا همهٔ راس‌های پایینی خط شکسته، درآبادی‌ها قـرار دارند و، درآبادی هم، می‌توان سهم جدید بنزین را دریافت‌کرد.



شکل ۱۳۵

وقتی‌اتومبیل، ازنقطه‌ای‌آغاز به‌حرکت‌کندکه، درآن‌جا، به‌پایین‌ترین نقطهٔ خط‌شکسته رسیده باشیم، هیچ نیازی به‌استفاده ازبنزین داخل صندوق عقب پیدا نمی‌شود. بنابـراین، فقدان ذخیرهٔ بنزین صندوق عقب، مانع از آن نمی‌شودکه اتومبیل بتواند، هرچند دورکه مایل است، جادهٔ‌کمربندی را دور بزنـد (شکل ۱۳۵). دراین‌صورت، اگر مسافر بخواهـد تنها یك‌دور، منطقهٔ بیابانی را دور بزند، می‌تواندکلید دستگاه خودکارپمپ‌ها را خاموش کند تا، بعد از خالی‌کردن هرپمپ، دوباره ذخیرهٔ بنزین آن به‌سطح نخستین برنگردد (شکل ۱۳۶.)

یادداشت ۱. این روش حل، ازراه حل اول، بهتروعادی‌تر است. در این‌جا، از ذخیرهٔ بنزین موجود درصندوق‌عقب استفاده‌کرده‌ایم، درحالی‌که درراه حل اول، به‌نیروی بازوی اگون برگ متوسل شدیم.



شکل ۱۳۶

یادداشت ۲. خواننده باید به‌این مطلب توجه‌کرده باشدکه ، درشکل ۱۳۴، از آبـادی‌های مسالهٔ قبل استفاده‌کرده‌ایم. (درواقع، برای رسم این شکل، ازفرض‌های مسالهٔ ۷۹ استفاده شده‌است). بنابراین، راه حل تازه‌ای، برای حل مسالهٔ ۷۹ هم به‌حساب می‌آید. لزومی ندارد‌که، این راه حل را، حتماً با نمودارنشان دهیم. کافی‌است، همان‌عددهای متناظر باراس‌های دندانه (یعنی نقطه‌های شکستگی) را یادداشت کنیم. اگر اتومبیل، حرکت خود را ازآبادی A آغاز کند، آن وقت (باتوجه به‌داده‌های مسالهٔ ۷۹)، مقداربنزین موجود درباك آن، در انتهای هر قطعه راه‌بعدی، به‌این ترتیب خواهد بود (برحسب لیتر):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	A	...
انتهای قطعه راه	۰	۰/۲	۰	-۰/۰۸	۲۷/۹۲	-۰/۱۲	۰/۲۸	۸/۲۸	۰/۶۸	۰	...
آغاز قطعه راه	۱۱	۱۴/۲	۱۱	۳۱/۹۲	۲۸/۹۲	۲۷/۸۸	۲۰/۲۸	۱۰/۲۸	۲۵/۶۸	۱۱	...

(عـددهای منفی به ایـن معناست کـه، بنزین به دست آمـده، کافی نیست و برای ادامـهٔ مسیر، باید از ذخیرهٔ بنزین موجود در صندوق عقب استفاده کرد.)

در قطعه‌ای از راه که بـه F ختم می‌شود، به حداقل می‌رسیم. و از همین‌جاست که، بـرای سیاحت درجـادهٔ دایره‌ای دور منطقهٔ بیابانی، بـاید

آغاز به حرکت‌کنیم.

بخش هفتم

۸۱. روش ساده

می‌توان به‌دستیارتوصیه‌کرد که، هیچ‌دلیلی برای تشویش وجودندارد: درظرف دوم، همان محلولی‌که او لازم دارد، آماده شده است: ۱ لیتر محلول $(p-100)$٪ الکل.

بعد ازهمهٔ انتقال‌ها، در هرظرف ۱ لیترمایع وجود دارد. مقدارالکل خالص موجود در ۲ لیترمایع، همان ۱ لیتری است‌که قبل از مخلوط‌کردن، در یکی از دوظرف وجود داشت، زیرا حجم مجموع مایع‌های دوظرف، بعد ازمخلوط‌کردن، تغییری نمی‌کند. چون درصورت مساله گفته شده است که، یکی از ظرف‌ها، حاوی الکل p٪ است، بنابراین، بقیهٔ الکل، یعنی $(p-100)$ درصد آن، باید در ظرف دیگر باشد. و چون، در ظرف دوم، درست ۱ لیتر مخلوط وجود دارد، به معنای آن است که محلولی از الکل $(p-100)$٪ است.

یادداشت. این استدلال، به ما کمك می‌کند تا بتوانیم بسیاری از مساله‌های مربوط به «درصد» را، که معمولاً به‌عمل‌های زیادی نیاز دارند، به‌سادگی حل کنیم.

مسالهٔ ۸۱، تا جایی‌که ما می‌دانیم، از مسالهٔ دیگری سرچشمه گرفته است‌که روزا پتر، آن را به‌این صورت تنظیم‌کرده است:

«درجامی ۲۰۰ میلی‌لیترشراب و، درجام‌دیگری، همین‌مقدارآب وجود دارد. ازظرف اول، یك‌قاشق شراب برداشتیم وآن را درظرف آب ریختیم؛ آن را خوب به‌هم زدیم، سپس، یك قاشق از مخلوط را (باهمان قاشق اولی وبه‌همان اندازه) برداشتیم وآن را درظرف شراب ریختیم.

آیاشراب موجود درظرف دوم بیشتراست یاآب موجود درظرف‌اول؟»

پاسخ: به‌طور برابر. همان‌قدر آب به ظرف شراب اضافه شده است که شراب درظرف آب ریخته شده است.

۸۲. بعد چه‌باید کرد؟

هـرعملی بی‌فایـده است: ازمخلوط حاصل، به هیچ ترتیبی، نمی‌توان به‌مخلوط موردنظر رسید، مساله جواب ندارد.

درواقع، درظرف دیگر، محلولی وجود دارد کـه، الکل آن، کمتر از ۵۰٪ است (درغیر این‌صورت، مقدار الکل مـوجـود در دوظرف، بیشتر از نصف کل مایع می‌شود، درحالی‌که، طبق‌صورت مساله، مقدارالکل، درست برابر بانصف تمامی مایع است). بنابراین، غلظت الکل، درهیچ‌کدام از دو ظرف، از ۶۰٪ تجاوز نمی‌کند و، درنتیجه، نمی‌توان ازمخلوط‌کردن آن‌ها، محلولی به‌دست آورد که بیش از ۶۰٪ الکل داشته باشد.

این امر، گواه برآن است که، این روش آماده کردن محلول، کامل نیست. دستیار باید بی‌اندازه احتیاط کند، زیرا اگر به‌مقدار زیادی آب را در الکل بریزد (یا برعکس، مقدار زیادی الکل را در آب بریزد)، ممکن است دیگر نتواند اشتباه خود را جبران کند.

۸۳. یك حالت دیگر

اگردرظرفی‌که حاوی مایع‌کمتری است، الکل ۳۸٪ وجود داشته باشد، غلظت الکل در ظرف دیگر، کمتر از ۶۲٪ خواهد بود.

درواقع، فـرض می‌کنیم، ظرف دیگر دارای محلولی باشدکـه غلظت الکل‌آن از۶۲٪ کمترنباشد. ازمایع ظرف دوم، آن‌قدر درظرف اول‌می‌ریزیم که، مقدارمایع هرظرف، درست برابر یك لیتربشود. آن‌وقت، درظرف دوم، محلولی وجود داردکه غلظت الکل آن کمتر از ۶۲٪ نیست، درحالی‌که در ظرف اول، غلظت الکل، از ۳۸٪ بیشتر می‌شود. به‌این ترتیب، مقدارالکل خالص ظرف دوم، دست‌کم، ۶۲۰ میلی‌لیتر والکل خالص ظرف اول، بیشتر

از ۳۸۰ میلی‌لیتر می‌شود، یعنی مقدار الکل خالص، در دوظرف روی هم، از ۱ لیتر تجاوز می‌کند، که ممکن نیست، زیرا بنابر فرض مسالهٔ ۸۱، کل الکل خالص دوظرف، روی‌هم، برابر ۱ لیتر است.

بنابراین، حکمی که‌درابتدای حل‌این‌مساله، باحروف خوابیده‌آوردیم، درست است. این‌نتیجه گیری، به‌معنای‌آن است که، پاسخ مسالهٔ قبل، دراین جا هم به‌قوت خود باقی است، زیرا غلظت الکل هر دو ظرف، کمتر از ۶۳ درصدی است که مساله خواسته است.

۸۴. ازآغاز تا پایان

به‌هیچ ترتیبی: هرچندبار که مایع را ازیك ظرف به‌ظرف دیگر، و برعکس، بریزیم، مقدارالکل‌موجود درظرف دوم، همیشه‌کمتراز ۵۰٪ (و درظرف اول، بیشتر از ۵۰٪) است.

اگر درظرف اول بیش از ۵۰٪ ودر ظرف دوم، کمتر از ۵۰٪ الکل وجود داشته باشد، آن وقت، از هرکدام از دوظرف، مایع محلول را درظرف دیگر بریزیم، بازهم مثل قبل، مایع ظرف اول شامل بیش از ۵۰٪ ومایع ظرف‌دوم، کمتر از ۵۰٪ الکل خواهد داشت.

درواقع، برای ما ممکن نیست که تمامی مایع یك ظرف را ، درظرف دیگر بریزیم، زیرا هیچ‌کدام از دوظرف، گنجایش ۲ لیتر مایع را ندارند.

اگربخشی ازمایع‌ظرف اول‌را، درظرف دوم بریزیم، آن‌وقت، درظرف اول، همان مقداربیشتراز ۵۰٪ الکل را خواهیم داشت (به‌زبان دیگر، مقدار الکل ظرف اول، بیشتر از نصف مایع درون آن را تشکیل می‌دهد). در ظرف دوم هم، مقدار الکل‌کمتر از ۵۰٪ خواهد بود (زیرا، اگر مقدارالکل آن بیش از ۵۰٪ باشد، آن وقت، میزان الکل هر دو ظرف از ۵۰٪ تجاوز می‌کند و، برخلاف فرض مساله، از نصف‌کل مایع‌ها، بیشتر می‌شود).

به‌همین ترتیب، اگربخشی ازمایع ظرف دوم را درظرف اول بریزیم، آن‌وقت، درظرف‌دوم، همان محلول قبلی می‌ماندکه‌کمتر از ۵۰٪ الکل‌دارد؛ ودر ظرف اول هم (با آن‌که تغییرغلظت می‌دهد)، همچنان محلولی باغلظت

بیش از ۵۰٪ درست می‌شود.

به‌این ترتیب، درستی آن چه با حروف خوابیده، در ابتدای حل، نوشته‌ایم، ثابت می‌شود. ازاین جا نتیجه می‌شودکه، اگر درابتدا در ظرف اول، الکل خالص ۱۰۰٪ (یعنی بیش از ۵۰٪) و، درظرف دوم، محلولی با ۰٪ الکل، یعنی آب‌خالص (با الکلی کمتراز ۵۰٪) وجود داشته باشد، هرچند بارکه مایع را از ظرفی به‌ظرف دیگر منتقل‌کنیم (بدون توجه به ردیف این انتقال)، مقدار الکل ظرف اول، همیشه بیشتر، ومقدار الکل ظرف دوم، همیشه‌کمتر از ۵۰٪ باقی‌می‌ماند.

۸۵. اختلاف غلظت

قبل ازجا به جایی مایع‌ها، دریکی از ظرف‌ها (A)، ۲ لیتر از مایع (a)، ودر ظرف دیگر (B)، ۲ لیتر از مایع دیگر (b) وجود دارد. بعد از پایان انتقال مایع‌ها، بازهم درهر ظرف، ۲ لیتر مایع وجود دارد.

برای‌پیداکردن‌جواب، ازروشی‌استفاده می‌کنیم‌که، به‌وسیلهٔ روزا پتر، تنظیم شده است (حل مسالهٔ ۸۱ را ببینید): طرح مساله از هرچند مرحله تشکیل شده باشد، در انتهای کار، همان قدر مایع a از ظرف A به‌ظرف B وارد می‌شودکه، مایع b، ازظرف B به‌ظرف A ریخته شده‌است (زیرا، کمبود هرمایع، تنها به‌کمك مایع دیگر، می‌تواند جبران شود).

دو طرحی که در صورت مساله داده شده است، دارای مرحله‌های یکسانی هستند وتنها تفاوت آن‌ها، دراین است‌که جای ظرف‌های A و B (وهمچنین، مایع‌های a و b)، با یکدیگرعوض می‌شود. بنابراین اگر، طبق طرح اول، درپایان کار، مقداری از مایع a، ازظرف A وارد ظرف B شده باشد، درپایان عمل مربوط به‌طرح دوم هم، همان مقدار از مایع b، ازظرف B به‌ظرف A وارد می‌شود.

با توجه‌به حکمی‌که، دربالا، با حروف خوابیده، آورده‌ایم، می‌توان از اینجا نتیجه گرفت‌که، در هردو حالت، یك مقدار مایع، ازظرفی به‌ظرف دیگر وارد شده است.

به‌این ترتیب، در پایان جابه‌جایی مایع‌ها، محتوی هر ظرف ، در دو طرح مختلف، یکسان ازآب درمی‌آید. بنا براین، اختلاف غلظت مایع‌های حاصل در دوظرف، بستگی به‌این ندارد‌که، کار را، از کدام ظرف آغاز کنیم.

یادداشت ۱. حل این مسأله روشن می‌کند که چگونه می‌توان، با استفادهٔ از یك اندیشهٔ خوب ، خود را از شر عمل‌های مفصل نجات داد. خود اندیشه ، فوق‌العاده ساده است : از فرض‌هایی که در صورت مسأله داده شده است، تنها آن‌هایی را درنظر بگیرید که به‌درد کارشما می‌خورند. این، یکی از نمونه‌های انتزاع است، که اغلب، در ریاضیات، مورداستفاده قرار می‌گیرد.

علاوه‌براین، توانستیم روشن کنیم که، اگر جابه‌جایی مایع‌ها را با طرح بغرنج‌تری هم انجام می‌دادیم، بازهم در نتیجه‌گیری، تغییر به‌وجود نمی‌آمد: تنها شرط این است که، در پایان جابه‌جایی‌ها، در هرظرف ۲ لیتر، مایع وجود داشته باشد.

به‌این نکته هم توجه کنیم که، پرسش مسأله، ممکن است گمراه‌کننده باشد. در ابتدا ممکن است گمان رود که ، گویا، باید مشخص کرد که، کدام‌یك از دو طرح جابه‌جایی مایع‌ها، منجر به‌اختلاف کمتری در غلظت‌ها می‌شود؛ در حالی‌که، بعد از اندکی تفکر، روشن می‌شود که، هردو طرح، ما را به‌یك میزان اختلاف در غلظت‌ها می‌رساند. پرسش مسأله را، می‌شد به‌ترتیب دیگری تنظیم کرد: مثلاً ، درکدام حالت، نسبت فلان مایع، در ظرف اول یا ظرف دوم، بیشتر است و غیره. ما به‌هیچ‌وجه نمی‌خواستیم «شجرهٔ» مسأله را درتمام شاخه‌های‌آن تعقیب کنیم، بلکه تنها می‌خواستیم راه حل ظریفی را به خواننده نشان دهیم که، تاکنون کمتر با آن آشنا بوده‌ایم.

یادداشت ۲. ممکن است ، خواننده‌ای که به‌روش‌های عادی حل مسأله‌های مربوط به «درصد» آشناست ، راه حل حسابی مسألهٔ ۸۵ را پیدا کند. کسی که چنین راهی را برای حل انتخاب می‌کند، نسبت به‌تحقیق نتیجه‌های بینابینی، بی‌علاقه نیست.

جابه‌جایی طبق طرح A

	مقدار مایع به‌لیتر		وزن مایع به‌کیلوگرم		غلظت مایع به‌کیلوگرم بر دسی‌متر مکعب	
	A	B	A	B	A	B
قبل از آغاز جابه‌جایی	۲	۲	۲	۱	۱	۱/۲
بعد ازجابه‌جایی اول	۱	۳	۱	۲	۱	۲/۳
بعد از جابه‌جایی دوم	۳	۱	۷/۳	۲/۳	۷/۹	۲/۳
بعد ازجابه‌جایی سوم	۱	۳	۷/۹	۲۰/۹	۷/۹	۲۰/۲۷
بعد ازجابه‌جایی چهارم	۲	۲	۴۱/۲۷	۴۰/۲۷	۴۱/۵۴	۴۰/۵۴ = ۲۰/۲۷

جابه‌جایی طبق طرح B

	مقدار مایع به لیتر		وزن مایع به‌کیلوگرم		غلظت مایع به‌کیلوگرم بر دسی‌متر مکعب	
	A	B	A	B	A	B
قبل ازآغاز جابه‌جایی	۲	۲	۲	۱	۱	۱/۲
بعد از جابه‌جایی اول	۳	۱	۵/۲	۱/۲	۵/۶	۱/۲
بعد ازجابه‌جایی دوم	۱	۳	۵/۶	۱۳/۶	۵/۶	۱۳/۱۸
بعد ازجابه‌جایی سوم	۳	۱	۴۱/۱۸	۱۳/۱۸	۴۱/۵۴	۱۳/۱۸
بعد از جابه‌جایی چهارم	۲	۲	۴۱/۲۷	۴۰/۲۷	۴۱/۵۴	۴۰/۵۴ = ۲۰/۲۷

نتیجهٔ نهائی هردوطرح یکی است، بنابراین، اختلاف غلظت هم، در دو حالت، یکی می‌شود.

یادداشت ۳. این داده‌ها، به‌ما امکان می‌دهد تا میزان اختلاف غلظت را معین کنیم: این اختلاف، برابر است با $\frac{۱}{۵۴}$ کیلوگرم بردسی‌مترمکعب. اگر در مسأله، مقدار این اختلاف را خواسته بود، نمی‌توانستیم درمحاسبه «صرفه‌جویی» کنیم، ولی خوشبختانه، مسأله، چنین چیزی را ازمانخواسته بود.

یادداشت ۴. ممکن است پیش آید که، خواننده‌ای، به‌جای این‌که مقدارهای دقیق وزن‌ها وغلظت‌های دو مایع را به‌دست آورد، به‌مقدارهای تقریبی آن‌ها، به‌صورت کسرهای دهدهی اکتفا کند (مثلاً، به‌جای $\frac{۵}{۶}$، عدد ۸۳۳ر۰ را به‌دست آورد که، اندکی، از $\frac{۵}{۶}$ کوچکتر است). باچنین‌روشی، ممکن است، نتیجهٔ آخر جابه‌جایی‌ها، یکسان به‌دست نیایند. در این مورد، نباید فراموش کردکه با مقدارهای تقریبی (و نه مقدارهای دقیق) سروکار داریم: از اختلافی‌که بین وزن‌ها یا غلظت‌ها پیش می‌آید، نباید نتیجه گرفت که، درواقع هم، بایکدیگر اختلاف دارند. دوطرح جابه‌جایی، کاملاً ممکن است، به‌دو مقدار تقریبی مختلف، منجر شوند.

بخش هشتم

۸۶. مسابقهٔ‌جام پیروزی

در مسابقهٔ «جشن دوستداران ورزش»، در سال گذشتهٔ ۱۶۵ بازی، و امسال، ۲۱۳ بازی، انجام گرفته است.

محاسبهٔ تعداد بازی‌ها، درست به‌همان صورتی انجام می‌گیرد که، در

صورت مسأله ، شرح داده شده است. این محاسبه را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم و، ضمناً، توجه او را به‌مسألهٔ بعد جلب می‌کنیم.

۸۷. مسابقهٔ جام پیروزی دوم

اگر مسابقه‌ها، با روش المپیك انجام شود و n تیم در مسابقه شرکت کرده باشند، تعداد کل رویارویی‌های دوتیمی، برابر $n-1$ خواهد شد.

[این رابطهٔ سادهٔ بین تعداد تیم‌های شرکت‌کننده و تعداد بازی‌هایی که باید بین تیم‌ها انجام شود، در مثال‌های مسألهٔ قبل هم دیده می‌شود: بین ۲۷ تیم، ۲۶ بازی؛ بین ۱۶۶ تیم، ۱۶۵ بازی و بین ۲۱۴ تیم، ۲۱۳ بازی وجود داشت. ولی قبول کنید که، اگر بخواهیم از روی نتیجه‌های مربوط به‌چند مثال خاص، بدون هیچ استدلالی، این قانون‌مندی را درحالت کلی هم درست بدانیم، در واقع ، خود را به‌خطر انداخته‌ایم. باید، این حدس را ثابت کنیم. استدلال لازم، براساس این نکته بنیان گذاشته شده‌است: براساس تجربه‌ای که روی چند مورد خاص به‌دست آورده‌ایم ، «حدس می‌زنیم» که تعداد بازی‌ها، باید قاعدتاً برابر $n-1$ باشد؛ ضمناً ، تنها ۱ تیم است که برندهٔ جام پیروزی می‌شود و $n-1$ تیم دیگر «حذف» می‌شوند. باید بیندیشیم، آیا بین این دوعدد مساوی ارتباطی وجود ندارد؟]

بعد از هربازی بین دو تیم ، یك تیم کنار می‌رود . بنابراین، تعداد تیم‌هایی که، در جریان تمامی مسابقه، کنار می‌روند، برابر است با تعداد بازی‌ها انجام شده (چون، بنابرفرض مسأله، مسابقه با شیوهٔ المپیك انجام می‌گیرد، یعنی تیمی که یك‌بار شکست بخورد، کنار می‌رود و اجازهٔ شرکت در دورهای بعدی بازی راندارد). به‌جز ۱ تیم (که برندهٔ جام پیروزی‌است) بقیهٔ تیم‌ها، دریکی ازمرحله‌ها،کنار رفته‌اند. به‌این ترتیب، تعداد بازی‌هایی که درجریان مسابقه انجام گرفته است، یك واحد از تعداد تیم‌ها کمتر است.

اگر بخواهیم از اصطلاح‌های ریاضی استفاده کنیم، همین اثبات را می‌توان، به‌صورت زیر، تنظیم کرد:

در هربازی، یکی، و تنها یکی، از تیم‌ها، شکست می‌خورد. یك‌تیم،

وقتی و تنها وقتی، حذف می‌شود که شکست خورده باشد. هربازی بین دو تیم، متناظر با یك شکست است (و بنابراین، تیم شکست خورده، از حق شرکت در دورهای بعدی، محروم می‌شود) و به‌یك تناظر یك‌به‌یك بین دو مجموعه می‌رسیم: یکی، مجموعهٔ بازی‌هایی که بین تیم‌ها انجام می‌شود و، دیگری، مجموعهٔ تیم‌هایی که دچارشکست شده‌اند. بنابراین، تعدادعضوهای یکی از مجموعه‌ها، برابر است با تعداد عضوهای مجموعهٔ دیگر.

یادداشت. حالا متوجه می‌شوید که چرا، در مسألهٔ قبل ، به‌انجام خسته‌کنندهٔ محاسبه‌ها نپرداختیم: در واقع ، مساله را می‌توان، بدون هیچ محاسبه‌ای، حل کرد. این، نمونه‌ای از مسأله‌هایی است که، با وجود ظاهر خشن آن، تنها به‌یك «حیلهٔ لفظی» نیاز دارد تا بتوان، جواب را، بلافاصله ارائه داد.

۸۸. مسابقهٔ جام پیروزی، در شرایط بغرنج‌تر

می‌توان: برای تمام مسابقه، ۲۱۳ بازی انجام می‌گیرد.

حل این مسأله، عبارت است از تکرار کلمه به‌کلمهٔ حل مسألهٔ قبل.

در واقع، محاسبهٔ تعداد کل بازی‌هایی که برای کسب جام پیروزی انجام می‌گیرد، هیچ ربطی به‌این مطلب ندارد که، تیم‌ها، در چه مرحله‌ای باهم بازی کرده‌اند و یا، چند تیم، بدون بازی، به‌مرحلهٔ بعدی راه‌یافته‌اند.

۸۹. کافی‌نبودن تعداد استادیوم‌ها، به‌کجا منجر می‌شود؟

۰۱ از قبل نمی‌توان حکم کرد که ، برای تعداد مفروضی تیم، تعداد مرحله‌ها دریك نوع، بیشتر از تعداد مرحله در نوع دیگر است. ممکن است حالتی وجود داشته باشد که، هم برای انجام مسابقه به‌صورت «عادی» وهم برای انجام مسابقه به‌صورت «غیرعادی»، ضمن تعیین برندهٔ جام پیروزی، به‌تعدادی مساوی مرحله نیاز باشد (البته، تعداد بازی‌های هرمرحله، در دو حالت مسابقهٔ «عادی» و مسابقهٔ «غیرعادی» ، با هم فرق خواهند داشت).

برای این که، به‌درستی این ادعا، اطمینان پیدا کنیم، کافی است به‌یک‌مثال متوسل شویم.

فرض کنید، ۹ تیم، در این یا آن نـوع بازی شرکت داشته باشند. در این‌صورت، مسابقهٔ «عادی» به‌صورت زیر، جریان پیدا می کند:

مرحلهٔ اول: ۹ تیم؛ ۱ تیم، بدون بازی، به‌مرحلهٔ بعدی می‌رود؛ ۴ بازی انجام می گیرد.

مرحلهٔ دوم: ۵ تیم؛ ۱ تیم، بدون بازی، به‌مرحلهٔ بعد راه مـی‌یابد؛ ۲ بازی انجام می‌شود.

مرحلهٔ سوم : ۳ تیم؛ ۱ تیم، بدون انجام مسابقه‌ای، به‌مرحلهٔ بعـد می‌رود؛ ۱ بازی انجام می گیرد.

مرحلهٔ چهارم: ۲ تیم؛ ۱ بازی انجام می‌شود.

ولی، درحالت «غیرعادی»، جریان مسابقه به‌صورت دیگری است:

مرحلهٔ اول : ۹ تیم؛ ۳ تیم، بدون بازی، به‌مرحلهٔ بعد می‌روند؛ ۳ بازی انجام می‌شود.

مرحلهٔ دوم: ۶ تیم؛ ۲ تیم، بـدون انجام بازی ، به‌مرحلـهٔ بعد راه پیدا می کنند؛ ۲ بازی انجام می‌شود.

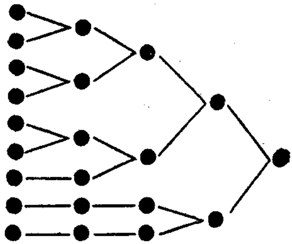
مرحلهٔ سوم: ۴ تیم؛ ۲ بازی.

مرحلهٔ چهارم: ۲ تیم؛ ۱ بازی.

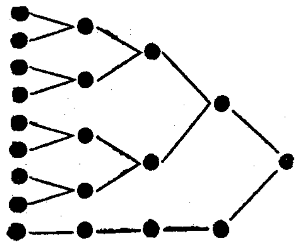
مسیر مسابقه‌ها، در دو حالت «عادی» و «غیرعادی»، در شکل‌های ۱۳۷ و ۱۳۸ نشان داده شده است. در هر دوحالت، تعداد مرحله‌ها، برابر است با ۴، تعداد بازی‌ها درحالت «غیرعادی»، در مرحله‌های دوم و سوم، بیشتر از تعداد بازی‌ها، درحالت «عادی» است.

۲. نه، چنین حالتی پیش نمی‌آید: تعداد تیم‌هایی که، بدون بازی، به‌مرحلهٔ بعد می‌روند، هرقدرباشد، تعداد مرحله‌های انجام‌مسابقه، نمی‌تواند کمتر از تعداد مرحله‌ها در حالت «عادی» باشد، یعنی وقتی‌که، حـداکثر، ۱ تیم می‌تواند بدون بازی، به‌مرحلهٔ بعدی راه یابد.

این حکم، به‌صورتی‌که در ابتدا به‌نظر می‌رسد، چندان ساده نیست.



شکل ۱۳۸



شکل ۱۳۷

بخش اول مسأله را، بیشتر تجزیه و تحلیل مـی کنیم. چگونه ممکن است، درحالتی که ازهرمرحله تعداد تیم‌های بیشتری می‌توانند بـدون انجام بازی به‌مرحلهٔ بعدی بروند، تعدادمرحله‌ها افزایش‌نیابد؟ همان‌طور که، هم‌اکنون، دیدیم، گاهی در مرحله‌های آخر، حتی یك تیم وجود ندارد که بدون انجام بازی به‌مرحلهٔ بعدی راه‌یابد؛ یعنی، هرچه به‌بازی نهائی‌نزدیك‌تر می‌شویم، تعداد تیم‌های شرکت‌کننده، با سرعت بیشتری، کاهش می‌یابد.

ولی ، دست کم در مرحله‌های نخست ، تیم‌هایی وجـود دارند کـه می‌توانند، بدون انجام بازی، از مرحله‌ای به‌مرحلهٔ دیگر بروند. آیاممکن است وضعی پیش آیدکه، این‌گونه تیم‌ها، در مرحله‌های بعدی باهم روبه‌رو نشوند و، درنتیجه، آهنگ «حذف» تیم‌های شکست خورده، چنان افـزایش یابدکه مسابقه سریع‌تر از حالت عادی (که درآن، به‌علت فردبودن تعـداد تیم‌هـای شرکت‌کننده، تنها یك تیم می‌تواند، بدون بازی، در تمامی جریان مسابقه، به‌مرحلهٔ بالاتر برود)، به‌پایان برسد؟

با حسابی ساده، می‌توان به‌این پرسش پاسخ داد. سعی می‌کنیم، تـا آن‌جا کـه ممکن است ، آهنگ مسابقهٔ «عادی» را کنـد می‌کنیم و آهنگ مسابقهٔ «غیرعادی» را شتاب می‌دهیم. اگر «فیلم رویدادها را در زمانی که مسابقه انجام می‌شود، از آخر به‌اول، بچرخانیم» ، مسألهٔ ما تا حد زیادی ساده‌تر می‌شود.

ابتدا روشن‌می‌کنیم که، تاچه‌حد می‌توان به‌جریان‌مسابقهٔ «غیرعادی» سرعت بخشید، در حالی‌که مجاز هستیم، از هرمرحله، هرچند گروه دلخواه را

بدون بازی، به‌گروه بالاتر ببریم؟ روشن است که، تعداد تیم‌هایی که در هر مرحله بازی خود را انجام می‌دهند، نمی‌تواند بیش از دوبرابر تعداد تیم‌هایی باشد که به‌مرحلهٔ بالاتر رفته‌اند. این وضع، به‌ما امکان می‌دهد تا حداکثر تعداد تیم‌هایی که می‌توانند در بازی‌های چند مرحلهٔ آخر شرکت داشته باشند، ارزیابی کنیم:

از مرحلهٔ آخر بازی‌ها، ۱ تیم قهرمان بیرون می‌آید،
درمرحلهٔ آخر، تعداد تیم‌ها، از ۲ تجاوز نمی‌کند،
در مرحلهٔ قبل از آن، تعداد تیم‌ها از ۴ تجاوز نمی‌کند،
بازهم یك مرحلهٔ قبل، تعداد تیم‌ها از ۸ تجاوز نمی‌کند،
در مرحلهٔ بازهم قبل‌تر، تعداد تیم‌ها بیشتر از ۱۶ نیست،
در مرحلهٔ قبل از آن، تعداد تیم‌ها بیشتر از ۳۲ نیست،
درمرحلهٔ بازهم قبل ازآن، تعداد تیم‌ها از ۶۴ تجاوز نمی‌کند.

اکنون روشن می‌کنیم که، چگونه می‌توان جریان مسابقهٔ «عادی» راکندکرد؟ حداقل تعداد تیم‌هایی که، دربازی‌های چند مرحلهٔ آخر، می‌توانند شرکت داشته باشند، چنین است:

از آخرین مرحلهٔ بازی‌ها ۱ تیم قهرمان بیرون می‌آید،
از یك مرحلهٔ قبل از آن، کمتر از ۲ تیم بالا نمی‌آید،
از مرحلهٔ قبل‌تر، کمتر از ۳ تیم به‌مرحلهٔ بالاتر نمی‌رود،
از یك مرحلهٔ قبل‌تر، دست‌کم ۵ تیم بالا می‌آید،
ازمرحلهٔ بازهم قبل ازآن، حداقل ۹ تیم به‌بالا راه می‌یابد،
از مرحلهٔ قبل ازآن دست‌کم ۱۷ تیم به‌مرحلهٔ بعد می‌رود،
و بازهم از مرحلهٔ قبل‌تر، حداقل ۳۳ تیم بالا می‌رود.

جدول صفحهٔ بعد را تشکیل می‌دهیم.

می‌بینیم که، با اضافه‌شدن تعداد مرحله‌ها، عددهای ستون وسط، با سرعت بیشتری نسبت به‌عددهای ستون سمت چپ، بزرگ می‌شوند، ولی هرگز، عددستون وسط، ازعدد ردیف بعدی ستون سمت چپ تجاوزنمی‌کند.

به‌این‌ترتیب، اگر مسابقه در k مرحله انجام شده باشد و، درهرمرحله،

حداقل تعداد تیم‌هایی که می‌توانند درمسابقهٔ «عادی» شرکت کنند	حداکثر تعداد تیم‌هایی که‌درمسابقهٔ «غیرعادی» شرکت دارند	ردیف مرحله‌ها از آخر به‌اول
۱	۱	۰
۲	۲	۱
۳	۴	۲
۵	۸	۳
۹	۱۶	۴
۱۷	۳۲	۵
۳۳	۶۴	۶
...	...	...
ظاهراً $\left\{ ۲^{k-۱}+۱ \right.$	ظاهراً $\left\{ ۲^{k} \right.$	k
$۲^{k}+۱$	$۲^{k+۱}$	$k+۱$
...	...	...

تعداد دلخواهی از تیم‌ها، بدون انجام بازی، به‌مرحلهٔ بعد رفته باشند، هرگز تعداد تیم‌های شرکت‌کننده از ۲^k تجاوز نمی‌کند.

اگر تعداد مرحله‌ها را، در مسابقهٔ «عادی» به‌شیوهٔ المپیك، یك واحد بیشتر (یعنی برابر $k+۱$) بگیریم، آن‌وقت دست‌کم $۲^k+۱$ تیم درآن‌شرکت کرده‌اند، یعنی تعداد تیم‌ها، در این حالت، یك واحد بیشتر از حالتی است که مسابقهٔ «غیرعادی» در k مرحله به‌پایان می‌رسید. به‌زبان دیگر، اگر تعداد مرحله‌ها در مسابقهٔ «عادی» بیشتر از تعداد مرحله ها در مسابقهٔ «غیرعادی» باشد، آن‌وقت باید تعدادتیم‌های شرکت‌کننده درمسابقهٔ «عادی»

هم بیشتر باشند. این نتیجه‌گیری به‌معنای آن است که: اگر تعداد تیم‌های شرکت‌کننده در دومسابقهٔ «عادی» و «غیرعادی» برابرباشند، مسابقهٔ «عادی» نمی‌تواند در مرحله‌های زیادتری به‌پایان برسد.

ولی، هنوز باید دو رابطه‌ای را که از یك طرف، بین تعداد مرحله و حداکثر تعداد تیم‌های شرکت‌کننده در مسابقهٔ غیرعادی و، از طرف دیگر، بین تعداد مرحله‌ها و حداقل تعداد تیم‌های شرکت کننده در مسابقهٔ عادی، درجدول فوق در نظرگرفتیم، ثابت‌کنیم (به‌همین جهت، در جدول، درکنار جواب‌های کلی در ستون‌های وسط و سمت چپ، نوشته‌ایم : ظاهراً).

اگر a_k، حداکثر تعداد تیم‌هایی باشد که، در k مرحلـه، در مسابقهٔ غیرعادی‌شرکت داشته‌اند،آن‌وقت داریم: $a_{k+1} = 2a_k$، زیرا درمسابقه‌ای که با شیوهٔ غیرعادی انجام شود، تعداد تیم‌های مرحلهٔ قبلی، نمی‌تواند از ۲ برابر تعداد تیم‌های مرحلهٔ بعد از خود تجاوز کند (ولی، ۲ برابـر آن ، می‌تواند باشد).

در مسابقه‌ای که تنها یك مرحله داشته باشد، ۲ تیم شرکت دارند؛ وقتی که تعداد مرحله‌ها ، یك واحد زیادتر شود، تعـداد تیم‌ها، حداکثر ۲ برابر می‌شود. بنابراین داریم:

$$a_1 = 2, a_2 = 2 \times 2 = {}^{2}, a_3 = 2^2 \times 2 = 2^3, a^4 = 2^3 \times 2 = 2^4, \ldots$$

تعداد مرحله‌ها، برابر است با نمای عدد ۲:

$$a_k = 2^k \text{،} a_{k+1} = 2^k \times 2 = 2^{k+1}$$

اکنون فرض می‌کنیم، b_k حداقل تعداد تیم‌هایی باشد کـه می‌توانند در مسابقهٔ k مـرحله‌ای از مسابقه عـادی بـه شیوه المپیك شرکت کنند. تعداد تیم‌هایی‌که در یك مرحله، از این مسابقه شرکت می‌کنند، بیشتر از ۲ برابر تعداد تیم‌های مرحلهٔ بعدی نیست. اگر ۱ تیم، بدون بازی، به‌مرحلهٔ بعدی رفته باشد، آن‌وقت، نسبت تعداد تیم‌های شرکت‌کننده درآن مرحله، برتعداد تیم‌های شرکت‌کننده در مرحله بعدی، کوچکتر از ۲ می‌شود، زیرا تیمی‌که بدون بازی به‌مرحلهٔ بعدی رفته است، ضریب ۲ ندارد. از آن‌جا

که در مسابقهٔ عادی ، تنها ۱ تیم ممکن است بدون بازی به‌مرحلهٔ بعدی راه‌پیدا کند، بنابراین حداقل تعداد تیم‌هایی که ممکن است درمرحلهٔ $(k+1)$ام شرکت کرده باشند، برابر است با $2b_k-1$. (وقتی که b_k را ۲ برابر کنیم، در واقع، تیمی را هم که بدون بازی به‌مرحله بعدی رفته است، ۲ برابر کرده‌ایم، بنابراین، باید عدد ۱ را از $2b_k$ کم کنیم.) به‌این ترتیب

$$b_1=2,$$

$$b_2=2\times 2-1=2+2-1=2+1,$$

$$b_3=2(2+1)-1=2^2+2-1=2^2+1,$$

$$b_4=2(2^2+1)-1=2^3+2-1=2^3+1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$b_k=2^{k-1}+1,$$

$$b_{k+1}=2(2^{k-1}+1)-1=2^k+2-1=2^k+1$$

۹۵. یك مرحله

اگر k تیم، به‌این مرحله رسیده‌باشند ، تعداد بازی‌هایی‌که ، درآن ، انجام می‌شود، برابر است با $\left[\frac{k}{2}\right]$.

عدد k، ممکن است زوج یا فرد باشد. در حالت اول (وقتی‌که k ، عددی زوج است)، می‌توان آن‌را به‌صورت $k=2l$ نشان‌داد، که درآن ، l عددی است درست (اگر l را دوبرابر کنیم، k به‌دست می‌آید)؛ درحالت دوم (وقتی‌که k، عددی است فرد)، می‌توان آن‌را به‌صورت $k=2l+1$ نوشت (اگر عدد درست l را دوبرابر کنیم و، سپس، ۱ واحد به‌حاصل‌ضرب اضافه کنیم، عدد k به‌دست می‌آید).

۱. اگر داشته‌باشیم: $k=2l$، آن‌وقت، تعدادبازی‌ها دراین‌مرحله، برابر است با l. دستور بالاهم، به‌همین نتیجه می‌رسد:

$$\left[\frac{k}{۲}\right]=\left[\frac{۲l}{۲}\right]=[l]=l$$

۲. اگر داشته‌باشیم $k=۲l+۱$ ، آن‌وقت ، ۱ تیم بدون‌بازی به‌مرحلهٔ بعدی می‌رود و تعداد بازی‌های این‌مرحله ، برابر l می‌شود. در این‌حالت هم، دستور ما، به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسد:

$$\left[\frac{k}{۲}\right]=\left[\frac{۲l+۱}{۲}\right]=\left[l+\frac{۱}{۲}\right]=l$$

۹۱. بعد از مرحلهٔ مفروض

اگر در مرحلهٔ مفروض، k تیم شرکت داشته‌باشند، آن‌وقت $\left[\frac{k+۱}{۲}\right]$ تیم ، حق بازی درمرحلهٔ بعدی را به‌دست می‌آورند. دوحالت را در نظر می‌گیریم: حالتی‌که k عددی زوج وحالتی‌که k عددی فرد است.

۱. $k=۲l$. دراین‌حالت درمرحلهٔ مفروض، l بازی انجام‌می‌گیرد، l تیم شکست می‌خورد و l تیم حق شرکت در مرحلهٔ بعدی‌را پیدا می‌کند. دستور ما هم، به‌همین نتیجه می‌رسد:

$$\left[\frac{k+۱}{۲}\right]=\left[\frac{۲l+۱}{۲}\right]=\left[l+\frac{۱}{۲}\right]=l$$

۲. $k=۲l+۱$. در این حالت ، ۱ تیم بدون بازی به‌مرحلهٔ بعد می‌رود ، l تیم شکست می‌خورد و $l+۱$ تیم حق شرکت در مرحلهٔ بعد را به‌دست می‌آورد. دستور ما هم، به‌همین نتیجه می‌رسد:

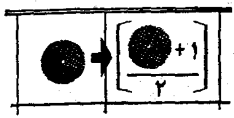
$$\left[\frac{k+۱}{۲}\right]=\left[\frac{۲l+۱+۱}{۲}\right]=\left[\frac{۲l+۲}{۲}\right]=[l+۱]=l+۱$$

۹۲. از مرحله‌ای به‌مرحله‌ای

دستورهایی‌که در حل مسأله‌های ۹۰ و۹۱ آوردیم، به‌سادگی،امکان

ردیف مرحله‌ها	۱	۲	۳	۴
تعداد تیم‌های شرکت‌کننده در مرحله	n	$\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$	$\left[\frac{\left[\frac{n+۱}{۲}\right]+۱}{۲}\right]$	$\left[\frac{\left[\frac{\left[\frac{n+۱}{۲}\right]+۱}{۲}\right]+۱}{۲}\right]$
تعداد بازی‌های انجام شده درگروه	$\left[\frac{n}{۲}\right]$	$\left[\frac{\left[\frac{n+۱}{۲}\right]}{۲}\right]$	$\left[\frac{\left[\frac{\left[\left[\frac{n+۱}{۲}\right]+۱\right]}{۲}\right]}{۲}\right]$	$\left[\frac{\left[\frac{\left[\frac{\left[\frac{n+۱}{۲}\right]+۱}{۲}\right]+۱}{۲}\right]}{۲}\right]$

فهم تمامی جدول را به‌ما می‌دهند. می‌بینیم‌که، بعد از انجام بازی‌های یك‌مرحله، از k تیم، $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ تیم باقی می‌ماند، یعنی، برای پیداکردن تعداد تیم‌هایی‌که حق شرکت در مرحلهٔ بعدی را دارند، باید به‌تعدادتیم‌های گروه مفروض یك‌واحد اضافه و مجموع‌را بر ۲ تقسیم‌کرد، سپس، مقداردرست خارج قسمت را به‌دست آورد. به‌این‌ترتیب، برای به‌دست‌آوردن هرعددی که درسطربالای‌جدول قراردارد، بایدعدد سمت‌چپ‌آن‌را انتخاب وبه‌صورتی که در شکل ۱۳۹ نشان داده شده است، عمل کرد.



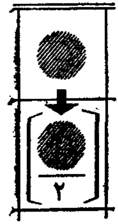
شکل۱۳۹

تعداد بازی‌هایی‌که در هرمرحله انجام می‌شود، از دستور حل مسألهٔ ۹۰ به‌دست‌می‌آید: وقتی‌که k تیم درمرحله‌ای شرکت داشته باشند، $\left[\frac{k}{2}\right]$ بازی انجام خواهد شد. بنابراین، برای پیداکردن تعداد بازی‌ها، باید تعداد تیم‌های مرحلهٔ متناظر را درنظرگرفت، آن‌را بر۲ تقسیم‌کرد و، سپس، مقدار درست خارج قسمت حاصل را به‌دست آورد. به‌این‌ترتیب، برای به‌دست‌آوردن هریك از عددهای سطر دوم جدول، باید عدد ردیف‌آن در سطر بالا را انتخاب، و به‌صورتی‌که در شکل ۱۴۰ نشان داده شده است، عمل کرد.

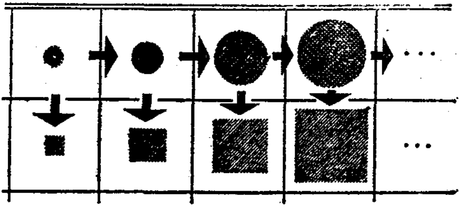
همین‌که نخستین عدد سطر بالا از جدول (یعنی، عدد سمت‌چپ‌وبالا) معلوم باشد، می‌توان عددهای جدول را، تا هرجاکه لازم باشد، ادامه داد (شکل ۱۴۱).

یادداشت. آیا استدلال اخیر درست است؟ اگرجدول را به‌اندازهٔ‌کافی ادامه دهیم، دیر یا زود، به‌آخرین مرحلهٔ ممکن می‌رسیم.

از این مسأله، نباید نگران شد. جدول را می‌توان به‌طرف راست،



شکل ۱۴۰

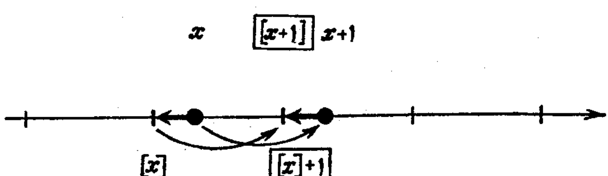


شکل ۱۴۱

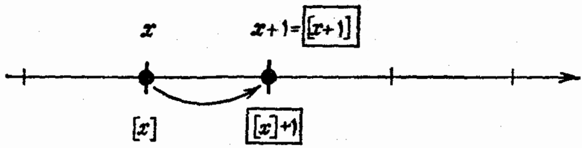
تا هرجا که مایل باشیم، ادامه‌داد؛ روشی را که در بالا از آن یادکردیم، می‌توان به‌طور مکانیکی ادامه داد و خود را به‌هرمرحله‌ای ، باهر شمارهٔ ردیفی، رساند. این امکان از این بابت هم مفید است که، جدول، باید بتواند برای هرمسابقه‌ای، با هرتعداد مرحله، کاربرد داشته‌باشد. وقتی‌که با یك مسابقهٔ مشخص سروکار داشته‌باشیم ، به‌ردیفی از مرحله‌ها خواهیم رسید که، ازآن‌جا به‌بعد، هردو دستور (هم برای تعداد تیم‌ها و هم برای تعداد بازی‌های هرمرحله)، برابر صفر می‌شود (به‌این‌مناسبت، بخشی ازحل‌مسألهٔ ۹۴ را، که در داخل‌کروشه قراردارد ـ بخش‌آخر حل ـ ببینید).

۹۳. دواتحاد

۱. این اتحاد، تقریباً روشن است. بنابرتعریف، بخش درست عدد x، عبارت است از بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نمی‌کند. وقتی، یك واحد به‌عدد x اضافه شود، به $[x]$ هم، یك‌واحد اضافه می‌شود (شکل‌های ۱۴۲ و ۱۴۳).



شکل ۱۴۲



شکل ۱۴۳

ولی، این اتحادرا، می‌توان به‌طوردقیق‌تر، به‌صورت زیر، ثابت کرد.
فرض کنید

$$[x]=m \qquad (1)$$

این برابری به‌معنای آن است که داریم:

$$m\leqslant x<m+1 \qquad (2)$$

که درآن، m، عددی‌است درست. به‌همهٔ جمله‌های نابرابری(۲)، ۱ واحد اضافه می‌کنیم:

$$m+1\leqslant x+1<m+2 \qquad (3)$$

و چون، $m+1$، عددی است درست، بنابراین، داریم:

$$[x+1]=m+1$$

بالاخره، با استفاده از (۱)، برابری اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$[x+1]=[x]+1$$

به‌این‌ترتیب، اتحاد اول ثابت می‌شود.

۲. ۴ حالت را ، جدا از هم، مورد بررسی قرار می‌دهیم: حالتی که t بر۴ بخش‌پذیرباشد وحالت‌هایی که درتقسیم t بر۴، به‌یکی ازباقی‌مانده‌های ۱، ۲ یا ۳ برسیم.

a) $t=4l$، در این‌صورت

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[\frac{۴l}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{[۲l]}{۲}\right]=\left[\frac{۲l}{۲}\right]=[l]=l،$$

$$\left[\frac{t}{۴}\right]=\left[\frac{۴l}{۴}\right]=[l]=l$$

هردوطرف اتحاد، به‌یك مقدار منجر می‌شود، بنابراین، دراین‌حالت، اتحاد مفروض درست است.

b) $t=۴l+۱$، در این‌صورت

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[\frac{۴l+۱}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[۲l+\frac{۱}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{۲l}{۲}\right]=[l]=l،$$

$$\left[\frac{t}{۴}\right]=\left[\frac{۴l+۱}{۴}\right]=\left[l+\frac{۱}{۴}\right]=l$$

در این حالت هم، اتحاد برقرار است.

c) $t=۴l+۲$، در این‌صورت

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[\frac{۴l+۲}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{۲l+۱}{۲}\right]=\left[l+\frac{۱}{۲}\right]=l$$

$$\left[\frac{t}{۴}\right]=\left[\frac{۴l+۲}{۴}\right]=\left[l+\frac{۱}{۲}\right]=l$$

در این حالت هم، دوطرف اتحاد به‌یك مقدار منجر می‌شود.

d) $t=۴l+۳$، در این‌صورت

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[\frac{۴l+۳}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[۲l+۱+\frac{۱}{۲}\right]}{۲}\right]=$$

$$=\left[\frac{۲l+۱}{۲}\right]=\left[l+\frac{۱}{۲}\right]=l$$

$$\left[\frac{t}{۴}\right]=\left[\frac{۴l+۳}{۴}\right]=\left[l+\frac{۳}{۴}\right]=l$$

درستی اتحاد، دراین حالت هم ثابت شد.

به‌جای ۴ حالت‌جداگانه، می‌توانستیم ازیك حالت‌کلی استفاده‌کنیم.

هر عدد t، بین دو عدد مضرب ۴ قرار دارد:

$$۴l\leqslant t<۴l+۴$$

یعنی می‌توان آن را به‌صورت $t=۴l+r$ نوشت، که درآن، r عددی است درست و $۰\leqslant r<۴$.

بنابراین

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[\frac{۴l+r}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[۲l+\frac{r}{۲}\right]}{۲}\right]=$$

$$=\left[\frac{[۲l+r']}{۲}\right]=\left[l+\frac{r'}{۲}\right]=l,$$

درواقع، چون داریم: $۰\leqslant\frac{r}{۲}<۲$، بنابراین

$$۲l\leqslant\left[۲l+\frac{r}{۲}\right]<۲l+۲$$

و عدد $\left[۲l+\frac{r}{۲}\right]$ را می‌توان این‌طورنوشت:

$$\left[۲l+\frac{r}{۲}\right]=۲l+r'$$

که درآن $۰\leqslant r'<۲$ و بنابراین

$$\circ \leqslant \frac{r'}{۲} < ۱$$

از طرف دیگر

$$\left[\frac{t}{۴}\right] = \left[\frac{۴l+r}{۴}\right] = \left[l + \frac{r}{۴}\right] + l$$

زیرا داریم:

$$\circ \leqslant \frac{l}{۴} < ۱$$

یادداشت. در استدلال اخیر، جایی از درست بودن عدد t، استفاده نکردیم، بنابراین، اتحاد دوم، برای هرعددی درست است.

۹۴. مساله‌ای از المپیاد

اگر توجه کنیم که i امین جملهٔ این مجموع، عبارت است از تعداد بازی‌ها در i امین مرحله از مسابقه‌ای که دارای n تیم شرکت‌کننده است و به‌شیوهٔ عادی المپیك انجام شده است ، مقدار مجموع بدون هیچ زحمتی به‌دست می‌آید. مجموع، برابر است با تعداد بازی‌هایی که در تمام طول مسابقه، انجام گرفته است.

در واقع، به کمك اتحادهای مسألهٔ ۹۳ ، می‌توان، جدولی را که در حل مسالهٔ ۹۲ تنظیم شده بود، ساده کرد. بهتر آن است، جدول را دوباره با ترکیب روندی که در مسالهٔ ۹۲ شرح دادیم (شکل‌های ۱۳۹، ۱۴۰ و ۱۴۱) و نتیجه‌های حاصل از حل مساله‌های ۹۰ و ۹۱، تنظیم کنیم:

ردیف مرحله‌ها	۱	۲
تعداد تیم‌های شرکت‌کننده در مرحله	n	$\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$
تعداد بازی‌هایی که، در مرحله، انجام می‌شود	$\left[\frac{n}{۲}\right]$	$\left[\frac{\left[\frac{n+۱}{۲}\right]}{۲}\right] = \left[\frac{n+۱}{۴}\right]$

برای پرکردن خانهٔ آخر (گوشهٔ پایین سمت راست)، از اتحـاد دوم مسألهٔ ۹۳ استفاده کرده‌ایم:

$$\left[\frac{\left[\frac{t}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{t}{۴}\right]$$

جدول را ادامه می‌دهیم:

ردیف مرحله‌ها	۲	۳
تعداد تیم‌ها	$\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$	$\left[\frac{\left[\frac{n+۱}{۲}\right]+۱}{۲}\right]=\left[\frac{\left[\frac{n+۱}{۲}+۱\right]}{۲}\right]=$ $=\left[\frac{\left[\frac{n+۳}{۲}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{n+۳}{۴}\right]$

در این‌جا، ابتدا از اتحاد اول مسألهٔ ۹۳، استفاده کرده‌ایم:

$$[x]+۱=[x+۱]$$

سپس، صورت کسر را، با استفاده از اتحاد دوم همان مساله تغییر دادیم.

شمارهٔ مرحله	۳
تعداد تیم‌ها	$\left[\frac{n+۳}{۴}\right]$
تعداد بازی‌ها	$\left[\frac{\left[\frac{n+۳}{۴}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{n+۳}{۸}\right]$

در این‌جا هم، دوباره، از اتحاد دوم مسالهٔ ۹۳ استفاده کردیم.

به‌همین ترتیب، به‌مرحلهٔ چهارم می‌پردازیم:

شمارهٔ مرحله	۳	۴
تعداد تیم‌ها	$\left[\frac{n+۳}{۴}\right]$	$\left[\frac{\left[\frac{n+۳}{۴}\right]+۱}{۲}\right]=\left[\frac{\left[\frac{n+۳}{۴}+۱\right]}{۲}\right]=\left[\frac{\left[\frac{n+۷}{۴}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{n+۷}{۸}\right]$
تعداد بازی‌ها		$\left[\frac{\left[\frac{n+۷}{۸}\right]}{۲}\right]=\left[\frac{n+۷}{۱۶}\right]$

از همین مقدار محاسبه، می‌توان، حالت کلی را حدس زد. این حالت کلی، براساس داوری نسبت به‌چهار مرحله، باید چنین باشد:

شمارهٔ مرحله	k
تعداد تیم‌ها	$\left[\frac{n+۲^{k-۱}-۱}{۲^{k-۱}}\right]$
تعداد بازی‌ها	$\left[\frac{n+۲^{k-۱}-۱}{۲^{k}}\right]$

در دستور مربوط به‌تعداد تیم‌ها، توان عدد ۲، چه درصورت وچه در مخرج کسر، یك واحد از شمارهٔ مرحله، کمتر است؛ ولی در دستور مربوط

شمارهٔ مرحله	k	$k+1$
تعداد تیم‌ها	$\left[\dfrac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}}\right]$	$\left[\dfrac{\left[\dfrac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}}\right]+1}{2}\right]=\left[\dfrac{\dfrac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}}+1}{2}\right]=$ $=\left[\dfrac{\left[\dfrac{n+2\times 2^{k-1}-1}{2^{k-1}}\right]}{2}\right]=\left[\dfrac{n+2^{k}-1}{2^{k}}\right]$
تعداد بازی‌ها		$\left[\dfrac{\left[\dfrac{n+2^{k}-1}{2^{k}}\right]}{2}\right]=\left[\dfrac{n+2^{k}-1}{2^{k+1}}\right]$

به‌تعداد بازی‌ها، توان ۲ درمخرج، برابر با شمارهٔ مرحله است.

همین قـانون مندی، برای ردیف بعدی مرحله‌ها هم، برقـرار است: (جدول صفحهٔ ۳۷۱ را ببیند).

به‌این‌ترتیب، هرجمله ازمجموعی که مقدار آن‌را باید به‌دست‌آوریم، برابر است با تعداد بازی‌هایی که در یکی از مرحله‌های مسابقه ، با n تیم شرکت‌کننده، جریان دارد. بنابراین، مقدار این مجموع برابر است با تعداد کل بازی‌هایی که در این مسابقه انجـام می‌شود، یعنی $n-۱$ (حل مسألهٔ ۸۶ را ببینید).

[دراستدلال فوق، نقص کوچکی وجوددارد. ثابت کردیم که، جمله‌های مجموع مورد نظر مـا ، به‌ترتیب ، بـا تعداد بـازی‌هایی که در مرحله‌های متوالی یك‌مسابقه ، کـه n تیم درآن شرکت دارد وبه‌شیوهٔ عادی المپیك انجام می‌شود، برابرند. مسابقه، بعدازتعداد معینی مرحله، به‌پایان‌می‌رسد. تعداد بازی‌ها، درآخرین مرحله، برابر است با ۱.

بعد چه بایدکرد؟ بعد از پایان مسابقه، دیگر مرحله‌ای وجود ندارد تا بازی انجام شود، بنابراین، بی‌معنی است بگوییم که، جمله‌ها، بـا تعداد بازی‌هـایی که اصلاً انجام نمی‌شوند، برابر است. اگر «شانس» بیاوریم ، چنین جمله‌هایی برابر صفر می‌شوند؛ ولی این‌مطلب، نیـاز به اثبات دارد. جملهٔ عمومی دنبالهٔ تعداد بـازی‌هـا در مرحله‌های مختلف را ، به صورت دیگری می‌نویسیم:

$$\left[\frac{n+۲^{k-۱}-۱}{۲^{k-۱}}\right]=\left[\frac{n-۱}{۲^{k-۱}}+\frac{۲^{k-۱}}{۲^{k-۱}}\right]=\left[\frac{n-۱}{۲^{k-۱}}+۱\right]$$

می‌بینیم که، با بزرگ‌شدن k، تنها مخرج کسر بزرگ می‌شود و، بنابراین، مقدار عبارت داخل کروشه،روبه کاهش می‌رود. اگر، به‌ازای مقداری از k، مقدار این‌عبارت برابر ۱ شود (یعنی، به‌آخرین مرحله برسیم)، آن‌وقت

$$\frac{n-۱}{۲^{k-۱}}+۱<۲$$

$$\frac{n-۱}{۲^{k-۱}}<۱$$

اکنون، kامین جملهٔ مجموع مورد نظر را، به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^k}\right]=\left[\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}\right]$$

وقتی‌که k متناظر باآخرین مرحله باشد، این‌نابرابری برقرار است:

$$\frac{n-1}{2^{k-1}}<1$$

بنابراین

$$\frac{n-1}{2^k}<\frac{1}{2},$$

$$\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}<1$$

وچون با عددهای مثبت سروکار داریم، بنابراین

$$\left[\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}\right]=0$$

هرچه k بزرگترشود، مقدارعبارت‌داخل کروشه، که همیشه‌مثبت‌باقی‌می‌ماند، کوچکتر می‌شود. بنابراین، با آغاز ازآن، همهٔ جمله‌های مجموع، برابر صفر می‌شوند.

(ازهمین‌جا روشن‌می‌شودکه، چرا این‌مجموع‌را می‌توان به‌صورت‌های مختلفی داد. مجموع، در جملهٔ زیر، قطع می‌شود:

$$\cdots+\left[\frac{n+2^{k-1}-1}{2^k}\right]+\cdots$$

برای این پرسش‌که، مجموع را تاکجا باید ادامه داد، پاسخ مشخصی وجود ندارد، چراکه ممکن است با حالت‌های کاملاً متفاوتی سروکار داشته‌باشیم. مجموع را می‌توان تا جمله بیستم یا پنجاهم یا پنج‌ملیونیوم ویا هرجملهٔ دیگری، وحتی تا بی‌نهایت، ادامه‌داد. همان‌طورکه قانع‌شدیم،

جواب مسأله، درهمۀا ین‌حالت‌ها یکی است، زیرا، از جمله‌ای به‌بعد، همه جمله‌ها برابر صفر می‌شوند.)

نگاهی به‌عقب

فرض کنیم، کسی که می‌خواهد مسأله ۸۷ را حل کند، به‌این فکر بیفتد که تعداد بازی‌های مرحله‌های جداگانه را محاسبه کند . اگر کمی ریاضیات بداند ، بـا مفهوم «بخش درست عدد» آشنا باشد و برخی از ویژگی‌هـای «بخش درست» را بداند (مسأله ۹۳)، به‌راحتی می‌تواند از عهدۀ حل‌مسأله برآید. آن‌وقت، ضمن برخورد با مسأله المپیاد، احتمالاً بتواند ، در چهرۀ جمله‌های جداگانه مجموع ، «آشناهـای قبلی» را تشخیص دهد ، اگرچه ، این امر، آن‌قدرها هم، ساده نیست. سادگی نتیجه‌گیری‌های حل مسأله ۸۷ وعینی‌بودن آن‌هـا ، به‌خصوص برای مقایسه بـا مسألۀ المپیاد، که به‌طور انتزاعی طرح شده است، می‌تواند بسیار مفید باشد.

ولی فرض کنیم، کسی بخواهد مجموع نامتناهی زیر را محاسبه کند:

$$\left[\frac{n}{۲}\right]+\left[\frac{n+۱}{۴}\right]+\left[\frac{n+۳}{۸}\right]+\left[\frac{n+۷}{۱۶}\right]+\dots+$$

$$+\left[\frac{n+۲^{k-۱}-۱}{۲^k}\right]+\dots$$

این‌مجموع را ، می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n+۲^{k-۱}-۱}{۲^k}\right]$$

همۀ جمله‌هـا را می‌توان به‌طور مکانیکی نوشت و ، سپس ، محاسبۀ مجموع را بـا کامپیوتر به‌دست‌آورد . به‌کمك کامپیوتر ، می‌توان دروقت صرفه‌جویی کـرد ، ولی گاهی، یك اندیشۀ خلاق، می‌تواند، حتی بیشتر از کامپیوتر، در وقت صرفه‌جویی کند. در زمان ما، که کاربرد کامپیوتر بسیار وسیع شده است، کار ریاضی‌دان‌را، درست ازهمین دیدگاه، باید ارزیابی کرد.

۹۵.

دست‌کم در یکی از واژه‌های (۱) و (۲)، حرف اول، با حرف اول، واژهٔ مجهول تطبیق نمی‌کند (زیرا، واژه‌های (۱) و (۲)، با حرف‌های متفاوتی‌آغاز می‌شوند). ولی هریك از این واژه‌ها، تنها در یك حرف، با واژهٔ مجهول اختلاف دارند. بنابراین، در واژه‌ای‌که، حرف اول‌آن، با واژهٔ مجهول تطبیق نمی‌کند، باید دوحرف دیگرآن، منطبق برحرف‌های واژهٔ مجهول‌باشد. ولی،دوحرف‌آخر، درواژه‌های (۱) و(۲) عین‌یکدیگرند. بنابراین، دوحرف‌آخر، در هریك از واژه‌های (۱) و (۲)، درست حدس‌زده شده است:

(*) ‏ *ار

حرف اول واژهٔ مجهول، باید به‌ناچار، همان حرف اول واژهٔ (۳) باشد، زیرا، از (*) معلوم می‌شود که، حرف‌های دوم و سوم واژهٔ مجهول، با حرف‌های دوم وسوم واژهٔ (۳) تطبیق نمی‌کند.

به‌این‌ترتیب، واژهٔ مجهول چنین است:

دار

این‌جواب درست‌است: به‌سادگی می‌توان تحقیق‌کردکه، درواژه‌های (۱) و (۲) و (۳)، به‌همان تعداد حرف‌هایی‌که در صورت مسأله‌گفته شده است، با واژهٔ دار تطبیق می‌کند.

یادداشت. در استدلالی‌که منجر به«کشف» بخشی ازواژهٔ مجهول‌شد، به‌جای عبارت «در هریك ازواژه‌ها»، می‌توانستیم واژهٔ دقیق‌تر «درهرواژه» را قراردهیم، ولی این «عدم‌دقت»، هیچ‌اشکالی درادامهٔ‌کار به‌وجود نیاورد. به‌همین مناسبت‌است‌که، گاهی به‌چنین«نقص‌هایی»که، نه‌به‌روند حل‌لطمه‌ای می‌زند و نه‌چیزی از روشنی‌آن‌کم می‌کند، توجهی نخواهیم‌کرد.

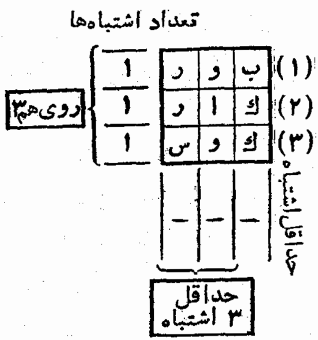
۹۶.

راه‌حل اول. فرض کنیم، اولین حرف واژهٔ مجهول «ك» نباشد دراین صورت، از شرط (۲) نتیجه می‌شود که دوحرف‌آخر واژهٔ مجهول باید «ار» باشد، در حالی که بنابرشرط (۳)، همین دوحرف‌آخر واژهٔ مجهول، باید «ود» باشد. این‌تناقض، به‌معنای‌آن است که، حرف اول واژهٔ مجهول، تنها «ك» می‌تواند باشد.

به‌همین‌ترتیب، از شرطهای (۱) و (۳) نتیجه می‌شود که، حرف دوم واژهٔ مجهول تنها «و» می‌تواند باشد و از شرطهای (۱) و (۲) معلوم می‌شود که، حرف سوم واژهٔ مجهول، جز «ر» چیز دیگری نیست.

به‌این‌ترتیب، به‌یك‌جواب منحصر می‌رسیم: «کور». به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، این‌واژه، با همهٔ شرطهای مسأله سازگار است.

راه‌حل دوم. در هرستون (شکل ۱۴۴) دو حرف مختلف وجود دارد (یك‌حرف، دوبارآمده است). بنابراین، یکی از این حرف‌ها، با حرف‌متناظر واژهٔ مجهول، تطبیق نمی‌کند. به‌این ترتیب، درهرستون دست‌کم یك‌اشتباه



شکل ۱۴۴

وجود دارد: حداقل یکی از حرف‌ها، نادرست است؛ ولی، در سه واژه روی‌هم، درست ۳ اشتباه رخ داده است، بنابراین، از ۹ حرفی که نام‌برده

شده است ، ۳ حرف با حرف‌های متناظر خود در واژهٔ مجهول ، تطبیق نمی‌کند: به‌این‌ترتیب، در هرستون ، درست ۱ حرف اشتباه وجود دارد. یعنی، حرفی از ستون که دوبارآمده است، با حرف متناظر درواژهٔ مجهول، تطبیق می‌کند.

۹۷.

اگر حرف «م» از واژهٔ (۱) ، با حرف متناظر خود در واژهٔ مجهول تطبیق نکند، آن‌وقت، در واژهٔ (۲)، حتی یک‌حرف درست هم پیدا نخواهد شد. بنابراین، حرف‌آخر واژهٔ مجهول، تنها می‌تواند «م» باشد.

اگر در واژهٔ (۱) ، حرف «ی» با حرف متناظر خود در واژهٔ مجهول تطبیق نکند، آن‌وقت، هیچ‌کدام از حرف‌های واژهٔ (۳)، با حرف‌های‌متناظر خود در واژهٔ مجهول ، تطبیق نخواهندکرد . بنابراین ، حرف دوم واژهٔ مجهول، تنها می‌تواند «ی» باشد.

وقتی‌که، دوحرف‌آخر واژهٔ مجهول «ی» و «م» باشد،آن‌وقت، هرسه واژهٔ (۱) ، (۲) و (۳) ، با شرطهای مسأله سازگار می‌شوند. بنابراین، حرف اول در هرسه واژهٔ (۱) ، (۲) و (۳)، نادرست حدس زده شده است. شرطهای مسأله، تنها این امکان‌را به‌ما می‌دهدکه دوحرف‌آخر واژهٔ مجهول را کشف‌کنیم؛ ضمناً، حرف اول واژهٔ مجهول ، باید غیر از «س» و «ب» و «خ» باشد. هرترکیبی از سه‌حرف ، که حرف اول آن غیر از «س» و «ب» و «خ» باشد و دو حرف آخر آن «ی» و «م» باشد ، جوابی از مسأله است (مثل تیم، نیم، قیم، دیم وغیره).

۹۸.

راه‌حل اول. از شرطهای (۱) و(۲)، شبیه مسألهٔ قبل، نتیجه‌می‌شود که، حرف‌آخر واژهٔ مجهول، تنها می‌تواند «م» باشد.

از شرطهای (۱) و (۳)، به‌این نتیجه می‌رسیم‌که ، حرف دوم واژهٔ مجهول، تنها می‌تواند «ا» باشد، زیرا این‌دو واژه، تنها در حرف دوم باهم اختلاف دارند و ، ضمناً ، باید دوحرف از واژهٔ (۱) ، با حرف‌های متناظر

واژهٔ مجهول تطبیق‌کند.

وقتی‌که دوحرف آخر واژهٔ مجهول، مشخص‌شده‌باشد، حرف اول‌آن، از شرط (۲) به‌دست می‌آید: «ك».

بنابراین، واژهٔ مجهول، عبارت است ازکام. به‌سادگی می‌توان تحقیق کردکه، این واژه، باهرسه شرط مسأله سازگار است.

راه‌حل دوم. واژه‌ها را، حرف به‌حرف، زیر یکدیگر می‌نویسیم و حساب می‌کنیم‌که، در هرسطر و هرستون، چندحرف با حرف‌های متناظر خود، درواژهٔ مجهول، تطبیق نمی‌کند. نتیجهٔ این‌محاسبه را، درشکل ۱۴۵ داده‌ایم.

تعداد اشتباه‌ها

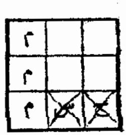
ج	ا	م	۱
ك	ل	م	۱
ج	س	م	۲
دست کم ۱	دست کم ۲	دست کم ۳	تعداد اشتباه‌ها

روی‌هم ۴

دست‌کم ۳ اشتباه

شکل ۱۴۵

حرف «م» در ستون آخر، درست حدس زده شده است، زیرا در غیر این‌صورت، تعداد حدس‌های نادرست در ستون‌ها، کمتر از ۶ نمی‌شود.

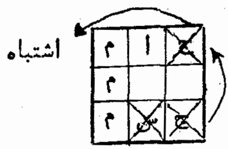


۲ اشتباه

شکل ۱۴۶

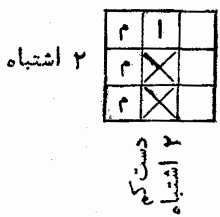
بنابراین، دو حرف اشتباه در سطر آخر تنها می‌تواند دوحرف اول و دوم باشد (شکل ۱۴۶).

از آن‌جاکه در ستون اول، حرف «ج» ، با حرف اول واژهٔ مجهول تطبیق نمی‌کند، بنابراین، حرف‌های اول و دوم در سطر اول، درست حدس زده شده است (شکل ۱۴۷).



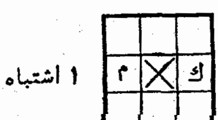
شکل ۱۴۷

اکنون، در ستون دوم ، تنها ۲ اشتباه ممکن است ، و چون تعداد این اشتباه‌ها، بایدبه‌همین‌اندازه‌باشد، آن‌چه‌راکه درشکل ۱۴۸ نشان‌داده‌ایم، به‌دست می‌آید.



شکل ۱۴۸

در سطر دوم، تنها یك اشتباه وجود دارد ، بنـابراین، نخستین حرف آن، درست حدس زده شده است (شکل ۱۴۹)؛ وبه‌این ترتیب، حل‌مسأله، تمام می‌شود.

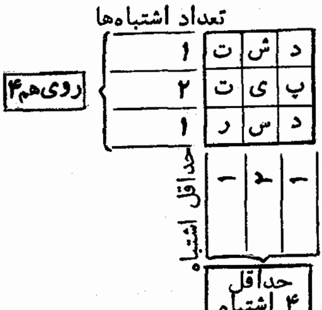


شکل ۱۴۹

یادداشت . اگر فرض کنیم که ، در هرستون ، باید یك‌حرف وجود داشته باشد که درست حدس زده شده است، آن‌وقت ، مسأله را می‌توان سریع‌تر حل کرد . ولی ، همان‌طور که در مسألهٔ ۹۷ دیدیم ، هیچ اساسی برای این امید وجود ندارد. اگر در یکی از ستون‌ها، هیچ‌کدام از حرف‌ها، درست حدس زده نشده باشد، آن‌وقت، متوسل شدن به‌چنین روشی،بی‌فایده خواهد بود (ازحالتی‌صرف‌نظر می‌کنیم که، درآن، واژه‌ها چنان بزرگ باشند که در ستون، همهٔ حرف‌های الفبا، به‌جز یکی،آمده باشد). ولی، همان‌طور که درمسألهٔ قبل دیدیم، این‌وضع‌مشکلی به‌وجود نمی‌آورد و تنها به‌معنای آن است که، مسأله، می‌تواند چند جواب داشته باشد.

۹۹.

واژه‌های (۱) و (۲) و (۳) را ، حرف به‌حرف، زیر هم می‌نویسیم و تعداد حرف‌های نادرست ستون‌ها را محاسبه می‌کنیم (شکل ۱۵۰). در سه‌ستون ، دست‌کم ۴ حرف ، با حرف‌های متناظر خود در واژهٔ مجهول ،



شکل ۱۵۰

تطبیق نمی‌کند. ولی از آن‌جاکه، تعداد حرف‌های نادرست در سطرها،معلوم و برابر ۴ است، بنابراین، می‌توان از واژهٔ «دست‌کم» صرف‌نظر کرد (برای این‌که، تعداد حرف‌های نادرست، نمی‌تواند از ۴ بیشتر شود). این‌مطلب، به‌معنای‌آن‌است‌که، درستون‌های اول‌وسوم، تنهاحرف‌هایی اشتباه می‌توانند

د	ش	ت	۱
پ	ی	ت	۲
د	س	ر	۱
			تعداد اشتباه‌ها

شکل ۱۵۲

د	ش	ت
پ	ی	ت
د	س	ر
۱	۲	۱ تعداد اشتباه‌ها

شکل ۱۵۱

باشند که بیش از یك‌بار نیامده‌اند (شکل ۱۵۱). و چون در سطرآخر ، یك اشتباه وجود دارد، دوحرف دیگر درست حدس‌زده شده‌اند وتنها، یك‌جواب به‌دست می‌آیدکه با شرطهای مسأله سازگار است (شکل ۱۵۲).

واژه مجهول، «دست» است.

۱۰۰.

این‌مسأله را، با مسألهٔ ۹۵ مقایسه می‌کنیم:

مار ۲	پست ۲
کار ۲	بست ۲
دوش ۱	مرد ۱

			تعداد حرف‌های درست
پ	س	ت	۲
ب	س	ت	۲
م	ر	د	۱

شکل ۱۵۴

			تعداد حرف‌های درست
م	ا	ر	۲
ک	ا	ر	۲
د	و	ش	۱

شکل ۱۵۳

ساختمان‌این‌دومسأله، کاملاً یکی‌است. تعدادحرف‌هایی‌که در واژه‌های متناظر، درست حدس زده شده است ، یکسان است . اگر در یك مسأله ، حرف‌هایی برحرف‌های متناظر خود در واژهٔ مجهول منطبق باشد، در مسألهٔ دیگر هم، همان حرف‌ها ، برحرف‌های متناظر خود منطبق‌اند. ازآن‌جاکه، حل مسأله، برفرض‌های آن تکیه دارد، بنابراین، حل مسألهٔ ۱۰۰، باتکرار همان استدلال‌های حل مسألهٔ۹۵ به دست می‌آید. جواب مسألهٔ ۹۵، در

شکل ۱۵۳ و جواب مسألهٔ ۱۰۰ ، در شکل ۱۵۴ داده شده است.

۱۰۱.

به‌سادگی دیده می‌شودکـه ، این‌مسأله هم ، شبیه مسألهٔ ۹۵ ساخته شده است:

مار : ۲ جیب : ۲
کار : ۲ شیب : ۲
دوش: ۱ سوپ: ۱

برای این که واژهٔ مجهول کشف شود، می‌توان شبیه مسألهٔ قبل عمل واز شکل ۱۵۳ (یا ۱۵۴) استفاده کرد. به‌زبان واژه‌های این‌مسأله،جواب را در شکل ۱۵۵ داده‌ایم.

تعداد حرف‌های درست			
۲	ب	ی	~~ج~~
۲	ب	ی	~~ش~~
۱	~~پ~~	~~و~~	س

شکل ۱۵۵

به‌این ترتیب، واژهٔ مجهول، سیب است.

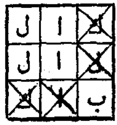
۱۰۲.

بازهم با مسألهٔ ۹۵ مقایسه می‌کنیم:

مار : ۲ کال: ۲
کار : ۲ لال : ۲
دوش: ۱ باك : ۱

آیا می‌توان گفت‌که، این‌دو مسأله، یکی‌هستند؟ حقیقت این است‌که، یکی‌بودن این‌دو مسأله،کاملاً روشن نیست.

در واژه‌های مسألهٔ ۱۰۲، بعضی از حرف‌ها، برهم منطبق‌اند: اولین حرف واژهٔ (۱) برآخرین حرف واژهٔ (۳) و، همچنین، اولین وآخرین حرف واژهٔ (۲)؛ در حالی‌که در مسألهٔ ۹۵، چنین وضعی وجود ندارد.



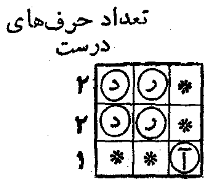
شکل ۱۵۶

ولی، ضمن حل مسألهٔ ۹۵، هیچ استفاده‌ای ازمختلف‌بودن این‌حرف‌ها نکردیم ، بنابراین ، همان استدلال برای مسالهٔ ۱۰۲ هم به‌قوت خود باقی‌می‌ماند . به‌این ترتیب ، می‌توان «ساختمان» این‌دو مسأله را یکی دانست و، دراین‌جاهم، ازروش‌استدلال مسألهٔ ۹۵ استفاده‌کرد(شکل۱۵۶).

واژهٔ مجهول، بال است.

۱۰۳.

همان‌طور‌که درمسألهٔ‌قبل‌روشن کردیم، این‌مسأله، ازنظر«ساختمانی» با مسألهٔ ۹۵ یکی است جواب مسأله، درشکل ۱۵۷ دیده می‌شود. این‌مهم



شکل ۱۵۷

نیست که بخشی از واژه‌ها خوانده نمی‌شود، بلکه مهم این است که ، این حرف‌های پاك شده، با حرف‌هایی که درست حدس زده شده‌اند، یکی نباشد ، زیرا ، این‌مطلب ، برای پیداکردن حرف‌هایی که «درست» حدس زده شده‌اند ویا «اشتباه» هستند ، اهمیت دارد (به‌همین مناسبت ، در صورت مسأله ، شرط شده است که، به‌جای «ستاره‌ها»، حرف‌هایی وجود دارد‌که باحرف‌های متناظر خود در واژه‌های دیگر، تطبیق نمی‌کند).

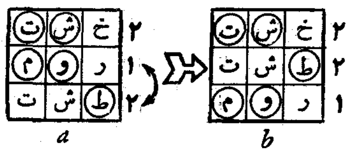
واژهٔ مجهول، آرد است.

یادداشت. در واقع، همان‌طور‌که از مسألهٔ قبل نتیجه می‌شود، کافی است بدانیم‌که ، اگر سه‌واژهٔ «حدسی» را ، حرف به‌حرف، زیرهم بنویسیم،

درهیچ کدام ازستون‌ها، حرف‌های پاک‌شده، باحرف‌های«موجود» تطبیق نکند.

۱۰۴.

اگر سه‌واژه را، حرف به‌حرف، بـا همان ردیفی‌که در صورت مسأله داده شده است ، زیر یکدیگر بنویسیم (شکل ۱۵۸-a) ، انطباق ساختمان درونی این مسأله ، بـا مسأله‌های قبل، خیلی روشن نمی‌شود . ولی، کافی



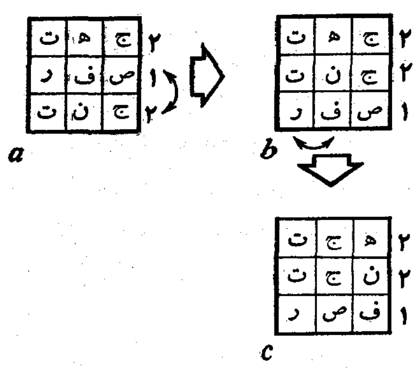
شکل ۱۵۸

است جای واژه‌های (۲) و (۳) را بـا هم عوض‌کنیم، یعنی واژهٔ (۲) را زیر واژهٔ (۳) بنویسیم، تا «همه‌چیز درست شود» (شکل ۱۵۸-b).

واژهٔ مجهول، «شت است.

۱۰۵.

معلوم است، واژهٔ جفت درنظر گرفته شده است. ولی، اگر بخواهیم



شکل ۱۵۹

شباهت بین مسأله ۱۰۵ را با مسأله‌های قبلی، کامل کنیم، باید اندکی، استعداد اختراع داشته باشیم.

ابتدا واژه‌ها را، حرف به‌حرف، زیر هم می‌نویسیم (شکل a-۱۵۹)؛ سپس، جای واژه‌های (۲) و (۳) را باهم عوض می‌کنیم (شکل b-۱۵۹). اکنون، اگر اهمیتی به‌معنای واژه‌ها ندهیم و جای دو ستون اول و دوم را با هم عوض کنیم (شکل c-۱۵۹)، به‌ساختمانی شبیه مسأله‌های قبل می‌رسیم. واژهٔ مجهول در این مورد، عبارت است از «فجت»، که البته هیچ معنایی ندارد. اکنون، برای پیداکردن واژهٔ مجهول اصلی، کافی است، حرف‌های اول و دوم آن‌را باهم عوض کنیم.

واژهٔ مجهول، جفت است.

جابه‌جایی (تبدیل) ستون‌ها

بی‌فایده نیست، یک‌بار دیگر، و این‌بار به‌صورتی جدی‌تر، در این‌باره بیندیشیم که استفاده ازاین روش جابه‌جایی (یاتبدیل یا جایگشت) دوستون از حرف‌ها (که با نوشتن واژه‌ها، حرف به‌حرف، در زیر یکدیگر، ایجاد شده‌اند) ـ برچه اساسی استوار است؟ برای این‌که مطمئن شویم‌که، ضمن این‌عمل، درحرف‌هایی که به‌درستی حدس زده شده‌اند، تغییری پدید نمی‌آید و تنها، همراه با ستون‌های جابه‌جا شده، به‌جای دیگری منتقل می‌شوند، به‌دوطریق می‌توان بحث‌کرد.

a. خود جواب مسأله، ما را به‌این نتیجه می‌رساند. در واقع، اگر ستونی شامل حرفی باشد که درست حدس زده شده است، این‌که این ستون در چه موضعی ودر چه‌جایی قرار گرفته‌باشد، هیچ گونه نقش واهمیتی‌ندارد. ستون‌ها، مستقل از یکدیگرند وارتباطی با هم ندارند.

b. شاید، مجازبودن جابه‌جایی ستون‌ها را بتوان از این راه بهتر فهمید که فکر کنیم: حدس درست یک‌حرف، یعنی‌چه! از واژه‌ای که نام‌برده می‌شود، حرفی را درست به‌حساب می‌آوریم که، درهمان مکان خود، برحرف متناظر واژهٔ مجهول، منطبق باشد. اگر در هر دو واژه ـ هم واژهٔ مجهول و هم واژه‌ای که نام‌برده شده است ـ حرف‌های متناظر را (یعنی حرف‌هایی

که در یك مکان‌اند) ، جابه‌جاکنیم (مثلاً ، حرف i ام را با حرف k ام ، در هردو واژه، با هم عوض‌کنیم)، آن‌وقت، حرف‌هایی‌که ، قبل از جابه‌جایی، برهم منطبق می‌شوند و، برعکس، حرف‌های مختلف دو واژه، بازهم بعد از جابه‌جایی با هم اختلاف خواهند داشت.

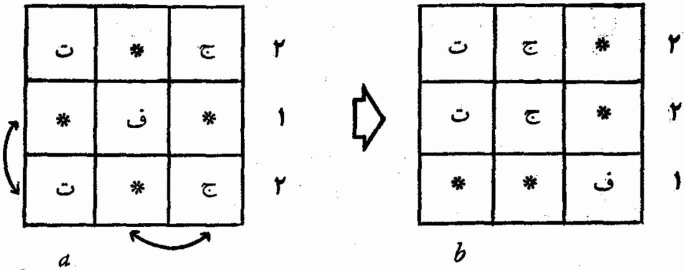
به‌زبان دیگر، اگرواژه‌ای، جواب مسألهٔ مفروض باشد (یعنی برواژهٔ مجهول منطبق شود)، وقتی‌که جای حرف‌های iام و kام را، درآن، با هم عوض‌کنیم، جواب مسأله‌ای‌را به‌دست می‌آوریم که، درآن، جای حرف‌های iام و kام واژهٔ مجهول قبلی، جابه‌جا شده‌اند؛ ضمناً، تعداد حرف‌های‌درست در دو مسألهٔ اصلی و «تبدیل‌شده» یکی است. همچنین، اگر واژه‌ای،جواب مسألهٔ اصلی نباشد ، واژه‌ای هم‌که از تبدیل حرف‌های i ام و k ام آن، به‌یکدیگر، به‌دست می‌آید، جواب مسأله‌ای نخواهد بودکه ستون‌های iام و kامآن، جابه‌جا شده‌است (فرض براین‌است‌که همهٔ واژه‌های نام‌برده‌شده، حرف به‌حرف، زیرهم نوشته شده باشند).

به‌این ترتیب ، اگر در مسأله‌ای از لوتوی حرفی ، جای iامین و kامین ستون با هم عوض شده باشد، جواب مسألهٔ دوم، همان (وفقطهمان) جوابی است که از حل مسألهٔ اصلی ، با تبدیل حرف‌های i ام و kام آن به‌یکدیگر، به‌دست‌آمده است.

این‌بحث‌کلی را روی مثالی ـ از همان نوع‌که تا کنون داشته‌ایم ـ دنبال می‌کنیم و بستگی جواب‌های آن‌ها را ، قبل و بعد از تبدیل ، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

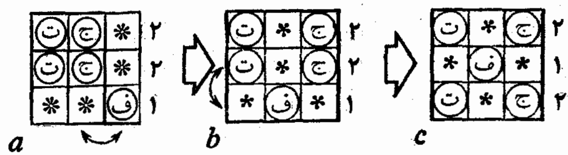
بعد از تبدیل سطرهای دوم و سوم (شکل ۱۶۰ ـ a) و ، همچنین ، ستون‌های اول و دوم به‌یکدیگر، مسألهٔ اصلی، به‌مسألهٔ دوم ـ که برای‌ما آشناست ـ منجر می‌شود (شکل ۱۶۰ـb) و (علامت‌های «ستاره» به‌معنای حرف‌هاست و، در موردآن‌ها، تنها این اطلاع کافی است‌که ، با حرف‌های واقع در ستون خود، یکی نیستند.)

واژهٔ مجهول ، بدون هیچ زحمتی، از روی شکل ۱۶۰ـb، به‌دست می‌آید. با تبدیل سطرها، تغییری در این واژه پدید نمی‌آید، ولی با تبدیل



شکل ۱۶۰

ستون‌ها، تبدیل مشابهی در واژه پدید آمده است. عکس این حرکت ، در شکل‌های ۱۶۱–a،b و c دیده می‌شود.



شکل ۱۶۱

به‌این‌ترتیب، از واژهٔ بی‌معنی فجت به‌واژهٔ جفت می‌رسیم که، جواب مسألهٔ ۱۰۵ است.

.۱۰۶

راه حل اول. در پنج واژه، روی هم، پنج حرف وجود داردکه درست حدس زده شده است. دوباره، واژه‌ها را ، حرف به‌حرف، زیر هم می‌نویسیم (شکل ۱۶۲) . هیچ ستونی وجود ندارد، که در آن ، حرفی بیش از دوبار آمده باشد. بنابراین ، تعداد حرف‌هایی که درست حدس زده شده است، نمی‌تواند در هرستون، از ۲ تجاوز کند. بنابراین تنها این امکان وجود دارد که در دو ستون، ۲ نمونه از این‌گونه حرف‌ها، و دریك ستون، تنها ۱حرف درست پیدا شود.

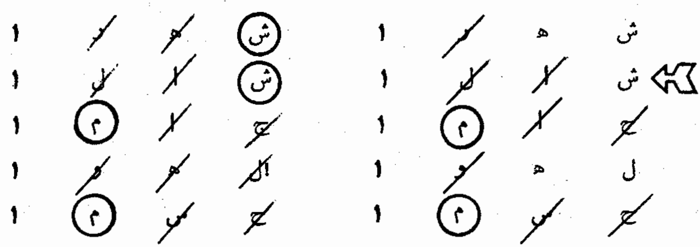
در هرستون، هریك از حرف‌های تکراری، ممکن است باحرف متناظر واژهٔ مجهول، منطبق باشد، ولی در ستون‌های اول و دوم ، از این گونه

ش	ه	ر	۱
ش	ا	ل	۱
ج	ا	م	۱
ل	ه	و	۱
ج	س	م	۱

روی هم ۵ حرف درست حدس زده شده است.

شکل ۱۶۲

حرف‌ها، دوتا وجود دارد. بنابراین، بهتراست ازستون سوم آغازکنیم(ستون سمت چپ)، که در آن‌جا، تنها یك حرف تکرار شده است: حرف «م». اگر این‌حرف، برحرف آخر واژهٔ مجهول منطبق باشد (شکل ۱۶۳-a)، آن‌وقت با خط زدن حرف‌هایی که باید اشتباه باشند، به‌این نتیجه می‌رسیم که، در واژهٔ شال، تنها حرف «ش» می‌تواند درست حدس زده شده باشد. اگرحرف اول واژهٔ مجهول را «ش» بگیریم و حرف‌هایی را که، به‌پیروی از آن، نمی‌توانند درست باشند، خط بزنیم، برای واژهٔ «لهو» هیچ حرفی باقی نمی‌ماند، در حالی‌که بنابرشرط مساله، باید یکی از حرف‌های آن، درست حدس زده شده باشد (شکل ۱۶۳-b). به‌این ترتیب، فرض اولیه، ما را به‌تناقض می‌رساند.



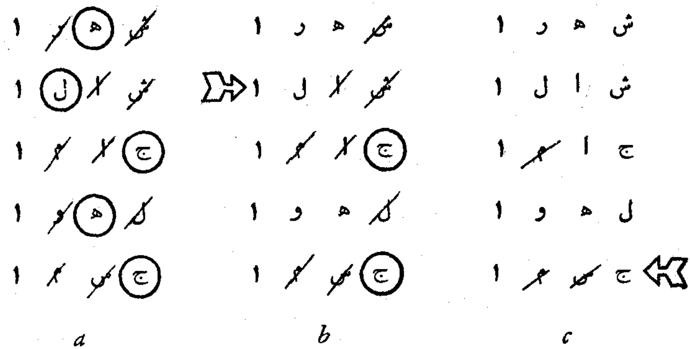
a *b*

شکل ۱۶۳

بنابراین، حرف «م» نمی‌تواند حرف‌آخرواژهٔ مجهول باشد. بنابراین، حرفی که درست حدس زده شده است، در ستون آخر ۱ بار و در ستون‌های اول و دوم، ۲ بار آمده است. از همین‌جا، بلافاصله نتیجه می‌شود که حرف «س» در ستون وسط، نمی‌تواند حرف وسط واژهٔ مجهول باشد. ولی در

این‌صورت، در واژهٔ «جسم»، تنها حرف «ج» می‌تواند درست حدس زده شده باشد (شکل a-۱۶۴) باحذف حرف‌هایی که نمی‌توانند باحرف‌های متناظر خود در واژهٔ مجهول یکی‌باشند(شکلb-۱۶۴)، می‌بینیم که در واژهٔ «شال»، تنها حرف «ل» می‌تواند درست باشد و، سپس درستون‌وسط، تنها حرف «ه».

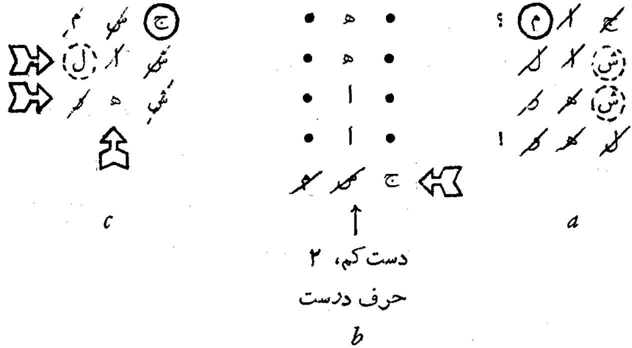
به‌این ترتیب، واژهٔ «جهل» ـ برای واژهٔ مجهول ـ به‌دست می‌آید که با همهٔ شرطهای مساله، سازگار است.



شکل ۱۶۴

[به‌سادگی می‌توان متوجه شد که، برای حل این مساله، به‌هیچ‌وجه لازم نیست همهٔ واژه‌های مفروض را، حرف به‌حرف، زیر هم بنویسیم. در هیچ مرحله‌ای از حل، نتوانستیم همهٔ شرطهای مساله را، با هم، در نظر بگیریم. البته وقتی‌که هرپنج واژه، جلوچشمان ما باشند راحت‌ترمی‌توانیم نتیجه‌های لازم را، از هرفرضی‌که در جریان حل در نظر می‌گیریم، به‌دست آوریم. ولی از آن‌جا که همهٔ فرض‌ها کاملاً به‌هم مربوطاند و، هرفرض، فرض دیگری را به‌دنبال خود می‌کشد، حل مساله را می‌توان به طور «اقتصادی» به‌انجام رساند و تنها به‌فرض‌هایی اکتفا کردکه لازم است. ما هم درست به‌همین ترتیب، عمل خواهیم کرد.]

راه حل دوم. فرض می‌کنیم در واژهٔ جام حرف «م» درست حدس زده شده باشد (شکل ۱۶۵ ـ a). دراین‌صورت، در واژهٔ شال باید حرف «ش» درست باشد و چون واژهٔ شهر، تنها یك حرف مشترك با واژهٔ مجهول دارد،



شکل ۱۶۵

بنابراین در واژهٔ «لهو» هیچ حرف درستی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

بنابراین، حرف «م» در ستون سوم، باحرف آخر واژهٔ مجهول تطبیق نمی‌کند و ، در نتیجه در این ستون بیش از ۱ حرف درست نمی‌تواند باشد. ولی در این صورت، در ستون‌های اول و دوم، حرف درست، بیش از دوبار تکـرار نشده است و چـون ، تعداد کل این‌گونه حرف‌ها برابر پنج است، بنابراین، در ستون‌های اول و دوم، درست ۲ حرف صحیح وجود دارد.

حرف «س» درستون دوم نمی‌تواند با حرف وسط واژهٔ مجهول، یکی باشد. بنابراین، در واژهٔ جسم، تنها حرف «ج» مـی‌تواند درست حـدس زده شده باشد (شکل ۱۶۵-b).

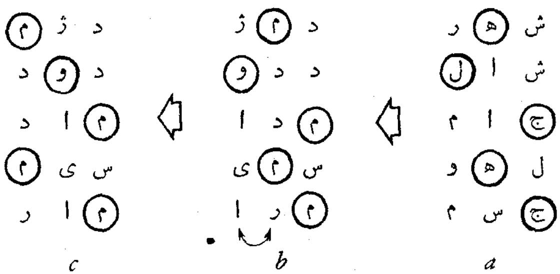
اگر دو واژهٔ جسم و شال را با هـم مقایسه کنیم، می‌بینیم کـه در واژهٔ شال، تنها حرف «ل» می‌تواند درست باشد. ولی در ایـن صورت، در واژهٔ شهر، تنها حرف «هـ» می‌ماند که قابل تطبیق است (شکل ۱۶۵-c).

بنابراین، واژهٔ مجهول، تنها می‌تواند «جهل» باشد. این واژه با همهٔ شرطهای مساله، سازگار است.

.۱۰۷

دوباره به‌واژه‌های مسألهٔ ۱۰۶ برمی‌گردیم و، آن‌ها را حرف‌به‌حرف زیر هم می‌نویسیم (شکل ۱۶۶-a). سپس در ستون اول، «ش» را به «د»، «ج» را به «م» و «ل» را به «س»،

در ستون دوم، «ه» را به «م»، «ا» را به «د» و «س» را به «ر»،
در ستون سوم، «ر» رابه «ژ»، «ل» را به «و»، «م» رابـه «ا» و «و» رابه«ی»، تبدیل می کنیم.



شکل ۱۶۶

مسألهٔ تازه‌ای از لوتوی حرفی به دست می‌آید که «زبانی نامفهوم» دارد (واژه‌های مربوط، معنایی ندارند). این مسألهٔ تازه، از نظر ساختمـان درونی‌خود، هیچ اختلافی بامسالهٔ ۱۰۶ ندارد. بنابراین، جواب هردومساله به‌یك نحو «ساخته» می‌شود. (اگرشرطهای دومسأله را با هم مقایسه کنیم، قانع می‌شویم که، درستون‌ها، حرف‌های یکسان، سرجای خود باقی مانده‌اند و حرف‌های متفاوت، در مسألهٔ تازه، بازهم متفاوت‌اند.)

اکنون، در مسألهٔ تازه، جای ستون‌های دوم و سوم را با هم عوض می‌کنیم. بعد از حل مسألهٔ ۱۰۵، می‌دانیم که، با جابه‌جا کردن ستون‌هـا، قانون کشف واژهٔ مجهول، تغییر نمی‌کند (حرف‌های «کشف شده» بـه‌جای جدید خود، همراه با ستون مربوط به‌خود، منتقل می‌شوند). به‌این‌ترتیب، به‌مسألهٔ تازه‌ای از لوتوی حرفی می‌رسیم که، جای حرف‌های واژهٔ مجهول در آن، از قبـل معین شده است (شکل ۱۶۶-c). ولـی واژه‌های مـربوط به‌این مسأله، همان واژه‌های صورت مساله ۱۰۷است، تنها به‌ردیف‌دیگری نوشته شده‌اند.

به‌این ترتیب، واژهٔ مجهول، عبارت است از موم.

[چگونه می‌توان حدس زد که، مسألهٔ ۱۰۷، خود را زیـر «ماسك» مسألهٔ ۱۰۶ پنهان کرده است؟ این پرسش، به‌پاسخی مفصل نیاز دارد. قبل

از هرچیز، حتی «با چشم غیرمسلح» هم دیده می‌شود که، در هـردومساله، پنج واژه داده شده است و، ضمناً در هر دو مساله، هرواژه شامل ۱ حـرف درست است. همین مطلب، مارا به‌این فکر می‌اندازدکه ممکن است، سطرها و ستون‌های دومساله، «ساختمان» یکسانی داشته باشند. اگر خـود را از

۱	ر	ا	م		۱	●	*	*
۱	د	ا	م		۱	*	*	*
۱	د	و	د		۱	*	●	+
۱	م	ژ	د		۱	+	●	+
۱	م	ی	س		۱	+	●	●

شکل ۱۶۷

قید حرف‌های مشخص خلاص کنیم، خیلی راحت‌تر مـی‌توانیم در بارهٔ این «شك» تحقیق کنیم ، زیرا حرف‌های یکسانی که در ستون‌های مختلف وجود دارند ، تنهـا موجب شلوغی‌کار می‌شوند. تنها چیزی‌که برای حل مسأله اهمیت دارد ، این است‌کـه ، در هرستون، چند حرف درست حدس زده شده است وچندحرف مختلف ویکسان(برای‌هرستون، وبدون ارتباط به‌ستون‌های دیگر) وجوددارد.«بدنهٔ» مسأله،که ازتبدیل حرف‌های مشخص به‌علامت‌ها به‌دست‌آمده، در شکل ۱۶۷ نشان داده شده است.

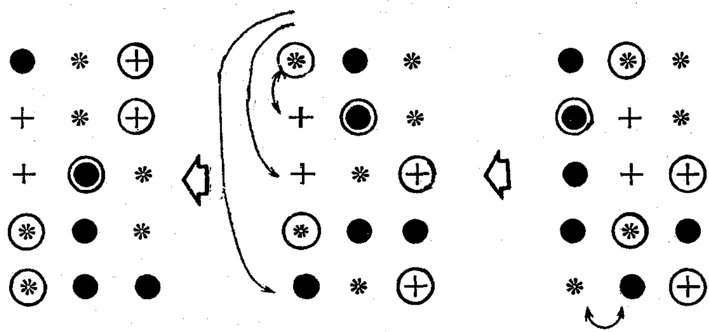
۱	ر	ه	ش		۱	●	*	*
۱	ل	ا	ش		۱	●	*	*
۱	م	ا	ج		۱	*	+	+
۱	و	ه	ل		۱	●	*	●
۱	م	س	ج		۱	*	●	+

شکل ۱۶۸

در هرستون ، دوعلامت «+» و دوعلامت «*» ، نشانهٔ حرف‌هـای یکسان‌اند. نقطه‌های سیاه «●» نشانهٔ حرف‌هایی هستندکه، درستون خود، حرفی مشابه خود ندارند. ازآن‌جاکه، در حل مسأله، ستون‌ها، مستقل از

یکدیگر «عمل می‌کنند» ، علامت‌هـای مشابهی کـه در ستون‌هـای مختلف وجود دارند، به‌هیچ‌وجه به‌معنای یکی‌بودن آن حرف‌هایی نیست که جـای آن‌ها را گرفته‌اند. به این دلیل، در ستون‌هـای مختلف ، از علامت یکسان استفاده کرده‌ایم که،تعدادآن‌ها، زیاد نشود. بنابراین، درحالت کلی، دوستاره (یا دو نقطهٔ سیاه یـا دوعلامت جمع) که در ستون‌های مختلف قراردارند، به‌معنای حرف‌هـای مختلف‌اند، ولی اشکالی هم ندارد کـه، تصادفاً، برهم منطبق باشند.

بـا مسألهٔ ۱۰۶ هم، به‌همین ترتیب ، عمل کردیم. «بدنهٔ» آن‌را در شکل ۱۶۸ نشان داده‌ایم. اکنون، به سادگی می‌توان متوجه شد کـه بـا تبدیل دوستون آخر به‌یکدیگر وجابه‌جاکردن بعضی سطرها، از مسألهٔ ۱۰۷



شکل ۱۶۹

به‌مسألهٔ ۱۰۶ می‌رسیم (شکل ۱۶۹) . وقتی که می‌دانیم، چگونه بدنهٔ یك مسأله، به‌بدنهٔ مسألهٔ دیگر رسیده است، بـا تعقیب مسیر هرحرف، متوجه می‌شویم که، چه‌حرف‌هایی را باید به‌جای حرف‌های مسألهٔ ۱۰۶ گذاشت تا به‌مسألهٔ ۱۰۷ تبدیل شود و ، به‌ایـن‌ترتیب ، می‌توانیم بـه «شعبده‌ای» بپردازیم که، در ابتدا، عجیب به‌نظر می‌رسید.]

یادداشت . همان‌طور که دیدیم ، ستون دوم در مسألهٔ ۱۰۶، متناظر است بـا ستون سوم از مسألهٔ ۱۰۷.این وضع ، دشواری‌هـایی را به‌وجود می‌آورد، زیرا در مسألهٔ ۱۰۶ در ستون‌های اول ودوم، هیچ‌حرف مشترکی پیدا نمی‌شود، در حالی‌که ، در مسألهٔ ۱۰۷، حرف‌های «م» و «د» درهردو

ستون اول‌وسوم وجود دارد. ولی همان‌طور که می‌دانیم، انطباق حرف‌هایی که درستون‌های مختلف قراردارند، «هیچ‌دردی‌را دوا نمی‌کند»: این وضع، هیچ اثری درجواب مسأله ندارد. این‌تشابه به حرف‌ها، تنها می‌تواند موجب اغتشاش ذهن بشود و، اگرمسأله‌هارا به‌زبان علامت‌های انتزاعی‌بیان کنیم، این‌اختلاف بین‌مسأله‌ها، از بین می‌رود.

۱۵۸.

راه‌حل اول. این‌مسأله را می‌توان باساده‌ترین امکان‌ها، وبدون‌توسل به«روش ستون‌ها» حل کرد.

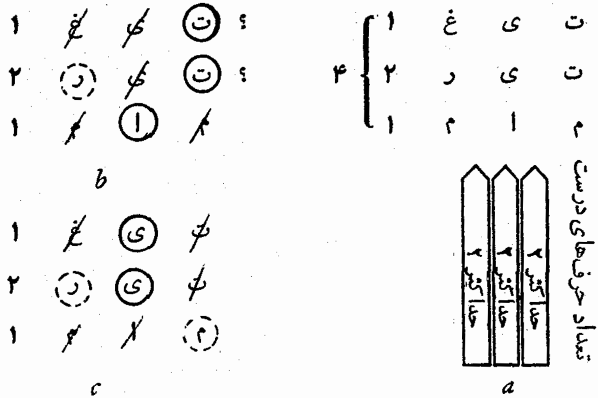
چون واژه‌های (۱) و (۲)، تنها در حرف‌آخر با هم اختلاف دارند، بنابراین،حرف‌سوم واژهٔ مجهول، تنها می‌تواند «ر» باشد. برای‌بقیهٔ‌حرف‌ها، می‌توان گفت که، یاحرف‌اول واژهٔ مجهول «ت» ویاحرف دوم‌آن «ی» است.

از شرط (۳)، و با توجه به‌این که حرف‌آخرآن درست نیست، نتیجه می‌شودکه، اگر واژهٔ مجهول با «ت» شروع شده باشد ، حرف دوم آن «ا» و اگر حرف دوم واژهٔ مجهول «ی» باشد، حرف اول آن «م» است.

بنابراین، مسأله دوجواب دارد. تار ومیر. به‌سادگی می‌توان تحقیق کردکه، هردو جواب، با شرطهای مسأله سازگارند.

راه‌حل‌دوم. درسه‌واژه، بایدروی‌هم، ۴حرف درست وجود داشته‌باشد. اگرآن‌ها را، حرف به‌حرف، زیر هم بنویسیم (شکل ۱۷۰-a) وحساب کنیم که، در هرستون، چند حرف درست می‌تواند وجود داشته باشد، آن‌وقت معلوم می‌شود که: یا در ستون اول و یا درستون دوم باید دوحرف درست وجود داشته باشد. بنابراین، یا واژهٔ مجهول با «ت» آغاز می‌شود و یا حرف وسط‌آن عبارت است از «ی». درحالت اول، ترتیب حرف‌های درست و نادرست، به‌صورتی است که در شکل ۱۷۰-b آمده است و، در حالت دوم، به‌صورت شکل ۱۷۰ - c. به‌این ترتیب، مسأله دو جواب دارد و هردوی آن‌ها، در شرطهای مساله صدق می‌کنند.

واژهٔ مجهول، یکی از دو واژهٔ تار یا میر است.



شکل ۱۷۰

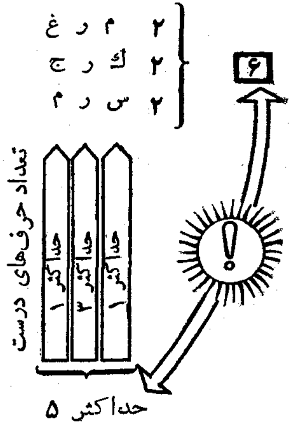
.۱۰۹

راه حل اول. روشن است که حرف وسط واژهٔ مجهول، تنها می‌تواند «ر» باشد. در این صورت، با توجه به‌شرط‌های (۱) و (۲)، تنها دوحالت ممکن است: واژهٔ مجهول یا با حرف «م» آغاز و به‌حرف «ج» ختم می‌شود و یا باحرف «ك» آغاز و با حرف «غ» پایان می‌یابد. یعنی، واژهٔ مجهول، باید مرج یا کرغ باشد. ولی، هرکدام ازاین دو واژه، تنها یك حرف مشترك با (۳) دارند (و نه آن‌طور که شرط مسأله می‌گوید، ۲ تا). بنابراین، شرط‌های (۱)، (۲) و (۳) متناقض‌اند: مساله، جواب ندارد.

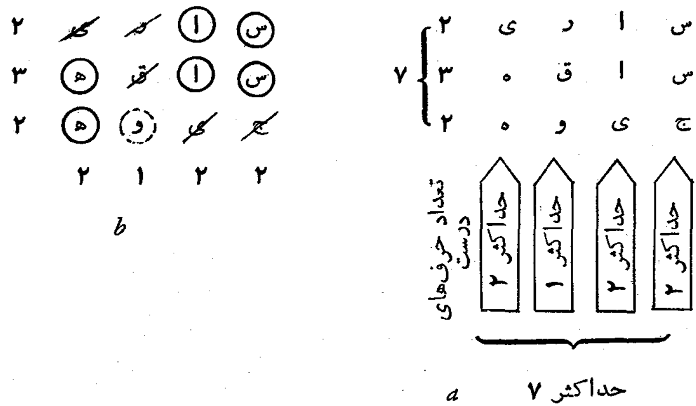
راه حل دوم. در سه واژه، باید روی هم ۶ حرف وجود داشته باشد که درست حدس زده شده‌اند. اگر این واژه‌ها را، حرف به‌حرف، زیر هم بنویسیم (شکل ۱۷۱) و تعداد حرف‌های درست ستون را محاسبه کنیم، معلوم می‌شود که، این تعداد نمی‌تواند از ۵ بیشتر شود.

.۱۱۰

بنابرشرط مسأله، باید ۷ حرف، به‌درستی حدس زده‌شده‌باشد. ازشکل ۱۷۲-a دیده می‌شود که، تعداد این حرف‌ها، نباید از۷ تجاوز کند. بنابراین در همهٔ ستون‌ها، درست ۷ حرف وجود دارد که با حرف‌های متناظر واژهٔ مجهول تطبیق می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود، هرجا درستونی ۲ حرف



شکل ۱۷۱



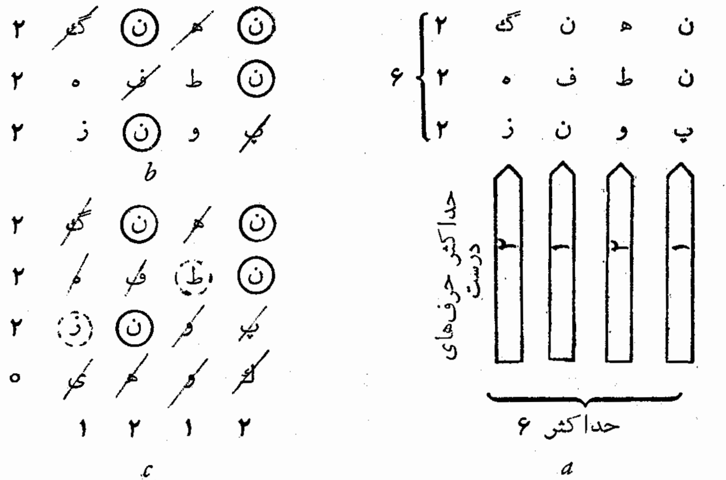
شکل ۱۷۲

یکسان وجـود دارد، بایـد همان‌ها با حرف‌های متناظر واژهٔ مجهول تطبیق کند. به‌این ترتیب، واژهٔ مجهول، تنها می‌تواند ساوه باشد که، ضمناً، بـا همهٔ شرطهای مسأله سازگار است (شکل ۱۷۲-b).

.۱۱۱

ابتدا، سه واژهٔ اول را، حرف به‌حرف، زیر هم می‌نویسیم و، تنهـا،

به‌بررسی آن‌ها می‌پردازیم (شکل ۱۷۳ ـ a). بنابرفرض مسأله، تعداد حرف‌هایی که درست حدس زده شده است، باید در آن‌ها، برابر ۶ باشد. و چون، تعداد حرف‌هایی که، از روی محاسبهٔ ستون‌ها، درست حدس زده شده‌اند نباید از ۶ تجاوز کند، بنابراین تعداد آن‌ها، درست برابر ۶می‌شود. به‌این ترتیب، درستون‌های اول وسوم، حرف‌هایی درست حدس زده شده‌اند



شکل ۱۷۳

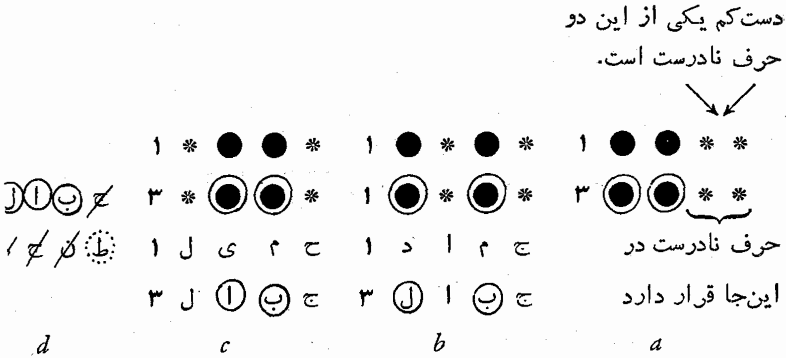
که به‌صورت تکراری آمده‌اند، یعنی حرف «ن». در شکل ۱۷۳ـ b نشان داده شده است که، این کشف، چگونه انجام می‌شود. اکنون به‌سراغ واژهٔ (۴) می‌رویم. از روی آن معلوم می‌شود که، حرف «و» در ستون دوم، نمی‌تواند متناظر باحرف متناظر خود در واژهٔ مجهول باشد (شکل ۱۷۳ـc). بنابراین، جواب مسأله، تنها می‌تواند واژهٔ نطنز باشدکه با شرطهای مسأله هم سازگار است.

۱۱۲.

راه حل اول. تنها یك حرف از واژهٔ دوم با حرف متناظر خود درواژهٔ مجهول، تطبیق می‌کند. بنابراین، یکی از دو حرف اول و چهارم آن، با حرف متناظر واژهٔ مجهول تطبیق نمی‌کند. در واژهٔ (۳)ـ که دارای ۳ حرف

درست است، حتماً ۲ حرف وسط، یعنی «ب» و «ا» ـ با حرف های متناظر خود در واژهٔ مجهول تطبیق می کند. ولی دراین صورت، درواژهٔ (۱) دیگر نمی‌تواند حرف اول، یعنی «ج»، درست حدس زده شده باشد، زیرا با توجه به‌واژهٔ (۳)، حرف سوم آن، یعنی «ا»، درست خدس زده شده است و، ضمناً واژهٔ «۱» تنها یك حرف درست دارد. بنابراین، واژهٔ (۳) امکان مـی‌دهد، متوجه شویم کـه، واژهٔ مجهول، به «بال» ختم شده است. و چـون، در واژهٔ (۴)، سه‌حرف آخر با این ترکیب تطبیق نمی کند، باید حرف اول‌آن، یعنی «ط»، با حرف اول واژهٔ مجهول، یکی باشد.

به‌این ترتیب، تنها واژهٔ طبال می‌تواند جواب مسأله باشد که با ۴ شرط مسأله هم سازگار است.



شکل ۱۷۴

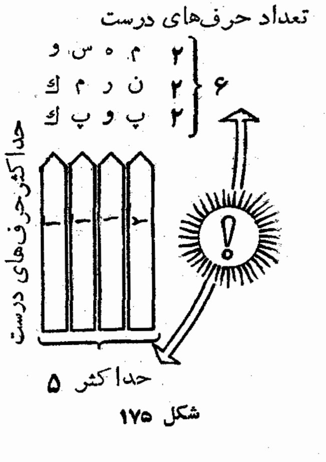
راه حل دوم. قبل از آن‌که به‌حل مسأله بپردازیم، به‌شکل ۱۷۴-a توجه کنیم (ستاره‌ها و نقطه‌های سیاه، به‌همان معنایـی هستند کـه در حل مسألهٔ ۱۰۷ داشتیم). در واژه‌ای که دارای ۱ حرف درست است، دست‌کم یکی از ستاره‌ها، جای حرفی را گرفته است که نادرست حدس زده شده است، بنابراین حرفی هم‌که در زیرآن قرار دارد (و متعلق به‌واژه‌ای است که، در آن، ۳ حـرف درست وجود دارد)، بـا حرف متناظـر واژهٔ مجهـول تطبیق نمی‌کند. بنابراین، در این واژه با ۳ حرف درست، تنها یکی از ستاره‌ها با حرف متناظر خـود در واژهٔ مجهول تطبیق نمی‌کند و دونقطهٔ سیاه، در این

واژه، درست حدس زده شده‌اند.

در مسألهٔ ۱۱۲، دوبار به‌چنین «بدنه‌ای» برخورد می‌کنیم: این‌وضع از یك طرف با واژه‌های (۱) و (۳) و از طرف دیگر، با واژه‌های (۲) و (۳) پیش می‌آید (شکل‌های ۱۷۴–b و c). به‌این ترتیب، به‌کمك واژه‌های (۱) و (۲) و (۳)، سه حرف متناظر واژهٔ مجهول پیدا می‌شود و، با اطلاع از این سه حرف، به‌سادگی می‌توان حرف چهارم را از واژهٔ (۴) به‌دست آورد (شکل ۱۷۴–d).

.۱۱۳

در سه واژه، روی هم، باید ۶ حرف به‌درستی حدس زده شده باشد، در حالی‌که، در ستون‌ها، روی هم، بیش از ۵ حرف درست، ممکن نیست (شکل ۱۷۵). بنابراین، شرطهای مساله متناقض‌اند؛ مساله جواب ندارد.



شکل ۱۷۵

.۱۱۴

از شرط (۱) و، مثلاً، شرط (۲)، نتیجه می‌شود که، حرف اول واژهٔ مجهول تنها می‌تواند A باشد (بخش اول مسألهٔ ۹۶ را ببینید). از مقایسهٔ (۱) و (۴) معلوم می‌شود که حرف‌آخر هیچ‌کدام از‌آن‌ها، با حرف‌آخر واژهٔ مجهول تطبیق نمی‌کند. چون واژهٔ (۶) با A آغاز می‌شود (که حرف اول واژهٔ مجهول است) و، ضمناً، در این واژه، تنها یك‌حرف، درست حدس زده

شده است، بنابراین، حرف V با حرف دوم واژهٔ مجهول تطبیق نمی‌کند. و این، به‌معنای آن است که، در واژه‌های (۱) و (۴)، تنها حرف سوم A با حرف متناظر خود در واژهٔ مجهول، یکی است.

اگر واژهٔ (۷) را با واژهٔ (۵) مقایسه کنیم و، سپس، (۲) را در نظر بگیریم، متوجه می‌شویم که، یا حرف دوم واژهٔ مجهول K است (که در این‌صورت، حرف آخر آن، T نیست) و یا حرف چهارم آن T است (که در این‌صورت، حرف دوم آن K نیست). به‌همین‌ترتیب، از مقایسهٔ شرط (۷) با شرط (۳)، می‌بینیم که حرف دوم یا حرف چهارم واژهٔ مجهول (و البته، تنها یکی از آن‌ها)، باید D باشد.

بنابراین، مسألهٔ دوجواب دارد: $ADAT$ و $AKAD$. هیچ‌کدام از این دوجواب، بردیگری برتری ندارد، زیرا، هردوی آن‌ها باتمامی شرطهای مسأله سازگارند.

۱۱۵.

شرطهای مسأله متناقض‌اند: مسأله جواب ندارد.

در واقع، در واژه‌های (۱) و (۲)، بایدروی‌هم ۶ حرف درست حدس زده شده باشد، ولی آن‌ها، حتی یك‌حرف مشترك ندارند، بنابراین، تعداد حرف‌هایی که دراین‌دوواژه، روی‌هم، درست حدس‌زده شده است، نمی‌تواند از ۵ بیشتر باشد (اگر این دوواژه را، حرف به‌حرف، زیرهم بنویسیم، در هرستون، بیش از یك‌حرف درست، نمی‌تواند وجود داشته باشد).

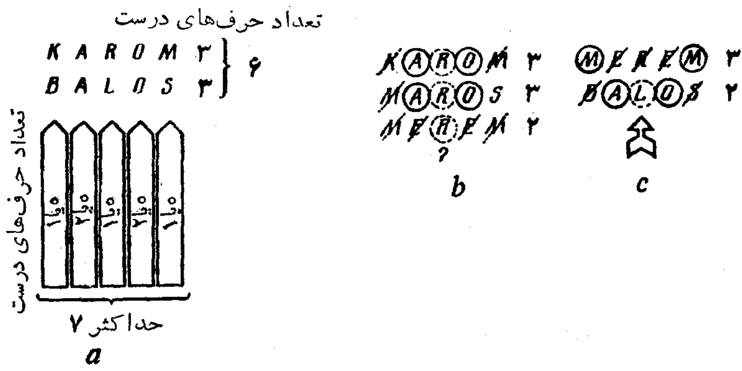
یادداشت ۱. به‌واژهٔ (۳)، نیازی پیدا نکردیم و این، به‌معنای آن‌است که، اگر شرط (۳) را حذف کنیم و یا آن‌را با واژهٔ دیگری عوض کنیم، هیچ تغییری در متناقض‌بودن شرطها، حاصل نمی‌شود.

یادداشت ۲. در واقع، شرط (۳) به‌این جهت گذاشته شده است که، تناقض موجود در شرطهای دیگر را، «پنهان کند». تاکنون، بارها، تعداد حرف‌های درست را در ستون‌ها محاسبه کرده‌ایم. اگر به‌جای دوواژه، هرسه واژه را، حرف به‌حرف، زیر هم می‌نوشتیم، نمی‌توانستیم به‌تناقض موجود پی ببریم. (اگر تعدادکل‌حرف‌های درست‌را، ازروی ستون‌ها، محاسبه کنیم،

می‌تواند برابر ۸ باشد؛ واین تعداد، طبق‌شرطهای مسأله‌هم، برابر۸است.)

۱۱۶.

واژه‌های(۱)و(۴)را،حرف‌به‌حرف، زیرهم می‌نویسیم(شکل۱۷۶-a) و تعداد ممکن حرف‌های درست ستون‌ها را محاسبه می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شودکه ، تعداد کل واژه‌هـای درست در این دو واژه ، نمی‌تواند از ۷ تجاوزکند. ولی از آن‌جاکه، بنابرفرض ، تعداد این‌حرف‌های درست ، برابر است با ۶، بنابراین، در یکی از ستون‌ها، نباید حتی یك‌حرف درست هم ، وجود داشته باشد. ولی، ستون‌های دوم وچهارم، نمی‌توانند«خالی» باشند، زیرا اگر حرف‌های تکراری این‌دو ستون، باحرف‌های متناظر خود در واژهٔ مجهول‌تطبیق‌نکنند، آن‌وقت حداکثرتعداد حرف‌های درست در دو واژه، تا ۲ تنزل‌می‌کند، یعنی روی‌هم از ۵ تجاوزنمی‌کند، که باشرطهای مسأله‌متناقض است. درنتیجه،حرف‌های AوO، باحرف‌های نظیرواژهٔ‌مجهول، یکی هستند.



شکل ۱۷۶

این‌آگاهی، به‌ما امکان می‌دهد تاواژه‌های (۱)، (۲) و (۳) را بـاهم مقایسه‌کنیم (شکل ۱۷۶-b). آیا ممکن است، حرف وسط واژهٔ مجهول R باشد؟ به‌سادگی دیده می‌شودکه، پـاسخ به‌این پرسش، منفی است، زیرا در غیر این‌صورت،درواژهٔ(۳)، همهٔ حرف‌های دیگر، نادرست ازآب درمی‌آیند. ولی،اگرR ، حرف وسط واژهٔ مجهول‌نباشد،آن‌وقت در واژهٔ $MEREM$،

دوحرف‌کناری M باحرف‌های متناظر خود درواژهٔ مجهول، تطبیق می کنند.
از مقایسهٔ (۳) و (۴) (شکل ۱۸۶ - c) ، معلوم می‌شود که حرف درست ستون سوم، تنها می‌تواند L باشد.

به‌این‌ترتیب، مسأله تنها یك‌جواب دارد: واژهٔ مجهول عبارت است از $MALOM$. به‌سادگی می‌توان تحقیق‌کردکه، این واژه، باهمهٔ‌شرطهای مسأله سازگار است.

یادداشت. از کجا حدس زدیم که ، برای حل مسأله، بهتر است از واژه‌های (۱) و (۴)آغاز کنیم؟ همیشه باید از واژه‌هایی آغازکردکه ، تعداد حرف‌های درست درآن‌ها، بیشتر ازدیگران باشد و، اگرآن‌ها را حرف به‌حرف زیر هم بنویسیم، تعداد حرف‌های تکراری در ستون‌ها، از دیگر واژه‌هـا کمتر باشد. در این‌صورت، حداکثر تعداد حرف‌هایی‌که، در این واژه‌ها، می‌تواند درست باشد، از دیگران‌کمتر خواهد بود. دربسیاری از مسأله‌ها دیده‌ایم‌که، اگر این‌دو عدد خیلی با هم اختلاف نداشته بـاشند ، معمولاً می‌توان جواب مسأله را، با موفقیت، به‌دست آورد.

۱۱۷.

از مقایسهٔ واژه‌های (۱) و (۲) دیده می‌شودکه ، حرف چهارم واژهٔ مجهول، نمی‌تواند A یا O باشد. در واقع، تعداد حرف‌های درست درهمهٔ ستون‌ها، به‌جز ستون چهارم ، می‌تواند ۴ (یا ۰ یا ۲) بـاشد. چون تعداد

$$L\ A\ K\ \cancel{O}\ S\ \ ۲ \qquad L\ A\ \cancel{K}\ O\ S\ \ ۲ \qquad \cancel{K}\ A\ J\ O\ S\ \ ۲$$
$$L\ A\ K\ \cancel{A}\ S\ \ ۲ \qquad L\ A\ \cancel{J}\ O\ S\ \ ۲ \qquad \cancel{B}\ A\ J\ O\ S\ \ ۲$$

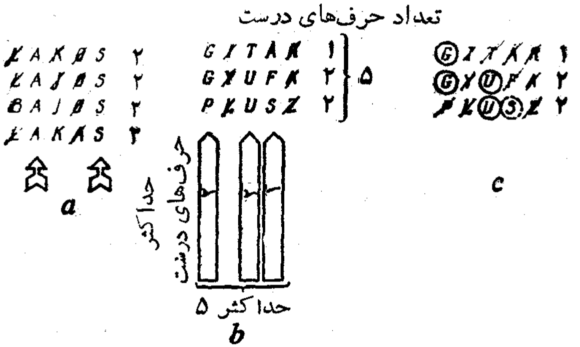
شکل ۱۷۷

حرف‌های درست، عددی است زوج (و برابر ۴)، آن‌وقت ، در تنها ستونی هم‌که شامل ۲ حرف مختلف است ، بـاید تعداد حرف‌هـای درست ، عددی زوج باشد و، روشن است که، این‌عدد زوج، جز ۰ ، چیز دیگری نمی‌تواند باشد (شکل ۱۷۷).

به‌همین ترتیب، ازشرطهای (۲) و (۳) نتیجه می‌شودکه، حرف‌وسط

واژهٔ مجهول، نمی‌تواند K یا J باشد، همچنین با مقایسهٔ واژه‌های (۳) و (۴)،معلوم می‌شودکه، واژهٔمجهول، با L یا B آغاز نمی‌شود (شکل ۱۷۷).

به‌این‌ترتیب، در واژه‌های (۱)، (۲) ، (۳) و (۴)، حرف‌های اول، سوم وچهارم ، بـا حرف‌های متناظر خود در واژهٔ مجهول، تطبیق نمی کنند (شکل ۱۷۸-a). بنابراین ، دو حرف درست در هریك از این واژه‌ها ، تنها می‌تواند حرف‌های دوم و پنجم بـاشد؛ یعنی، حرف دوم واژهٔ مجهول A ، و حرف پنجم‌آن، S است.



شکل ۱۷۸

اکنـون ، واژه‌هـای (۵) ، (۶) و (۷) را بـا هم مقـایسه می‌کنیم (شکل ۱۷۸-b) ؛ می‌بینیم‌که ، در همهٔ ستون‌هـا ، بیش از ۵ حرف درست نمی‌تواند وجود داشته بـاشد. و چون ، از طریق سطرها هم، به‌همین عدد می‌رسیم، بنابراین، حرف‌های تکراری دوستون اول و سوم ، بـا حرف‌های متناظر خود در واژهٔ مجهول، تطبیق می کنند. و بـا این‌آگاهی ، حرف‌های دیگر هم، به‌سادگی پیدا می‌شوند.

مسأله، یك‌جواب دارد: حرف مجهول ، عبارت است از $GAUSS$ ، که با همهٔ شرطهای مسأله سازگار است.

۱۱۸. چند پرسش

مسأله‌ای ازلوتوی حرفی‌را یك‌ارزشی گوییم، وقتی‌که تنها یك‌جواب

داشته باشد؛ در حالتی‌که چند جواب داشته باشد، آن‌را، چندارزشی و در حالتی‌که ٥ جواب داشته باشد، آن‌را بی‌جواب می‌نامیم.

جواب مسأله باید بـا همهٔ شرط‌های مسأله سازگار باشد. بنابراین، هرشرط اضافی،تنها می‌تواند محدودهٔ جواب (یا به‌قول ریاضی‌دانان،مجموعهٔ جواب) را تنگ‌ترکند، وهرگز، این محدوده راگسترش نمی‌دهد. اگرشرطی موجب حذف‌واژه‌ای ازمجموعهٔ‌جواب‌های ممکن‌بشود، واردکردن هیچ‌شرط تازه‌ای نمی‌تواند اثر شرط موجود قبلی را از بین ببرد.

[تاوقتی‌که هیچ‌حدسی زده نشده‌است وتنها می‌دانیم‌که، واژهٔ‌مجهول، مثلاً از٥ حرف تشکیل شده است، جواب مسأله می‌تواند هرواژه‌ای شامل ٥ حرف باشد. نخستین واژه‌ای‌که نـام می‌بریم (حدس می‌زنیم)، برخی از «نـامزدهـای جواب» را از گردونه خـارج می‌کند (ومعمولاً، تعداد چنین واژه‌هایی زیـاد است)، ولی هنوز واژه‌هـایی (که تعدادآن‌ها هم‌کم نیست) باقی می‌ماند. حدس دوم، بخشی دیگر از واژه‌های باقی‌مانده را از«نامزدی جواب»کنار می‌زند، حدس سوم، بـازهم بخش دیگری را وغیره. وقتی‌کـه آخـرین حدس را بزنیم (آخرین شرط مسأله، برقـرار شود)، ممکن است، تعداد واژه‌های بـاقی‌مـانده، بیشتر از واحد بـاشد (در این حالت، مسأله، چندارزشی است)، یـا مساوی واحد بشود (مسألهٔ یك‌ارزشی) و یا ٥ باشد (مسألهٔ بدون جواب).

البته، ممکن است این‌وضع هم پیش‌آیدکه، ورود شرط جدید، موجب تنگ‌ترشدن محدودهٔ جواب‌ها نشود. این وضع، تنها وقتی پیش می‌آید که، شرط جدید، باهمهٔ شرط‌های قبلی سازگار باشد.]

برعکس، کنارگذاشتن هـر شرط، تنها می‌تواند «مجموعهٔ جواب» را گسترش دهد، زیرا همهٔ واژه‌هایی‌که، با بودن این شرط، می‌توانستند جوابی از مساله باشند، بعد ازکنارگذاشتن‌آن‌شرط، بازهم«حق» خود را به عنوان جواب حفظ می‌کنند، ولی، واژه‌هایی هم ممکن است وجود داشته باشند که باشرط‌های‌باقی‌مانده سازگارباشند، درحالی که، باشرط‌حذف‌شده،نمی‌ساختند.

به‌این ترتیب، به‌پرسش‌های مساله، می‌توان چنین پاسخ داد.

I. اگر یك (یا چند) حدس تازه بزنیم، آن وقت

c) مسالهٔ بی‌جواب، بازهم بی‌جواب می‌ماند،

a) مسالـهٔ یك ارزشی ، ممکن است یك ارزشی باقی بمانـد و یا به مساله‌ای بی‌جواب تبدیل شود،

b) مسالهٔ چندارزشی، می‌تواند چندارزشی باقی بماند، یا به‌مساله‌ای یك ارزشی ویا حتی به‌مساله‌ای بی‌جواب تبدیل شود.

II. اگر ازیك یاچند حدس خود صرف‌نظر کنیم، آن‌وقت

b) مسالهٔ چند ارزشی ، همچنان به‌صورت چند ارزشی باقی می‌ماند (تعداد جواب‌ها، ممکن است زیادتر شود، ولی‌کمتر نمی‌شود)،

a) مسالهٔ‌یك‌ارزشی، ممکن‌است یك‌ارزشی‌باقی‌بماند ویا به‌مساله‌ای چندارزشی تبدیل شود،

c) مسالهٔ بدون جواب، ممکن است بـه مسالـه‌ای چند ارزشی و یا مساله‌ای یك‌ارزشی تبدیل شود.

بخش دهم

۱۱۹.

[بهتر است، حل مساله را، از عـدد e درردیف افقی آغازکنیم، زیرا از روی تعریف خود، به‌طور مشخص پیدا می‌شود.]

بزرگترین‌عدد سه‌رقمی ۹۹۹، وکوچکترین آن‌ها ۱۰۰ است، بنابراین عددe درردیف‌افقی، برابراست با۸۹۹ (شکل ۱۷۹-a). ولی دراین‌صورت، عدد a درردیف‌قائم، بـرابـراست با ۴۰۰ — ۸۸۸، یعنی ۴۸۸، وعدد a در ردیف افقی: ۲ : ۴۸۸، یعنی ۲۴۴، به‌شرطی‌که ازآخر به‌اول نوشته شود، یعنی ۴۴۲ (شکل ۱۷۹ ـ b).

رقم وسط عدد b درردیف عمودی، برابراست با ۴ — ۹ ، یعنی ۵، و رقم‌آخرعدد d در ردیف افقی، تنها ۰ می‌تواند باشد، زیرا این عدد بر ۱۰

a	b	c
d		
e ۸	۹	۹

a

a ۴	b ۴	c ۲
d ۸		
e ۸	۹	۹

b

a ۴	b ۴	c ۲
d ۸	۵	۰
e ۸	۹	۹

c

شکل ۱۷۹

بخش‌پذیر است.

به‌این ترتیب، جدول پرمی‌شود (شکل ۱۷۹ ـ c)، و چون هیچ‌کدام از عددها، با تعریف‌های صورت مساله، متناقض نیستند، بنابراین، جواب حاصل، قابل قبول است.

۱۲۰. چند پرسش

الف. تفاوت، تنها دراین است‌که دراین‌جا لزومی ندارد، عدد d از ردیف افقی، بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد. جواب مسالهٔ قبلی به‌قوت خود باقی است، زیرا ضمن حل آن، هرگز از بخش‌پذیری عدد d درردیف افقی بر۱۷، استفاده نکردیم.

ب. آخرین گام حل را، درمسالهٔ قبلی، بااستفاده از عدد d درردیف افقی برداشتیم. اکنون باید بگوییم‌که، این‌عدد، به‌صورت ‎*۸۵‎ است و باید رقم‌آخرآن را پیداکنیم. عدد ۸۵۰ مضربی است از ۱۷؛ ضمناً، به‌جز ۸۵۰، هیچ عدد دیگری به صورت ‎*۸۵‎ بر ۱۷ بخش‌پذیر نیست. بنابراین، در این حالت هم، درجواب تغییری حاصل نمی‌شود.

پ. درحل‌مسالهٔ قبل دیدیم‌که، بدون استفاده ازعدد d درردیف‌افقی، توانستیم تمام خانه‌های جدول را، به‌استثنای‌آخرین رقم‌همین عدد، پر کنیم. باتوجه به‌سایر خانه‌های جدول، می‌دانیم‌که عدد d از ردیف افقی به‌صورت ‎*۸۵‎ است. دوعدد ازاین نوع پیدا می‌شود‌که بر۵ بخش‌پذیر است: ۸۵۰ و ۸۵۵. ازآن‌جا که، هردوی این عددها، با تعریف عدد c ازردیف عمودی

تطبیق می‌کنند، بنابراین، هر دو قابل قبول‌اند: در این حالت، مساله ۲ جواب دارد.

ت. ازسایر تعریف‌ها (وبدون استفاده از تعریف خود عدد d درردیف افقی)، می‌دانیم که، عدد d از ردیف افقی، به صورت *۸۵ است؛ یعنی می‌تواند از ۸۵۰ تا ۸۵۹، هرعددی باشد. ولی، این عدد، باید مضربی از ۱۸ باشد. ۴۷ × ۱۸ برابر۸۴۶ می‌شودکه از۸۵۰کوچکتر است و، مضرب بعدی ۱۸، یعنی ۴۸ × ۱۸ برابر ۷۶۴ می‌شودکه از۸۵۹ بزرگتر است. بنابراین، دراین‌حالت، مساله جواب ندارد: شرطهای آن متناقض یکدیگرند.

ث. دراین‌حالت‌هم، شرطها متناقض‌اند ومساله‌جواب ندارد. درواقع، از تعریف e درردیف افقی، نتیجه می‌شودکه، عدد c ازردیف عمودی، باید به ۹ ختم شود، و روشن است‌که، این عدد، نمی‌تواند زوج باشد.

۱۲۱.

[اگرهمهٔ تعریف‌های صورت مساله‌را، ازاول تاآخر، ازنظربگذرانیم، قانع‌می‌شویم‌که، تنها سه‌تا ازاین تعریف‌ها «بسته‌اند»، این تعریف‌هاعبارتند از: تعریف a درردیف افقی وتعریف‌های c و d درردیف عمودی. ازتعریف عدد i درردیف افقی، نمی‌توان،آن را، به‌طوریك‌ارزشی پیداکرد. درتعریف بقیهٔ عددهای ردیف‌های افقی، از آگاهی‌هایی استفاده شده‌است‌که به‌عددهای دیگر مربوط می‌شوند، واز بقیهٔ تعریف‌ها در ردیف‌های عمودی، هیچ‌آگاهی تازه‌ای به‌دست نمی‌آید.]

عددی‌که مکعب آن باید برابر با عدد a از ردیف افقی بشود، از ۹ بزرگتر و از ۲۲ کوچکتر است. درواقع، داریم:

$$۹^۳ < ۱۰^۳ = ۱۰۰۰ \quad , \quad ۲۲^۳ = ۱۰۶۴۸ > ۱۰۰۰۰$$

یعنی مکعب عدد۹، سه‌رقمی ومکعب عدد ۲۲، پنج رقمی می‌شود، درحالی که عدد a از ردیف افقی، چهاررقمی است ولی، بین ۹ و ۲۲، تنها یك عدد وجود داردکه رقم‌های آن باهم برابرند: عدد ۱۱. بنابراین، عدد a ازردیف

a ۱	b ۳	c ۳	d ۱
e		f ۶	
g	h	i	
j ۱	۲	۹	۶

a

a ۱	b ۳	c ۳	d ۱
e		f ۶	
g ۹	h ۶	i	
j ۱	۲	۹	۶

b

۲

a ۱	b ۳	c ۳	d ۱
e ۹	۱	f ۶	۹
g ۹	h ۶	i	
j ۱	۲	۹	۶

c

a ۱	b ۳	c ۳	d ۱
e ۹	۱	f ۶	۹
g ۹	h ۶	i ۶	۳
j ۱	۲	۹	۶

d

شکل ۱۸۰

افقی، برابراست با ۱۱^{۳}، یعنی ۱۳۳۱.

دربارهٔ عـدد c ازردیف عمودی، اکنون می‌دانیم کـه، رقم اول آن، برابراست با۳، بنابراین، تنها می‌تواندبرابر۳۶ باشد، این تنها مجذورکاملی است‌که با ۳ آغاز می‌شود.

حالا، به‌عددd ازردیف‌عمودی می‌پردازیم. برای پیداکردن این عدد، باید آگاهی بیشتری داشته باشیم. این آگاهی را می‌توان با به‌دست آوردن عدد j درردیف افقی به‌دست آورد.

درواقع، عدد j ازردیف افقی، تنها می‌تواند برابر$۳۶^{۲}$، یعنی ۱۲۹۶ باشد (شکل ۱۸۰ ـ a).

اکنون، ۲ رقم ازعدد d در ردیف عمودی معلوم است: همین ۲ رقم کافی است تا آن را به‌طورکامل، معین‌کنیم. اگر عدد g از ردیف افقی را، در جدول، بنویسیم، مساله ساده‌تـر می‌شود: عدد g از ردیف افقی روشن است، زیرا عدد j ازردیف افقی را می‌شناسیم. این عدد (g ازردیف افقی)، برابراست با ۹۶ (شکل ۱۸۰ ـ b).

خانه‌هایی از جدول که تا کنون پرشده است، به‌ما امکان‌می‌دهد تا عددهای e و f از ردیف افقی را بنویسیم (شکل ۱۸۰ - c).

اکنون‌دیگرمی‌توانیم، به‌سادگی، عدد d ازردیف عمودی‌را بنویسیم: این عدد ۱۹۳۶ است، زیرا، هیچ‌کدام ازعددهای ۱۹۰۶، ۱۹۱۶، ۱۹۲۶، ...، ۱۹۹۶ (به‌جز ۱۹۳۶)، مجذور یك عدد درست نیستند.

استدلال اخیر، ازاین‌جا ناشی می‌شود که داریم:

$$۴۳^۲ = ۱۸۴۹ \quad , \quad ۴۵^۲ = ۲۰۲۵$$

ودرنتیجه، بین دوعدد ۱۸۴۹ و ۲۰۲۵، هیچ عددی، به‌جز۱۹۳۶، مجذور کامل نیست.

عدد i ازردیف افقی، تنها می‌تواند ۶۳ باشد، زیرا رقم دوم آن‌برابر است با ۳ و، چون عدد ۳ فرد است، نمی‌تواند دوبرابر رقم اول عدد باشد. بنابراین، رقم اول این‌عدد، دوبرابر رقم دوم‌آن است.

به‌این‌ترتیب، جدول‌موردنظر، تنها می‌تواند به‌صورت شکل ۱۸۰-d باشد. به‌سادگی‌می‌توان تحقیق کرد که، عددهای این جدول، باتمام شرطهای مساله سازگارند و، درنتیجه، جواب مساله است.

[نباید گمان کرد که یادآوری اخیر (دربارۀ تحقیق درستی جواب)،تنها یك سخت‌گیری درکاراست. چه‌بسا که شرطهای جدول، مثل هرمسالۀریاضی دیگری، متناقض باشدکه، درآن صورت، جوابی نخواهیم داشت (اگریك‌بار دیگر به‌پاسخ مربوط به‌پرسش‌های ت و ث ازمسالۀ قبلی مراجعه کنید، به‌این مطلب، معتقد می‌شوید). درحل مسالۀ ۱۲۱، مثلاً ازاین بخش تعریف عدد d در ردیف عمودی استفاده نکردیم‌که گفته بود، این عدد باید مجذور یك عدد دورقمی، با رقم‌های مساوی، باشد. بنابراین، ممکن بود، به‌جای عدد d درردیف عمودی، مجذور عددی بـا رقم‌های نامساوی نوشته شده باشد. و اگرچنین بـود، آن‌وقت، مسالۀما، بی‌جواب باقی می‌ماند. به همین دلیل است که، ضمن استدلال‌های خود، مثلاً نگفتیم که «عدد i از ردیف افقی، برابر است با ۶۳»، بلکه گفتیم «عدد i از ردیف افقی، تنها می‌تواند برابر ۶۳ باشد».]

یادداشت. روشن است که، برای حل یك مساله از جدول عددهای متقاطع، ضرورتی ندارد که، حتماً، یك زنجیره از استدلال‌های به هم پیوسته وجود داشته باشد. اگر خواننده‌ای، مساله را به طریق دیگری حل کرده است، نباید گمان کند که، راه‌حل او، نادرست است. اگر راه دیگری برای حل مساله انتخاب کرده‌اید، آن را با راه حل ما مقایسه کنید و ببینید، کدام ساده‌تر و کوتاه‌تر است. (لزومی به تاکید ندارد که، تحقیق درستی جواب، همیشه مفید است، زیرا ازاین راه معلوم می‌شود که، آیا رخته‌ای یااشکالی منطقی دراین جواب، وجود دارد یا نه!).

۰۱۴۴

[دراین جا، پیداکردن تعریفی که، جدا ازسایر تعریف‌هابتواند عددی را مشخص کند، دشوارتر است ولی، اگر همهٔ تعریف‌ها را بادقت مرور کنیم، می‌توانیم تعریف موردنظررا کشف کنیم: منظور، عدد i ازردیف افقی‌است.]

عدد دورقمی i درردیف افقی، برابراست باتوان پنجم رقم دوم خود. این‌عدد، تنها می‌تواند ۳۲ باشد، زیرا برای توان پنجم ۳ به‌عددی سه‌رقمی وبرای توان پنجم ۱، به‌عددی یك رقمی می‌رسیم.

ازهمین‌جا، بلافاصله نتیجه می‌شود که، عدد d درردیف عمودی، تنها عدد ۲۲۲۲ می‌تواند باشد (شکل ۱۸۱ ـ a).

a

a	b	c	d ۲
e		f	۲
g	h	i ۳	۲
j			۲

b

a ۸	b	c	d ۲
e ۸		f	۲
g ۸	h	i ۳	۲
j ۸	۶	۴	۲

c

a ۸	b ۸	c ۳	d ۲
e ۸	۰	f ۵	۲
g ۸	h ۱	i ۳	۲
j ۸	۶	۴	۲

شکل ۱۸۱

[دراین جا، به‌دشواری برمی‌خوریم، باوجودی که۲عدد راشناخته‌ایم، هرکوششی برای استفادهٔ از آن‌ها و ادامهٔ مسیر، با ناکامی مواجه می‌شود:

مسیرحرکت، یکباره، همواری خود را ازدست می‌دهد!

برای ادامهٔ جست وجو، از دوطریق می‌توان جلو رفت: یا از عدد f ویا ازعدد j (هردو درردیف افقی) آغاز می‌کنیم. برای «ساختن» هر یك‌از آن‌ها، باید یکی از دوحالت ممکن را انتخاب کرد (حالت‌های دیگر، حذف می‌شوند).

ما ترجیح می‌دهیم، ازعدد j آغازکنیم. درواقع، با پیدا شدن j، می‌توان a را ازردیف قائم به‌دست آورد و، در نتیجه، کار را سریع‌تر ادامه داد؛ علاوه برآن، پیداکردن‌یکی ازدوحالت عدد j (درردیف افقی)،ساده‌تر است.]

درتعریف عدد j ازردیف افقی گفته شده است‌که، تفاضل هر رقم از رقم قبلی آن، مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت، می‌تواند ۱ یا ۲ باشد. حالت دیگری وجود ندارد، زیرا اگراین مقدار ثابت را ۳ بگیریم، آن‌وقت، رقم اول این عدد، برابر ۱۱ می‌شودکه ممکن نیست. بنابراین، عدد j در ردیف افقی یا برابر ۵۴۳۲ و یا برابر ۸۶۴۲ است. ولی، عدد ۵۴۳۲ را نمی‌توان انتخاب‌کرد، زیرا دراین‌صورت، رقم آخر عدد a درردیف عمودی برابر ۵ می‌شود و، در نتیجه، این‌عدد، بنابه تعریف خود، زوج از آب درنمی‌آید. به‌این ترتیب، عدد j درردیف افقی، تنها می‌تواند ۸۶۴۲ باشد که، درنتیجه، برای عدد a از ردیف عمودی هم، تنها عدد ۸۸۸۸ به دست می‌آید (شکل ۱۸۱ - b).

عدد i درردیف عمودی، خودبه‌خود، معلوم و برابر ۳۴ می‌شود، بنابراین، عدد c از ردیف عمودی، تنها می‌تواند برابر ۱ + ۳۴، یعنی ۳۵ باشد. به‌این ترتیب، خانه‌های عدد f درردیف افقی‌هم پرمی‌شود: این عدد برابراست با ۵۲. عدد g درردیف افقی، عددی است دو رقمی‌که با ۸ آغاز شده است وچون بر ۹ بخش‌پذیر است، تنها می‌تواند ۸۱ باشد. عدد h در ردیف عمودی‌هم، به‌خودی خود، به‌دست آمده است: ۱۶. این عدد، امکان ساختن عدد b ازردیف عمودی را فراهم می‌کند: ۸۰ = ۱۶ × ۵.

به‌این ترتیب، جدول پرمی‌شود. جدول را، تنها به‌همین یك صورت،

می‌توان پـرکرد (شکل ۱۸۱ ـ c). ازآن جاکـه، عددهای جدول، با تمامی شرطهای مساله سازگارند (وما از خواننده می‌خواهیم، این تحقیق را انجام دهد). بنابراین، جواب مساله است.

یادداشت. اشتباه است، اگر گمان کنیم که، ازتعریف عدد a در ردیف افقی، می‌توان نتیجه گرفت کـه، رقم سمت راست آن، برابر صفر است. این وضع، به‌شرطی پیش‌می‌آیدکه، درتعریف عدد a ازردیف افقی، گفته می‌شد: برابراست با ۱۰ برابر یك‌عدد درست یا برابر است با ۱۰ بـرابـر فلان عدد جدول. ولی، $\frac{۱}{۱۰}$ یك عدد، اجباراً عدد درست نیست، و ضمناً، هرعددی ۱۰ برابر $\frac{۱}{۱۰}$ خودش است.

به‌این‌ترتیب، تعریف a ازردیف افقی‌تعریفی«تهی»است وهیچ‌نشانه‌ای ازاین عدد را، به‌ما نمی‌دهد.

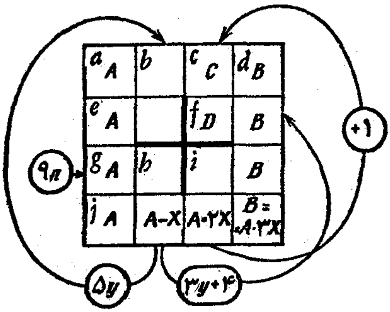
۱۲۳. حالت دیگر

[مسالهٔ ۱۲۳، به‌مراتب، دشوارتر از مسالهٔ ۱۲۲ است. هیچ دری، برای ورود، بازنیست: این‌بار، دیگر نمی‌توان از عدد i درردیف افقی آغاز کرد. بنابراین، راه‌دیگری باقی نمی‌ماند، جزاین‌کـه دوبارهٔ تمامی تعریف‌ها را بادقت مرورکنیم، به‌این امیدکه، شاید، آگاهی‌هایی درباره عددها به‌دست آوریم: درهرحال، باید «دستگیره‌ای» پیداکرد. برای ساده‌تر کردن جست‌وجوهای خود، طرحی راکه درشکل ۱۸۲ نشان داده‌ایم، رسم می‌کنیم.]

اگرعدد h درردیف عمودی، ضمن‌ضرب در ۵، بازهم یك عدد دورقمی می‌شود، بنابراین، این عدد بایدکوچکتر از ۲۰ باشد و، درنتیجه، با رقم ۱ آغاز می‌شود.

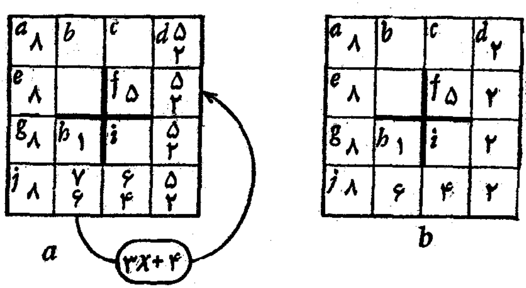
ولی دراین‌صورت، عدد g درردیف افقی برابر ۸۱، و عدد a درردیف عمودی، برابر ۸۸۸۸ وعدد j درردیف افقی، برابر ۸۷۶۵ یا ۸۶۴۲ می‌شود. عدد d درردیف عمودی، درحالت اول برابر ۵۵۵۵، و درحالت دوم برابر

۲۲۲۲ خواهد شد (شکل ۱۸۳ ـ a).



شکل ۱۸۲

عدد h درردیف عمودی، یا برابر ۱۷ ویا برابر ۱۶ است. عدد e در ردیف افقی، درحالت اول، برابر۴+۱۷×۳، یعنی ۵۵، و درحالت دوم، برابر ۴+۱۶×۳، یعنی ۵۲ می‌شود. بنابراین، در هر حال، با ۵ آغاز می‌شود. باتوجه به‌اطلاعی که دربارهٔ عدد c ازردیف عمودی داریم، معلوم می‌شودکه، عدد i ازردیف عمودی، نمی‌تواند به ۶ ختم‌شود؛ رقم آخرآن، تنها می‌تواند ۴ باشد (زیرا ۵=۱+۴، درحالی‌که ۷=۱+۶). به این ترتیب، تنها یکی ازدو «نامزد» عدد j درستون افقی را می‌توان قبول‌کرد: ۸۶۴۲. بنابراین، جدول ما، به‌صورتی درمی‌آیدکه درشکل ۱۸۳ ـ b نشان داده‌ایم.



شکل ۱۸۳

خانه‌های خالی، به‌سادگی پرمی‌شود: عدد i درردیف افقی برابر۳۲،

عدد c درردیف عمودی برابر ۳۵ وعدد b درردیف عمودی برابر ۱۶ × ۵، یعنی ۸۰ است.

یادداشت. می‌بینیم که، این دوتغییر در تعریف عددها، هیچ تاثیری بر نتیجه نهائی جدول ندارد؛ عددهای خانه‌های جدول جدید، همان عددهای خانه‌های جدول قدیم‌اند (باوجودی که‌درحالت‌اخیر، اطلاع کمتری ازعددها، نسبت به حالت قبل، داریم). البته، می‌توانستیم ازقبل ثابت‌کنیم، هرعددی که در شرایط جدول قبل صدق‌کند، درشرایط جدول فعلی هم صدق می‌کند. با وجود این، لازم بود روشن کنیم که: آیا شرایط جدید، منجر به پیدایش جواب‌های تازه‌ای نمی‌شود وآیا می‌توان، با استفاده از استدلال‌های منطقی ساده، خودرا به جواب رسانید؟

۱۲۴.

[ممکن است، در برخورد اول، به‌نظر برسد که نمی‌توان تکیه‌گاهی برای جست وجوی جواب پیداکرد، ولی اگر دقیق‌تر باشیم، می‌توانیم‌کلید راه حل را پیداکنیم.]

همهٔ رقم‌های عدد c درردیف افقی باهم برابرند و، نصف آن، عددی است درست (a ازردیف افقی)؛ عدد d درردیف عمودی، برابر است با عدد c درردیف افقی وعدد e درردیف افقی، برابربا مجذورآن است. همهٔ این‌ها، به‌معنای آن‌است‌که، عددهای c درردیف افقی و d درردیف قائم، زوج وبا هم برابرند و، ضمناً، عدد چهاررقمی مجذورآن‌ها، به‌همان رقمی ختم‌می‌شود که، این دو عدد، به‌آن ختم شده‌اند.

ولی، تنها عددهایی‌که به‌۰، ۱، ۵ یا ۶ختم شده‌باشند، بعدازمجذور. کردن، رقم‌آخرآن‌ها، تغییرنمی‌کند.

[درحالت‌کلی،می‌توان‌گفت‌که، رقم‌آخر حاصل‌ضرب دوعدد، برابراست با رقم آخر حاصل‌ضرب دو رقم آخر عامل‌های ضرب. این نتیجه، به‌سادگی، ازخود روش ضرب‌دوعدد، به‌دست می‌آید. اگربخواهیم، عددی را درخودش ضرب‌کنیم (یعنی مجذور آن را به‌دست آوریم)، آن‌وقت باید رقم آخرآن را

درخودش ضرب‌کنیم (به‌توان ۲ برسانیم) تا معلوم شود رقم آخرمجذور یك عدد، بر قم آخر خود عدد، منطبق است یانه.]

عدد c در ردیف افقی، زوج است، بنابراین نمی‌تواند به ۱ یا ۵ ختم شود. این عدد، به‌صفر هم نمی‌تواند ختم شود، زیرا دراین صورت، عدد d ازردیف عمودی، باید با رقم ۰ شروع شده باشد. به‌این ترتیب، عدد c در ردیف افقی و هم عدد d در ردیف عمودی به ۶ ختم شده‌اند وچون، هر دو عدد، رقم‌هایی برابر دارند، هر دوی این عـددها ، تنها می‌توانند برابر ۶۶ بشوند، وعدد e در ردیف افقی، تنها می‌تواند به‌صورت $۶۶^۲$، یعنی ۴۳۵۶ باشد (شکل ۱۸۴ ـ a).

a	b	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f			g
h		i	

a

a ۳	b ۳	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f			g
h ۳	۶	i	

b

a ۳	b ۳	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f		۶	g ۷
h ۳	۶	i ۱	۰

c

a ۳	b ۳	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f ۴	۶	۶	g ۷
h ۳	۶	i ۱	۰

d

شکل ۱۸۴

ولی، دراین صورت، عدد a ازردیف افقی، برابر ۲ : ۶۶، یعنی ۳۳، وعدد h از ردیف افقی (باتوجه به‌تعریف a ازردیف قائم)، برابر ۲+۳۴، یعنی ۳۶ می‌شود (شکل ۱۸۴ ـ b).

عدد c درردیف عمودی، تنها می‌تواند برابر ۶۵۶۱ باشد، زیرا این، تنهاعدد چهاررقمی مجذورکامل است که‌با ۶۵ آغازمی‌شود ($۶۵۶۱ = ۸۱^۲$، ولی $۶۴۰۰ = ۸۰^۲$ و $۶۷۲۴ = ۸۲^۲$).

عدد i درردیف افقی، کـه با ۱ آغاز شده است، تنها می‌تواند برابر

یکی ازعددهای ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳ یا ۱۴ باشد، زیرا عدد g درردیف‌عمودی (که باید ۷ برابر عدد i درردیف افقی باشد)، عددی است دورقمی. ازآن‌جا که دوعدد g عمودی و i افقی، باید به‌یك رقم ختم شوند، بنابراین، عدد i درردیف افقی نمی‌تواند برابر ۱۱، ۱۲، ۱۳ یا ۱۴ باشد(زیرا همهٔ این‌عددها، به‌رقمی غیر از ۷ برابر خود ختم می‌شوند). بنابراین، عدد i درردیف افقی تنها برابر ۱۰ وعدد g در ردیف عمودی تنها برابر ۷۰ می‌تواند باشد (شکل ۱۸۴ - c).

اکنون دیگربه‌سادگی روشن می‌شودکه، رقم دوم‌عدد f درردیف‌افقی، تنها می‌تواند برابر ۶ ورقم اول آن، تنها می‌تواند برابر۴ باشد.

به‌این ترتیب، جدول را تنها به صورتی کـه درشکل ۱۸۴ - d نشان داده‌ایم، می‌توان‌پرکرد. ازآن‌جاکه، این‌عددها، بافرض‌های مساله‌سازگارند (و البته خواننده تحقیق خـواهد کرد)، جواب منحصربه‌فرد مساله، همین جدول است.

یادداشت. نقطهٔ‌اتکای نخستین، برای حل مساله را، می‌توان بررسی هم زمان i درردیف افقی و g درردیف عمودی، درنظرگرفت.

۱۲۵.

[اگراین مساله را بامسالهٔ قبل‌مقایسه‌کنیم، به‌سادگی متوجه‌می‌شویم که بی‌اندازه به هم شباهت دارند، تنها در این‌جا، برخی از تعریف‌ها حذف شده‌اند.]

تفاوت این‌جدول با جدول مسالهٔ ۱۲۴ دراین جاست‌که، تعریف‌های مربوط به i افقی وc عمودی وجود ندارد و درتعریف f افقی و a عمودی، آگاهی کمتری داده شده است.

بقیهٔ تعریف‌ها، همان تعریف‌های مسالهٔ قبل‌انـد. بنابراین، باید همان راه حل مسالهٔ ۱۲۴ را تکرارکرد تا جایی‌که لازم شود از تعریف‌های f و i درردیف افقی وa و c درردیف عمودی، استفاده‌کنیم. درنتیجه، به‌استثنای عدد h ازردیف افقی، بخش اول حل مسالـهٔ ۱۲۵، همان است‌که در شکل

۱۸۴ ـ b دیده بودیم (شکل ۱۸۵ ـ a).

«رونویسی» حل مسالهٔ قبلی را تا همین‌جا می‌توانیم ادامه دهیم. برای ادامهٔ کار، باید از شرطهایی استفاده کنیم که، نسبت به مسالهٔ قبلی، «قدرت» کمتری دارند، از تعریف عدد i در ردیف افقی و عدد g در ردیف عمودی، می‌توان چیزهایی را روشن کرد.

با وجودی که، دراین‌جا، معلوم نیست که عدد i ازردیف افقی با چه رقمی آغاز شده است، مثل مسالهٔ قبل می‌توانیم مطمئن باشیم که، این‌عدد، نمی‌تواند از ۱۰ کوچکتر (زیرا عددی است دورقمی) و از ۱۴ بزرگتر باشد (زیرا از ضرب آن در ۷، باید بـه‌عددی دورقمی برسیم). بنابراین، با همان استدلال مسالهٔ قبل، می‌توان نتیجه گرفت که، عدد i درردیف افقی برابر ۱۰ وعدد g درردیف عمودی برابر ۷۰ (وتنها همین‌عددها) می‌تواند باشد (شکل ۱۸۵ ـ b).

a ۳	b ۳	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f			g
h		i	

a

a ۳	b ۳	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f			g ۷
h		i ۱	۰

b

a ۳	b ۳	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f	۱		g ۷
h ۲	۵	i ۱	۰

c

a ۳	b ۳	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f	۶	۶	g ۷
h ۳	۶	i ۱	۰

d

a ۳	b ۳	c ۶	d ۶
e ۴	۳	۵	۶
f ۴	۶	۶	g ۷
h ۳	۶	i ۱	۰

e

شکل ۱۸۵

درمورد عدد b از ردیف عمودی، در بین عددهای به‌صورت **۳۳، تنها دوعـدد مضرب ۵۱ وجود دارد: ۳۳۱۵ و ۳۳۶۶. اگر عدد ۳۳۱۵ را انتخاب کنیم، آن‌وقت، عدد h درردیف افقی، باید به ۵ ختم شود که، درآن

صورت، تنها می‌تواند برابر ۲۵ باشد (۲۵، تنها عدد دورقمی مجذور کامل است که به ۵ ختم‌شده باشد). ولی، دراین‌صورت، با تعریف عدد a ازردیف عمودی، متناقض‌می‌شود (عدد۳۴، ازعدد۲۵ کوچکتر نیست؛ شکل۱۸۵-c).

به‌این ترتیب، تنها امکان دوم باقی‌می‌ماند: عدد b درردیف عمودی، برابراست با ۳۳۶۶. باپیدا شدن این عدد، ازیك طرف می‌توانیم، بااستفاده از تعریف عـدد f ردیف افقی، جای خالی عدد c ردیف عمودی را پرکنیم (که برابراست با ۶) و، ازطرف دیگر، عدد h ازردیف افقی را بسازیم: این عدد، تنها می‌تواند ۳۶ باشد (شکل ۱۸۵ - d).

عدد f درردیف عمودی تنها می‌تواند با ۴ آغاز شود، زیرا تنها دراین صورت است که باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۱ برابر ۱۰ می‌شود.

به‌این‌ترتیب، تنها جواب‌مساله را، که باهمهٔ شرطها هم سازگاراست، به‌دست می‌آوریم (شکل ۱۸۵ـ e).

۱۲۶.

[دربرخورداول، ممکن‌است به‌نظرآیدکه تعریف عددهای a درردیف افقی، a درردیف عمودی، d در ردیف عمودی و j درردیف افقی، خصلتی مشابه‌دارند و، رقم‌ها، درهرکدام ازآن‌ها، ازمرتبهٔ یکان به مرتبه‌های بالاتر، ردیفی صعودی را تشکیل می‌دهند. این آگاهی، فوق‌العاده مفید است، زیرا اختلاف بین دورقم مجاور، نمی‌تواند عـددی بزرگ باشد (بزرگترین رقم، نمی‌تواند از۹ بیشترشود).

ولی این‌نتیجه گیری، تاحدی نسنجیده است: تفاضل بین دورقم‌مجاور، منفی‌هم می‌تواند باشد (مثلاً، رقم‌های‌عددa درردیف‌عمودی، ازبالابه‌پایین، به‌ترتیب بزرگ شوند ونه کوچك). بنابراین، ازآگاهی‌هایی که ازعددهای a افقی، a عمودی، d عمودی و j افقی در دست است، نباید نتیجه گرفت که تفاضل‌هـای هر دو رقم مجاور، در محدودهٔ تنگی قرار دارند: این محدوده، گسترده‌تر از آن است که درابتدا به‌نظر می‌رسید.

برای این‌که بتوانیم این محدوده را تنگ‌ترکنیم، بـه‌آگاهی بیشتری نیاز داریم. ازکجامی‌توان این‌آگاهی‌های اضافی‌را به‌دست‌آورد؟ روشن‌است

که، برای این منظور، باید دستگیره‌ای را پیداکردکه، به‌کمک آن، بتوان دست‌کم به‌طرف‌یکی ازاین‌عددها، راهنمایی شد. این‌آگاهی اضافی رامی‌توان از تعریف عدد b درردیف عمودی به‌دست‌آورد.]

ازتعریف عدد b درردیف عمودی، نتیجه‌می‌شودکه، درعدد a ازردیف افقی، باید رقم‌های دوم وسوم با هم برابرباشند. ازاین‌جا معلوم می‌شودکه، تفاضل ثابت رقم‌های مجاور درعدد a از ردیف افقی (کـه درصورت مساله، دربارهٔ آن صحبت شده است)، باید برابره باشد. به‌زبان دیگر، همهٔرقم‌های عدد a ازردیف افقی، باهم برابرند.

ازهمین‌جا، و با توجه بـه‌تعریف این عددکه درداخل پرانتز داده شده است، نتیجه‌می‌شودکه، تفاضل هردورقم متوالی درعدد a ازردیف عمودی، نمی‌تواند از ۱ کمتر باشد. به‌همین ترتیب، معلوم می‌شودکه، در مورد عدد d ازردیف عمودی، تفاضل‌دورقم مجاور، کمترازِ ۲ نیست و، بالاخره،حداقل تفاضل هردورقم متوالی درعدد j ازردیف افقی، برابراست با ۳.

ولی، این‌آخرین تفاضل، از ۳ بیشترنمی‌تواند باشد. درواقع، اختلاف بین اولین و آخرین رقم از عدد j ردیف افقی، نمی‌توانـد بیشتر از ۹ باشد و، این اختلاف، برابراست با سه‌برابراختلاف هر دورقم متوالی. ضمناً، این وضع، تنها وقتی پدید می‌آیدکه، بزرگترین رقم بـرابـر ۹ وکوچکترین رقم برابر صفر باشد.

a ۶	b ۶	c ۶	d ۶
e ۷		f	۴
g ۸	h	i	۲
j ۹	۶	۳	۰

a

a ۶	b ۶	c ۶	d ۶
e ۷	۶	f ۲	۴
g ۸	h ۳	i ۶	۲
j ۹	۶	۳	۰

b

شکل ۱۸۶

به‌این ترتیب، در عدد j از ردیف افقی، هر رقم ازرقم قبلی خود ۳ واحدکمتر و، ضمناً، رقم اول این‌عدد برابر ۹ و رقم‌آخر آن، برابرصفراست.

باتکیه‌برهمین نتیجه گیری، معلوم می‌شودکه اختلاف هردو رقم‌متوالی

درعدد d ازردیف عمودی بیشتر از۲ و اختلاف هردو رقم متوالی درعدد a ازردیف عمودی بیشتر از ۱ نیست.

بنابراین، در عدد d از ردیف عمودی، هررقم ۲ واحد بیشتر از رقم بعدی و درعدد a از ردیف عمودی، هررقم ۱ واحدکمتر ازرقم بعدی‌است.

این‌آگاهی‌ها، تنها یك امکان را برای پرکردن خانه‌های واقع در مرزهای جدول، دراختیار ما می‌گذارند (یعنی خانه‌هایی‌که به a افقی، a عمودی، d عمودی و j افقی مربوط می‌شوند) (شکل ۱۸۶ - a).

اکنون دیگر روشن است‌که عدد b ازردیف عمودی، تنها می‌تواند برابر ۶۶ وعدد f در ردیف افقی، برابر ۷۶ — ۱۰۰، یعنی ۲۴ باشد. چون عددهای h و i درردیف عمودی مقلوب یکدیگرند (هرکدام، برابر بادیگری است، به‌شرطی‌که از آخر به‌اول نوشته شود)، بنابراین، رقم اول هر کدام از آنها، برابر است با رقم آخر دیگری. درنتیجه، عدد h درردیف عمودی، تنها می‌تواند برابر ۳۶ و عدد i در ردیف عمودی، تنها برابر ۶۳ باشد.

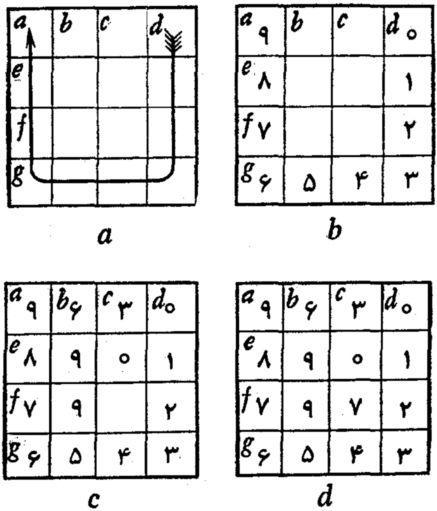
به‌این ترتیب، مسالهٔ ما، تنها یك جواب دارد (شکل ۱۸۶ - b). تحقیق درستی این جواب هم، به‌سادگی قابل انجام است.

۱۲۷.

از تعریف عددهای a ازردیف عمودی، g ازردیف افقی و d ازردیف عمودی، نتیجه می‌شودکه، در جهت پیکانی‌که روی شکل ۱۸۷ - a نشان داده شده است، رقم‌ها ضمن عبور از یك خانه به‌خانهٔ بعدی، باید دست‌کم یك‌واحد بزرگ شوند. بنابراین، نخستین رقم عدد a درردیف عمودی، باید دست‌کم ۹ واحد ازنخستین رقم عدد d درردیف عمودی، بزرگتر باشد. این وضع، تنها وقتی پیش می‌آیدکه، عدد a درردیف عمودی با ۹، وعدد d در ردیف عمودی با ۰ آغاز شوند (به همین علت، عدد d از ردیف عمودی، عددی چهاررقمی‌نیست، ولی‌مقلوب‌آن، عددی چهاررقمی‌می‌شود.) همچنین از نخستین رقم عدد d در ردیف عمودی آغاز کنیم و در جهت پیکان پیش برویم ، تفاوت عددهای هر دو خانهٔ متوالی، نمی‌تواند بیشتر از ۱ باشد. (درواقع، اگر حتی یکی ازاین تفاضل‌ها بیشتر از ۱ باشد، آن‌وقت، نخستین

رقم عدد a از ردیف عمودی، بزرگتر از ۹ می‌شود).

به‌این‌ترتیب، عددهای واقع درخانه‌های جدول را، با آغازازنخستین رقم d عمودی تانخستین رقم از a عمودی ودرجهت پیکان، تنها به‌یک‌صورت



شکل ۱۸۷

می‌توان پرکرد (شکل ۱۸۷ ـ b).

عدد a درردیف افقی، با ۹ آغاز و به ۰ ختم شده‌است وچون تفاوت هر دو رقم متوالی آن، مقدار ثابتی است، بنابراین تنها به صورت ۹۶۳۰ می‌تواند باشد.

ولی دراین‌صورت، دورقم وسط عدد b درردیف عمودی، جز۹۹،چیز دیگری‌نمی‌تواندباشد (زیرا، هرعدددیگری به‌جای این‌دورقم بگیریم،تفاوت مجموع رقم‌های b عمودی از a عمودی بیشتر از ۱ می‌شود).

رقم سوم عدد e درردیف افقی، تنها می‌تواند ۰ باشد (زیرا، مجموع دیگررقم‌های آن، با مجموع رقم‌های عدد g درردیف افقی برابرشده‌است).

همهٔ‌این‌ها را درشکل ۱۸۷ ـ c نشان داده‌ایم. چون درعدد c ازردیف عمودی (طبق تعریف‌آن)، مجموع رقم‌های دوم وسوم، برابراست بامجموع رقم‌های اول وچهارم، یعنی ۷ = ۴ + ۳، بنابراین، رقم سوم‌آن، تنها برابر

۰ — ۷، یعنی ۷ می‌تواند باشد.

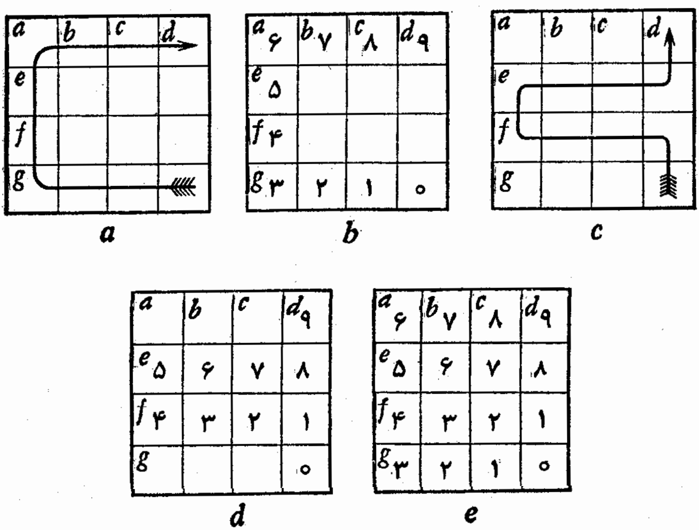
بـه‌این ترتیب، همهٔ خانه‌های جدول پـرمی‌شود (شکل ۱۸۷ ـ d). چون همهٔ عددها، با شرطهای مساله سازگارند ، بنابراین، جدول مفروض، جواب مساله است.

یادداشت. حل مساله، به این مناسبت ممکن شدکه، درتعریف عدد d از ردیف عمودی، گفته شده بود: «عددی چهاررقمی نیست». باتوجه به‌این تعریف، چهاررقمی که‌زیرحرف d قرارمی گیرند، نباید عددی چهاررقمی باشد (که درواقع هم، چنین بود).

اگر درتعریف d ازردیف عمودی، این شرط وجود نداشت، آن‌وقت، مساله بدون جواب می‌شد.

۱۲۸.

بنابرفرض مساله، اگرازخانه‌هایی ازجدول که درشکل ۱۸۸ ـ a نشان داده‌شده‌است، درجهت‌پیکان عبور کنیم، باید رقم‌ها، به‌ترتیب‌صعودی‌باشند. بنابراین (کاملاً شبیه حل مسالهٔ قبل)، این خانه‌ها را، تنها بـه یك طریق می‌توان پر کرد (شکل ۱۸۸ ـ b).



شکل ۱۸۸

همین استدلال را، درمورد خانه‌های «درونی» هم، که درشکل c-۱۸۸ با پیکان نشان داده شده است، می‌توان به‌کار برد. چون تعداد این خانه‌ها برابر است با ۱۰، بنابراین آن‌ها را تنها به‌یك طریق می‌توان پرکرد (شکل ۱۸۸ - d).

به‌این‌ترتیب، جدول‌مفروض، تنهایك‌جواب‌دارد(شکلe-۱۸۸). وچون، جواب حاصل، باتعریف‌های‌مربوط‌سازگاراست، بنابراین، جواب‌مساله‌است.

۱۳۹.

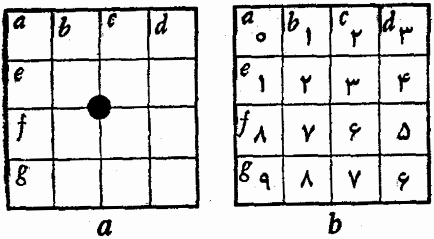
[اگراین مساله را با مسالهٔ قبل مقایسه‌کنیم، به‌راحتی به شباهت‌بین آن‌ها پی‌می‌بریم. این وضع، امکان می‌دهد، یك رشته تناظربین عددهابرقرار وکلید راه حل را پیدا کنیم.]

تفاوت شرطهای این مساله باشرطهای مسالهٔ قبل دراین است‌که، در تعریف دوعـدد ازردیف عمودی، واژهٔ «کمتر» تبدیل به‌واژهٔ «بزرگتر» شده است. ازاین جا نتیجه می‌شودکه، مسالهٔ ۱۲۹، جواب ندارد.

درواقع، فرض می‌کنیم، به‌نحوی، توانسته باشیم خانه‌های جدول را پرکنیم. تصویرجواب‌حاصل‌را، نسبت‌به‌مرکز، پیدامی‌کنیم (درشکلa-۱۸۹، مرکـز را با نقطهٔ سیاه مشخص کـرده‌ایم). تاکید می‌کنیم کـه، در تصویر مرکزی، تنها جواب (یعنی رقم‌ها) دچار تغییرمی‌شود؛ جدول، شبکهٔ‌مربوط به‌آن وحرف‌هایی‌که درخانه‌ها نوشته‌شده است، به‌جای خود باقی می‌مانند. ضمن این‌تصویر، چه‌پیش می‌آید؟

اولاً عددهای a و g، e و f درردیف افقی و همچنین b و c درردیف قائم، جای خود را بـا هم عوض می‌کنند؛ ثانیاً هریك ازآن‌ها به «مقلوب» خود تبدیل می‌شود، یعنی به‌عددی باهمان رقم‌ها، به‌شرطی‌که ازآخر به‌اول نوشته شده باشد. چون ردیف رقم‌ها، درهریك ازاین عددها، به عکس خود، تبدیل می‌شود، بنابراین، درجایی‌که قبل از تصویر، رقمی از رقم قبلی خود بزرگتر بود، اکنون بعدازتصویر، کوچکتر ازرقم قبلی خود می‌شود.

بـه‌سادگی قابل تحقیق است، عددهایی‌کـه بعد از تصویر، خانه‌های جدول را درردیف‌های افقی وعمودی پـرکرده‌اند، بـا تمام شرطهای مسالهٔ

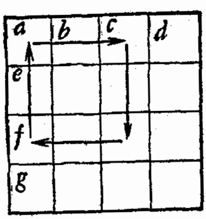


قبل سازگارند و، بنابراین، جواب همان مساله را تشکیل می‌دهند.

ولی دیدیم که، مسالهٔ قبلی، تنها یك‌جواب داشت (شکل ۱۸۴ ـ e).
بنابراین، جدول ۱۲۹ راهم، تنها به‌یك طریق می‌توان‌پر کرد، یعنی باتصویر مرکزی‌شکل ۱۸۸ ـ e وبه‌دست‌آوردن شکل۱۸۹ ـ b. باوجود این،تصویر مرکـزی جواب مسالهٔ ۱۲۸، جواب مسالـهٔ ۱۲۹ نیست، زیرا عدد a در ردیف‌های افقی وعمودی، با ۰ آغاز می‌شوند، یعنی چهاررقمی نیستند.

۱۳۰.

از تعریف عددهـای a در ردیف افقی ، c در ردیف عمودی، f در ردیف افقی و a درردیف عمودی نتیجه می‌شود که، ضمن عبور ازخانه‌های جدول در جهتی کـه روی شکل ۱۹۰ نشان داده شده است، هررقم بـاید



شکل ۱۹۰

بزرگتر ازرقم قبلی باشد. ولی وقتی که «مسیر حلقه‌ای» را یك‌بار طی کنیم، دیگر نمی‌توان بزرگ‌کردن رقم‌ها را ادامه داد، زیرا ازهرخانه‌ای‌آغاز کنیم وهررقم‌هایی را درخانه‌های مسیربنویسیم، وقتی که به‌خانهٔ اولیه برگردیم،

معلوم می‌شود که، رقم واقع در این خانه، باید از خودش بزرگتر باشد.

به‌این‌ترتیب، مسالهٔ ۱۳۰ جواب ندارد.

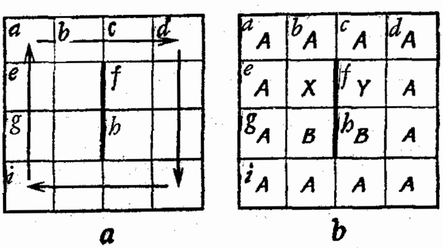
۱۳۱.

تعریف عدد i در ردیف افقی، تنها در حالتی می‌تواند صادق باشدکه همهٔ رقم‌های آن، با هم برابر باشند. در واقع، تفاضل دوعدد مجاور را، به‌دوطریق می‌توان پیداکرد (عدد را از عدد سمت‌چپ خودکم کنیم، یا عدد را از عدد سمت راست خودکم کنیم) و، نتیجه‌ها، تنها وقتی برابر درمی‌آید که، هردو تفاضل، برابر صفر باشند.

«مسیر بسته‌ای» را در نظر می‌گیریم که ازعددهای a در ردیف‌افقی، d در ردیف عمودی، i در ردیف افقی و a در ردیف عمودی، تشکیل‌شده است (روی شکل ۱۹۱-a، جهت این مسیر باپیکان نشان داده شده است). اگر خانه‌های این مسیر پرشود، آن‌وقت هیچ‌رقمی نمی‌تواند از رقم قبلی خود (در این مسیر) کمتر باشد.

وقتی که روی این «مسیر دایره‌ای» حرکت می‌کنیم، باید در تمام خانه‌های مسیر، عددها را برابرهم قرار دهیم، زیرا از هرخانه‌ای که به‌خانهٔ بعد می‌رویم، مقدار رقم‌ها کمتر نمی‌شود و، علاوه برآن، وقتی که به‌خانهٔ مبداء برگردیم، باید به‌همان عددی برسیم که، ازآن، آغازکرده بودیم.

[این‌رقم کدام است که در همهٔ این خانه‌ها قرار می‌گیرد؟ اگر آن‌را می‌شناختیم، دوازده خانهٔ جدول پرمی‌شد. پیداکردن این‌رقم، اهمیت‌زیادی برای حل مسأله دارد، زیرا آگاهی‌هایی که از بقیهٔ عددها داریم، بی‌اندازه ناچیز است؛ ولی استفادهٔ از همین‌آگاهی‌های ناچیز ضروری است.]



شکل ۱۹۱

از تعریف عدد f در ردیف افقی معلوم می‌شود که، در خانه‌های مرزی جدول، باید عدد یك‌رقمی زوجی قرار داشته باشد: ۲، ۴، ۶ یا ۸. (از ۰ باید صرف‌نظر کرد، زیرا از قبل شرط‌کرده‌ایم که، عددهای هرسطر یا هرستون، نباید با ۰ آغاز شوند.)

طبق تعریف عدد e در ردیف افقی، باید مجموع رقم‌های آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد. این مجموع، نمی‌تواند صفر باشد (زیرا، رقم اول‌آن، صفر نیست) و از ۱۸ هم تجاوز نمی‌کند (زیرا، حداکثر مجموع دو رقم یك‌عدد دورقمی، ۹+۹، یعنی ۱۸است). علاوه برآن، این‌مجموع، به‌حداکثر خود هم، نمی‌تواند برسد (یعنی، حتماً از ۱۸ کمتر است)، زیرا نخستین رقم عدد e در ردیف افقی، زوج‌است. بنابراین، تنها یك‌حالت باقی می‌ماند: مجموع رقم‌های عدد e در ردیف افقی، برابر است با ۹.

a ۲	b ۲	c ۲	d ۲
e ۲	۷	f ۱	۲
g ۲	B	h B	۲
i ۲	۲	۲	۲

a

a ۲	b ۲	c ۲	d ۲
e ۲	۷	f ۱	۲
g ۲	۱	h ۱	۲
i ۲	۲	۲	۲

b

شکل ۱۹۲

[این نتیجه را، به‌ترتیب دیگری هم، می‌توان به‌دست‌آورد. می‌دانیم که رقم اول عدد e در ردیف افقی، عددی است زوج. تنها ۴ عدد دورقمی بخش‌پذیر بر ۹ وجود داردکه با رقم زوج آغاز می‌شوند: ۲۷، ۴۵، ۶۳ و ۸۱. قاعدتاً باید بتوان، سه تا از این عددها را حذف کرد. کدام عددها زیادی‌اند؟ برای‌پاسخ به‌این‌پرسش، باید به‌ردیف‌های عمودی مراجعه‌کرد.]

می‌دانیم‌که، رقم‌های اول و آخر دوعدد b و c از ردیف عمودی، با هم برابرند. ولی، رقم‌های سوم این دو عدد هم، یکی است، زیرا مجموع رقم‌های عدد g در ردیف افقی، برابر است با مجموع رقم‌های عدد h در ردیف افقی. ضمناً می‌دانیم که، رقم اول عدد g افقی با رقم‌آخر h افقی

برابر است. بنابراین، باید رقم دوم عدد g افقی (یعنی، سومین رقم عدد b درردیف عمودی) بارقم اول عدد h افقی (یعنی سومین‌رقم عدد c درردیف عمودی) برابر باشد (شکل ۱۹۱-b).

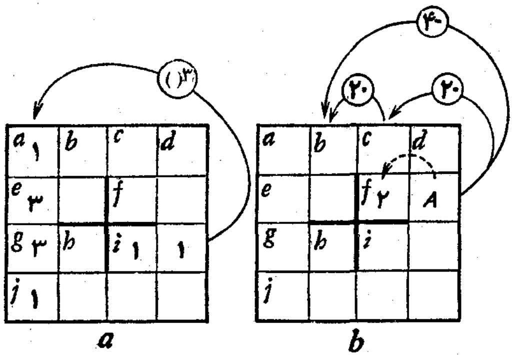
به‌این ترتیب، رقم‌های سوم دوعدد b و c ازردیف عمودی، برابرند. مجموع رقم‌های عـدد b در ردیف عمودی، تنها وقتی می‌تواند ۶ واحد از مجموع رقم‌هـای عدد c در ردیف عمودی بیشتر باشدکه، رقم دوم عدد b (X)، ۶ واحد بیشتر از رقم دوم عدد c (Y) باشد.

چون Y از ۱ کمتر نیست ، X هم نمی‌تواند از ۷ کمتر باشد. ولی $A+X=۹$ و، ضمناً، A از ۲ کمتر نیست. بنـابراین X، بزرگتر از ۷ نیست. به این ترتیب، X تنها می‌تواند برابر ۷ بـاشدکه، در این صورت، $A=۲$ و $Y=۱$ (شکل ۱۹۲-a).

اکنون به‌سادگی دیده می‌شود که، عدد h در ردیف افقی، تنها وقتی می‌تواندکوچکتر از عدد g در ردیف افقی باشدگه، به‌جای B ، عدد ۱ را قرار دهیم. تنها جواب مسأله، که با تمامی شرطهای آن سازگار باشد، در شکل ۱۹۲-b داده شده است.

۱۳۲.

[تنهـا در برخورد اول است کـه، به‌نظر می‌رسد، دسترسی به راه‌حل مسأله، دشوار است. درواقع، حل‌را می‌توان ازدو «نقطهٔ ضعیف» آغاز کرد:۱)



شکل ۱۹۳

عدد i در ردیف افقی و a در ردیف عمودی، ۲) عدد f در ردیف افقی و b و c در ردیف عمودی.]

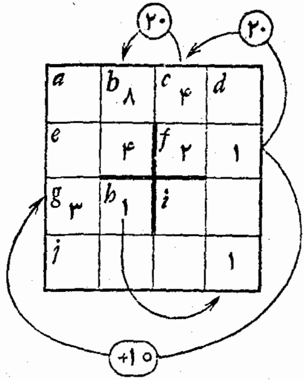
۱) عدد i درردیف افقی، می‌تواند یکی ازعددهای ۱۱، ۲۲، ۳۳، ... باشد. ولی چون، عدد a در ردیف عمودی، باید برابر مکعب عدد i از ردیف افقی بشود، بنابراین، عدد اخیر، از ۲۲ کوچکتر است (زیرا، ۲۲^۳ برابر ۱۰۶۴۸، یعنی پنج‌رقمی می‌شود). بنابراین، عدد i در ردیف افقی، تنها برابر ۱۱ و عدد a در ردیف عمودی، تنها برابر ۱۱^۳، یعنی ۱۳۳۱ می‌تواند باشد (شکل ۱۹۳-a).

۲) عدد c در ردیف عمودی دو برابر و عدد b در ردیف عمودی ۴ برابر عدد f در ردیف افقی است؛ ضمناً، عدد b از ردیف عمودی، عددی دورقمی است. بنابراین، عدد f از ردیف افقی، نمی‌تواند بزرگتر از ۲۴ باشد، یعنی، رقم اول آن، از ۲ بزرگتر نیست.

از طرف دیگر، عدد c در ردیف عمودی، باید زوج باشد (زیرا، دو برابر عدد f از ردیف افقی است، و دو برابر هرعدد درست، عددی زوج است)، بنابراین، عدد f از ردیف افقی، باید با عددی زوج آغازشود. از آن‌جا که، عدد f در ردیف افقی، نمی‌تواند با صفر آغاز شود، بنابراین، تنها امکانی که می‌ماند، این است‌که رقم اول این عدد، برابر ۲ باشد (شکل ۱۹۳-b). ولی در این صورت، رقم دوم عدد c از ردیف عمودی هم، برابر ۲ خواهد شد. و این، به‌معنای آن است‌که رقم آخر عدد f از ردیف افقی (A)، باید ۱ یا ۶ باشد. ولی، قبلاً ثابت‌کردیم‌که عدد f از ردیف افقی، نمی‌تواند بزرگتر از ۲۴ بشود، در نتیجه، تنها امکان برای این عدد، همان ۲۱ است‌که، ازآن‌جا، عدد c در ردیف عمودی برابر ۴۲، و عدد b در ردیف عمودی برابر ۴۸ می‌شود (شکل ۱۹۴).

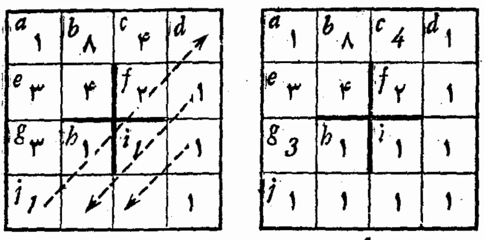
عدد g در ردیف افقی (بنا به‌تعریف خود)، برابر است با ۳۱. در نتیجه، رقم آخر عدد j از ردیف افقی هم، برابر ۱ می‌شود. همهٔ عددهایی که در این‌جا به‌دست‌آورده‌ایم، در شکل ۱۹۴ نشان داده شده است.

با استفاده از تعریف عدد d در ردیف عمودی و بستگی رقم‌های آن



شکل ۱۹۴

با رقم‌های عدد J در ردیف افقی (شکل ۱۹۵-a)، می‌توان بقیهٔ خانه‌های آزاد را پرکرد (شکل ۱۹۵-b). به‌سادگی قابل‌تحقیق است که، این‌جواب، با شرطهای مسأله سازگار است.



شکل ۱۹۵

یادداشت. اگربه‌نتیجه‌هایی که، به‌طور جداگانه، درشکل‌های ۱۹۳-a و ۱۹۴ به‌دست آوردیم، توجه‌کنیم، متوجه می‌شویم که، رقم اول عدد g در ردیف افقی، دوبار به دست آمد: هم در نخستین بخش و هم در دومین بخش حل. چون این دوبخش به‌هم بستگی ندارند، می‌توانیم، درصورتی‌که بخواهیم، از شرطهای مسأله کم‌کنیم. مثلاً، می‌توان تعریف عدد g از ردیف افقی را، به‌این ترتیب، «ضعیف‌تر» کرد: «عددی‌که، رقم آخرآن، با

رقم آخر عدد f در ردیف افقی، یکی است». (بااین تعریف، در روی شکل ۱۹۴، تنها رقم دوم عدد g از ردیف افقی، ظاهر خواهد شد.)

۱۳۳.

این جدول، جواب ندارد. درواقع، عدد e درردیف افقی، زوج است و نمی‌تواند به صفر ختم شود (زیرا، عدد b در ردیف عمودی، نمی‌تواند با صفرآغازشود). درنتیجه، عدد e درردیف افقی به ۲، یارقم زوج بزرگتری، ختم شده است. و این، به معنای آن است که، عدد b در ردیف عمودی، دست کم، با۲آغاز شده است، بنابراین، عدد b نمی‌تواندکمتر از ۲۲ باشد. ولی در این صورت، عدد d از ردیف عمودی، دست کم، پنج‌رقمی می‌شود (حل مسألهٔ قبل را هم ببینید).

۱۳۴.

بله می‌توان.

[همهٔ آگاهی‌های موجود درصورت مسأله، در شکل ۱۹۶ نشان داده شده است.

ظاهراً، بهتر است، ازعددهایی‌آغازکنیم که مکعب یك‌عدد درست‌اند، زیرا، بین عددهای چهاررقمی، عددهای زیادی وجود نداردکه مکعب کامل باشند. تنها عددهـای از ۱۰ تـا ۲۱ دارای این ویژگی هستند، ولی همین تعداد هم، چندان‌کم‌نیست. مکعب‌هایی‌که درصورت مسأله، ازآن‌ها صحبت شده است، دارای دوخاصیت‌اند:

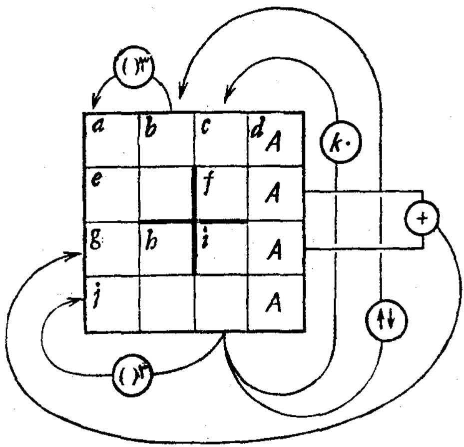
۱) دوعددی‌که مکعب آن‌ها را لازم داریم، رقم‌هایی برابر، ولی در ردیف عکس یکدیگر، قرار دارند؛

۲) نخستین رقم یکی از مکعب‌هـا، بـا آخـرین رقم مکعب دیگر، برابر است.

به‌جز این‌ها، یکی از مکعب‌ها، دارای این خاصیت اضافی است:

۳) رقم‌دوم عددی‌که مکعب شده است، باید بارقم‌سوم مکعب‌خود، برابر باشد (این خاصیت، نتیجه‌ای است از تعریف عدد i در ردیف عمودی وعدد j در ردیف افقی).

چه‌بسا، توجه به‌این خاصیت‌ها، به‌ما کمک کند تا تعداد عددهای ممکن را، تا حد معقولی، پایین بیاوریم.]



شکل ۱۹۶

عدد b ردیف عمودی، همان عدد i ردیف عمودی است، به‌شرطی که از آخر به اول نوشته شود و برعکس، ضمناً، مکعب هردوی آن‌ها، عددی است چهاررقمی (تعریف عدد a در ردیف عمودی و تعریف عدد j در ردیف افقی). می‌دانیم که، تنها عددهای طبیعی از ۱۰ تا ۲۱، مکعب‌هایی چهاررقمی دارند. بنابراین، هردو عدد b و i ازردیف‌های عمودی، که ضمناً «مقلوب» یکدیگرند، بایدکوچکتر از ۱۰ و بزرگتر ۲۱ نباشند. بنابراین، این‌دو عدد با ۱ یا ۲ آغاز می‌شوند. همچنین، به‌دلیل این که دوعدد مقلوب یکدیگرند، هردو عدد به ۱ یا ۲ ختم شده‌اند. دو حالت ممکن است: یا هردو عدد برابرند با ۱۱، یا یکی از آن‌ها برابر با ۱۲ و دیگری برابر با ۲۱ است (زیرا می‌دانیم که، عدد ۲۲، بعد از رسیدن به‌توان ۳، پنج‌رقمی می‌شود).

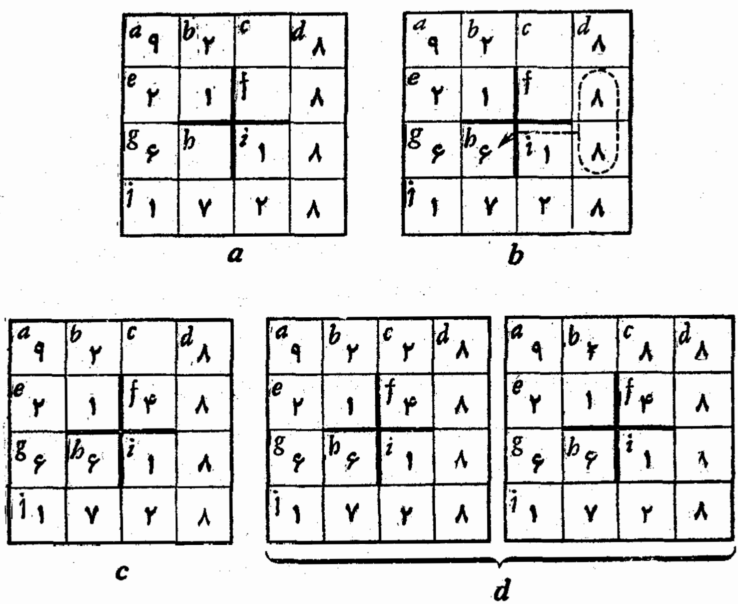
مکعب این عددها را محاسبه می‌کنیم:

$$۱۱^۳ = ۱۳۳۱،$$

$$۱۲^۳ = ۱۷۲۸،$$
$$۲۱^۳ = ۹۲۶۱$$

تنها عدد ۱۲ دارای این ویژگی است که، رقم دوم آن، با رقم سوم مکعب آن برابر است. بنابراین، عدد i در ردیف عمودی، تنها می‌تواند ۱۲، و عدد b در ردیف عمودی، تنها می‌تواند ۲۱ باشد. در نتیجه، عدد j از ردیف افقی، برابر $۱۲^۳$، یعنی ۱۷۲۸ و عدد a از ردیف عمودی، برابر $۲۱^۳$، یعنی ۹۲۶۱ می‌شوند. همچنین، عدد d در ردیف عمودی، به‌صورت ۸۸۸۸ درمی‌آید (شکل ۱۹۷-a).

عدد g ازردیف افقی، برابراست بامجموع دوعدد f و i ازردیف‌های افقی. رقم آخر مجموع را می‌توان از مجموع رقم‌های آخر جمله‌های جمع به دست آورد. هر دو رقم آخر جمله‌های جمع، برابر است با ۸، بنابراین، رقم آخر مجموع آن‌ها، برابر ۶ می‌شود. به‌این ترتیب، عدد g در ردیف افقی، برابر است با ۶۶ (شکل ۱۹۷-b).



شکل ۱۹۷

عدد f در ردیف افقی، برابر است با ۱۸ — ۶۶، یعنی ۴۸ (شکل ۱۹۷-c).

در مورد عدد c از ردیف عمودی، می‌دانیم به ۴ ختم شده و بر ۱۲ بخش‌پذیر است. دو عدد می‌توان پیدا کرد که مضرب ۱۲ و مختوم به ۴ باشند: ۲۴ و ۸۴. بنابراین، جدول را به‌دو طریق می‌توان پر کرد. هردوی آن‌ها، در شکل ۱۹۷-d، نشان داده شده‌اند. به این ترتیب، توانستیم ثابت کنیم که، مسألهٔ ۱۳۴ را می‌توان حل کرد.

یادداشت. وقتی که می‌گوییم، یك جدول عددهای متقاطع، قابل حل است، به‌هیچ وجه به‌معنای آن نیست که، تنها به‌یك طریق می‌توان خانه‌های آن‌را پر کرد. قابل حل‌بودن مسأله، تنها به‌این معناست که، می‌توان سطرها و ستون‌های آن‌را، طوری با عددها پر کرد که همهٔ شرطهای مسأله برآورده شوند (وهمین، به‌معنای آن است که، مسأله، جواب دارد). گاهی، بارعایت همهٔ شرطهای موجود، جدول‌را به‌چندطریق می‌توان‌پر کرد. درچنین صورتی، می‌گویند، مسأله چندجواب‌دارد و، روشن است که، هرمسأله‌ای که‌چندجواب داشته باشد، قابل حل است.

وقتی که مسأله، تنها یك جواب داشته باشد، آن را یك‌ارزشی و، در حالت وجود چندجواب، چندارزشی گویند.

جدول عددهای متقاطع، وقتی جواب ندارد که نتوان سطرها وستون‌های آن‌را طوری پر کرد که شرطهای مسأله، برآورده شود. و این، به‌معنای آن است که، در شرطها، تناقض یا تناقض‌هایی وجود دارد.

۱۳۵. پرسش‌های جدید

الف. جواب قبلی، باهمهٔ تعریف‌های قبلی عددها سازگار است، بنابراین، درحالت جدید هم، با همهٔ تعریف‌های موجود ــ که بعد از حذف یك یا چند تعریف باقی مانده‌اند ــ سازگار خواهد بود و، درنتیجه، جواب قبلی، جواب مسألهٔ جدید هم خواهد بود. ولی چون، بعضی از تعریف‌ها حذف شده‌اند و لزومی به‌سازگار بودن آن‌ها، با جواب مسألهٔ جدید، وجود ندارد، ممکن است روش‌های تازه‌ای هم برای پر کردن جدول پیدا شود، یعنی تعداد

جواب‌ها افزایش‌یابد. بنابراین، باحذف یك‌یاچند تعریف، جدول یك‌ارزشی (نوع II)، یا به‌همان‌صورت یك‌ارزشی باقی‌می‌ماند ویامسأله‌ای چندارزشی (نوع III) می‌شود.

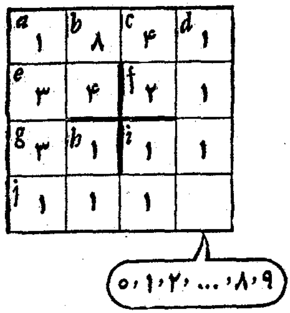
ب. با اضافه‌شدن چندشرط تازه ، جواب قبلی بازهم باشرطهای قبلی، سازگار باقی می‌ماند. ولی، از آن‌جاکه ممکن است، جدول قبلی، تنها به‌یك طریق پرشده باشد، چه‌بساکه جواب آن، با شرطهای تازه‌ای که اضافه شده است، سازگار نباشند.

به‌این ترتیب، یا جواب مسألهٔ قبلی، با همهٔ شرطهای تازه، سازگار ازآب درمی‌آید و یا، دست‌کم یك‌شرط تازه وجود داردکه با جواب قبلی ناسازگار است. در حالت اول، مسألهٔ یك‌ارزشی، بازهم یك‌ارزشی باقی می‌ماند و، در حالت دوم، مسألهٔ جدید بدون جواب می‌شود. در نتیجه، بااضافه‌شدن‌یك‌یاچندتعریف جدید، یامسألهٔ یك‌ارزشی (نوع II)، به‌همان صورت یك ارزشی حفظ می‌شود و یا به مسأله‌ای بدون جواب (نوع I) تبدیل می‌شود.

این نتیجه‌گیری‌ها را، روی نمونهٔ مسألهٔ ۱۳۲ روشن می‌کنیم. این مسأله، از نوع II بود.

*

اگر تعریف عدد j از ردیف افقی را حذف‌کنیم، جوابی‌که در شکل ۱۹۵ ـ b داده شده است، به‌قوت خود باقی می‌ماند، ولی در خانهٔ‌گوشهٔ راست پایین، اجباری ندارد، حتماً عدد واحد را بنویسیم. در شکل ۱۹۴، نشان داده شده است‌که، این‌عدد ۱ را، ازکجا انتخاب‌کرده‌ایم. ولی‌اکنون، این‌شرط را حذف‌کرده‌ایم ولزومی نداردکه، عدد j در ردیف افقی، به‌همان رقمی ختم شودکه عدد g در ردیف افقی، به‌آن ختم شده است. بنابراین، ازجواب مسألهٔ ۱۳۲، بخشی باقی می‌ماندکه درشکل ۱۹۸ نشان داده‌ایم. خانه‌ای‌که در گوشهٔ راست وپایین جدول قرار دارد، خالی مانده است. در این خانه، هررقم دلخواهی را می‌توان قرار داد و، به‌سادگی قابل تحقیق است،که همهٔ عددهای جدول باشرطهای مسأله سازگارند. بنابراین، باحذف



شکل ۱۹۸

تعریف عدد j از ردیف افقی، مسألهٔ یك ارزشی ۱۳۲، به‌مسألهٔ جدیدی تبدیل می‌شود که ۱۰ جواب دارد.

(*) براین مطلب تأکید می‌کنیم که، تنها استدلال اخیر، افزایش تعداد جواب‌ها را تضمین می‌کند. حذف یك یا چند تعریف، به‌خودی خود، به‌معنای افزایش تعداد جواب‌ها نیست: ممکن است با حالتی روبه‌رو شویم که، با حذف یك یا چند تعریف، گام یا گام‌هایی را که باید به‌کمك آن‌ها برداشت، قبلاً و بدون کمك از آن‌ها، برداشته شده باشد.

*

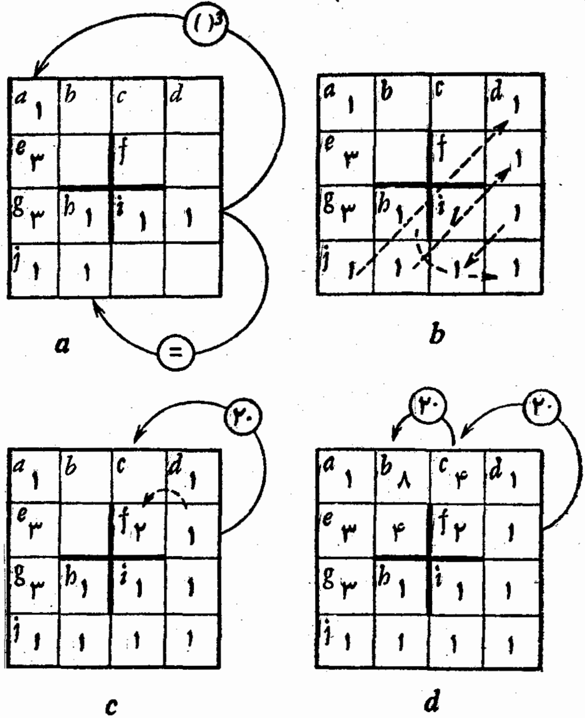
به‌شرطهای مسألهٔ ۱۳۲، تعریف عدد h از ردیف عمودی را اضافه می‌کنیم: «عددی برابر با عدد i از ردیف افقی».

این شرط، با جوابی که در شکل ۱۹۵-b به‌دست آمده است، سازگار است (و ضمناً، تنها با همین جواب). مسألهٔ جدید هم، مثل مسألهٔ قبلی، به‌همان نوع II تعلق دارد.

*

وقتی که تعریف عدد h از ردیف افقی را، به شرطهای مسألهٔ ۱۳۲ اضافه کردیم، جدول جدیدی از نوع II به‌دست آوردیم. اکنون، تعریف عدد g از ردیف افقی را، از آن، حذف می‌کنیم.

(!) تعریف عدد h درردیف عمودی به‌ما امکان می‌دهد پر کردن جدول را، با آغاز از شکل ۱۹۳ ـ a، ادامه دهیم و، آن‌را، به‌مرحله‌ای برسانیم که در شکل ۱۹۹ ـ a نشان داده شده است. تعریف عددهای j در ردیف افقی و d در ردیف عمودی، امکان نوشتن رقم‌ها را در چند خانهٔ دیگر، فراهم می‌کنند (شکل ۱۹۹-b).



شکل ۱۹۹

چون رقم آخر عدد f در ردیف افقی معلوم است، می‌توانیم رقم آخر عدد c در ردیف عمودی را پیدا کنیم (شکل ۱۹۹-c). به‌این ترتیب، عدد f در ردیف افقی و عدد c در ردیف عمودی، به‌طور کامل به‌دست می‌آیند که، بعد از آن، عدد b در ردیف قائم، به سهولت پیدا می‌شود (شکل ۱۹۹-d).

این نمونه، روشن می‌کند که، جدول از نوع II، ممکن است بعد از

حذف یك یا چند تعریف، بازهم به‌صورت جدولی از نوع II باقی بماند.

این مثال، تأکیدی است برآن‌چه در (*) یادآوری کردیم. در واقع، وقتی‌که تعریف عدد g از ردیف افقی‌را حذف‌کنیم، نمی‌توانیم از سطری که در شکل ۱۹۴ در ردیف حرف g قرار دارد، استفاده کنیم (زیـرا آگاهی مربوط به‌عدد g درردیف‌افقی‌را حذف‌کرده‌ایم). ولی،این کمبودرا می‌توانیم با زنجیرهٔ دیگری از استدلال جبران کنیم، زنجیره‌ای که، در آن، صحبتی از عدد g در ردیف افقی نشده باشد.

*

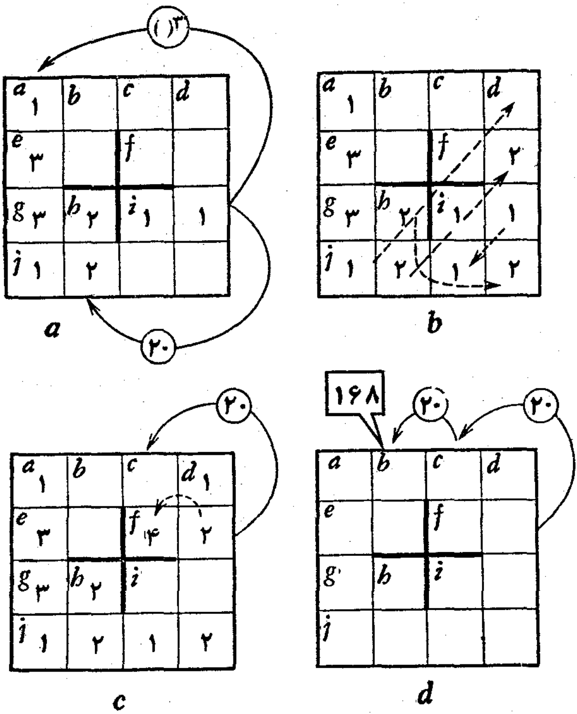
اگر به مسألهٔ ۱۳۲، تعریف زیر را، برای عدد h در ردیف عمودی، اضافه‌کنیم:«عددی‌که دوبرابر عدد i ازردیف افقی‌باشد»،آن‌وقت، به‌جدولی از نوع I می‌رسیم (یعنی مسأله‌ای بدون جواب و بـا شرطهای متناقض). این نتیجه را، مثلاً، از این جـا می‌توان به‌دست آورد که، بدون این شرط اضافی، می‌توانیم جـواب منحصر به‌فـرد مسأله را، کـه در شکل ۱۹۵-b نشان داده شده است، پیدا کنیم، در حالی که، این جواب، بـا تعریف h از ردیف عمودی ناسازگار است.

جالب است کـه ببینیم، در این حالت، زنجیرهٔ استدلال‌هـای شکل ۱۹۹، به‌کجا می‌انجامد. همهٔ آن‌چه را که، در متن ، با علامت (!) آورده بودیم، می‌توان در این‌جا هم، تکرار کرد. تمامی مسیر استدلال، در شکل ۲۰۰ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۲۰۰-d دیده مـی‌شود، نتیجه همان است که در آغاز بخش اخیر آوردیم. در واقع، از تعریف عدد c در ردیف عمودی، نتیجه می‌شود که عدد b در ردیف عمودی، بایـد سه رقمی باشد (و نمی‌تواند خانه‌های مربوط به‌آن را پرکند).

تناقضی که در شرطها پدید می‌آید، در مساله‌هـای مختلف، ممکن است متفاوت باشد.

*

ببینیم، اگر تعریف عدد h در ردیف عمـودی را، در مسألـهٔ ۱۳۲،



شکل ۲۰۰

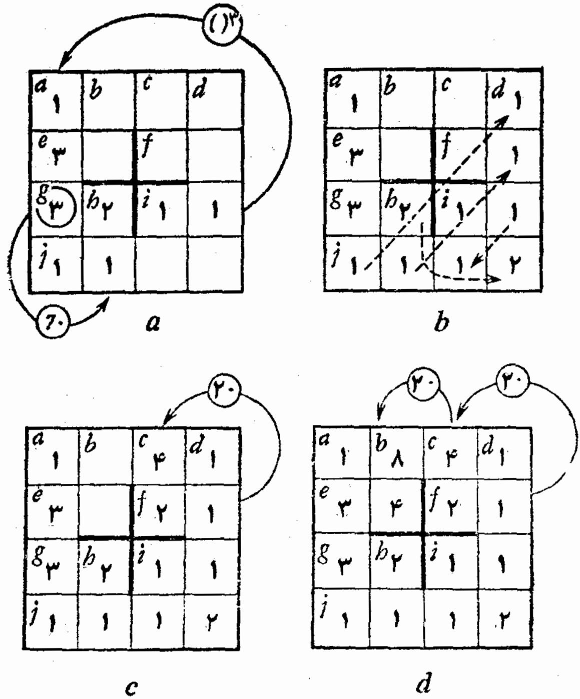
به‌این ترتیب تغییر دهیم: «عددی که، ۷ برابر رقم اول g از ردیف افقی باشد»، چه پیش می‌آید.

اگر شرط تازه را «فراموش کنیم»، می‌توانیم به‌کمك شرطهای قبلی، جدول را به‌صورتی پرکنیم که درشکل ۱۹۵-b نشان داده شده است (روش کار را، درحل مسألهٔ ۱۳۲، توضیح داده‌ایم). وروشن است که اکنون دیگر نمی‌توانیم از تعریف عدد h استفاده کنیم.

اگر، از استدلالی استفاده کنیم که، در بالا، با علامت (!) مشخص کرده‌ایم، به‌عددهای دیگری می‌رسیم (که مرحله‌های مختلف آن را، در شکل ۲۰۱ نشان داده‌ایم) که با تعریف عدد g در ردیف‌افقی متناقض است.

به‌این ترتیب می‌بینیم که، استفادهٔ از دو زنجیرهٔ مختلف استدلال، ما

را به‌عددهای مختلفی رسانید. و این خود، یکی از طریقه‌های بروز تناقض موجود در شرطهاست.



شکل ۲۰۱

یادداشت ۱. از مسالهٔ یك ارزشی ۱۳۲، دو مسالهٔ با شرطهای متناقض به‌دست آوردیم. برای این منظور، جواب معلوم مساله ۱۳۲ را در نظر گرفتیم و، سپس تناقض تعریف جدید (تعریف عدد h از ردیف افقی) را با آن، مشخص کردیم.

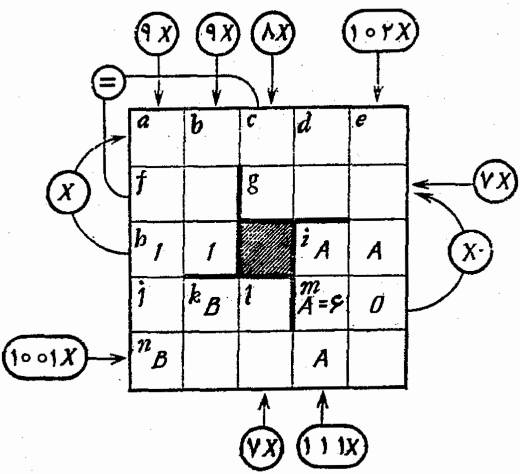
یادآوری این مطلب جالب است که اگر مسألهٔ جدید را (مساله‌ای که یك تعریف جدید به‌آن اضافه شده است)، از نو حل کنیم، تناقض درجای دیگری، ظاهر می‌شود. در اغلب موردهایی که به‌حل یك مسألهٔ بی‌جواب مشغولیم، به‌این «سرگردانی» تناقض برخورد می‌کنیم: کافی است در یك‌جا،

زنجیرهٔ استدلال پاره شود تا «گره بازنشدنی» به‌جای دیگری منتقل شود.

یادداشت ۲. در مسالهٔ مورد بررسی، یا تعریفی (یا تعریف‌هایی) را به‌آن اضافه کردیم و یا بخشی از شرطها را حذف کردیم. با اضافه یا کم‌کردن آگاهی‌های موجود در تعریف‌ها هم، می‌توان به‌همین نتیجه رسید. استدلال در این مورد هم، کاملاً با استدلال حل مسالهٔ ۱۳۴، یکی است (مثلاً، در مورد کمترکردن آگاهی‌های موجود در تعریف‌ها، در یادداشت مربوط به‌حل مسالهٔ ۱۳۲ صحبت شده است. در آن‌جا، ازجدول نوع II، بازهم به‌جدولی از نوع II رسیدیم).

.۱۳۶

همهٔ آگاهی‌هایی راکه، ضمن تعریف عددها، داده شده است، درشکل ۲۰۲ آورده‌ایم.



شکل ۲۰۲

اگر عدد p برعدد q بخش‌پذیر باشد، می‌توان عدد p را به‌صورت $p=q.x$ نشان داد، که در آن، x عبارت است ازیك عدد درست. درشکل ۲۰۲ ، چنین خارج قسمت‌هایی که از تقسیم عددی برعدد دیگر به‌دست

می‌آید داده شده است (درحالت کلی x به‌معنای عددهای مختلفی است).

ثابت می‌کنیم که تعریف عدد a از ردیف افقی رامی‌توان به‌این‌صورت تنظیم کرد: «عددی که برابر است با توان چهارم عدد h از ردیف افقی».

درتعریف‌عدد h ازردیف‌افقی گفته شده‌است که دورقم‌آن باهم برابرند. بنابراین، صحبت برسر یکی از عددهای ۱۱، ۲۲،...، ۹۹ است. ولی در بین این عددها، تنها ۱۱ عددی است اول و همهٔ بقیهٔ آن‌ها، مضربی از ۱۱ هستند.به‌این ترتیب عدد h در ردیف افقی، تنها می‌تواند برابر ۱۱ باشد.

اکنون روشن است که عدد i از ردیف افقی، رقم‌هایی برابردارد (این حقیقت را، در شکل ۲۰۲ نشان داده‌ایم). همین مطلب را در مورد عدد i از ردیف عمودی هم می‌توان گفت.

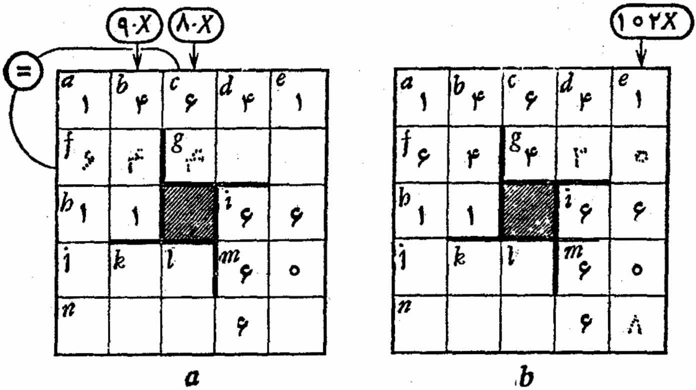
عدد m از ردیف افقی، برابر است با یکی از مضرب‌های مشترك عددهای ۱،۲،۳،۴،۵و۶. کوچکترین مضرب مشترك این عددها، برابر است با ۶۰. بقیهٔ مضرب‌های مشترك این عددها (۶۰×۲ ، ۶۰×۳،...)، عددهایی با تعداد رقم‌های بیش از ۲ می‌شوند. بنابراین تنها عددی که در ردیف m افقی می‌توان قرار داد، همان عدد ۶۰ است (شکل ۲۰۲).

ازتعریف عدد k در ردیف عمودی برمی‌آید که، رقم اول آن بررقم اول عدد n ازردیف افقی منطبق است (والبته، رقم دوم‌آن‌ها هم، بریکدیگر منطبق است).

این‌ها، آگاهی‌های ساده‌ای است که از تعریف‌های جداگانه به‌دست می‌آید. اکنون، آن‌ها را به‌هم مربوط می‌کنیم.

به‌سادگی روشن می‌شود (شکل ۲۰۲) که عدد i از ردیف عمودی، تنها برابر ۶۶ می‌تواند باشد که در نتیجه عدد i از ردیف افقی هم، برابر ۶۰ می‌شود.

چون عدد a از ردیف افقی، مقسوم علیه اول دیگری به‌جز ۱۱ ندارد، به‌ناچار برابر توانی از عدد ۱۱ است. ولی $۱۲۱ = ۱۱^۲$ و $۱۳۳۱ = ۱۱^۳$، پنج رقمی نیستند و تنها $۱۴۶۴۱ = ۱۱^۴$ می‌تواند به‌جای آن بنشیند ($۱۱^۵$ هم، عددی شش رقمی می‌شود) (شکل a-۲۰۳).



شکل ۲۰۳

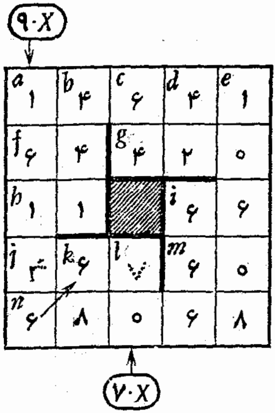
این آگاهی‌ها (شکل ۲۰۳ـa) به‌ما امکان مـی‌دهد عـدد c از ردیف عمودی و عدد f از ردیف افقی را پـیدا کنیم: هردوی این عددها، تنهـا می‌توانند برابر ۶۴ باشند.

عدد b از ردیف عمودی، خودبه‌خود به‌دست آمده است (این عـدد برابر است با ۴۴۱؛ شکل ۲۰۳ـa را ببینید) و می‌توان تعـریف آن را از صورت مساله حذف کرد. علاوه برآن، عدد b از ردیف عمودی را، بـدون کمك گـرفتن از c عمودی و f افقی هـم می‌توان به‌دست آورد: اولین و آخرین رقم این عدد معلوم است و برای این‌که بر ۹ بخش‌پذیر باشد ، باید مجموع رقم‌های آن، مضربی از ۹ بشود.

عدد g درردیف افقی، مضربی است از ۷ و ۶۰، بنابراین‌بر کوچکترین مضرب مشترك آن‌ها، یعنی ۴۲۰ بخش‌پذیر است و چون با ۴ آغازمی‌شود تنها می‌تواند برابر ۴۲۰ باشد.

در مورد عدد e از ردیف عمودی، تنهـا رقم آخر باقـی مانده است (شکل ۲۰۳ـb)، تنها عددی که از بین عددهای ۱۰۶۰۰ ، ۱۰۶۰۱،... ۱۰۶۰۹، بر ۱۰۲ بخش‌پذیرمی‌شود، عدد ۱۰۶۰۸ است.

از شکل ۲۰۳ـb به‌روشنی دیده می‌شود که چون سه رقم معلوم عدد a در ردیف عمودی، نمی‌تواند تمامی عدد را مشخص کند، برای ادامهٔ کار



شکل ۲۰۴

باید به‌سراغ عدد n در ردیف افقی رفت. عدد ۱۰۰۱ را چند برابر باید کرد تا عدد n در ردیف افقی به‌دست آید؟ چون ۱۰۰۱ × ۹ برابر ۹۰۰۹ و عددی چهار رقمی و ۱۰۰۱ × ۱۰۰ عددی شش رقمی می‌شود، باید ۱۰۰۱ را در عددی ضرب کرد که از ۱۰ کوچکتر و از ۹۹ بزرگتر نباشد. (یعنی در یك عدد دو رقمی). بنابراین، عدد n از ردیف افقی، در بین عددهای زیر است:

۱۰ × ۱۰۰۱ = ۱۰۰۱۰,

۱۱ × ۱۰۰۱ = ۱۱۰۱۱,

۱۲ × ۱۰۰۱ = ۱۲۰۱۲

۱۳ × ۱۰۰۱ = ۱۳۰۱۳,

. . . .

۹۸ × ۱۰۰۱ = ۹۸۰۹۸

۹۹ × ۱۰۰۱ = ۹۹۰۹۹

می‌بینیم که، همیشه دو رقم اول حاصل‌ضرب، بر دو رقم آخر آن منطبق است (این ویژگی را از قبل هم می‌شد پیش بینی کرد، چرا که یکی از

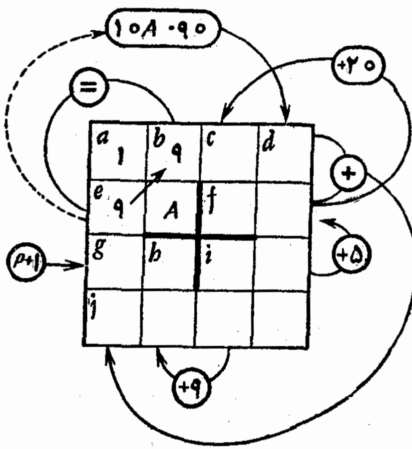
عامل‌های ضرب، عدد دو رقمی و دیگری ۱۰۰۱ است). از آن‌جا که ، دو رقم آخر عدد n در ردیف افقی معلوم است، خود این عدد، تنها می‌تواند برابر ۶۸۰۶۸ باشد.

اکنون دیگر به‌سادگی روشن می‌شود که عدد k در ردیف عمودی، برابر ۶۸ و عدد l در ردیف عمودی برابر ۷۰ است. سرانجام به‌عدد a از ردیف عمودی برمی‌گردیم. این عدد باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد، مجموع رقم‌های موجود درآن، برابر۶+۱+۶+۱: یعنی ۱۴ می‌شود، بنابراین درخانهٔ آزاد جدول، تنها می‌توان عدد ۴ را قرارداد.

به‌این ترتیب، جدول مسألهٔ ۱۳۶ را ، تنها به‌یك طریق می‌توان پر کرد (شکل ۲۰۴). به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، همهٔ عددها ، با تعریف‌های خود سازگارند.

۱۳۷.

طرحی می‌ریزیم که، با نگاه‌کردن به‌آن، بتوانیم از همهٔ آگاهی‌های موجود در مسأله استفاده‌کنیم (شکل ۲۰۵). برای این‌که، طرح ما عینی‌تر بشود، علاوه‌بر آگاهی‌های مربوط به‌عددهای مختلف، ارتباط بین خانه‌های مختلف جدول را هم درآن، مشخص می‌کنیم.



شکل ۲۰۵

مجموع عددهای a و f در ردیف افقی، باید برابر عدد a از ردیف عمودی باشد. (این آگاهی، خود را در زیر عددهای مربوط به‌سال تولد و سن فوتبالیست ما، «مخفی» کرده است).

چون عدد a از ردیف عمودی، به‌صورت **۱۹ است، عدد b از ردیف عمودی، با رقم ۹ آغاز می‌شود. اگررقم دوم عدد e در ردیف افقی را A بگیریم، عدد d در ردیف عمودی برابر $\overline{10A} \times 90$ می‌شود.

در تعریف عدد i از ردیف عمودی، در واقع اطلاعی در بارهٔ خود این عدد داده نشده است، بلکه بین عددهای i و f افقی، رابطه‌ای برقرار کرده است.

به‌یاری همهٔ این آگاهی‌ها، طرحی ریخته‌ایم که در شکل ۲۰۵ دیده می‌شود.

در مساله تأکید شده است که، این حادثه در سدهٔ بیستم اتفاق افتاده و هنوز سال ۲۰۰۰ فرا نرسیده است، بنابراین عدد a از ردیف عمودی، تنها می‌تواند با ۱۹ آغاز شود (شکل ۲۰۵).

حالا به‌تعریف عدد f در ردیف افقی وعدد وابسته به‌آن در ردیف c عمودی مراجعه می‌کنیم.

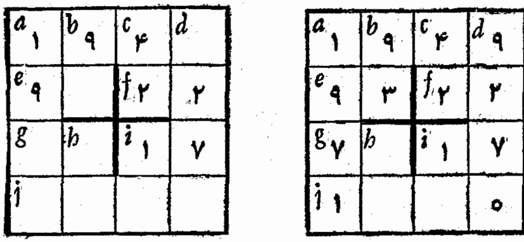
طبق تعریف عدد e در ردیف عمودی، باید رقم دوم این عدد با رقم دوم عدد f از ردیف افقی برابرباشد. بنابراین، عدد f در ردیف افقی باید به‌صورت ۱۱، ۲۲، ۳۳، ... باشد.

البته می‌دانیم که فوتبالیست ما باید از ۱۱ سال بیشتر داشته باشد، ولی این مطلب، کمك زیادی به‌حل مسأله نمی‌کند (همچنین، این مطلب‌هم که او نمی‌تواند خیلی پیر باشد، بازهم چندان کمکی به‌ما نمی‌کند).

از تعریف عدد i در ردیف عمودی، معلوم می‌شود که عدد i در ردیف افقی، ۵ واحد کمتر از عدد f در ردیف افقی است. این، نشان می‌دهد که‌عدد f ردیف افقی، نمی‌تواند برابر۱۱ باشد، زیرا درغیراین‌صورت عدد i ردیف افقی، برابر ۵ — ۱۱، یعنی ۶ می‌شود، یعنی عددی یك رقمی.

ولی عدد f افقی، برابر ۳۳ یا بزرگتر از آن هم، نمی‌تواند باشد؛

زیرا در این‌صورت، عدد c از ردیف عمودی، برابر ۲۰+۳۳، یعنی ۵۳ می‌شود و آن‌وقت، از تعریف عدد a در ردیف افقی نتیجه می‌شود که فوتبالیست در سال‌های ۵۰ از سدهٔ بیستم متولد شده است و نمی‌تواند ۳۳ سال داشته باشد (زیرا، کتاب ما قبل از سال ۱۹۸۰ چاپ شده است).



a b

شکل ۲۰۶

روشن است که اگر عدد f از ردیف افقی را برابر ۴۴، ۵۵ و غیره بگیریم، هربار به‌تناقض برمی‌خوریم.

بنابراین، عدد f در ردیف افقی، تنها می‌تواند برابر ۲۲ باشد که، در این صورت عدد c از ردیف عمودی برابر ۲۰+۲۲، یعنی ۴۲ و عدد i ردیف افقی، برابر ۵ــ۲۲، یعنی ۱۷ می‌شود (شکل a-۲۰۶).

از تعریف عدد d در ردیف عمودی، نتیجه می‌شود که اولاً، این عدد به ۰ ختم شده است و ثانیاً، (از آن‌جا که عدد e از ردیف افقی کمتر از ۹۰ نیست)، این عدد از عدد ۹×۱۰×(۱۰+۹۰)، یعنی ۹۰۰۰ کمتر نیست. به‌این ترتیب، عدد d در ردیف عمودی، حتماً با رقم ۹ آغاز می‌شود و، بنابراین تنها می‌تواند برابر ۹۲۷۰ باشد.

ولی در این صورت، عدد e افقی برابر ۱۰ ــ (۹۲۷:۹)، یعنی ۹۳ و عدد a از ردیف عمودی، برابر مجموع عددهای a و f از ردیف افقی، یعنی ۲۲+۱۹۴۹، یعنی ۱۹۷۱ می‌شود (شکل b-۲۰۶).

دربارهٔ عددهای h و i از ردیف عمودی، می‌دانیم که h، ۹ واحد بیشتر از i است. چون عدد i ردیف عمودی از ۱۹ بزرگتر نیست، عدد h ردیف عمودی از ۲۸ بیشتر نمی‌شود. بنابراین، این دو عدد، به‌ترتیب، با

a ۱	b ۹	c ۴	d ۹
e ۹	۳	f ۲	۲
g ۷	h ۱	i ۱	۷
j ۱			۰

a

a ۱	b ۹	c ۴	d ۹
e ۹	۳	f ۲	۲
g ۷	h ۱	i ۱	۷
j ۱	۹	۰	۰

b

شکل ۲۰۷

۱ و ۲ آغاز می‌شوند. ولی، عدد g در ردیف افقی فرد است و ، بنابراین، نمی‌تواند به ۲ ختم شود. در نتیجه، رقم آخراین عدد، تنها می‌تواند برابر ۱ باشد (شکل ۲۰۷-a).

در این صورت، عدد h از ردیف عمودی، نمی‌تواند از ۱۹ بزرگتر و عدد i از ردیف عمودی از ۱۰ بیشتر باشد (چون عدد اولی، ۹ واحد از عدد دومی بزرگتراست). به‌این ترتیب، برای عددهای h و i عمودی، تنها عددهای ۱۹ و ۱۰ قابل قبول است (شکل ۲۰۷-b).

به‌این ترتیب، جدول مربوط به‌زندگی‌نامهٔ فوتبالیست ما، به‌طور کامل پر می‌شود (شکل ۲۰۷-b). چون همهٔ عددهای این جدول، با آگاهی‌های صورت مساله تطبیق می‌کند، جواب مسالهٔ ۱۳۷ است.

۱۳۸.

همهٔ آن‌چه‌که در حل مسالهٔ ۱۳۷ آورده‌ایم، درسدهٔ سی‌ام هم‌به‌قوت خود باقی است، به‌جز این نکته‌که گفته بودیم، عدد f در ردیف افقی (سن فوتبالیست، در سالی‌که جدول را پرکرده است)، نمی‌تواند برابر ۳۳ باشد، زیرا درآن‌صورت عدد a در ردیف عمودی، بزرگتر از ۱۹۸۰می‌شود،یعنی بعد از آن‌که این‌کتاب، چاپ شده است. ببینیم، با شرطهای تازه، چگونه می‌توان به‌این عدد رسید!

بدون توجه به‌این‌که، جدول را در سدهٔ بیستم حل می‌کنیم یا درسدهٔ سی‌ام، همیشه می‌توان بخش اول خانه‌های آن را، که در شکل ۲۰۵ نشان

داده شده است، پرکرد و روشن کرد که دو رقم عدد f از ردیف افقی با هم برابرند و خود عدد f باید از ۱۱ بزرگتر باشد. (تا این مرحله از حل، همهٔ استدلال‌های حل مسالهٔ ۱۳۷، به‌قوت خود باقی می‌ماند.)

اگر عدد f از ردیف افقی را برابر ۲۲ بگیریم، همان جواب مسالهٔ ۱۳۷ به‌دست می‌آید (شکل b-۲۰۷).

اگر عدد f از ردیف افقی را برابر ۴۴ بگیریم ، عدد c از ردیف عمودی برابر ۶۴ می‌شود ، ولی در این صورت، مجموع عددهای a و f در ردیف افقی از ۲۰۰۰ بیشتر می‌شود که ممکن نیست، زیرا دورقم نخست عدد a از ردیف عمودی نشان می‌دهند که بونداش، زندگی‌نامهٔ غیرعادی خود را در سدهٔ بیستم پرکرده (شکل a-۲۰۸). روشن است که، اگر یوچی کابوك عدد f در ردیف افقی را بزرگتر از ۴۴ بگیرد، باز هم به‌همین گونه تناقض برخورد می‌کند.

به‌این ترتیب، تنها یك حالت ممکن باقی می‌ماند: عدد f در ردیف افقی، برابر است با ۳۳.

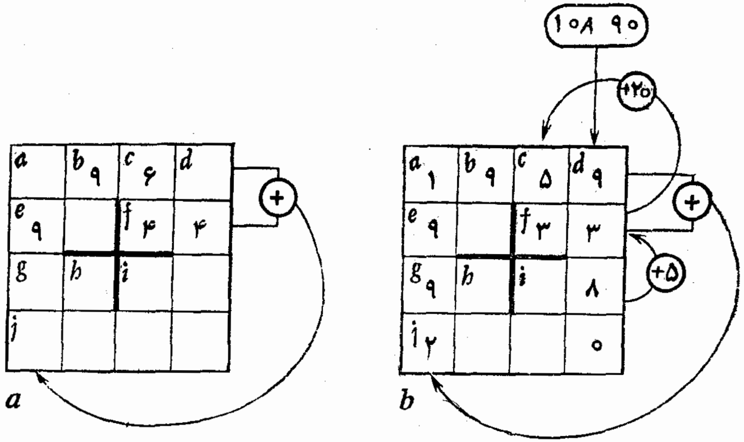
با این فرض، عدد f از ردیف افقی با عدد a از ردیف عمودی، تناقضی پیدا نمی‌کند، زیرا تاریخ پرکردن جدول، درسدهٔ بیستم باقی‌می‌ماند (شکل b-۲۰۸). پرکردن جدول را ادامه می‌دهیم.

آخرین رقم عدد i از ردیف افقی باید برابر ۸ باشد . رقم‌های اول و آخر عدد d از ردیف عمودی را می‌توان از حاصل‌ضرب $\overline{10A} \times 90$ پیدا کرد. روشن است که این عدد به‌صفر ختم می‌شود و رقم اول آن، تنها می‌تواند برابر ۹ باشد. (در واقع، چون داریم:

$$A.90 < 1000 \quad \text{و} \quad \overline{10A} \times 90 = 9000 + A.90$$

بنابراین، جملهٔ دوم نمی‌تواند موجب تغییر رقم اول جملهٔ اول بشود.)

با جمع‌بندی نتیجه‌های حاصل، معلوم می‌شود که عدد d از ردیف عمودی، تنها می‌تواند برابر ۹۳۸۰ باشد. ولی عدد ۹۳۸۰ ، با تعریف عدد d از ردیف عمودی سازگار نیست: بر ۹ بخش‌پذیر نیست (مجموع رقم‌های آن، برابر است با ۲۰). بنابراین، عدد f از ردیف افقی نمی‌تواند



شکل ۲۰۸

برابر ۳۳ باشد.

به‌این ترتیب، اگر این جدول در سدهٔ سی‌ام هم حل شود، تنها یک جواب به‌دست می‌آید، جواب مسألهٔ ۱۳۷. برای این منظور، لزومی ندارد از زمان چاپ این کتاب، اطلاعی داشته باشیم.

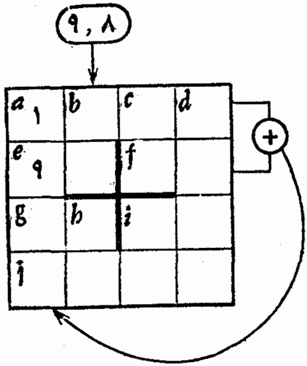
.۱۳۹

همان‌طور که از شکل ۲۰۷ـb دیده می‌شود، یک جواب وجود دارد. پرسشی پیش می‌آید: آیا مسالهٔ ۱۳۷، با حذف تعریف b از ردیف عمودی، بیش از یک جواب پیدا می‌کند؟

در این‌جا، با حالت خاصی از یک مسالهٔ کلی (مسالهٔ ۱۳۵) سروکار داریم. مسألهٔ ۱۳۷، به‌نوع II تعلق دارد. وقتی یکی از شرطهای آن را حذف کنیم، ممکن است یک ارزشی (نوع II) باقی بماند و یا چند ارزشی بشود (نوع III).

عدد a در ردیف عمودی، با ۱۹ آغاز می‌شود، زیرا «حادثه در سدهٔ بیستم پیش آمده است»، ولی دیگر نمی‌توان استدلال کرد که، عدد a از ردیف افقی هم، با ۱۹ آغاز می‌شود. ممکن است یه‌روموش بونداش درسدهٔ قبل متولد شده باشد، ولی البته نه قبل آن، زیرا سن او (عدد f از ردیف

افقی)، عددی‌است دو رقمی (علاوه برآن، مجموع عددهای a و f از ردیف افقی باید برابر عدد a از ردیف عمودی باشد، بنابراین، اختلاف دو عدد a از ردیف‌های افقی و عمودی باید کمتر از ۱۰۰ باشد). به‌این ترتیب، رقم دوم عدد b ازردیف عمودی، تنها می‌تواند برابر۸ یا۹ باشد (شکل۲۰۹).



شکل ۲۰۹

[لحظه‌ای بیندیشیم. قاعدتاً باید خوانندهٔ‌کتاب، سرخود را به‌علامت عدم موافقت به‌این طرف و آن‌طرف حرکت دهد و شگفت‌زده بپرسد:

ـ چطور چنین چیزی ممکن است؟ این بحث‌که آیا پەروموش بونداش می‌تواند در سال ۱۷۰۰ یا قبل از آن متولد شود، به‌کلی بی‌معناست. مگر ممکن است آدمی‌که بالای ۱۰۰ سال دارد، باز هم یك فوتبالیست حرفه‌ای باشد و یا اصلاً، بتواند بیش از ۲۰۰ سال زندگی‌کند؟

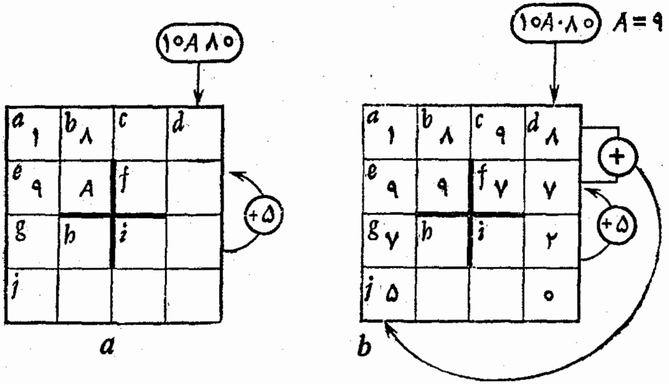
از خواننده می‌خواهیم، برای زمان کوتاهی، تجربهٔ زندگی خود را فراموش کند و، ضمن حل مساله، تنها از آگاهی‌هایی استفاده کند که در تعریف عددها داده شده است. تنها در این‌صورت است‌که، استدلال‌های او، خصلت ریاضی پیدا می‌کند و موجب اعتراض کسی نمی‌شود.]

اگر اولین رقم عدد b از ردیف عمودی را ۹ بگیریم، آن‌وقت، دو عدد b عمودی و e افقی با هم برابر می‌شوند و با شرط حذف شده، سازگار درمی‌آیند. و می‌دانیم که، اگر همهٔ شرطها برقرار باشند، مسأله تنها یك

جواب پیدا می‌کند: جواب مسالهٔ ۱۳۷ (شکل ۲۰۷-b).

اکنون، رقم اول عدد b در ردیف عمودی را برابر ۸ می‌گیریم. در این صورت، عدد d از ردیف عمودی، به‌صورتی غیر از آن‌چه در حل مسالهٔ ۱۳۷ داشته‌ایم در می‌آید و، ضرب، صورت زیر را پیدا می‌کند (شکل ۲۱۰-a):

$$\overline{(۹A+۱۰)}\times۸\times۱۰=\overline{۱۰A}\times۸۰$$

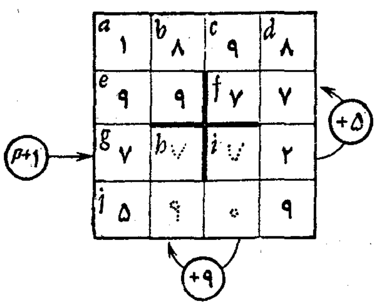


شکل ۲۱۰

با توجه به‌همهٔ مقدارهای ممکن A(A می‌تواند یکی از ده رقم ۰، ۱، ۲، ...، ۹ باشد). یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم: $A=۹$. به‌ازای این مقدار A، عدد i از ردیف افقی، می‌تواند ۵ واحد کمتر از عدد f در ردیف افقی باشد، ضمناً در بارهٔ f ردیف افقی می‌دانیم که از ۱۱ بزرگتر است و رقم‌هایی برابر دارد. [در حل مساله ۱۳۷، این ویژگی‌های عدد f از ردیف افقی، بدون مراجعه به‌تعریف عدد b از ردیف عمودی، ثابت شد و، بنابراین، عدد f در ردیف افقی باید در این‌جا هم دارای این ویژگی‌ها باشد.] به‌این ترتیب، اگر «زندگی‌نامه» در سدهٔ نوزدهم نوشته شده باشد، عدد d از ردیف عمودی، تنها می‌تواند برابر ۸۰×۱۰۹، یعنی ۸۷۲۰، و عدد e در ردیف افقی، تنها برابر ۹۹ باشد. ولی عدد a از ردیف عمودی دوباره ما را به‌سدهٔ بیستم می‌برد: ۱۹۷۵ (شکل ۲۱۰-b).

دنبالهٔ حل جدول ، تکرار حل مسالهٔ ۱۳۷ است: عـدد i در ردیف افقی، که ۵ واحد از عدد f در ردیف افقی کمتر است، برابر ۷۲ می‌شود. فرض کنید، عددی کوچکتر از ۷۰ نباشد ، و وقتی عدد ۹ را به‌آن اضافـه می‌کنیم، عددی به‌دست آیـد کـه از ۷۹ تجاوز نکند (g در ردیف افقـی، عددی فرد است). روشن است که، این وضع، تنها وقتی پیش می‌آید که، این عدد، برابر ۷۰ باشد. به‌این ترتیب، عدد i از ردیف عمودی برابـر با ۷۰ و عدد h ردیف عمودی برابر با ۷۹ است . روی شکل ۲۱۱ حالتی نشان داده شده است که درآن په‌روموش بونداش درسدهٔ نوزدهم متولد شده‌است. عددهایی که به‌دست آمده است، به‌واقع، جواب مسأله را تشکیل می‌دهند، زیرا با همهٔ شرطهای مساله سازگارند.

به‌این ترتیب، مسالهٔ ۱۳۹ دو جواب داردکه یکی از آن‌ها درشکل ۲۰۷-b و دیگری در شکل ۲۱۱ نشان داده شده است. اگر جواب اول را در نظر بگیریم با یك فوتبالیست ۲۲ ساله سروکار داریم و درحالت جواب دوم (که خیلی جدی نیست) با یك فـوتبالیست ۷۷ ساله. احتمال وجـود جواب دوم، کم است ولی کسی چـه می‌داند... از نظر ریاضیات، هـر دو جواب به‌یك اندازه اعتبار دارند ، زیرا هردوی آن‌ها، با شرطهای مسألـه سازگارند.



شکل ۲۱۱

یادداشت. این آزمایش باقی می‌ماند که ، برای چه مقدار دیگری از A، حاصل‌ضرب $\overline{۱۰A} \times ۸۰$ دارای این خاصیت می‌شود کـه رقم دوم آن، ۵ واحد از رقم سوم آن، بیشتر بشود. این‌خاصیت برای ۱۰۲×۸۰ وجود

دارد، زیرا این حاصل‌ضرب، برابر ۸۱۶۰ می‌شود (۱۱ = ۵ + ۶)؛ ولی در این صورت، عدد f از ردیف افقی برابر ۱۱ می‌شود که خیلی کم است (زیرا اگر از عدد f افقی، ۵ واحد کم کنیم، باید به‌عددی دو رقمی برای i افقی برسیم). درموردبقیهٔ امکان‌های عدد A درحاصل‌ضرب $\overline{10A} \times 80$ رقم‌های دوم و سوم حاصل‌ضرب، دارای خاصیت موردنظر نیستند.

۱۴۰.

مسأله دارای بیش از یك جواب می‌شود.

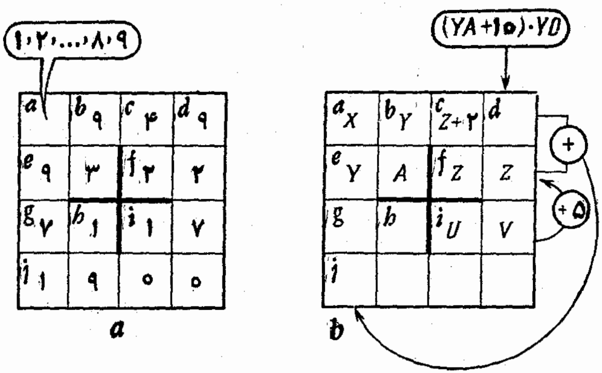
به‌سادگی می‌توان فهمید که، هیچ‌کدام از تعریف‌ها، نمی‌توانند رقم مربوط به‌خانهٔ سمت چپ و بالای جدول را معین کنند (درحل مسألهٔ ۱۳۷، عدد ۱ را در این خانه قرار داده‌ایم). دراین خانهٔ جدول، می‌توان هررقمی به‌جز ۰ را نوشت (شکل ۲۱۲ ـ a) که بعد از آن، همهٔ عددهای دیگر، با شرطهای مسأله سازگارند. بنابراین، مسالهٔ ۱۴۰، دست‌کم، دارای ۹ جواب است.

در واقع، تا همین‌جا، به‌پرسش مسأله، پاسخ داده‌ایم: مسأله، تعداد دقیق جواب‌ها را، از ما نخواسته بود ما، از این جهت در بارهٔ تعداد دقیق جواب‌ها، سکوت کردیم که، پاسخ‌دادن به‌آن، مستلزم صرف وقت زیادی است و از بیشتر مسأله‌های این کتاب، مفصل‌تر است. ما تنها به‌جواب‌هایی ازمسأله‌خواهیم‌پرداخت که، باروش ساده‌تری، به‌دست می‌آیند (هرمسأله‌ای را نمی‌توان، به‌صورتی ظریف و با تکیه بریك اندیشهٔ خلاق، حل کرد)، ضمناً برخی از جنبه‌های رسیدن به راه‌حل کلی را هم یادآوری می‌کنیم. قبل از همه، به‌بحثی می‌پردازیم که به‌بررسی امکان پیداکردن جواب مسأله، مربوط می‌شود.

متأسفانه، باید از مرحلهٔ اول حل مسألهٔ ۱۳۷ صرف‌نظر کنیم: در این جا، دیگر نمی‌توانیم بگوییم که، عدد a ازردیف عمودی با ۱۹ آغاز می‌شود.

یك‌بار دیگر تأکید می‌کنیم که، اگر بخواهیم استدلال خالص ریاضی را دنبال کنیم، تنها باید ازآگاهی‌هایی استفاده کنیم که در صورت مسأله‌آمده است و تنها براساس آن‌ها، نتیجه‌گیری‌های خود را بنیان گذاریم.

با وجود این، بعضی از جنبه‌های حل مسألهٔ ۱۳۷ را، در این‌جا هم می‌تـوان مورد استفاده قـرار داد. قبل از همه، این نتیجه‌گیری را در نظر می‌گیریم که، رقم‌های عدد f در ردیف افقی، باهم برابرند (این‌عدد را، در شکل۲۱۲-b، با $\overline{ZZ}$ نشان‌داده‌ایم). این عدد بـاید بزرگتر از ۱۱ باشد، درغیر این‌صورت، عدد $\overline{UV}$، که ۵ واحد ازآن کمتراست، یك‌رقمی می‌شود. **بنابراین، رقم Z از ۱ بزرگتر است.**



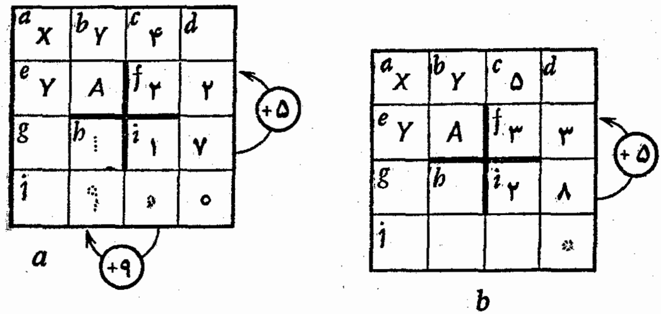
شکل ۲۱۲

عدد c درردیف عمودی، برابر $\overline{ZZ}+20$ است، بنابراین، رقم اول آن برابراست با $Z+2$. ازآن‌جاکه مجموع دوعدد a و f از ردیف افقی، باید برابر باعدد a ازردیف عمودی‌باشد، رقم صدگان Y این‌عدد، نمی‌تواند دلخواه‌باشد. بنابراین، رقمZ، بزرگتر از۳نیست (زیرامجموع ۶۰+۴۴، بزرگتر از ۱۰۰ می‌شود).

به‌این ترتیب، عدد f در ردیف افقی یا ۲۲ است ویا ۳۳. در هردو حـالت، عددهـای c عمودی و i افقی، به‌طور یك‌ارزشی، به‌دست می‌آیند (شکل ۲۱۳).

درحالت اول (یعنی، وقتی‌که عدد f ازردیف افقی برابر ۲۲ باشد)، عددهـای i و h از ردیف عمودی هم، به صورت یك ارزشی پیدا می‌شوند

[در واقـع ، در خـانه‌های جـدول ، تنها عـددهای ۱۹ و ۱۰ را می‌تـوان نوشت (شکل a-۲۱۳)، در ایـن صورت، عدد g از ردیف افقی، به‌عدد ۲ ختـم و، در نتیجـه، عـددی زوج می‌شـود]. روشن است کـه عـدد d از ردیف عمودی، به ۰ ختم می‌شود، ولی ، رشتهٔ استدلال‌هـا ، در همین جا، قطع می‌شود.



شکل ۲۱۳

رقم اول عدد d از ردیف عمودی، بستگی به انتخاب رقم‌هـای Y و A دارد.

اگر بخواهیم، کار را به پایان برسانیم، باید همهٔ حالت‌های ممکن را تا آخر دنبال کنیم. برای رسیدگی به‌همهٔ حالت‌ها، باید قریب ۶۰ ضرب را انجام داد.

[باید ببینیم، حـاصل‌ضرب $(\overline{YA}+10).Y$،وقتی که Y می‌تواند یکی از رقم‌هـای ۱، ۲،...، ۹ و A می‌تواند یکی از رقم‌هـای ۰، ۱، ۲،...،۹، باشد، چه‌موقع به ۳۸ یا ۲۷ ختم می‌شود، یعنی، چه‌موقع، این‌حاصل‌ضرب به یکی از صورت‌های ۱۳۸، ۲۳۸، ۳۳۸، ... ، ۹۳۸ یا ۱۲۷، ۲۲۷، ۳۲۷،...، ۹۲۷ درمی‌آید. در بالا، از روشی یاد کرده‌ایم که، به کمك آن، می‌توان همهٔ حالت‌های ممکن را بررسی کرد (در این حالت، از مقدارهـای ۱، ۲ و ۹ برای Y می‌توان صرف‌نظر کرد. در دو مورد اول، به‌عددهـای سه‌رقمی نمی‌رسیم، حـالت آخـر هم، به‌تفصیل، در حل مسألهٔ ۱۳۷ شرح

داده شده است).]

با جمع‌بندی همهٔ آن‌چه گفته شد، به‌نتیجه‌های زیر می‌رسیم:

به‌ازای $Y=۳$ و $A=۶$، عدد d درردیف عمودی، برابر ۶۴×۳۰، یعنی ۱۳۸۰ می‌شود.

به‌ازای $Y=۶$ و $A=۳$، عدد d ازردیف عمودی، برابر ۷۳×۶۰، یعنی ۴۳۸۰ می‌شود.

به‌ازای $Y=۹$ و $A=۳$، عدد d ازردیف عمودی، برابر ۱۰۳×۹۰، یعنی ۹۲۷۰ می‌شود.

در حالت اخیر، به‌همان جدولی می‌رسیم که در شکل ۲۱۲-a نشان داده شده است، یعنی در واقع، ۹ جواب.

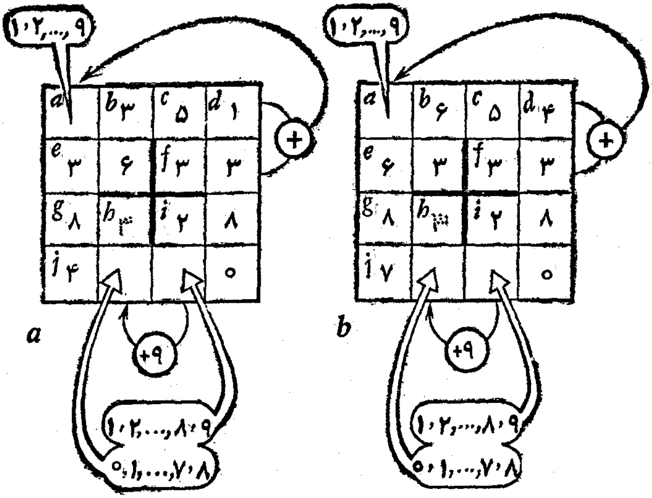
دو حالت اول را هم، در شکل ۲۱۴ نشان داده‌ایم. از آن‌جا که، عدد g در ردیف افقی، عددی فرد است، مجموع عدد i از ردیف عمودی با ۹، کمتر از ۳۰ نمی‌شود. بنابراین، رقم اول عدد i از ردیف عمودی، کمتر از ۱ نیست و، به‌جای آن، هرعدد دلخواهی از ۱ تا ۹ را می‌توان نوشت. ضمناً، عدد h از ردیف عمودی، می‌تواند برابر یکی از عددهای ۳۰، ۳۱، ...، ۳۸ باشد. در همهٔ این موردها، عددهای جدول با شرطهای مسأله سازگارند.

به‌این ترتیب، دوخانهٔ وسط از سطر پایین جدول، که در شکل ۲۱۴ نشان داده شده است، به‌۹ طریق می‌توانند پرشوند. درهریك از ۱۸جدولی که به این ترتیب پیدا می‌شود، در خانهٔ گوشهٔ چپ بالا، می‌توان ۹ رقم مختلف نوشت. بنابراین، ۱۶۲ جواب، برای مسأله، به‌دست می‌آید.

روی‌هم، مسألهٔ ما، $۱۶۲+۹$، یعنی ۱۷۱جواب دارد. درهمهٔ جواب‌ها، سن فوتبالیست، تنها دو حالت می‌تواند داشته باشد. سال تنظیم جدول (اگر از رقم هزارگان بگذریم) سه‌حالت دارد و مقدار اضافه حقوقی که، فوتبالیست ما، امید به‌دریافت آن دارد، ۱۹ حالت مختلف پیدا می‌کند.

*

در پایان، می‌خواهیم دوباره تأکیدکنیم که، ازدیدگاه ریاضیات، زمانی



شکل ۲۱۴

جدول را قابل حل می‌دانیم که، شرطهای آن تناقضی با هم نداشته باشند و با توجه به‌این شرطها، بتوان با تکیه براستدلال‌های منطقی، چنین عددهایی را پیداکرد که با همهٔ شرطهـای مسأله، سازگار بـاشند. انتخاب این عدد، به معنـای به‌دست‌آوردن جواب مسأله است بدون این‌که در بـارهٔ خصلت حادثه‌ها فکر کنیم که: آیا این عددها می‌توانند در واقع امر بـا حادثه‌هـای واقعی جور باشند یـا نه! بحث در بـارهٔ واقعی یـا غیرواقعی بودن جواب مسأله (از نظر وقوع حادثه‌ها)، در حالت کلی، به‌ریاضیات ربطی ندارد.

مثلاً، دریکی ازجواب‌ها، «سال جاری» (عدد a در ردیف‌عمودی)، با عدد ۱۳۸۴ معین شده است. این جواب، به‌روشنی با واقعیت نمی‌سازد، ولی از دید شرطهای مسأله، جواب درستی است. همچنین، سال‌های ۲۳۸۴ و ۹۶۸۷، که مربوط به‌دنیای دوری از آینده است، تنها از نظر ریـاضی، معنا دارند.

بخش یازدهم

۱۴۱. فینال مسابقهٔ دو امدادی

راه‌حل اول. قبل از هر کار، باید روشن کرد که، کدام گزاره، نادرست است تا وقتی این گزاره پیدا نشود (دقیق‌تر، تا وقتی نتوانیم مسیر استدلال را طوری تنظیم کنیم که، گزارهٔ نادرست، مشخص شود)، نخواهیم‌توانست به‌حل مسأله، موفق شویم.

اگر گزارهٔ (۹) را درست در نظر بگیریم، به‌سادگی معلوم می‌شود که، گزاره‌های (۴)، (۵) و (۶) نمی‌توانند به‌طور هم‌زمان، درست باشند. در واقع، اگر گزارهٔ (۶) درست باشد، باید ۳ مقام اول یا بین دو افریقایی و یک امریکایی تقسیم شده باشد و یا بین دو امریکایی و یک افریقایی. ولی بنابرگزارهٔ (۵)، ۲ تیم افریقایی نمی‌توانند در بین تیم‌های ردیف اول تا سوم باشند، و بنا برگزارهٔ (۴)، دو تیم امریکایی، تنها می‌توانند مقام‌های اول و سوم راگرفته باشند. علاوه برآن، از همان‌گزارهٔ (۴) نتیجه می‌شود که، مقام دوم متعلق به‌تیم اروپایی است و، بنابراین، دربین سه مقام اول، حتی یك تیم افریقائی هم وجود نداشته است.

بنابراین خبرنادرست دربین یکی ازگزاره‌های (۴)،(۵) یا (۶) است و (چون درمساله گفته شده است‌که تنها یك گزارهٔ نادرست وجود دارد) بقیهٔ گزاره‌ها، درست‌اند.

به‌این ترتیب، در ابتدای کار، از گزاره‌هایی استفاده می‌کنیم که، به‌درستی آن‌ها، اطمینان داریم.

کدام گزاره‌ها، ما را زودتر به‌جواب می‌رسانند؟

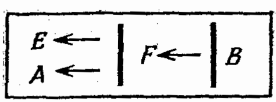
یادآوری می‌کنیم که سه گزارهٔ (۱)، (۳) و (۷) را می‌توان به‌هم پیوند داد. [اگر این گزاره‌ها را، به‌ردیف (۱)، (۷) و (۳) پشت سر هم بخوانیم، بهتر به‌این منظور می‌رسیم.]

با توجه به گزاره‌های (۱)، (۳) و (۷) می‌توان متوجه شد که اگر تیم‌های C و E راکنار بگذاریم، آن‌وقت، نمایندگان سایرتیم‌ها، تنها به‌ردیف $(AFBD)$ می‌توانند به‌خط پایان رسیده باشند (*).

بنابراین، بین تیم‌هایی که سه ردیف اول را به‌دست آورده‌اند، باید تیم اروپایی A وجود داشته باشد. در بدترین شرایط ، این تیم، در ردیف سوم قرار می‌گیرد، ولی به‌هرحال ، یکی از سه مقام اول را اشغال می‌کند. و این، به‌معنای آن است که گزارهٔ (۶)، نادرست است. بنابراین سرچشمهٔ آگاهی‌های نادرست معلوم شد. برای این‌که مقام هرتیم را پیدا کنیم، گزاره‌ها رابه‌این ردیف درنظرمی‌گیریم: (۲)، (۴)، (۵)، (۸)، (*)،(۹).

از گزاره‌های (۲) و (*) نتیجه می‌شود که تیم C به‌مقام اول رسیده است، زیرا روشن است که تیم D نمی‌تواند این مقام را کسب کند. بنابر گزارهٔ (۵)، تیم (D) در ردیف آخر قرار دارد (مقام ششم را کسب کرده است).

گزاره‌های (۸) و (*) ، به‌ما امکان می‌دهند تا ردیف چهار تیم باقی مانده را به‌صورت شکل ۲۱۵ نشان‌دهیم (جهت پیکان به‌سمت تیمی است که در زمان کمتری دویده است، انتهای پیکان، مقام پایین‌تر را نشان می‌دهد). اکنون باید روشن کنیم، از بین تیم‌های A و E، کدام‌یك به‌نتیجهٔ بهتری رسیده‌اند. گزارهٔ (۴)، در این‌مورد، به‌ما کمك می‌کند: بنابرطرح شکل ۲۱۵



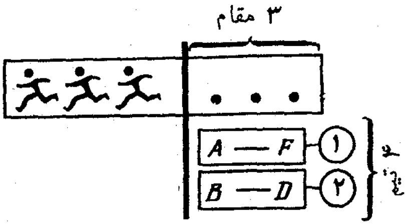
شکل ۲۱۵

تنها تیم اروپایی A می‌تواند خود را بین دو تیم امریکایی E و F قراردهد. بنابراین، چهارتیم‌اخیر، به‌ترتیب‌زیر، به‌خط پایان رسیده‌اند: E،A،F،B.

به این ترتیب، تیم‌های شرکت کننده در مسابقهٔ دو، در مقام‌هایی به‌ردیف زیر قرار گرفته‌اند: C، مقام اول؛ E، مقام دوم؛ A، مقام سوم؛ F، مقام چهارم؛ B، مقام پنجم و D ، مقام ششم.

از آن‌جاکه، این ردیف مقام‌ها، با همهٔ شرطهای مسأله [به جز شرط (۶) که نادرست بود] سازگارند، بنابراین، در واقع هم، جواب مسأله را به‌دست آورده‌ایم.

راه‌حل دوم. این حکـــم، که گزاره‌های (۴)، (۵) و (۶) نمی‌توانند به‌طور هم‌زمـان درست بـاشند، به‌همان ترتیب راه‌حل اول ثابت می‌شود. بنابراین، یکی از این سه گزاره نادرست است.



شکل ۲۱۶

ولی گزاره‌های (۱)، (۳) و (۶) هم، نمی‌توانند به‌طور هم‌زمان درست بـاشند. در واقع، از گزاره‌هـای (۶) و (۹) نتیجه می‌شود که سه‌مقام اول باید در بین تیم‌های افریقایی وامریکایی (یعنی C، D، E، F) باشند. بنابراین، تیم اروپایی می‌توانست ازیکی ازاین‌چهارتیم جلوبیفتد. ولی‌بنابر گزاره‌های (۱) و (۳)، A از F و B از D جلوافتاده است (شکل ۲۱۶).

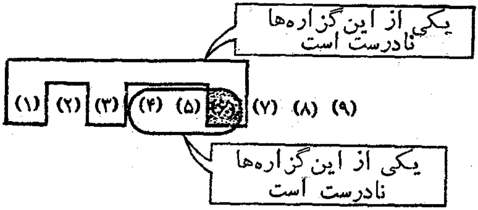
به‌این ترتیب، گزارهٔ نادرست، ممکن است

اولاً بین گزاره‌های (۴)، (۵) و (۶)،

و ثانیاً بین گزاره‌های (۱)، (۳) و (۶) وجود داشته باشد.

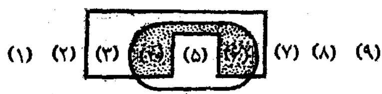
چون تنها یك گزارهٔ نـادرست وجود دارد، این گزاره تنهـا می‌تواند جملهٔ مشترك این دو گروه سه‌تـایی بـاشد (شکل ۲۱۷)، یعنی گزارهٔ (۶). به‌این‌ترتیب، گزارهٔ (۶) نادرست است.

یـادداشت ۱. حـالت دیگری هم، بـرای استدلال فوق وجود دارد. مثلاً، به‌سادگی می‌توان ثـابت کرد که، گزاره‌هـای (۴)، (۵) و (۶) هم، نمی‌توانند باهم درست باشند. ولی‌مقایسهٔ این‌سه‌تایی باهریك ازسه‌تایی‌های



شکل ۲۱۷

قبل، نمی‌تواند ما را به‌نتیجه برساند: امکان جداکردن گزارهٔ نادرست‌را به‌ما نمی‌دهد. در واقع، از این حقیقت که، گزارهٔ نادرست بین گزاره‌های (۴)، (۵) و(۶) ویا بین گزاره‌های(۳)، (۴) و(۶) است، تنها می‌توان به‌نتیجه‌ای ناقص رسید: یکی از دو گزارهٔ (۴) و (۶) نادرست است (شکل ۲۱۸)، زیرا، این‌دو گزاره ، در هردو گروه سه‌تایی شرطهای انتخابی، وجود دارند. از مقایسهٔ گزاره‌های (۱)، (۳) و (۶) با گزاره‌های (۳)، (۴) و (۶) هم، به‌نتیجهٔ مشابهی می‌رسیم.



شکل ۲۱۸

به‌همین ترتیب، می‌توان متوجه شدکه (اگر گزارهٔ (۹) را به‌حساب آوریم) ، گزاره‌های (۱)، (۵) و (۶)، نمی‌توانند با هم درست باشند. از مقایسهٔ گزاره‌های (۴)، (۵) و (۶) با گزاره‌های (۱)، (۵) و (۶) دوباره به‌همان نتیجهٔ نادرست بودن گزارهٔ (۶) می‌رسیم.

یادداشت ۲. باحل مسأله، ثابت کردیم که، گزارهٔ (۶) نادرست است: این که «۳ دوندهٔ سیاه‌پوست، قبل از دیگران، به‌خط پایان رسیده‌اند»درست نیست. ولی این مطلب، به‌هیچ‌وجه به‌معنای آن نیست که، بین ورزشکاران سه‌مقام اول، حتی یك دوندهٔ رنگین‌پوست وجود ندارد. از نادرست بودن گزارهٔ (۶)، تنها این نتیجه به‌دست می‌آید که، هرسه مقام نخست، متعلق

به‌دونده‌های سیاه‌پوست نیست.

طرح راه‌حل ساده است، ولی کامل نیست. این که گزارهٔ (۶) نادرست است، به‌طور شهودی واضح است [تنهـا این گزاره، به طـور مستقیم، بـا گزاره درست (۹) مربوط است]. وقتی که گزارهٔ(۶) را حذف کنیم، به‌سادگی می‌توانیم مقـام هریك از شش تیم را پیدا کنیم. بعد از آن که گزارهٔ (۶) حذف شود، بقیهٔ گزاره‌ها، به‌هیچ گونه تناقضی منجر نمی‌شوند و این، نشان می‌دهدکه، واقعاً، گزارهٔ (۶) نادرست است.

نقص این راه حل کجاست؟

وقتی که، حل مسأله را آغاز می کردیم، نمی‌دانستیم که، مسأله، تنها یك جواب دارد (یك‌ارزشی است). استدلال کوتاه فوق مارا قانع می کندکه، مسأله، دارای جواب است، ولی این که، آیا همین یك‌جواب را دارد،هنوز روشن نشده است. اگر گزارهٔ (۶)، به‌واقع، نادرست باشد، آن‌وقت، ردیف مقام‌های تیم‌ها را می‌توان، به‌طور یك‌ارزشی، معین کرد. ولی، یك پرسش باقی می‌ماند: آیا جواب دیگری از مسأله وجود ندارد که، درآن، نه گزارهٔ (۶)، بلکه گزارهٔ دیگری نادرست باشد؟

پاسخ دادن به این پرسش ، راه حل بالا را طولانی‌تر می کند و ما را به‌بررسی حالت‌های مختلف می کشاند.

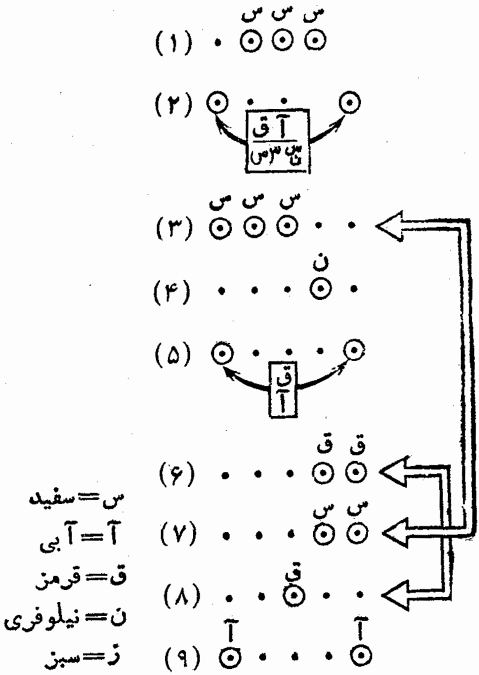
۱۴۲. مسابقهٔ ورزشی

قبل از هرچیز، باید گزاره‌های نادرست را پیدا کرد. زوج گزاره‌هـای متناقض را جست و جو می کنیم؛ تعداد آن‌هـا، هرچه بیشتر باشد، راحت‌تر می‌توانیم گزاره‌های نادرست‌را مشخص کنیم. در واقع، در هرزوج گزاره‌ای که باهم متناقض باشند، حتماً یکی ازآن‌ها، گزاره‌ای نادرست است.

اگریك‌بار، بادقت، همهٔ آگاهی‌های از(۱) تا(۹) را ازنظر بگذرانیم، به‌سادگی می‌توانیم زوج گزاره‌های متناقض را کشف کنیم (شکل ۲۱۹).

بلافاصله دیده می‌شود که

دست‌کم یکی از دوگزارهٔ (۶) و (۸) نادرست است.



شکل ۲۱۹

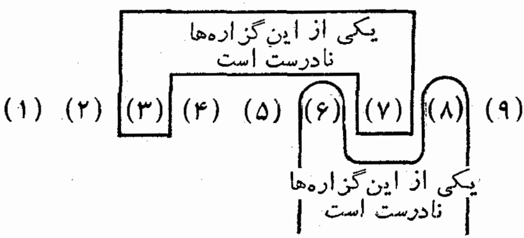
در واقع، بنا برشرطهای مسأله، تنها دو باشگاه از رنگ قرمز برای لباس ورزشی استفاده کرده‌اند («رعد» و «ابر»). اگر هردو گزارهٔ (۶) و (۸) درست باشند، به‌معنای آن است که سه‌باشگاه در لباس خود، رنگ قرمز را به‌کاربرده‌اند (که نمایندگان آن‌ها، در سه ردیف متوالی قرارگرفته‌اند).

همچنین، روشن است که

دست‌کم، یکی از دو گزارهٔ (۳) و (۷) نادرست است.

در واقع، بنا برشرطهای مسأله، ۴ شلوار از بین ۵ دونده، به رنگ سفیدند، بنابراین، شلوارهای کوتاه هم‌رنگ، تنها می‌توانند سفید باشند. در حالی که، اگر هردو گزارهٔ (۳) و (۷) درست باشند، به‌معنای وجود ۵ شلوار کوتاه سفید است که ممکن نیست، زیرا لباس ورزشی باشگاه «رعد» از رنگ سفید استفاده نکرده است.

به‌این ترتیب، از یك طرف بین گزاره‌های (۶) و (۸) و، از طرف دیگر، بین گزاره‌های (۳) و (۷)، یك گزارهٔ نادرست وجود دارد؛ ضمناً، در این دو زوج گزاره، عنصر مشترکی هم پیدا نمی‌شود (گزارهٔ متعلق به‌یکی از زوج‌ها، متعلق به‌زوج دیگر نیست و برعکس؛ شکل ۲۲۰)، بنابراین، بین ۴ گزارهٔ (۶) و (۸)، (۳) و (۷)، دست کم، دو گزاره نادرست وجود دارد. ولی، از آن‌جا که طبق فرض مسأله، تنها ۲ گزارهٔ نادرست باید وجود داشته باشد، بنابراین، چه در بین دو گزارهٔ (۶) و (۸) وچه در بین دو گزارهٔ (۳) و (۷)، تنها یك گزارهٔ نادرست جا گرفته است و، درهریك از این زوج گزاره‌ها، یك گزارهٔ درست وجود دارد.



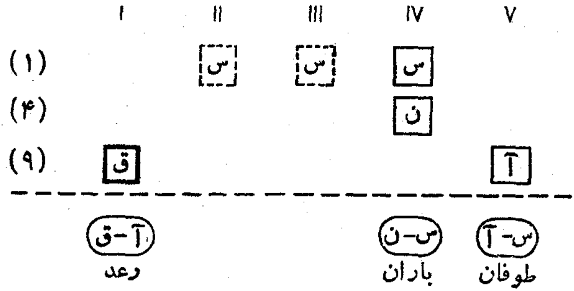
شکل ۲۲۰

ولی، اگر دو گزارهٔ نادرست در بین گزاره‌های (۳)، (۶)، (۷) و(۸) قراردارد، بقیهٔ گزاره‌های(۱)، (۲)، (۴)، (۵) و(۹)، گزاره‌هایی درست‌اند. بنابراین، استدلال‌های خود را، از همین گزاره‌های درست‌آغاز می‌کنیم.

گزاره‌های مشخص و درست (۱)، (۴) و (۹) را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۲). روشن است که در گزارهٔ (۱)، صحبت برسر شلوارهای کوتاه سفید است. ازگزارهٔ (۹) برمی‌آید که دونده‌های اول و آخر، پیراهن‌های آبی داشته‌اند (زیرا، تنها در مورد لباس باشگاه‌های «رعد» و «طوفان» به‌رنگ‌آبی برخورد می‌کنیم).

به‌سادگی معلوم می‌شود که، تنها نمایندهٔ باشگاه ورزشی «باران» می‌تواند در مقام چهارم قرار گیرد. دراین‌صورت، گزارهٔ (۲) کاملاً مشخص می‌کندکه لباس سفید نیلوفری هیچ وجه اشتراکی با لباس آبی قرمز ندارد،

بنابراین صاحب لباس آبی قرمز در ردیف اول قرار می‌گیرد و، در نتیجه، دونده‌ای که لباس سفید آبی دارد باید در ردیف پنجم باشد (درشکل ۲۲۱، نام باشگاهای ورزشی را زیرخط‌چین گذاشته‌ایم).



شکل ۲۲۱

گزارهٔ (۵)، گزاره‌ای «اضافی» است: نمی‌توانیم آگاهی تازه‌ای از آن به‌دست آوریم.

طرح شکل ۲۲۱، به‌تقریب کامل است، ولی هنوز باید جای دوندگان دو باشگاه «ابر» و «تگرگ» را در مقام‌های دوم و سوم، پیدا کنیم. ولی گزاره‌های درست (۱)، (۲)، (۴)، (۵) و (۹)، دیگر نمی‌توانند دراین‌باره، کمکی به‌ما بکنند، زیرا، تا این‌جا، از همهٔ آگاهی‌های موجود در آن‌ها استفاده کرده‌ایم (شکل ۲۲۱).

بنابراین، به گزاره‌های درست تازه‌ای نیازداریم، یعنی باید روشن کنیم که کدام‌یك از دو گزاره (۳) و (۷)، یا (۶) و (۸)، درست‌اند.

اگر دوندهٔ باشگاه «باران» (با پیراهن نیلوفری وشلوار کوتاه سفید)، در ردیف چهارم باشد، به‌ناچار، گزارهٔ (۶) نادرست می‌شود. از طرف دیگر، می‌دانیم که، از دو گزارهٔ (۶) و (۸)، یکی درست و دیگری نادرست است. چون ثابت کردیم که، گزارهٔ (۶) نادرست است، گزارهٔ (۸) حتماً باید درست باشد. ولی، در این صورت، مقام سوم باید متعلق به‌نمایندهٔ باشگاه ورزشی «ابر» باشد و، بنابراین، دوندهٔ باشگاه «تگرگ» در مقام دوم قرار می‌گیرد. به‌این ترتیب، ردیف باشگاه‌های ورزشی، دراین‌مسابقه،

تنها می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

۱) «رعد»، ۲) «تگرگ»، ۳) «ابر»، ۴) «باران»، ۵) «طوفان».

روشن است که هنوز باید تحقیق کنیم: آیا این جواب باتمامی شرطهای مسأله سازگار است یانه؟ باتحقیق معلوم می‌شود که، این جواب، باشرطهای (۳) و(۶) متناقض وبا بقیهٔ شرطها سازگاراست. درنتیجه، تعداد گزاره‌های نادرست، برابر۲ می‌شود و، جواب، باهمهٔ شرطهای مسأله جور است.

یادداشت ۱. ما توانستیم مسأله را حل کنیم، بدون این که بدانیم کدام‌یك از دوگزارهٔ (۳) و (۷) نادرست است. نادرست‌بودن یکی از این گزاره‌ها، تنها وقتی معلوم شد که خواستیم جواب حاصل را مورد تحقیق قرار دهیم.

یادداشت ۲. در حل مسأله، از بعضی گزاره‌های درست استفاده نکردیم [تمامی (۵) و بخشی از (۱)] (در شکل ۲۲۱، این آگاهی‌ها را با قراردادن واژهٔ «سفید» در داخل کادر نقطه‌چین، مشخص کرده‌ایم). به‌این ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت، که آگاهی‌های صورت مسأله، بیشتر از حد نیاز است.

یادداشت ۳. در حل مسأله گفته شده است که از دو گزاره ـ و مثلاً (۶) و(۸) ـ تنها یکی می‌تواند درست باشد. اگر ازنشانه‌های منطق‌ریاضی استفاده کنیم، این مطلب را می‌توان به‌صورتی کوتاه‌تر نشان داد.

در واقع، اگر گزاره‌های

(۶) «در لباس دو دوندهٔ ردیف آخر، رنگ‌قرمز وجود داشت» و

(۸) «دونده سوم، پیراهن قرمز داشت».

نمی‌توانند با هم درست باشند، به معنای آن است که، گزارهٔ مرکب شامل (۶) و (۸) (یعنی این گزاره که «در لباس‌های دو دونده آخر، رنگ قرمز وجود داشت و دوندهٔ سوم هم، پیراهن قرمز داشت»)، گزاره‌ای نادرست است. اگربرای حرف «و»، نشانهٔ خاصی ومثلاً $\wedge$ در نظر بگیریم، می‌توانیم گزارهٔمرکب رابه‌صورت«(۸)$\wedge$(۶)»بنویسیم. بااین نشانه گذاری، می‌توان دوگزاره‌ای را که، در ابتدای حل، با حرف خوابیده آورده‌ایم، به‌این صورت نوشت:

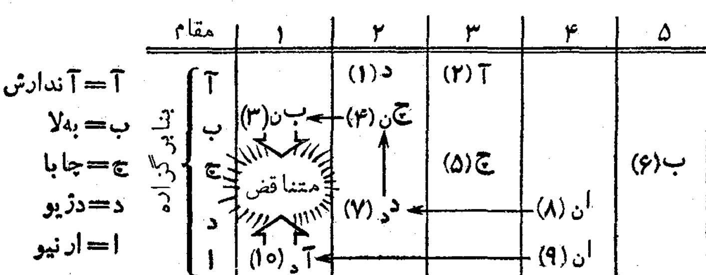
(۶)⋀(۸) نادرست است.
(۷)⋀(۳) نادرست است.

یادداشت ۴. روشن است که، راه‌حل فوق، تنها راه‌حل مسأله نیست. تعیین ردیف مقام‌های دونده‌ها را، به‌طریق‌های مختلف دیگری هم می‌توان به‌دست‌آورد. اختلاف دو روش راه‌حل، به‌انتخاب زوج گزاره‌هایی مربوط می‌شود که، در بین آن‌ها، تناقضی وجود دارد. ممکن است، تناقض را، نه‌دربین دو گزاره، بلکه دربین سه‌گزاره پیداکرد (سه‌گزاره‌ای که، دست‌کم، یکی‌ازآن‌ها نادرست‌است). مثلاً، سه‌گزارهٔ (۱)، (۲) و (۳) و یاسه‌گزارهٔ (۲)، (۳) و(۴)، یکدیگر را «نقض» می‌کنند.

۱۴۳. حیرت مربی

راه حل اول. گزاره‌های (۸) و (۹)، در واقع، برهم منطبق‌اند، بنابراین: (الف) یا هردوی‌آن‌ها نادرست‌اند و (ب) یا هردوی‌آن‌ها درست.

الف) اگر گزاره‌های (۸) و (۹) نادرست باشند، گزاره‌های دوم دڑیو و ارنیو [گزاره‌های (۷) و (۱۰)] درست‌اند. بنابراین، گزارهٔ (۴) که متناقض با گزارهٔ (۷) است نادرست می‌شود و، در نتیجه، گزارهٔ دوم به‌لا گزارهٔ (۳) ـ باید درست باشد. به‌این ترتیب، در این حالت، باید هر دو گزارهٔ (۱۰) و (۳) درست باشند، ولی این ممکن نیست: آندراش و به‌لا، نمی‌توانند هردو درمقام اول قرارگیرند (شکل ۲۲۲). [درشکل، «د» نشانهٔ



شکل ۲۲۲

«درست» و «ن» نشانهٔ «نادرست» است.]

بنابراین، اگر گزاره‌های (۸) و (۹) نادرست باشند، مسأله جواب ندارد.

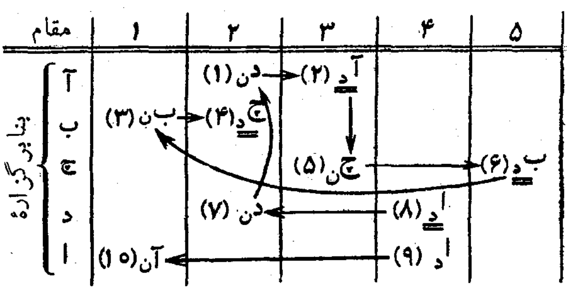
ب) مساله تنها وقتی دارای جواب است که، هردو گزارهٔ (۸) و (۹) درست باشند: ادنیو، مقام چهارم را به‌دست آورد.

وقتی‌که گزارهٔ (۸) درست باشد: گزارهٔ دیگر دژیو [گزارهٔ (۷)] نادرست می‌شود، ولی در این صورت، گزارهٔ (۱) هم ـ که با گزارهٔ (۷) یکی است ـ باید نادرست باشد. بنابراین، گزارهٔ دوم آندراش درست‌است: آندراش به‌مقام سوم رسیده است.

گزارهٔ (۵)، که با گزاهٔ درست (۲) متناقض است، باید نادرست باشد و، در نتیجه گزارهٔ (۶) ، گزاره‌ای درست است: به‌لا، مقام پنجم را کسب کرده است.

گزارهٔ (۳)،که با نتیجهٔ اخیر متناقض است، نادرست است. بنابراین، گزاره دوم به‌لا ـ یعنی گزارهٔ (۴)ـ درست است: چابا دوم شده است. برای دژیو تنها یك جای آزاد باقی می‌ماند: مقام اول (شکل ۲۲۳). بنابراین، ردیف شناگران، چنین‌است: دژیو، اول؛ چابا، دوم؛ آندراش ، سوم ؛ ادنیو، چهارم و به‌لا ، پنجم.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، با این جواب، گزاره‌های (۲)، (۴)، (۶)، (۸) و (۹) درست و گزاره‌های (۱)، (۳)، (۵)، (۷) و (۱۰) نادرست‌اند.



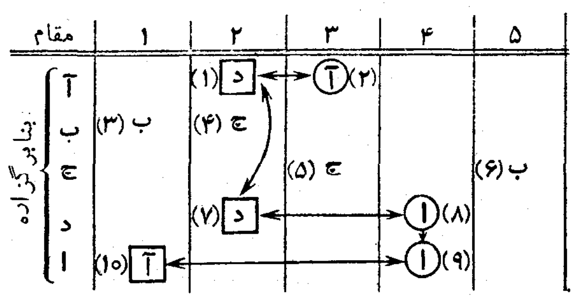
شکل ۲۲۳

این وضع با شرط مساله سازگار است که، هرشناگر، یك گزارهٔ درست و یك گزارهٔ نادرست ارائه داده است. بنابراین، ردیفی که به‌دست آوردیم، در واقع، جواب مساله است.

داه حل دوم. نمی‌توان اطمینان داشت که، بهترین راه حل، شروع از گزاره‌های (۸) و (۹) است. ولی، اگر از گزاره‌های دیگری آغاز کنیم، حل مساله به‌مراتب طولانی‌تر و بغرنج‌تر می‌شود. اگر کار را، به‌طور تصادفی، آغاز کنیم، ممکن است درپیچ و خم رابطهٔ متقابل گزاره‌ها، سردرگم شویم. باید از جایی آغاز به‌کار کرد که «خودبه‌خود» ما را به‌سمت جواب هدایت کند.

هرگزاره را باشمارهٔ ردیف‌آن و حرف اول نام شناگری که‌آن‌را ارائه داده است، مشخص می‌کنیم وهمهٔ ۱۰ گزاره را، به دوگروه چنان تقسیم می‌کنیم که، درهرگروه، گزاره‌هایی قراربگیرندکه ارزش درستی‌آن‌ها یکسان باشد. گزاره‌های یکی از گروه‌ها را با مربع وگزاره‌های گروه دیگر را با دایره، محصور می‌کنیم. ازآن جا که، طبق شرط مساله، هرشناگر ۲ گزاره ارائه داده است که یکی ازآن درست و دیگری نادرست است، بنابراین، در شکل ۲۲۴، در هرسطر با یك مربع ویك دایره روبه‌رو می‌شویم.

دوگزاره را، از نظر ارزش خود، وقتی یکسان می‌دانیم که، هر دوی آن‌ها درست ویا هردوی آن‌ها نادرست باشند. در هریك ازاین دوحالت، باید آن‌ها را، به‌وسیلهٔ شکل یکسانی محصورکرد. ما هم، حل مساله را، با جست وجوی این‌گونه گزاره‌ها، آغاز می‌کنیم.



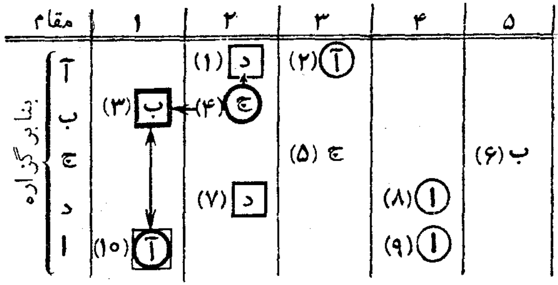
شکل ۲۲۴

الف
گزارهٔ (۱)، از نظر محتوی خود، بر گزارهٔ (۷) منطبق است، بنابراین باید آن‌ها را بایك شکل، و مثلاً با مربع، محصورکرد.
گزاره‌های (۲) و (۸)، در مقایسه با گزاره‌های (۱) و (۷)، ارزش متناقضی دارند، به همین دلیل، آن‌ها را با دایره محصور کرده‌ایم.
گزارهٔ (۹)، معنایی برابر بامعنای گزارهٔ (۸) دارد، بنابراین دور گزارهٔ (۹) هم باید دایره قرارداد، ولی گزارهٔ (۱۰) که متناقض آن است، درمربع واقع می‌شود (شکل ۲۲۴).

گزاره‌های دیگری که، مضمون آن‌ها، منطبق بریکدیگر باشد، وجود ندارد، درعوض، گزاره‌های متناقض به‌فراوانی پیدا می‌شود، که درآن‌ها، یا یك شناگر دومقام متفاوت را درمسابقه به‌دست آورده است و یا دو شناگر دریك مقام قرارگرفته‌اند. مثلاً، گزاره‌های (۳) و(۶) یا (۱) و (۴) ازاین گونه‌اند.

با وجوداین، دربرخورد بااین گزاره‌ها، باید جانب احتیاط را نگه داشت. تناقض بین آن‌ها، به‌اندازه تناقض بین دوگزاره‌ای که دریك سطر از جدول شکل۲۲۴ قراردارند، ساده وطبیعی نیست. درواقع، ازهردوگزاره‌ای که دریك سطر قراردارد، حتماً یکی درست ودیگری نادرست است، درحالی که مثلاً، دوگزارهٔ (۱) و (۴)، که البته نمی‌توانند به‌طور هم‌زمان درست باشند، ممکن است به طور هم‌زمان، نادرست ازآب درآیند. بنابراین، شکل حصاری که به‌دورآن‌ها می‌کشیم، لزوماً نباید متفاوت باشند. تنها وقتی می‌توانیم شکل حصاراین گزاره‌ها را مشخص کنیم، که این یا آن شکل‌حصار را، متناظر با گزارهٔ درست به حساب‌آوریم (درستی یا نادرستی این فرض، ضمن ادامهٔ حل مساله، تایید یا رد می‌شود).

ب
فرض می‌کنیم، حصارمربعی شکل، معرف جواب‌های درست‌باشد.
از آن جاکه گزارهٔ (۱) درداخل حصار مربعی قرار دارد، باگزارهٔ (۴) سازگارنیست، باید گزارهٔ (۴) را در دایره محصورکرد و، گزارهٔ(۳) راکه درهمان سطرگزارهٔ (۴) قراردارد، باحصارمربعی.



شکل۲۲۵

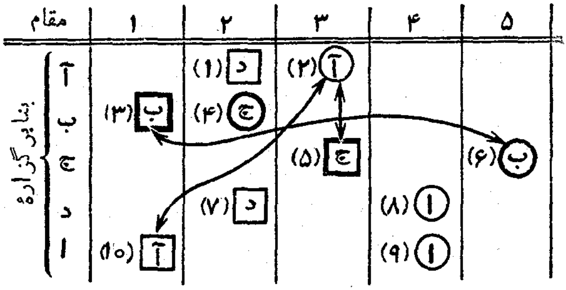
گزارهٔ (۱۰)، کـه با گزارهٔ (۳) سازگارنیست، باید با دایره محصور شود؛ ولی، گزارهٔ (۱۰)، قبلاً درحصارمربعی قرار گرفته است (شکل۲۲۵). این‌تناقض، ثابت می‌کندکه، فرض‌نخستین ما، فرضی نادرست بود: گزاره‌های درست، با «دایره» محصورشده‌اند، نه با «مربع».

بنابراین، نشانه‌گذاری‌های شکل۲۲۵، نادرست‌است. ازفرض‌مخالف آغاز می‌کنیم، یعنی گزاره‌های محصور دردایره را، درست می‌گیریم.

پ

دوباره به شکل ۲۲۴ بـرمی‌گردیم. گزارهٔ (۲) با دایره مشخص شده‌است، بنابراین، گزاره‌های متناقض با آن، یعنی (۵) و(۱۰)، باید با مربع مشخص شوند (در مـورد (۱۰)، ازقبل هم برای ما روشن بود). گزارهٔ (۶)، که بـا گزارهٔ (۵) دریك سطر است، با دایره، و گزارهٔ (۳)، که با گزارهٔ (۶) سازگار نیست، با مربع و، همچنین، گزارهٔ (۴) که با گزارهٔ (۳) دریك سطراست، بـا دایره مشخص‌می‌شوند (شکل ۲۲۶).

با انجام این عمل‌ها، ارزش درستی همهٔ گزاره‌ها معلوم می‌شود: گزاره‌های دایره‌ای (۲)،(۴)،(۶)،(۸) و (۹)، گزاره‌هایی درست و گزاره‌های (۱)، (۳)، (۵)،(۷) و (۱۰)، گزاره‌هایی‌نادرست‌اند. گزاره‌های درست، به‌ما امکان می‌دهند تا ردیف هریك از شناگران را، درمسابقه، معین کنیم: دژیو، مقام‌اول؛ چاپا، مقام‌دوم؛ آندراش، مقام سوم؛ ارنیو، مقام چهارم و بالاخره بِلا، مقام پنجم را به دست آورده‌اند.



شکل ۲۲۶

ازآن‌جاکه، با این ترتیب برای ردیف‌های شناگران، همهٔ گزاره‌های مربعی، نادرست می‌شوند و شرط مساله، که هرشناگر یك گزاره درست ویك گزارهٔ نادرست ارائه داده است، سازگار می‌ماند (درهرسطر ازشکل ۲۲۶، دوگزاره وجود داردکه یکی درداخل دایره ودیگری درداخل مربع محصور شده است)، بنابراین، توانسته‌ایم جواب مساله را به‌دست‌آوریم.

۱۴۴. حالت جدید

روشن‌است، بخشی ازحل مسالهٔ۱۴۳، که‌درآن ازگزارهٔ (۱۰)استفاده نشده است، بـه همان‌صورت سابق خود، باقی می‌ماند. تغییر وضع، تنها در بخشی‌ازمساله‌پیش‌می‌آیدکه، درآن، گزارهٔ (۱۰) به‌نحوی لطمه‌خورده‌باشد.

درحل مسالهٔ ۱۴۳ روشن‌کردیم‌که گزاره‌های (۲)، (۴)، (۶)، (۸) و (۹) درست، و بقیـهٔ گـزاره‌هـا، یعنی (۱) ، (۳) ، (۵) ، (۷) و (۱۰) نادرست‌اند؛ به‌این‌ترتیب، توانستیم، مقام‌هریك ازشرکت‌کنندگان درمسابقهٔ شنا را پیدا کنیم: نفراول، دژیو؛ نفردوم، چابا؛ نفرسوم، آندراش؛ نفرچهارم، ارنیو و نفرپنجم، بهلا.

این جواب، درایـن جا هـم، بـه‌قوت خود باقی است. درواقع، همهٔ گزاره‌های درست مسالهٔ قبل ، بی‌تغییر باقی مانده‌اند و تنها گزارهٔ نادرست (۱۰) تغییرکرده است. ولی، این گزاره، درحالت جدیـد هم نادرست است، زیرا چابا مقام‌سوم‌را احرازنکرده‌است. به‌این‌ترتیب، جوابی‌که‌برای مسالهٔ

قبلی به‌دست‌آوردیم، با تمامی شرطهای مسالهٔ جدید هم سازگار است.

ولی نباید گمان کرد که، حل مساله، بـه‌پایان رسیده است، زیرا ممکن است‌درحالت جدید، بیش‌ازیك جواب داشته‌باشیم. اگر با تغییر گزارهٔ (۱۰)، مساله به‌صورت چند ارزشی درآید، وضع چگونه است؟

آیا مساله، جواب دیگری ندارد؟

برای این‌که به‌این پرسش، پاسخ بدهیم، بـه آغاز راه‌حل دوم مسالهٔ ۱۴۳ برمی‌گردیم: تقسیم گزاره‌ها به دوحالت «دایره‌ای» و «مربعی».

بخشی ازراه حل، که با حرف «الف» مشخص شده است و، همچنین ، توزیع دایره‌ها و مربع‌ها در طرح (شکل ۲۲۴)، بدون تغییر باقی می‌ماند. آن‌چه، دراین بخش از راه حل، مورد استناد قرارگرفته است، هنوزبه‌معنای نادرست‌بودن گزارهٔ(۱۰) نیست. درآن‌جا، تنهاصحبت برسرتناقض گزاره‌های (۱۰) و (۹)، ازنظر ارزش درستی آن‌هاست. این حقیقت، به خودی خود، ارتباطی به‌نوع‌آگاهی موجود درگزارهٔ (۱۰) ندارد وتنها گواه براین‌مطلب است که، یکی از دوگزارهٔ ارنیو درست ودیگری نادرست است.

بخش‌دوم راه‌حل هم،که باحرف «ب» مشخص شده است تغییرنمی‌کند ولی، ادامهٔ این‌بخش از راه‌حل [درجایی‌که از تناقض گزارهٔ (۱۰) باگزارهٔ (۹) صحبت شده و گفته شده است‌کـه باید گزارهٔ (۱۰) را با دایره محصور کرد]، دیگر درست نیست، زیرا گزارهٔ جدید (۱۰)، با گزارهٔ (۳) متناقض نیست. بنابراین، در«ب» راه‌حل مسالهٔ تازه، جدا می‌شود: دیگر نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که، گزاره‌های محصور درمربع‌ها، درست نیستند. چه بسا که، درمسالهٔ جدید، گزاره‌های «مربعی»، درست باشند.

تاکید می‌کنیم که‌صحبت برسرامکان است، نه‌قطعی بودن. به‌هیچ وجه، برحتمی‌بودن درستی این گزاره‌ها، اطمینان نداریم. ضمناً، اگرنتوانیم‌درستی این گزاره‌ها را، به طریقی، ثابت‌کنیم، به‌معنای‌آن‌نیست که، طریق دیگری، برای اثبات آن وجود ندارد. بـه‌همین مناسبت، بایدکاملاً احتیاط‌کرد: این احتمال وجود داردکه، گزاره‌های محصور درمربع‌ها، درست باشند.

ازبخش‌های «الف» و «ب» راه‌حل (یا از توزیع دایره‌ها و مربع‌ها در شکل ۲۲۴ وبخشی از «ب») نتیجه می‌شود که‌گزاره‌های (۱)، (۷)، (۱۰)

مقام	۱	۲	۳	۴	۵
بنا بر گزاره آ		د (۱)	آ (۲)		
ب	ب (۳)	ج (۴)			
ج			ج (۵)		ب (۶)
د		د (۷)		ا (۸)	
ا			ج (۱۰)	ا (۹)	

شکل ۲۲۷

و (۳) «مربعی» و گزاره‌های (۲)، (۸)، (۹) و (۴) «دایره‌ای» هستند. به‌سادگی دیده‌می‌شود که، گزارهٔ (۵)، بر گزارهٔ (۱۰) منطبق است و، بنابراین، بایدبایك مربع محصورشود. گزارهٔ (۶) که‌درهمان سطر گزارهٔ (۵) قراردارد، حصار دایره‌ای پیدا می‌کند (شکل ۲۲۷).

آیا ممکن است، درمسالهٔ جدید، گزاره‌های واقع در مربع‌ها درست، و گزاره‌های واقع دردایره‌ها نادرست باشند؟

ازگزاره‌های «مربعی» (۱)، (۳)، (۵)، (۷) و (۱۰) نتیجه می‌شود: بەلا درمقام اول، دژیودرمقام دوم، وچابا درمقام سوم قرارگرفته‌اند. [ازمقام‌های چهارم وپنجم اطلاعی نداریم، زیرا گزارهٔ (۱) برگزارهٔ (۷) و گزارهٔ (۵) برگزارهٔ (۱۰) منطبق است.] ولی اگر گزارهٔ (۸) نادرست است، ارنیو نمی‌تواند مقام چهارم را داشته‌باشد و، بنابراین، تنها می‌تواند درردیف‌آخر قرارگیرد: ارنیو مقام پنجم را می‌گیرد.

بنابراین، تنها مقام چهارم است که برای آندراش باقی می‌ماند: آندراش‌درمقام چهارم‌قرارمی‌گیرد. می‌بینیم که، اگر گزاره‌های «مربعی»درست باشند، مقام شناگران را، تنها به یك ترتیب می‌توان معین‌کرد: بەلا درمقام اول ، دژیو در مقام دوم، چابا در مقام سوم ، آندراش در مقام چهارم و ارنیو در مقام پنجم.

در واقع، جوابی از مساله را به‌دست آوردیم، زیرا با این توزیع، گزاره‌های«مربعی» (۱)، (۳)، (۵)، (۷) و(۱۰) درست، وگزاره‌های(۲)، (۴)، (۶)، (۸) و (۹) نادرست‌اند.

به‌این‌ترتیب، ۲ جواب مساله به‌دست می‌آید.

آیا، مساله، جواب دیگری ندارد؟

مساله، جواب دیگری ندارد، زیرا از بخش «الف» نتیجه می‌شود که، درشکل ۲۲۴، باید سه گزارهٔ محصور در مربع، درست و سه گزارهٔ محصور دردایره، نادرست باشند ویا برعکس. درحالت اول، به طور یك ارزشی، به جوابی می‌رسیم که هم اکنون به‌دست‌آوردیم: درحالت دوم، بخش «پ» از راه حل دوم، مسالهٔ ۱۴۳، به قوت خود باقی می‌ماند و به‌همان جواب مسالهٔ ۱۴۳ می‌رسیم (این جواب هم، به طور یك ارزشی، به دست آمد).

[این که، درحالت دوم، بخش‌حل «پ» به‌قوت خود باقی است،ظاهراً، بااستناد به‌مضمون گزارهٔ (۱۰)، که درترتیب مقام نقش‌مهمی دارد، متناقض است. ولی‌دربخش «پ» درواقع، تنها ازاین‌مطلب استفاده‌کرده‌ایم که، ارزش درستی گزارهٔ (۱۰)، باارزش درستی گزارهٔ (۲)، متناقص‌است؛ واین ویژگی گزارهٔ (۱۰)، در هر دوحالت، وجود دارد.]

یادداشت ۱. ضمن حل، نشان داده شدکه، شکل ۲۲۷ را می‌توان، به صورتی یکسان، برای هردوحالت گزاره‌های مربعی و دایره‌ای به‌کاربرد. این، به معنای آن است‌که مضمون جدید گزارهٔ (۱۰)، از جملهٔ نتیجه‌هایی است که ازشکل ۲۲۴ به‌دست می‌آید، یعنی بخشی ازآگاهی‌هایی است‌که در گزاره‌های «مربعی» و «دایره‌ای» (۳)، (۴)، (۵) و(۶) وجود دارد؛ ضمناً، این مطلب، بستگی به‌آن ندارد‌که کدام یك ازآن‌ها ـ گزاره‌های مربعی یا گزاره‌های دایره‌ای ـ درست‌اند: اگر به ارتباط بین ارزش درستی گزاره‌های جداگانه‌توجه‌کنیم، به‌سادگی به‌این مطلب قانع می‌شویم.

روی‌شکل‌های ۲۲۲ تا ۲۲۶ (وهمراه باآن‌ها، روی شکل‌های ۲۲۷ تا ۲۲۹)، سه‌نوع بستگی، بین ارزش‌های درستی وجود دارد:

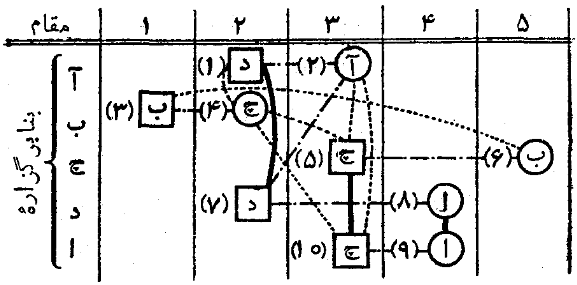
الف) ارزش درستی دوگزاره، برهم منطبق‌اند (یا هر دودرست و یا هردو نادرست‌اند؛ مضمون هردو گزاره یکی است)؛

ب) ارزش درستی دو گزاره، متناقض یکدیگرند (اگر یکی از گزاره‌ها درست باشد، دیگری نادرست است وبرعکس؛ در مساله‌های ۱۴۳ و ۱۴۴، دوگزاره ازاین نوع‌اندکه به‌یك ورزشکار مربوط می‌شوند)؛

پ) دو گزارهٔ با هم سازگار نیستند (هـر دو گزاره، نمی‌توانند درست باشند، اگر چه کاملاً ممکن است که هـر دوی آن‌ها نادرست باشند)؛ در مساله‌های ۱۴۳ و ۱۴۴، مثلاً گزاره‌های (۱) و (۴) یا (۳) و (۶) وغیره، ازاین نوع‌اند.

بستگی‌های نوع «الف» را بـا خط‌کلفت، بستگی‌های نوع «ب» را با خط ـ نقطـه و بستگی‌های نـوع «پ» را بـا نقطه‌چین نشان می‌دهیم. همهٔ بستگی‌های بین ده گزارهٔ مسالهٔ ۱۴۴ را درشکل ۲۲۸ نشان داده‌ایم.

این بستگی‌ها، چه‌رابطه‌ای بـانوع گزاره‌های درست (یعنی، درست‌ـ بودن گزاره‌های داخل مربع یا درست بودن گزاره‌های داخل دایره) دارند؟ اگر ارزش درستی همهٔ گـزاره‌ها عوض شود (یعنی گـزاره‌های داخل دایره درست و گزاره‌های داخل مربع نادرست باشند)، چه‌تغییری دراین بستگی‌ها به‌وجود می‌آید؟



شکل ۲۲۸

روشن‌است‌که، چنین‌تغییری، بربستگی‌های‌نوع «الف» (که باخط‌های کلفت نشان‌داده شده‌اند)، اثری نمی‌گذارد. درواقع، اگر با دو گزارهٔ‌درست سروکارداشته باشیم، بعد ازآن‌که ارزش درستی آن‌ها را معکوس‌کنیم، به‌دو گزارهٔ نادرست تبدیل می‌شوند و، اگر بـا دو گزارهٔ نادرست سروکار داشته باشیم، هردوی آن‌ها، بعد از «معکوس‌کردن» ارزش درستی آن‌ها، منجر به دوگزارهٔ درست‌می‌شوند و، درنتیجه، نوع‌بستگی‌بین‌آن‌ها، تغییری‌نمی‌کند.

دربستگی‌های نوع «ب» هم، تغییری به‌وجود نمی‌آید: وقتی که با دو گزاره سر و کار داشته باشیم که یکی درست و دیگری نادرست باشد، بعد از

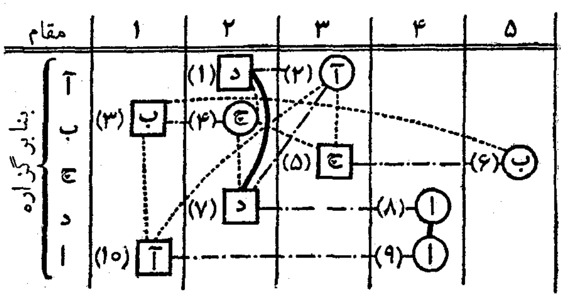
«معکوس کردن» ارزش درستی آن‌ها، بازهم با یک گزارهٔ نادرست و یک گزارهٔ درست سروکار خواهیم داشت و، درنتیجه، نوع بستگی بین آن‌ها، بی‌تغییر می‌ماند.

ولی درمورد بستگی ازنوع «پ»، وضع تاحدی بغرنج‌تراست. درواقع، دردوحالت، ممکن‌است این گونه‌بستگی پیش‌آید: ۱) وقتی که‌یکی از گزاره‌ها درست و دیگری نادرست باشد؛ ۲) وقتی که هردو گزاره نادرست باشند.

روشن‌است که، درحالت‌اول، وقتی که‌ارزش‌درستی گزاره‌ها، به«عکس» خود تبدیل شود، بستگی نوع «پ» (هم همچون بستگی نوع «ب») تغییر نمی‌کند. ولی، درحالت دوم، بعد ازآن که دوگزارهٔ نادرست، به دو گزارهٔ درست تبدیل شوند، دیگر نمی‌تواند بستگی بین آن‌ها، ازنوع «پ» باشد.

با وجوداین، درشکل ۲۲۸ دیده می‌شود که، خط نقطه چین، همیشه دایره را به‌مربع مربوط‌می‌کند. بنابراین، تنها بانوعی ازبستگی «پ»سروکار داریم که متناظربا حالت‌اول است و، درنتیجه، بعد از«معکوس شدن» ارزش درستی آن‌ها، همین بستگی باقی می‌ماند. به‌این ترتیب، اگر ارزش درستی همهٔ گزاره‌ها را «معکوس»کنیم، هیچ کدام ازگونه‌های بستگی، تغییرنمی‌کند.

ازاین‌جا روشن‌می‌شودکه، چرا مسالهٔ ۱۴۴، دست‌کم۲ جواب دارد. درواقع، وقتی که مساله را حل می‌کنیم، گزاره‌هایی را مورد استفاده قرار می‌دهیم که درصورت مساله داده شده‌اند، یعنی از بستگی بین گزاره‌های مختلف، به‌نحوی که‌درشکل ۲۲۸ داده شده‌است؛ ولی، همان‌طورکه دیدیم، نوع بستگی‌ها، ارتباطی به‌آن ندارد که «دایره‌ها» را گزاره‌های درست‌بدانیم



شکل ۲۲۹

یا «مربع‌ها» را.

یادداشت ۲. اگرطرح بستگی‌های بین ده گزارهٔ مسالهٔ۱۴۳ رابریزیم، به‌نتیجهٔ دیگری می‌رسد. (شکل ۲۲۹). دراین‌جا، بستگی‌بین گزاره‌های (۳) و (۱۰)، به‌صورت حالت دوم نوع «پ» درمی‌آید. بعد از «معکوس کردن» همهٔ گزاره‌ها، این‌بستگی پاره می‌شود. به‌همین دلیل است که، مسالهٔ ۱۴۳، تنها یك جواب دارد (تنها ، گزاره‌های محصور در دایره، می‌توانند درست باشند).

یادداشت ۳. توجه کنیم که، دایره‌های شکل ۲۲۷، بر دایره‌های شکل ۲۲۶منطبق‌اند. این‌مطلب به‌آن معناست‌که اگر، درشکل ۲۲۶، گزاره‌های محصوربه‌دایره، درست باشند، آن‌وقت «درجه‌بندی» گزاره‌های (۳)، (۴)، (۵) و (۶)، این امکان را به‌وجود نمی‌آورندکه ببینیم، دربارهٔ چه‌حالتی از گزارهٔ (۱۰) سخن می‌رود: حالت مسالهٔ ۱۴۳ یا حالت مسالهٔ ۱۴۴. (قبلاً هم، وقتی‌کـه ثابت‌کردیم، بخش «پ» از راه حل دوم مسالهٔ ۱۴۳، دربارهٔ حل مسالهٔ ۱۴۴ هم درست است، به‌این مطلب توجه کرده‌ایم.)

یادداشت ۴. برای حل مسالهٔ ۱۴۴، می‌توان از راه حل اول مسالهٔ ۱۴۳ هم آغازکرد که ما، آن را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۱۴۵. خوراکی شمارهٔ I

راه‌حل‌اول. هم پیشتاوهم یولچی تاکیدکرده‌اندکه،یوشکا، بعدازآن‌ها، به‌آشپزخانه آمده است [(۳) و (۶) و (۱۱)]. اگر آن‌هـا درست نگفته باشند، آن‌وقت باید پیشتا ویوشکا، هرکدام ۲ پاسخ درست‌داده باشند: (۴)، (۵)، (۱۰) و (۱۲). ولی‌این، ممکن نیست، زیرا گزاره‌های (۵) و (۱۲) یکدیگررا نقض می‌کنند. بنابراین یوشکا،آخرین‌نفری بوده‌که واردآشپزخانه شده است و هرسه گزارهٔ او درست است.

ازدرستی گزارهٔ (۱۱)، درستی گزارهٔ (۳) و از درستی گزارهٔ (۱۲)، درستی‌گزارهٔ (۲) نتیجه می‌شود. بـه‌این ترتیب، دوگزارهٔ یولچی [(۲) و (۳)] درست و، درنتیجه، سومین گـزارهٔ او [گـزارهٔ (۱)] نادرست است:

یولچی، بشقاب پودینگ را شکسته است.

باید تحقیق کنیم که، آیا این جواب با تمامی شرطهای مساله سازگار است یا نه! دیدیم که جواب مساله، باگزاره‌های یولچی تناقضی ندارد (یکی از گزاره‌های او نادرست و دوتـای دیگر درست است)، بنابراین، تحقیق را باید دربارهٔ بچه‌های دیگر انجام داد.

پیشتا:
- درست (۴)
- نادرست (۵) (زیرا (۲) درست است)
- درست (۶)

ارژی:
- درست (۷)
- درست (۸)
- نادرست (۹)

یوشکا:
- درست (۱۰)
- درست (۱۱)
- درست (۱۲)

بنابراین، گزاره‌های پیشتا، ارژی و یوشکا با شرطهای مساله سازگارند.

راه حل دوم. در هرحال، گزاره‌های (۱۰) و(۱۲) یوشکا درست است: خواه گزارهٔ (۱۱) درست باشد یا نادرست. درواقع، اگر گزارهٔ (۱۱) درست باشد، یعنی یوشکا آخرین نفری باشد که به‌آشپزخانه وارد شده است، آن‌وقت هرسه گزارهٔ او بایددرست باشند؛ اگرهم، گزارهٔ (۱۱) نادرست باشد، به‌ناچار باید دو گزارهٔ دیگر او، درست باشند.

از درستی گزارهٔ (۱۲) ، درستی گزارهٔ (۲) نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، گزارهٔ (۵)، کـه متناقض بـا گزارهٔ (۱۲) است، نادرست درمی‌آید. بنابراین، دو گزارهٔ دیگرپیشتا درست است. بنابراین، گزارهٔ (۳) که نتیجه‌ای ازگزارهٔ (۶) است، درست خواهد بود.

ازآن‌جاکه‌دو گزارهٔ (۲) و(۳) درست‌اند، بایدگزارهٔ سوم او ـ گزارهٔ (۱) ـ نادرست باشد. (زیرا ازگزارهٔ (۶) ـ که درستی آن ثابت شد ـ معلوم

می‌شود که یوشکا آخرین‌نفری بوده که به‌آشپزخانه وارد شده‌است نه‌یولچی).
ولی، وقتی که گزارهٔ (۱) نادرست‌باشد، به‌معنای‌آن است که، یولچی، بشقاب پودینگ را شکسته است.

تحقیق سازگاری جواب با شرطهای مساله، مثل راه حل اول انجام می گیرد.

[راه حل‌های اول ودوم، طوری‌طرح شده‌اندکه بتوان، هرچه‌سریع‌تر، به‌جواب رسید. راه حل سوم، که در زیر خواهد آمد، اندکی طولانی‌تر ولی «اطمینان‌بخش‌تر» است: ایـن راه حل، ازروشی منظم پیروی می کند و نشان می‌دهد که، در مساله‌های مشابه، چگونه می‌توان، به‌سرعت، به سمت هدف پیش رفت.]

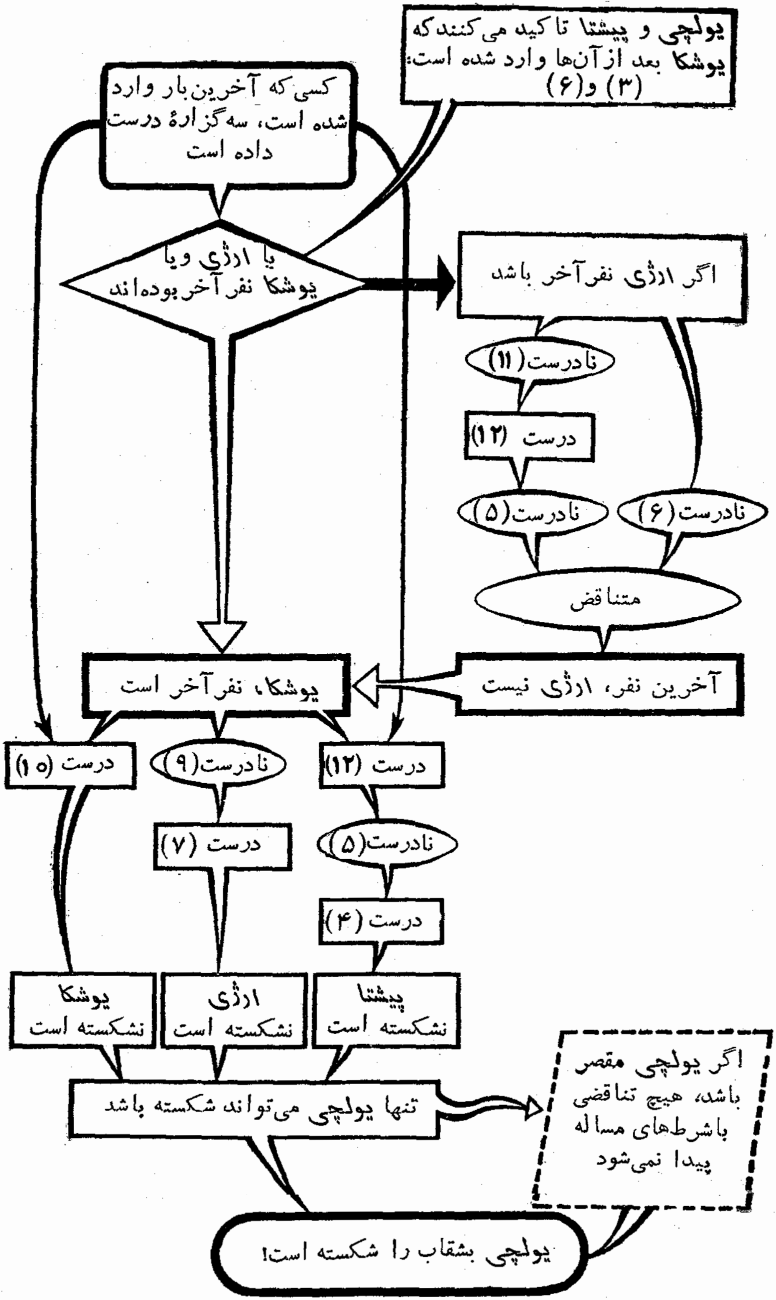
راه حل سوم. طرح کامل این راه‌حل را، می‌توان، به صورتی عینی، روی شکل ۲۳۰ مشاهده کرد.

با وجودی کـه خود طرح، تمامی مسیر استدلال را به روشنی نشان می‌دهد، آن را به‌تفصیل، شرح می‌دهیم.

ازآن جا که، هـر یك ازبچه‌ها، در نخستین گـزاره، خود را بی‌گناه دانسته‌انـد، کسی‌کـه هرسه گزاره را، درست گفته است، نمی‌تواند بشقاب پودینگ را شکسته باشد. مقصر را باید بین سه بچهٔ دیگر جست وجو کرد: کسانی‌که یك گزارهٔ نادرست و دوگزارهٔ درست را آورده‌اند. آن‌هایی راکه در گزارهٔ دوم‌یاسوم، نادرست گفته‌اند، باید ازردیف‌افراد مورد سوءِظن، حذف کرد. کسی بشقاب پودینگ را شکسته‌است، که درگزاره‌های دوم وسوم‌خود، راست ودرگزارهٔ اول خود دروغ گفته باشد.

اگر از گزارهٔ (۸) بگذریم، همهٔ گزاره‌های دیگر دوم و سوم، نوعی آگاهی دربارهٔ ردیف ورود بچه‌ها بـه آشپزخانه، به‌ما می‌دهند. ازهمین راه است که باید متوجه شد، کدام سه‌نفر، بی‌تقصیرند.

نه یولچی و نه پیشتا، نمی‌توانند آخرین نفری باشندکه به‌آشپزخانه وارد شده است، زیرا بنابراطلاع آن‌ها، یوشکا، بعدازاین دو نفر، واردشده است. و می‌دانیم، همان‌کسی‌که، ضمن ورود به‌آشپزخانه، آخرین نفربوده،


یولچی و پیشتا تاکید می‌کنند که
یوشکا بعد از آن‌ها وارد شده است:
(۳) و(۶)
کسی که آخرین بار وارد
شده است، سه گزارهٔ درست
داده است
یا ارژی ویا
یوشکا نفرآخر بوده‌اند
اگر ارژی نفرآخر باشد
نادرست (۱۱)
درست (۱۲)
نادرست (۵)
نادرست (۶)
متناقض
آخرین نفر، ارژی نیست
یوشکا، نفرآخر است
درست (۱۰)
نادرست (۹)
درست (۱۲)
درست (۷)
نادرست (۵)
درست (۴)
یوشکا
نشکسته است
ارژی
نشکسته است
پیشتا
نشکسته است
تنها یولچی می‌تواند شکسته باشد
اگر یولچی مقصر
باشد، هیچ تناقضی
با شرط‌های مساله
پیدا نمی‌شود
یولچی بشقاب را شکسته است!

شکل ۲۳۰

سه گزارهٔ درست داده است.

ارژی و یوشکا باقی می‌مانند.

ولی اگر ارژی آخرین نفری باشد که به‌آشپزخانه وارد شده است، باید گزاره‌های (۱۱) و (۶) نادرست باشند. بنابراین، گزارهٔ (۱۲) درست است (زیرا یوشکا نمی‌تواند دوبار دروغ گفته باشد) و، درنتیجه، گزارهٔ(۵) هم نادرست می‌شود. به‌این‌ترتیب، اگر ارژی را آخرین نفری فرض کنیم که به آشپزخانه وارد شده است، باید هر دو گزارهٔ (۵) و (۶) نادرست باشند، ولی این ممکن نیست، زیرا پیشتا نمی‌تواند دوبار دروغ گفته باشد.

بنابراین، تنها یوشکا می‌تواند آخرین نفری باشد که به آشپزخانه‌وارد شده است وتنها درمورد اوست که، باید هرسه گزاره را درست دانست.ولی، این مطلب به‌معنای آن است که گزارهٔ (۱۰) درست است: یوشکا، بشقاب را نشکسته است. ازطرف دیگر، گزارهٔ (۹) نادرست ازآب درمی‌آید و گزارهٔ (۷) باید درست باشد (ارژی، تنها یك دروغ می‌تواند بگوید): ارژی هم، بشقاب پودینگ را نشکسته است.

چون گزارهٔ (۱۲) درست است، گزارهٔ (۵) نادرست و، بنابراین، گزارهٔ (۴) درست است (پیشتا، تنها یك دروغ گفته است): پیشتا، بشقاب را نشکسته است.

ازبین افراد مورد سوءظن، تنها یولچی باقی می‌ماند: باتوجه به استدلال‌های فوق، تنها یولچی می‌تواند بشقاب را به‌زمین انداخته باشد.

گزاره‌های (۲)، (۳)، (۶) و(۸) درست و گزارهٔ (۱) نادرست ازآب درمی‌آیند (قبل ازپیدا شدن مقصر اصلی، ارزش درستی این گزاره‌ها، روشن نبود). به‌سادگی قابل‌تحقیق است که، نتیجه‌گیری ما، باهیچ تناقضی‌برخورد نمی‌کند. بنابراین، جواب مساله را به‌دست آورده‌ایم.

یادداشت. درشرطهای مساله، آگاهی‌هایی بیش از حد لزوم، وجود دارد. باتعدادکمتری از گزاره‌ها هم، می‌توانستیم، جواب مساله را به‌دست آوریم. مثلاً، گزارهٔ (۸)، به‌کلی اضافی است: اگرآن را با آگاهی دیگری ـ که شامل یك اطلاع اضافی باشد ـ عوض کنیم، درجواب مساله تغییری

حاصل نمی‌شود. [دراستدلال‌هایی که، برای رسیدن به جواب، دنبال می کردیم، درهیچ موردی، از گزارهٔ (۸) استفاده نکردیم: تنها برای تحقیق جواب، ارزش درستی آن را مورد مطالعه قراردادیم.]

۱۴۶. سه دوشیزه

قبل از هرچیز، باید مشخص کرد، کدام گزاره‌ها درست و کدام گزاره‌ها نادرست‌اند. بامقایسهٔ گزاره‌های متناقض، می‌توان به‌این هدف رسید.

بخش آخر مساله، می‌توانند ما را به‌نتیجه‌های زیر برسانند:

I. بین سه گزاره‌ای که هریك از دوشیزگان می‌آورند، گزاره اول و سوم یا هر دو نادرست‌و یا هر دو درست‌اند. (این گونه گزاره‌ها را می‌توان «هم‌ارز» و یا «از نظر ارزش درستی، یکسان» نامید.)

II. تنها یکی ازدخترها، درهیچ موردی دروغ نگفته است، وتنهایکی از دخترها «ازنظرمنطقی»، هرسه‌بار دروغ گفته است.

III. بین سه پاسخی که به‌یکی از پرسش‌های پسران داده شده است، دست‌کم یکی از پاسخ‌ها درست و، دست‌کم، یکی ازپاسخ‌ها نادرست است.

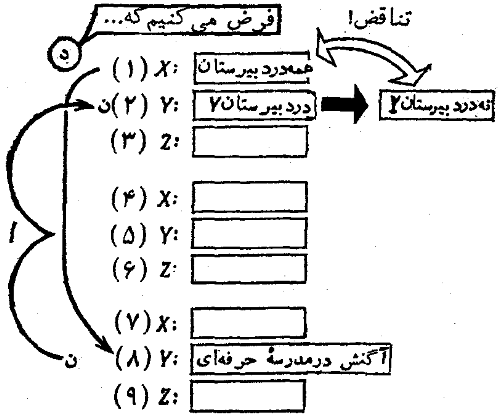
IV. تعداد گزاره‌های نادرست، از۴ کمتر، و از ۵ بیشتر نیست.

این نکته‌ها را، که نتیجهٔ مستقیم بخش پایانی مساله است، قبل ازآغاز به‌حل مساله، باید درنظرداشت. ماهیچ‌تضمینی نداریم‌که: حتماً، همهٔ‌آن‌ها، ضمن‌حل مساله، به‌کارمی‌آیند، ولی، توجه به‌آگاهی‌هایی که ناشی ازمساله است، همیشه بهتراز آگاهی‌های پراکنده، می‌توانند به‌ماکمك کنند.

دربارهٔ نـام، درگزاره‌های (۴) و (۵) و (۶)، آگاهی‌هایی داده شده است. ممکن است بـه نظرآیـدکـه گزاره‌های (۴) و (۵) یکدیگر را نقض می‌کنند، ولی درواقع چنین نیست. می‌توان نامی را پیداکردکه از دوحرف درست شده باشد و از یوا کوتاه‌ترباشد.

درمورد بقیهٔ گزاره‌ها، توجه‌می کنیم که، دوگزارهٔ (۱) و (۸) یکدیگر را نقض می‌کنند: هردوی آن‌ها، باهم نمی‌توانند درست باشند.

اگرگزارهٔ (۱) درست باشد، گزارهٔ (۸) نادرست می‌شود و، باتوجه



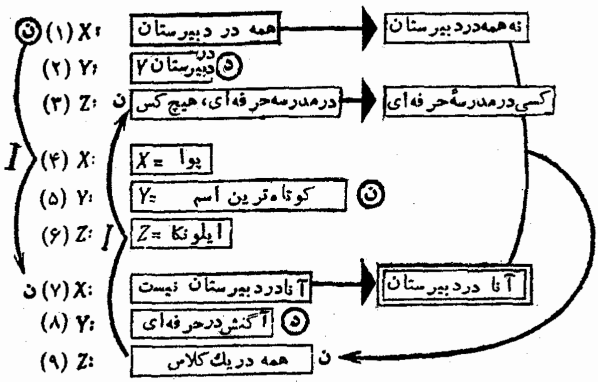
شکل ۲۳۱

به I ، گزارهٔ (۲) هم نادرست می‌شود. ولی نادرست بودن گزارهٔ (۲)، به‌معنای آن‌است که، Y، در دبیرستان درس نمی‌خواند واین، با گزارهٔ (۱) متناقض می‌شود. بنابراین،گزارهٔ (۱) نمی‌تواند درست باشد (شکل ۲۳۱).

[نادرست بودن گزارهٔ (۱) را، به‌طریق ساده‌تری هم می‌توان ثابت کرد: اگر گزارهٔ (۱) درست باشد، به معنای آن است که گزاره‌های (۲) و (۳) هم درست است،ولی با توجه به III، این ممکن نیست.]

از I نتیجه می‌شود که، اگر گزارهٔ (۱) نادرست باشد، گزارهٔ (۷) هم نادرست‌است (X نمی‌تواند کسی باشد که همیشه راست گفته است، زیرا گزارهٔ (۱) او دروغ است، بنابراین یا کسی است که درهر سه‌مورد دروغ گفته‌است ویا، یك درمیان، دروغ وراست می گوید که، درهردوحال، گزارهٔ (۷) دروغ می‌شود: آناهنوزدردبیرستان برژن‌درس‌می‌خواند. (درشکل ۲۳۲ هم، این‌مطلب راروشن‌کرده‌ایم.) به‌این‌ترتیب، آنا دبیرستانی است. وبه‌این‌ترتیب، هرسه دوشیزه‌نمی‌توانند دریك کلاس‌باشند و، بنابراین،گزارهٔ (۹) هم‌نادرست‌است.

ازاین‌جا، دو نتیجه به‌دست می‌آید: اولاً گزاره (۳) نادرست است (I را ببینید)، یعنی، یکی از دوشیزگان در آموزشگاه فنی درس می‌خواند؛ ثانیاً ازآن جاکه X و Z دروغ گفته‌اند، تنها Y است که همیشه راست گفته است (II را ببینید). این نتیجه گیری، به‌معنای‌آن است که، گزاره‌های(۲)،



شکل ۲۳۲

(۵) و (۸)، درست‌اند. بنابراین، آگنش درمدرسهٔ حرفه‌ای درس می‌خواند.

به‌این ترتیب، روشن می‌شودکه یکی از دوشیزگان دردبیرستان درس می‌خواند [(۲) و (۷) ⌐ (۷)] ⌐ (۷) به معنای نفی (۷) است. علامت ⌐ در منطق ریاضی به معنای نفی است و ما هم، آن را، بـه همین معنا به‌کار برده‌ایم)؛ یکی از دخترها در آموزشگاه فنی [(۳) ⌐] ویکی هم در مدرسهٔ حرفه‌ای [(۸)] درس می‌خواند. بنابراین، تنها این‌می‌ماندکه نام دوشیزگان را پیداکنیم و، ضمناً، معلوم کنیم، کدامیك از «اسم‌های مستعار» X ، Y و Z دبیرستانی، کدام یك دانش‌آموز مدرسه حرفه‌ای و کـدام یك دانشجوی آموزشگاه‌فنی است. نام دانش‌آموز دبیرستانی را می‌دانیم: او آنا نام دارد. گـزارهٔ (۲) درست است، بنابرایـن، آنا همان Y است. چـون Y، همیشه راست می‌گوید، پس گزارهٔ (۵) درست است، این نام، کوتاه‌ترین نام‌هاست. بنابراین، گزارهٔ (۴)، حتماً نادرست است و، به این ترتیب، هرسه گزارهٔ X نادرست از آب می‌آید. در نتیجه، Z ، به نوبت، راست و دروغ می‌گـوید و، بنابراین، گزارهٔ (۶) درست‌است: نام Z ایلونکا است. چون‌نام‌دانش‌آموز دبیرستانی و دانش آمـوز مدرسهٔ حـرفه‌ای را می‌دانیم، بنابرایـن، ایلونکا دانشجـوی آموزشگاه فنی است. X هم تنها می‌تواند آگنش و دانش آموز مدرسهٔ حرفه‌ای باشد.

نتیجهٔ کلی چنین است:

X ـ آگنش ـ دانش‌آموز مدرسهٔ حرفه‌ای (هر سه بار، دروغ گفته است).

Yـ آنا ـ دانش‌آموز دبیرستانی (هرسه بار راست گفته است).

Z ـ ایلونکا ـ دانشجوی آموزشگاه فنی (به‌نوبت، راست و دروغ گفته‌است). می‌بینیم که، مساله‌تنهابه‌همین‌یك‌جواب‌منجر می‌شود. به‌سادگی می‌توان تحقیق کردکه، این جواب، با همهٔ شرطهای مساله، سازگار است.

اثبات با برهان خلف: حل مسأله را با اثبات این‌حکم آغاز کردیم که، گزارهٔ (۱)، تنها می‌تواند نادرست باشد. حکم را ازدو راه ثابت‌کردیم و، در هردو راه، از یك‌طرح استفاده‌کردیم: فرض‌کردیم که گزارهٔ (۱) درست است و، باآغاز از آن، توانستیم خود را به‌یك تناقض برسانیم. این روش اثبات را، «اثبات با برهان خلف» و یا «اثبات غیرمستقیم» می‌گویند.

این نوع اثبات، کاربرد گسترده‌ای در ریاضیات دارد. ما هم بارها از آن استفاده کرده‌ایم (مثلاً در دو راه‌حل مسألهٔ ۱۴۱، که با برهان خلف توانستیم، گزاره‌های نادرست را پیداکنیم، در حل مسألهٔ ۱۴۲ هم، گزاره‌های نادرست‌را، به‌کمك برهان خلف، به‌دست‌آوردیم. ازهمین برهان، در بخش «الف» از راه‌حل اول و بخش «ب» راه‌حل دوم مسألهٔ ۱۴۳ هم استفاده‌کردیم. در راه‌حل سوم مسألهٔ ۱۴۵، با برهان خلف ثابت‌کردیم که، اِرژی، آخرین نفری نبودکه وارد آشپزخانه شد).

۱۴۷. آوارهٔ بیابان

مسافر، مثلاً می‌تواند یکی ازدو جاده‌را نشان دهد و ازنخستین کسی که ملاقات می‌کند، بپرسد: «اگر بپرسم که این جاده به‌طرف بخارا می‌رود، آیا تو پاسخ مثبت می‌دهی؟»

اگر این‌ساکن آبادی، ازجملهٔ‌کسانی باشدکه همیشه راست می‌گوید، بسته به‌این که، این جاده، به‌سمت بخارا برود یا بیابان، جواب مثبت یا منفی می‌دهد. در موردی که مخاطب مسافر ما، آدم دروغ‌گویی باشد، به «پرسش درونی» (آیا این جاده به طرف بخارا می‌رود؟)، پاسخی مخالف

بـا واقعیت می‌دهد، ولی چـون آدمی دروغ‌گو است، یك‌بـار دیگر دروغ می‌گوید تـا پاسخ خود را به «پرسش درونی» پنهان‌کند. بنـابراین، او هم پاسخ مثبت را در موردی می‌دهدکه، جادهٔ مفروض، به‌طرف بخارا می‌رود و، اگر هم جاده به‌طرف بیابان باشد، پاسخ خود را منفی می‌دهد.

به‌این ترتیب، مسافر می‌تواند، بـا این پرسش، راه خود را پیداکند، بدون این‌که توجه داشته باشدکه، مخاطب او، راست می‌گوید یا دروغ.

یادداشت. روشن است‌که مـا، تنها یکی از راه‌حل‌هـا را در این‌جـا آورده‌ایم و، به‌هیچ‌وجه، ادعا نمی‌کنیم‌که، تنها همین پرسش، می‌تواند به‌او کمك‌کند. ولی، در این گـونه مسأله‌هـا، کافی است، دست‌کم، یك جواب وجود داشته باشد و، البته، تا آن‌جاکه ممکن است، کوتاه وساده.

۱۴۸. کجا آتش‌گرفته است؟

مأمور مرکز آتش‌نشانی، بایدگوشی تلفن را بگذارد و مطالعهٔ رمـان را، از همان جایی‌که قطـع شده بود، آغازکند.

در واقع، ایـن تلفن، نمی‌توانست از آبـادی «حق‌گو» بـاشد، زیرا مردم این‌آبادی،همیشه راست می‌گویند و، بنابراین، هرگز موجب گمراهی آتش‌نشانی نمی‌شوندکه، گویا، درآبادی «میانه» آتش‌سوزی رخ داده‌است. بنابراین، تلفن از آبادی «کج‌رو» یا آبادی «میانه» بوده است.

ولی، اگر از آبادی «کج‌رو» تلفن شده باشد، به معنای آن است که هیچ‌گونه آتش‌سوزی رخ نداده است، زیرا مردم این آبادی، همیشه دروغ می‌گویند.

بـالاخره، اگر تلفن ازآبـادی «میانه» شده باشد، می‌دانیم‌که آن‌ها، به نوبت، راست و دروغ می‌گویند چون، آخرین گزاره (در این بـاره‌که، تلفن از «میـانه» شده) درست است، بنابراین ، گزارهٔ قبلی آن (این‌که، در آبادی،آتش‌سوزی رخ داده است)، نادرست می‌شود.

بنابراین، خبر آتش‌سوزی دروغ است وبستگی به‌آن نداردکه ازکجا تلفن شده است. در نتیجه، مأمور آتش‌نشانی، به‌هیچ اقدامی نیاز ندارد.

یادداشت. در گوشی تلفن، ۲ گزاره عرضه شده است:

(I) «عجله کنید، در آبادی ما آتش‌سوزی شده است!»

(II) «از میانه تلفن می‌کنم».

همان‌طور که درحل مسأله گفته شد، گزارهٔ II درست است. بنابراین، گزارهٔ I باید نادرست باشد. فرض کنیم، کسی که به‌مرکز آتش‌نشانی تلفن کرده است، ۳ گزاره عرضه کند:

(۱) «عجله کنید!»

(۲) «درآبادی ما، آتش‌سوزی شده است!»

(۳) «از میانه تلفن می‌کنم».

چون گزارهٔ (۳) درست است، باید گزارهٔ (۲) نادرست باشد. آن چه با کلام (۱) به‌وسیلهٔ تلفن گفته شده است، چیزی را عوض نمی‌کند: کلام (۱)، خبر یا گزاره نیست و، بنابراین، نمی‌تواند درست یا نادرست باشد.

ولی، اگر (۱) را هم، گزاره به حساب آوریم، هیچ وضع بدی پیش نمی‌آید. در واقع، ارزش درستی این گزاره را، می‌توان به‌دلخواه گرفت و، در نتیجه، با نادرست بودن گزارهٔ(۲) تناقضی پیدا نمی‌کند. (به‌جای این که گفته شده «عجله کنید!» صدای پشت تلفن می‌توانست مثلاً بگوید «باران می‌آید» یا «بعدازظهر به‌گردش می‌روم».)

۱۴۹. در چای‌خانه

[ابتدا باید ارزش درستی یکی از گزاره‌ها را معلوم (یعنی، درستی یا نادرستی آن‌را)، و یا محل زندگی یکی از جزیره‌نشینان را پیدا کرد.

ولی ارزش درستی یک گزاره را، نمی‌توان پیدا کرد. بنابراین، راهی باقی نمی‌ماند جز این‌که دو یا چند گزاره را با هم مقایسه کنیم. در مسأله‌های قبل، بارها، گزاره‌ها و نتیجه‌های حاصل از آن‌ها را، به‌طور عینی با هم مقایسه کرده‌ایم. این گونه طرح‌ها، بسیار مفید و آموزنده است، به‌خصوص، اگر خودمان آن‌را رسم کنیم. به همین مناسبت، تنها گام‌های نخستین را

(۱) X: $\boxed{X \sim Y}$

(۲) Y: $\boxed{Y \sim Z}$

(۳) Z: $\boxed{Z \nsim \begin{cases} X \\ Y \end{cases}}$

(۴) X: $\boxed{Z \in \text{م}}$

(۵) Y: $\boxed{X \nsim Y \oplus}$!

(۶) Z: $\boxed{X \nsim Y}$

(۷) X: $\boxed{Z \in \text{م}}$

(۸) Y: $\boxed{X \notin \text{ك}}$

(۹) Z: $\boxed{(۷)\text{ن} \wedge (۸)\text{ن}}$

شکل ۲۳۳

برمی‌داریم و تکمیل طرح را، به‌عهده خواننده می‌گذاریم. درشکل ۲۳۳، همهٔ گزاره‌ها، به‌کمك حرف، داده شده‌اند. نشانهٔ $\in$ به‌معنای «زندگی می‌کند در» و نشانهٔ $\sim$ به‌معنای «از یك‌آبادی» است نشانه‌های $\notin$ و $\nsim$ به‌معنای نفی نشانه‌های قبلی است، یعنی به‌ترتیب: «زندگی نمی‌کند در» و «از یك آبادی نیستند».

نشانهٔ $+$ ، که در بلوك گزارهٔ (۵) وجود دارد، به معنای آن است که، آگاهی موجود در این گزاره، بیشتر از آن چیزی است که در طرح داده شده است، یعنی نه‌تنها به‌ما اطلاع می‌دهد که، X و Y دریك‌آبادی‌زندگی نمی‌کنند، بلکه ضمناً شامل آگاهی‌های دیگری هم در بارهٔ فاصلهٔ بین آبادی‌هاست. ما از این آگاهی‌های اضافی صرف‌نظر می‌کنیم، زیرا اولاً، احتمال استفاده از آن‌ها در ادامهٔ کار، بسیارکم است و، ثانیاً، امکان اثبات درستی آن، وجود ندارد. با وجود این، باید احتیاط‌کرد. از بخش غیرقابل تحقیق گزارهٔ (۵)، تنهاوقتی‌می‌توانیم استفاده‌کنیم که، درستی‌آن، ثابت شده باشد. ولی‌اگرمعلوم شودکه، این گزاره، نادرست است، علت این‌نادرستی، مبهم باقی می‌ماند، زیرا ممکن است، نادرستی گزارهٔ (۵)، تنها مربوط به‌بخشی از آن باشد که دربارهٔ فاصلهٔ بین آبادی‌ها صحبت کرده است. (ضمناً، «م» به معنای «آبادی میانه»، «ك» به معنای «آبادی کج‌رو»، «ح»

به‌معنای «آبادی‌حق گو»، «ن» به معنای «نادرست» و «د» به‌معنای «درست» است.)

گزاره‌های (۷) و (۸) را می‌توان، بدون این‌که مضمون خود را از دست بدهند، تغییر داد و به‌صورت کوتاه‌تر و مفهوم‌تری نوشت: اگر گزاره (۷) درست باشد، Z تنها می‌تواند اهل «میانه» باشد، و اگر اهل «میانه» باشد، می‌تواند تنها یك‌بار دروغ گفته باشد.

اگر گزارهٔ (۸) درست باشد، X نمی‌تواند ساکن آبادی «کج‌رو» باشد. اگر هم گزارهٔ (۸) نادرست باشد، به‌معنای آن است‌که X می‌تواند دوبار متوالی دروغ بگوید و، بنابراین، تنها ساکن آبادی «کج‌رو» می‌تواند باشد.

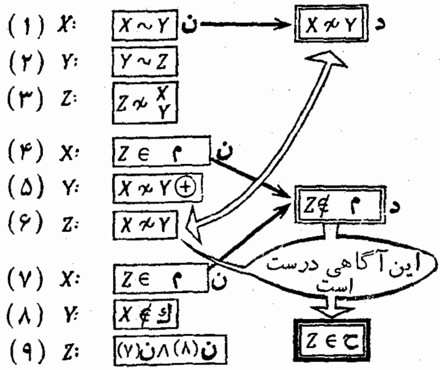
عاقلانه این است‌که همهٔ آگاهی‌های متعلق به‌یك‌نفر را جمع و آن‌ها را با هم مقایسه‌کنیم. ما، برای این منظور، X را انتخاب می‌کنیم.]

X، در گزاره‌های (۴) و(۷)، درواقع، یك‌چیز را می‌گوید. بنابراین، گزاره‌های (۴) و (۷)، یا باهم درست و یا با هم نادرست‌اند. چون X، این دو گزاره را، پشت سر هم بیان کرده است، بنابراین، X، در حالت اول متعلق به آبادی «حق گو» و در حالت دوم متعلق به‌آبادی «کج‌رو» است.

ولی اگر X اهل «حق گو» باشد، بایدگزاره‌های (۴) و (۱) درست باشند. درست بودن گزارهٔ (۱)، به‌این معناست‌که، Y هم، باید ساکن‌آبادی «حق گو» باشد. دراین صورت، Y همیشه راست می‌گوید و بایدگزارهٔ (۲) هم درست باشد. ولی در (۲) گفته شده است‌که، Y و Z، در یك آبادی زندگی می‌کنند، یعنی Z هم، باید ساکن «حق گو» باشد، که با گزارهٔ (۴) متناقض‌است. تناقض‌حاصل، به‌معنای‌آن است‌که، فرض نخستین ما، نادرست انتخاب شده است: X، در آبادی «حق‌گو» زندگی نمی‌کند(*).

ولی، در این صورت، X تنها می‌تواند ساکن آبادی «کج‌رو» باشد و، در نتیجه، گزاره‌های (۱)، (۴) و (۷) نادرست‌اند.

[برای این‌که بتوانیم از این نتیجه، استفاده کنیم، باید گزاره‌هایی را پیداکنیم که، به‌نحوی، به‌گزاره‌های (۱)، (۴) و (۷) مربوط‌اند. این



شکل ۲۳۴

گزاره، در واقع، گزارهٔ (۶) است.]

از آن‌جاکه گزارهٔ (۱) نادرست است، بنابراین گزارهٔ (۶) (که گزارهٔ (۱) را نفی می‌کند)، حتماً درست است. به‌این ترتیب، Z، دست‌کم یک‌بار راست گفته است و، بنابراین، نمی‌تواند ساکن آبادی «کج‌رو» باشد. چون (۴) نادرست است، Z ساکن آبادی «میانه» هم نمی‌تواند باشد. از این جا نتیجه می‌شود که، Z تنها می‌تواند ساکن آبادی «حق‌گو» باشد (شکل ۲۳۴).

بنابراین، همهٔ گزاره‌های Z، و به‌خصوص، گزاره‌های (۳) و (۶) درست‌اند. اگر مضمون این‌دو گزاره‌را، با هم، در نظر بگیریم، به‌این نتیجه می‌رسیم که X و Y و Z در آبادی‌های مختلفی زندگی می‌کنند. از آن‌جا که محل زندگی X و Z را می‌دانیم، Y تنها می‌تواند ساکن آبادی «میانه» باشد.

به‌این ترتیب، مسأله، تنها یک‌جواب دارد:

X ـ ساکن آبادی «کج‌رو»،

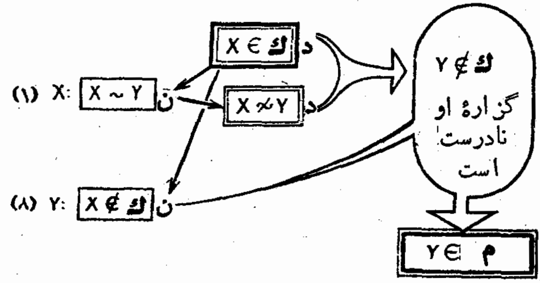
Y ـ ساکن آبادی «میانه»،

Z ـ ساکن آبادی «حق گو».

اگر مضمون ۹ گزاره را از نظر بگذرانیم، قانع می‌شویم که، هرسه

جزیره نشین، بـا همان خصلت آبادی محل زندگی خود، صحبت کرده‌اند و هیچ‌گونه تنـاقضی پیش نمی‌آید. بنـابراین، تناظری که بین جزیره‌نشینان و آبادی‌های واقع درآن به‌دست‌آوردیم، در واقع، جواب مسأله است.

یادداشت ۱. جواب مسأله را، با روش‌های مختلفی می‌توان به‌دست آورد. ما نمی‌خواهیم از همهٔ این روش‌ها، با خواننده صحبت کنیم، ولی‌تنها روشن می‌کنیم کـه، چگونه می‌توان، بعد از (*)، ابتدا محل زندگی Y و بعد، محل زندگی Z را پیداکرد. از(*) می‌دانیم که X درآبادی«حق‌گو» زندگی نمی‌کند. دنبالهٔ راه‌حل، در شکل ۲۳۵ نشان داده شده است .



شکل۲۳۵

یادداشت ۲. در راه حلی که برای مسأله آوردیم، هیچ‌جـا، ازگزارهٔ (۹) استفاده‌نکردیم. بنابراین، می‌توان به‌جای این گزاره، هرگزارهٔ درست، یاگزارهٔ بی‌مضمون دیگری را قرار داد.

یادداشت ۳. از یك راه‌حل سریع ، ولی اشتباه، یـاد می‌کنیم، که در آن، بعدازآن که محل‌زندگی X و Z معلوم شد، محل‌سکونت Y به‌ترتیب زیر مشخص می‌شود. گزارهٔ (۸) نـادرست است (زیرا، X ساکن آبـادی «کج‌رو» است) ، گـزارهٔ (۶) درست است (زیرا، نفی‌گزارهٔ نـادرست (۱) است). درگزارهٔ (۵) هم، همان مضمون گزارهٔ (۶) آمده است. بنـابراین، گزارهٔ (۵) درست است، و Y، درآبادی «میانه» زندگی می‌کند.

در واقع، همان‌طور که قبلاً هم یادآوری کردیم، مضمون‌گزارهٔ(۵)، بیشتراز مضمون گزارهٔ (۶) است، بنابراین ، از درست بودن گزارهٔ (۶)،

نمی‌توان درستی گزارهٔ (۵) را نتیجه گرفت.

۱۵۰. سه‌راهی دشت هموار

۴

[قبل از هرچیز، باید روشن کرد، کدام گزاره‌ها درست و کدام گزاره‌ها نادرست‌اند. درستی گزاره‌ها، دقیقاً، به‌محل زندگی رهگذران A، B و C مربوط می‌شود. بنابراین، منطقی‌است که، حل‌مسأله‌را، ازمقایسهٔ گزاره‌های (۷)، (۸) و (۹) آغاز کنیم.

به‌این دلیل «گام نخست» را از این گزاره‌ها آغاز می‌کنیم که، آن‌ها، «بسته‌اند»، یعنی ارزش درستی آن‌ها، بستگی به‌درست یا نادرست‌بودن گزاره‌های دیگر ندارد. آن‌چه، به‌گزاره‌های (۱) و (۶) مربوط می‌شود، نمی‌توان قبل از مشخص‌کردن مسیر جاده‌ها (که به‌کجا منتهی می‌شوند)، ارزش درستی آن‌ها را تعیین کرد.

بنابراین، باید به‌گزاره‌های (۷)، (۸) و (۹) مراجعه‌کرد. گزارهٔ (۹) کامل نیست. در بارهٔ گزارهٔ (۷)، از قبل، چیزی نمی‌توان گفت: A می‌تواند ساکن هرکدام از سه‌آبادی باشد. تنها گزارهٔ (۸) باقی می‌ماند.]

ازگزارهٔ(۸) نتیجه می‌شودکه، B، تنها می‌تواند اهل‌آبادی «میانه» باشد. در واقع، اگر B اهل آبادی «حق گو» باشد، گزارهٔ (۸) نادرست می‌شود (درحالی‌که، مردم «حق گو»، همیشه راست می گویند). و اگر B اهل‌آبادی «کج‌رو» باشد، به‌معنای درست‌بودن گزارهٔ(۸) است (درحالی‌که، مردم «کج‌رو»، همیشه دروغ می گویند).

چون B اهل «میانه» وگزارهٔ (۸) نادرست است، بنابراین،گزارهٔ(۵) حتماً درست است:

جادهٔ (c) به‌طرف محل زندگی A می‌رود. (I)

وگزارهٔ (۲) نادرست است:

جادهٔ (b) به‌سمت‌آبادی «میانه» ــ محل زندگی B ــ نمی‌رود. (II)

از (I) نتیجه می‌شودکه گزارهٔ (۴) نادرست است (از طرح جاده‌ها در شکل ۴۴ دیده می‌شودکه A، بعد از عبور از سه‌راهی، وارد جادهٔ (c) نمی‌شود). در این صورت، گزارهٔ (۷) هم نادرست است: A نمی‌تواند ساکن

آبادی «حق‌گو» باشد، زیرا در(۴) دروغ گفته‌است. به‌این ترتیب، رهگذر A در دو گـزارهٔ متوالی ـ (۴) و (۷)ـ دروغ گفته است: A تنها می‌تواند اهل آبادی «کج‌رو» باشد وبا توجه به(I):

جادهٔ (c) به‌سمت آبادی «کج‌رو» می‌رود.

واز (II)، به‌دلیل فقدان حالت دیگر، نتیجه می‌شود:

جادهٔ (b) به‌سمت آبادی «حق‌گو» و

جادهٔ (a) به‌سمت آبادی «میانه» می‌رود.

به‌این ترتیب، پاسخ پرسش اصلی مسأله به‌دست‌آمد. این می‌ماندکه پاسخ C را درگزاره‌های (۳) و (۹)، پیدا کنیم.

بنابرفرض مسأله، C در همان آبادی B زندگی می‌کند و، بنابراین، اهل «میانه» است. از طرح جاده‌ها دیده می‌شودکه، گزارهٔ (۶) نـادرست است؛ یعنی گزاره‌های (۳) و(۹) باید درست باشند. چون بنابرفرض‌مسأله، C نام یکی ازآبادی‌هارا برده است، باتوجه به‌طرح جاده‌ها، تنها می‌تواند، این‌طور گفته باشد:

(۳): ازآبادی «کج‌رو».

(۹): درآبادی«میانه».

۱۵۱. حالت جدید

[مثل مسألهٔ قبل، گزاره‌هـای «بسته» ـ کـه ارزش درستی آن‌هـا ، به‌درست یا نادرست‌بودن بقیهٔ گزاره‌ها ارتباطی ندارد ـ آن‌هایی هستند که، جزیره‌نشینان، در آن‌هـا، دربارهٔ محل زندگی خود صحبت کرده‌اند. در بین این گونه گزاره‌ها، گزارهٔ(۲) را جدا می‌کنیم.]

گزارهٔ (۲)، می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در حالت اول، B تنها می‌تواند ساکن آبادی «میانه» و، در حـالت دوم، تنها ساکن‌آبادی «کج‌رو» باشد (او، درهرحال، ساکن آبادی«حق گو» نمی‌تواند باشد، زیرا در این‌صورت، بایدگزارهٔ (۲) درست باشد).

حالت اول را درنظر می‌گیریم: B درآبادی «میانه» زندگی می‌کند.

(و بنابراین، گزارهٔ (۲) درست است). ولی دراین صورت گزارهٔ بعدی B ، یعنی گزارهٔ (۶)، نادرست و گزارهٔ پشت سرآن، یعنی گزارهٔ (۹) ، درست است. بنابراین، C در آبادی «کج‌رو» زندگی می‌کند و همهٔ گزاره‌های او نادرست است. به‌این ترتیب، گزاره‌های (۷) و(۱۱) نادرست‌اند:

هم جادهٔ (a) وهم جادهٔ (c) به‌سمت آبادی «کج‌رو» می‌روند.

اکنون می‌توانیم، ارزش درستی گزاره‌هایی را تعیین کنیم که به A مربوط می‌شوند. چون گزارهٔ (۹) درست‌است، پس گزارهٔ (۱۰)ـ که متناقض گزارهٔ (۹) است ـ تنها می‌تواند نادرست باشد. بنابراین، A نمی‌تواند ساکن آبادی «حق‌گو» باشد: او یا ساکن آبادی «کج‌رو» است و یا ساکن آبادی «میانه». ولی اگر A ساکن آبادی «کج‌رو» باشد، باید گزارهٔ (۸) درست باشد، زیرا قبلاً روشن کردیم که، جادهٔ (a) به‌سمت آبادی «کج‌رو» می‌رود. ولی این ممکن نیست: ساکنان آبادی «کج‌رو»، هرگز راست نمی‌گویند.

اگر A، اهل «میانه» باشد، گزارهٔ (۸)، نادرست می‌شود ولی، این هم ممکن نیست، زیرا مردم آبادی «میانه»، دوبار پشت سرهم راست نمی‌گویند.

به‌این ترتیب می‌بینیم که، در این حالت، A نمی‌تواند ساکن یکی از سه آبادی باشد؛ ولی چون هریك از سه نفر A، B و C، ساکن یکی از آبادی‌های جزیره هستند، به‌تناقض برخورد می‌کنیم. تناقض به‌ما می‌فهماند که فرض نخستین ما، درست نبوده است: B نمی‌تواند ساکن آبادی «میانه» باشد. بنابراین، B تنها می‌تواند ساکن آبادی «کج‌رو» باشد.

در این صورت، گزاره‌های (۲)، (۶) و (۹) نادرست‌اند. ولی، اگر گزارهٔ (۹) نادرست باشد، به‌معنای آن است که C راست گفته است و نمی‌تواند اهل آبادی «کج‌رو» باشد. ولی، دراین صورت، گزارهٔ (۴) نادرست است (زیرا، از گزارهٔ (۴) برمی‌آید که، C، در آبادی «کج‌رو» زندگی می‌کند). بنابراین C تنها می‌تواند ساکن آبادی «میانه» باشد. و این با توجه به‌نادرست‌بودن گزارهٔ (۴)، به‌معنای آن است که گزارهٔ (۷) درست است و گزارهٔ (۱۱) ، دوباره، نادرست: جادهٔ (c) به‌سمت آبادی «میانه» می‌رود.

اکنون موقع آن است که به گزاره‌های A توجه کنیم. از گزارهٔ (۱۰) آغاز می‌کنیم.

از آن‌جاکه ثابت کردیم، گزارهٔ (۹) نادرست است، بنابراین ، گزارهٔ (۱۰) حتماً گزاره‌ای درست است؛ و این، به‌معنای آن است که A نمی‌تواند ساکن آبادی «کج‌رو» باشد. بنابراین A ، یا ساکن آبادی «حق گو» و یا ساکن آبادی «میانه» است. A، اهل هرکدام از این دو آبادی («حق گو» یا «میانه») باشد، باید گزاره (۵) درست باشد. بنابراین A تنها می‌تواند ساکن آبادی «حق‌گو» باشد و، در نتیجه، همهٔ گزاره‌های و درست‌اند.

چون هنوز نمی‌دانیم، جاده‌های (a) و (b) به‌کجا می‌روند، می‌توانیم ازگزاره‌های A ـ (۸)، (۱) و (۳)ـ استفاده کنیم.

ازگزارهٔ (۸) روشن‌است که (a) به‌سمت آبادی «حق گو» و، باتوجه به گزاره‌های (۱) و (۳)، جادهٔ (b) به‌سمت آبادی «کج‌رو» می‌رود.

به‌این ترتیب، تنها یك‌جواب برای مسأله به‌دست می‌آید.

A، در آبادی «حق‌گو» زندگی می‌کند.

B، درآبادی «کج‌رو» زندگی می‌کند.

C، درآبادی «میانه» زندگی می‌کند.

جادهٔ (a)، به‌سمت آبادی «حق‌گو» می‌رود.

جادهٔ (b)، به‌سمت آبادی«کج‌رو» می‌رود.

جادهٔ (c) به‌سمت آبادی «میانه» می‌رود.

(هریك از سه جزیره‌نشینی که در ابتدای یکی از جاده‌ها ایستاده‌اند، ازجاده‌ای محافظت می‌کنند که به‌طرف‌آبادی محل‌زندگی‌خودآن‌هامی‌رود.)

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، این جواب، با هیچ‌کدام ازشرطهای مسأله ناسازگار نیست. بنابراین، به‌واقع ، جواب مسأله را پیداکرده‌ایم.

۱۵۲. خوراکی شماره II

چون ۵ شکلات گم شده است، باید از ۷ گزاره، ۵ گزاره نادرست و ۲ گزاره درست باشد.

کدام دو گزاره، ممکن است درست باشد؟

گزاره‌های (۴) و (۵) و همچنین، گزاره‌های (۶) و (۷) متناقض یکدیگرند: در هرزوج، یکی از گزاره‌ها، دیگری را نفی می‌کند. بنابراین، هم در دو گزارهٔ (۴) و (۵)، وهم دردو گزارهٔ (۶) و(۷)، یك گزارهٔ درست و يك گزارهٔ نادرست وجود دارد. به‌این ترتیب، ۲ گزارهٔ درست را، باید ازبین گزاره‌های (۴)، (۵)، (۶) و (۷) جست‌وجو کرد. بقیهٔ گزاره‌ها، یعنی (۱)، (۲) و (۳) نادرست‌اند ودر نتیجه

هریك از بچه‌ها، دست‌کم، یك‌شکلات برداشته است(*).

این واقعیت، به‌معنای آن است که، گزارهٔ(۶) نادرست است:کاتی و ایلونکا نمی‌توانند همهٔ شکلات‌ها را برداشته باشند، زیرا از (*) روشن است که، چیزی هم، سهم شانی بوده است.

چون، هردو گزارهٔ شانی ـ (۳) و ـ (۶) ـ نادرست است، بنابراین، شانی دوشکلات برداشته است.

از نادرستی گزارهٔ (۶) معلوم می‌شود که گزارهٔ (۷) درست است ولی در این صورت، گزارهٔ(۴) نادرست است (زیرا، اگر گزارهٔ(۴) درست‌باشد، به‌این معناست که ایلونکا دست‌کم ۳ شکلات برداشته است و، بنابراین، چیزی برای‌کاتی باقی نمی‌ماند).

اکنون دیگر، ارزش درستی همهٔ گزاره‌های‌کاتی برای ما روشن شده است: گزاره‌های (۱) و(۴) نادرست‌و گزارهٔ (۷) درست‌است. به‌این‌ترتیب، کاتی هم دوبار دروغ گفته است و، درنتیجه، ۲ شکلات برداشته‌است.

شکلات باقی‌مانده را هم، شانی برداشته است.

به‌این ترتیب، اگر مساله جواب داشته باشد، این جواب منحصر به‌فرد است. تنها کاری‌که باقی می‌ماند، این است که تحقیق‌کنیم، آیاجواب حاصل، با همهٔ شرطهای مسأله سازگار است یا نه!

گزارهٔ (۱) کاتی نادرست است.

گزارهٔ (۲) ایلونکا نادرست است.

گزارهٔ (۳) شانی نادرست است.

گزارهٔ (۴) کاتی نادرست است.
گزارهٔ (۵) ایلونکا درست است.
گزارهٔ (۶) شانی نادرست است.
گزارهٔ (۷) کاتی درست است.

به‌این‌ترتیب، کاتی ۲ بار: ایلونکا ۱ بار و شانی ۲ بار دروغ گفته‌اند. این عددها، باتعداد شکلات‌هایی که هر یك برداشته‌اند، تطبیق می‌کند. هیچ تناقضی پیش نمی‌آید و ما، در واقع، جواب مسأله را به‌دست آورده‌ایم.

یادداشت. در جریان حل مساله، ارزش درستی همهٔ گزاره‌ها، به‌جز گزارهٔ (۵)را، مستقیماً روشن کردیم، یعنی معلوم کردیم، کدام‌یك درست و کدام‌یك نادرست است. وقتی که مطلع شدیم، هریك از بچه‌ها، چند شکلات برداشته است، بازهم ارزش درستی هر گزاره را مورد تحقیق قرار دادیم. این تحقیق، به‌هیچ‌وجه «اضافی» نیست! در واقع، هر گزاره دو جنبهٔ مختلف در حل مساله دارد: اولاً مضمون آن (مطلبی که درآن گفته می‌شود)، و ثانیاً این جنبه که، با پیداکردن هر گزارهٔ نادرست، ۱ شکلات به‌گویندهٔ آن تعلق می‌گیرد. ازقبل، نمی‌توان اطمینان داشت که، هردوجنبهٔ هر گزاره، در جواب صدق می‌کند. چه‌بسا که در جریان تحقیق معلوم شود، گزاره‌ای که نادرستی آن را در جریان حل ثابت کرده‌ایم، در پرتو سایر نتیجه‌گیری‌ها، درست ازآب درآید (یابرعکس، گزاره‌ای که قبلاً درست بوده است، نادرست بشود). وقتی که چنین وضعی پیش آید، به‌معنای متناقض‌بودن شرطهای مساله است و، در آن‌صورت، مسأله جواب ندارد.

۱۵۳. حالت‌های دیگر

چون هردوحالت این‌مساله، تنها در گزارهٔ (۶) بامسالهٔ ۱۵۲ اختلاف دارد، آن بخش از راه‌حل مسالهٔ ۱۵۲، که درآن از گزارهٔ (۶) استفاده نشده است به‌قوت خود باقی می‌ماند.

برای نتیجه‌گیری گزارهٔ (*)، از گزارهٔ (۶) استفاده نکردیم، بنابراین گزارهٔ (*) بدون هیچ تغییری، در مورد هردوحالت مساله درست است:

هریك از بچه‌ها، دست‌کم، ۱ شکلات برداشته است.

اگرعلاقه‌مند باشیم بدانیم، هربچه چندشکلات برداشته است، روشن می‌کنیم که کاتی می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ شکلات، ایلونکا ۱ یا ۲ شکلات و شانی ۱ یا ۲ شکلات برداشته باشد.

[اکنون (جدا ازحل مسالهٔ ۱۵۲) می‌کوشیم، بعضی نتیجه‌ها را، از گزاره‌های (۴) و (۵) به‌دست آوریم. این دو گزاره، در هر دو حالت، یکی هستند، بنابراین هرنتیجه‌ای که حاصل شود، برای هردوحالت «الف» و«ب» قابل استفاده است و لزومی ندارد، به‌طور جداگانه و در مورد هریك از حالت‌ها، آن را تکرار کنیم.]

اگر گزارهٔ (۴) درست باشد، به‌ناچار گزارهٔ (۵) نادرست می‌شود. بنابراین، ایلونکا باید ۲شکلات برداشته باشد (دو گزارهٔ او نادرست است)؛ همچنین، شانی ۱ شکلات [زیرا گزارهٔ (۴) را درست فرض کردیم] و کاتی ۲ شکلات باقی‌مانده از ۵ شکلات را برداشته‌اند.

ولی در یکی از حالت‌ها، این نوع تقسیم شکلات‌ها ممکن نیست. در واقع اگر شانی یك شکلات برداشته باشد، باید گزارهٔ (۶) درست باشد (وقتی‌که ۱ شکلات برداشته است، تنها یك‌بار دروغ گفته است، و این‌یکبار دروغ را درگزارهٔ (۳) گفته است)، ولی‌گزارهٔ (۶) درهر دوحالت نادرست است: زیرا کاتی ۳ شکلات برنداشته است (حالت «الف»)، زیرا کاتی ۱ شکلات بیشتر از ایلونکا برنداشته است (حالت «ب»).

بنابراین، گزارهٔ (۴)، در هردو حالت، نادرست و گزارهٔ (۵)، درست است. این، به‌معنای آن است که، ایلونکا ۱ شکلات [زیرا گزارهٔ (۲) نادرست و گزارهٔ (۵) درست است]، کاتی، ۴ یا ۳ شکلات، بسته به‌این‌که گزارهٔ (۷) درست یانادرست باشد [زیرا گزاره‌های (۱) و (۴) نادرست‌اند] و، متناظر با آن، شانی ۲ یا ۱ شکلات [زیرا اگر گزارهٔ (۷) درست باشد، گزارهٔ (۶) نادرست است و برعکس] برداشته‌اند. همهٔ این‌ها، برای هر دو حالت «الف» و «ب»، قابل قبول است.

درحالت «الف» هردو مورد می‌تواند پیش آید. در واقع، اگر گزارهٔ

(۷) نادرست باشد (یعنی، کاتی، ۳ شکلات برداشته باشد)، گزارهٔ (۶) درست است، زیرا درست در آن‌جا، اشاره شده است که، کاتی ۳ شکلات برداشته است ولی، می‌توان گزارهٔ (۷) را درست گرفت که، در آن صورت، کاتی ۲ شکلات برداشته است و گزارهٔ (۶) نادرست می‌شود (زیرا، کاتی ۳ شکلات برنداشته است).

به‌این ترتیب، مساله در حالت «الف»، دارای دو جواب است. این دوجواب، چنین است.

جواب اول:

ایلونکا یك شکلات برداشته است [تنها یك بار دروغ گفته است: گزارهٔ (۲)]،

شانی یك شکلات برداشته است [تنها یك بار دروغ گفته است: گزاره (۳)]،

کاتی سه شکلات برداشته است [سه‌بار دروغ گفته است: گزاره‌های (۱)، (۴) و (۷)]،

گزاره‌های (۵) و (۶) درست‌اند.

جواب دوم:

ایلونکا یك‌شکلات برداشته است [یك‌باردروغ گفته‌است: گزارهٔ(۲)]،

شانی دو شکلات برداشته است [دوبار دروغ گفته است: گزاره‌های (۳) و (۶)]،

کاتی دو شکلات برداشته است [دو بار دروغ گفته است: گزاره‌های (۱) و (۴)].

گزاره‌های (۵) و (۷) درست‌اند.

در حالت «ب» گزارهٔ (۶) نه درست می‌تواند باشد و نه‌نادرست. درواقع، اگر گزارهٔ (۶) درست باشد، گزارهٔ (۷) باید نادرست بشود. این، به‌معنای‌آن است که کاتی سه‌بار دروغ گفته‌است و، بنابراین سه‌شکلات برداشته است. ولی در این صورت، گزارهٔ (۶) نمی‌تواند درست باشد، زیرا ایلونکا تنها ۱ شکلات برداشته است.

ولی، اگر گزارهٔ (۶) نادرست باشد، نفی آن ـ یعنی گزارهٔ (۷) ـ باید درست به‌حساب آید. و این، به معنای آن است که کاتی دوبار دروغ گفته است ـ در گزاره‌های (۱) و (۴) ـ و، بنابراین، دو شکلات برداشته است. ولی در این صورت، گزارهٔ (۶) درست از آب درمی‌آید، زیرا ایلونکا یك شکلات برداشته است، یعنی یکی کمتر از کاتی.

بنابراین، در حالت «ب»، جوابی وجود ندارد: شرطهای مسأله متناقض‌اند.

۱۵۴. خوراکی شمارهٔ III

امیدوارکننده‌تر از همه، برای‌حل مسأله، نتیجه‌گیری I ماماِن است. اگر نتیجه‌گیری II را هم به‌حساب آوریم، می‌توان به این نتیجه رسید: کسی که به‌سیب‌ها و موزها دست نزده است، در همهٔ پاسخ‌های خود، راست گفته‌است. اگر بتوان روشن کرد، کدام‌یك ازبچه‌ها، نه موزی برداشته است و نه سیبی، آن‌وقت، پرداختن به‌بقیه موضوع‌ها، ساده‌تر می‌شود.

بنابراین یك‌یك بچه‌هارا «تعقیب می‌کنیم» وسعی می‌کنیم روشن کنیم که، کدام‌یك از بچه‌ها، همیشه راست گفته است.

آیا ممکن است پیشتا، از اول تا آخر، راست گفته باشد؟

نه! زیرا از نتیجه‌گیری II ماماِن معلوم می‌شودکه، در این صورت حتی یك‌میوه هم برنداشته‌است وگزارهٔ(۲) نادرست می‌شود. به‌این‌ترتیب، اگر فرض‌کنیم که، پیشتا، همیشه راست گفته است، به‌تناقض می‌رسیم: یکی ازگزاره‌های او ـ گزارهٔ (۲) ـ نادرست ازآب درمی‌آید.

به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که، گزارهٔ (۲)، بدون هیچ پیش‌فرضی، تنها می‌تواند درست باشد. درواقع، اگرگزارهٔ(۲) نادرست باشد، به‌معنای آن است که، پیشتا، نه سیب برداشته است ونه موز. ولی، در این صورت، باید در هیچ پاسخی دروغ نگفته باشد (بنابرنتیجه‌گیری II ماماِن)، یعنی گزارهٔ (۲) هم درست باشد.

آیا راست‌گوی شرافتمند ما، می‌تواند پولچی باشد؟

نه! زیرا، در این صورت، باید گزارهٔ (۱۳) درست باشد، یعنی همهٔ گزاره‌های پسرها (پیشتا و یوشکا)، نادرست باشند، در حالی که ما ثابت کردیم، گزارهٔ (۲) (متعلق به پیشتا) حتماً درست است.

آیا ممکن است، یوشکا، در همهٔ موردها راست گفته باشد؟

اگر این‌طور باشد، باید گزاره‌های (۳)، (۶)، (۱۰) و (۱۲) درست باشند. همراه با این‌ها، گزارهٔ (۱۴) هم باید درست باشد، زیرا با توجه به *II*، مضمون این گزارهٔ با مضمون گزارهٔ (۶) یکی است. در واقع، اگر (طبق گزارهٔ (۶)) دخترها مقصر باشند، یعنی در برداشتن میوه‌ها سهیم باشند، آن‌وقت، با توجه به *II*، باید هردو دروغ گفته باشند، که گزارهٔ (۱۴) هم، همین گواهی را می‌دهد.

علاوه براین، ثابت کردیم که گزارهٔ (۲) هم، همیشه درست است. بنابراین، در این حالت، شش گزاره، درست از آب درمی‌آیند: (۲)، (۳)، (۶)، (۱۰)، (۱۲) و (۱۴). در نتیجه، تنها هشت گزارهٔ باقی‌مانده باید نادرست باشند (زیرا، بچه‌ها، روی‌هم هشت میوه برداشته‌اند) و بنابر *II*، باید تعداد کل میوه‌ها با تعداد دروغ‌ها یکی باشد).

همهٔ این‌ها قبول، ولی، دو گزارهٔ (۱) و (۸)، نمی‌توانند باهم درست باشند؛ یولچی یا سیب برداشته است و یا به‌سیب‌ها دست نزده است. اگر سیب برداشته باشد، گزارهٔ (۸) درست، و اگر به‌سیب‌ها دست نزده باشد، گزارهٔ (۱) درست است.

به‌این ترتیب، این فرض که یوشکا همیشه راست گفته است، به‌تناقض برخورد می‌کند و درنتیجه، تنها یک‌حالت باقی می‌ماند: ارژی همیشه راست گفته است.

استدلال‌های بعدی را، به‌دوطریق، می‌توان انجام داد:

طریق اول. اگر ارژی، همیشه راست گفته باشد، آن‌وقت گزاره‌های (۵)، (۹) و (۱۱) درست‌اند. گزارهٔ (۲) در هرحالت درست و، بنابراین، گزارهٔ متناقض آن (۱۳)، نادرست است؛ همراه باآن‌ها، گزارهٔ (۶) هم باید نادرست باشد. گزارهٔ (۱۴) هم نادرست است، زیرا یکی ازدخترها (ارژی)،

حتی یک‌بار هم دروغ نگفته است. ولی، اگر گزارهٔ (۵) درست باشد. از درستی گزارهٔ (۲) نتیجه می‌شود که، گزاره‌های (۴) و (۸) نادرست‌اند. ضمناً، وقتی‌که گزارهٔ (۸) نادرست باشد، گزارهٔ متناقض آن (۱)، درست و گزارهٔ نفی‌کننده آن، (۳)، نادرست است. گزارهٔ (۱۰) هم نادرست است، زیرا گزارهٔ درست (۹) را نفی می‌کند.

[به‌این ترتیب، تنها تکلیف دو گزاره معلوم نیست: (۷) و (۱۲). پرداختن به‌گزارهٔ [۱۲]، ساده‌تر است.]

گزارهٔ(۱۲)، باید درست باشد. درواقع، ازآن‌جاکه پولچی،دست‌کم یک‌بار، دروغ گفته‌است ـ مثلاً، درگزارهٔ(۱۳)ـ بنابراین، میوه‌ای برداشته است. ولی ما ثابت‌کردیم‌که، گزارهٔ (۱)، درست است، بنابراین، پولچی حتی یک‌سیب هم‌برنداشته است. ولی دراین‌صورت، باید موز برداشته‌باشد.

برای ادامهٔ کار، باید گزاره‌های درست و نادرست را، فهرست کنیم.

تا این‌جا ثابت‌کردیم‌که

گزاره‌های (۱)، (۲)، (۵)، (۹)، (۱۱) و(۱۲) درست‌اند،

گزاره‌های(۳)، (۴)، (۶)، (۸)، (۱۰)، (۱۳) و(۱۴) نادرست‌اند.

از II روشن است‌که، تعداد گزاره‌های نادرست، باید برابر ۸ باشد. بنابراین، گزارهٔ بلاتکلیف (۷)، باید گزاره‌ای نادرست باشد. به‌این‌ترتیب، کاملاً روشن شدکه، بچه‌ها، کجا راست و کجا دروغ گفته‌اند.

اوژی: گزاره‌های (۵)، (۹) و(۱۱)، درست،

پولچی: گزارهٔ (۱) درست و گزاره‌های (۷) و (۱۳) نادرست،

یوشکا: گزارهٔ (۱۲) درست و گزاره‌های (۳)، (۶) و(۱۰) نادرست،

پیشتا: گزارهٔ (۲) درست و گزاره‌های (۴)، (۸) و (۱۴) نادرست.

ازروی تعداد گزاره‌های نادرست، می‌توان به‌سادگی، تعداد میوه‌هایی را که هرکدام از بچه‌ها برداشته‌اند، پیداکرد. تنها این مطلب باقی می‌ماند که نوع میوه‌ها (سیب یاموز)را تعیین‌کنیم، برای این‌منظور، به‌گزاره‌هایی مراجعه می‌کنیم که می‌توانند مارا، دراین مورد، یاری دهند: (۱)، (۱۲)، (۹) و (۱۱).

بنابرگزارهٔ (۹)ـ که درست است ـ یوشکا، دست‌کم، سه‌سیب برداشته است. چون یوشکا، روی هم، سه‌بار دروغ گفته است، بنابراین نمی‌تواند بیش ازسه میوه برداشته باشد، یعنی، یوشکا فقط ۳ سیب برداشته است.

بنابرگزارهٔ (۱)، که بازهم درست است، یولچی حتی یك سیب هم برنداشته است . چون او دوبار دروغ‌گفته است. بنابراین، یولچی تنها می‌تواند ۲ موز برداشته باشد.

برای پیشتا، ۱ سیب و ۲ موز باقی می‌ماند.

به‌این ترتیب، اگر مسأله جواب داشته باشد، این‌جواب، که منحصر به‌فرد است، چنین می‌شود:

ارژی، میوه‌ای برنداشته است،

یولچی، ۲ موز برداشته است،

پیشتا، ۲ موز و ۱ سیب برداشته است،

یوشکا، ۳ سیب برداشته است.

با تحقیق معلوم می‌شودکه، در این جواب، همان تعداد گزاره‌های درست و نادرست وجود داردکه، در جریان حل، به‌دست‌آوردیم؛ ضمناً، تعداد دروغ‌های هربچه ، برابر است با تعداد میوه‌هایی‌که برداشته است (سیب و موز روی‌هم) . بنابراین، به‌واقع، توانسته‌ایم جواب مسأله را پیدا کنیم.

طریق دوم. ببینم، از این حقیقت که ارژی همه‌جا راست‌گفته است، چه نتیجه‌هایی به‌دست می‌آید.

از گزارهٔ (۹) نتیجه می‌شود که، یوشکا، دست‌کم ۳ سیب برداشته است. ازگزارهٔ (۱۱) معلوم است‌که، پیشتا، دست‌کم ۱ سیب ودست‌کم ۱ موز برداشته است. به‌این ترتیب، تکلیف سیب‌ها روشن می‌شود: یوشکا ۳ سیب و پیشتا ۱ سیب برداشته است.

این نتیجه‌ها را، در جدولی قرار دهیم:

	چند سیب برداشته	چندموز برداشته	گزاره‌های نادرست	تعدادکل‌گزاره‌ها
یولچی	٥		دست‌کم ۱	۳
پیشتا	۱	دست‌کم ۱	دست‌کم ۲	۴
یوشکا	۳		دست‌کم ۳	۴

اکنون باید روشن کنیم، چه‌کسی موز را برداشته است و چند تا.

گزارهٔ (۱۲) یوشکا درست است، زیـرا یولچی، تنها موز برداشته است. بنابراین، یوشکا تنها سه‌بار دروغ گفته‌است، یعنی موز برنداشته‌است.

در بین گزاره‌های پیشتا، گزارهٔ (۲) درست و گزاره‌های (۴) و (۸) نادرست‌اند [نتیجه‌ای ازگزارهٔ (۵) و نتیجه‌های حاصل]. گزارهٔ (۱۴) هم نادرست است (زیرا اُرژی همیشه راست گفته است). به‌این‌ترتیب، پیشتا، درست ۳ بار دروغ گفته است و، در نتیجه، باید ۲ موز برداشته باشد.

	چند سیب برداشته	چند موز برداشته	گزاره‌های نادرست
یولچی	۰		
پیشتا	۱	۲	۳
یوشکا	۳	۲	۳

ولی روشن‌است که، دراین صورت، ۲ موز باقی‌مانده، نصیب یولچی شده است.

به‌کمک ایـن نتیجه‌ها، می‌توان معلوم کرد، کدام‌یك از (۱۴) گزاره درست و کدام‌یك نـادرست است. چون تعداد میوه‌هایی که هربچه برداشته است، باتعداد دروغ‌های او برابر است، درواقع، توانسته‌ایم جواب مسأله را به‌دست آوریم.

یادداشت ۱. در زندگی واقعی، ازنوع تنظیم گزارهٔ (۱)، باید نتیجه گـرفت که، یولچی، موز برداشته است. ولی این، یك‌نتیجه‌گیری قضائی است و ربطی به‌استدلال منطقی (ریـاضی) ندارد. به‌همین منـاسبت، از آن استفاده نکردیم.

یادداشت ۲. در واقع، در هریك از گزاره‌های (۵) و (۶) دو بخش وجود دارد. ولی نخستین آن‌هـا («ساکت بـاشی بهتر است!» و «تو هنوز اعتراض داری؟»)، گـزاره نیستند و نمی‌توان آن‌ها را درست یـا نادرست

به‌حساب آورد. به‌همین مناسبت، بخش اول گزاره‌های (۵) و (۶) را، گزارهٔ جداگانه‌ای به‌حساب نیاورده‌ایم.

یادداشت ۳. در سه مسألهٔ اخیر، هرگزاره دارای دو ارزش است: اولاً در اثبات، از مضمون گزاره استفاده می‌شود و، ثانیاً، ارزش درستی آن در نظر گرفته می‌شود، یعنی آن‌چه که یکی از افراد دربارهٔ دیگری می گوید (یا به‌خودی‌خود) درست است یا نادرست. هردو تفسیر گزاره، نقشی جدی در منطق ریاضی دارند. یکی از جدی‌ترین قضیه‌ها در نظریهٔ اثبات ـ که به‌نام قضیهٔ گدل معروف است ـ براساس همین تعبیرها قرار دارد.

۱۵۵. در اردوی ورزشی

راه حل اول. قبل از آن‌که به حل مساله بپردازیم، هر ۹ گزاره را به‌صورت کوتاه می‌نویسیم:

(۱) A: «ابر» $B\notin$.

(۲) B: «رعد» $C\notin$.

(۳) C: «ابر» $A\notin$.

(۴) A: «ابر» $C\notin$.

(۵) B: «طوفان» $A\in$.

(۶) C: «رعد» $B\notin$.

(۷) A: (B) ن $>$ (C) ن [مربوط به‌گزاره‌های (۱) تا (۶)].

(۸) B: بین گزاره‌های (۱) تا (۷)، دست کم، ۴ گزارهٔ درست وجود دارد.

(۹) C: بین گزاره‌های (۱) تا (۸)، دست کم، ۵ گزارهٔ نادرست وجود دارد.

اکنون می‌توان متوجه شد که، به‌چه ترتیب، باید از شرطهای مساله استفاده کرد.

البته، بدنیست بدانیم، کدام یك از دخترها، اهل آبادی «حق گو»، کدام یك اهل آبادی «کج‌رو» وکدام یك اهل آبادی «میانه» است. روشن‌

کردن این مطلب، دشوار نیست.

دو گزارهٔ اول A - گزاره‌های (۱) و (۴) - نمی‌توانند هر دو نادرست باشند، زیرا دراین صورت، هم B وهم C، عضو باشگاه «ابر» می‌شوند. بنابراین، A، اهل آبادی «حق‌گو» یا اهل آبادی «میانه» است. (*)

ضمناً روشن است که

بین شش‌گزارهٔ اول (۱) تا (۶)، ۳ گزارهٔ درست و ۳ گزارهٔ نادرست وجود دارد. (**)

درواقع، از ۶ گزارهٔ اول، هریك ازدختران ورزشکار، ۲ گزاره ارائه داده‌اند. چون از قبل می‌دانیم که، یکی ازدختران اهل‌آبادی «حق گو» (هر دو گزارهٔ اودرست‌است)، دیگری‌اهل‌آبادی «کج‌رو» (هردو گزارهٔ اونادرست است) و سومی اهل‌آبادی میانه است (یکی ازگزاره‌های او درست ودیگری نادرست است) ، بنابراین ، روی هم ، ۳ گزارهٔ درست و ۳ گزارهٔ نادرست وجود دارد.

اکنون روشن است که باید گزاره‌های (۷)، (۸) و (۹) را، مفصل‌تر موردبحث قرار داد.

درستی یا نادرستی هرکدام از این گزاره‌ها را «با چشم» نمی‌توان معین‌کرد. بایدهردوحالت را بررسی‌کرد. ازگزارهٔ (۷) آغازمی‌کنیم (اگرچه به‌نظر عجیب می‌رسد).

I. فرض می‌کنیم، گزارهٔ (۷)، نادرست باشد. دراین صورت، بین هفت‌گزارهٔ اول - از(۱) تا (۷) - تنها ۳ گزارهٔ درست وجود دارد.بنابراین، گزارهٔ (۸) نادرست و گزارهٔ (۹) درست است.

چون‌گزاره‌های (۷)و(۸) نادرست است، پس A و B نمی‌توانند اهل آبادی «حق‌گو» باشند. پس تنها C می‌تواند ازآبادی «حق‌گو» آمده باشد. باتوجه‌به نتیجه‌گیری (*)، A اهل آبادی «میانه» وB اهل آبادی «کج‌رو» می‌شود.

چون باید همهٔ گزاره‌های B نادرست باشند، بنابراین، نفی‌گزاره‌های (۲) و (۵) درست است: C عضو باشگاه «رعد» است و A عضو باشگاه

«طوفان» نیست. بنابراین، A باید عضو باشگاه «ابر» باشد. ولی بنابر گزارهٔ (۳) ـ که متعلق به ورزشکار C و، بنابراین، گزاره‌ای درست است ـ A نمی‌تواند عضو باشگاه «ابر» باشد به‌این ترتیب، به‌تناقض می‌رسیم. و این، به‌معنای آن است که فرض I درست نیست و باید آن را به‌نفی خود تبدیل کرد.

II. بنابراین، گزارهٔ (۷) تنها می‌تواند درست باشد. دراین‌صورت، بین گزاره‌های از (۱) تا (۷)، ۴ گزارهٔ درست وجود دارد، درنتیجه، گزارهٔ (۸) درست و گزارهٔ (۹) نادرست است.

چون هر دو گزارهٔ (۷) و (۸) درست‌اند، دراین‌صورت، هیچ‌کدام از دو ورزشکار A و B نمی‌توانند اهل آبادی «کج‌رو» باشند. یعنی C، اهل آبادی «کج‌رو» است و، بنابراین، گزاره‌های (۳) و (۶) نادرست‌اند. نفی گزارهٔ (۳) چنین است: «A عضو باشگاه ابر است» و نفی گزارهٔ (۶): «B عضو باشگاه رعد است». هردو نفی، گزاره‌هایی درست‌اند. بنابراین، C عضو باشگاه «طوفان» می‌شود و گزارهٔ (۵) نادرست از آب درمی‌آید. پس B، اهل آبادی «میانه» و A اهل آبادی «حق گو» است.

احتیاط کنید! هنوز همه‌چیز آماده نشده است! اگرچه باشگاه ورزشی هرورزشکار را معین کردیم، ولی ممکن‌است ضمن تحقیق، به‌تناقضی برخورد کنیم. اگر چنین وضعی پیش‌آید، به‌معنای آن است که مساله جواب ندارد.

بنابراین، باید جواب حاصل را مورد تحقیق قراردهیم: آیا A همچون فردی که ساکن آبادی «حق گو» است، رفتار کرده است: همچنین، B به‌عنوان کسی که ساکن آبادی «کج‌رو» و C به‌عنوان یك فرد ساکن آبادی «میانه»، رفتاری قانون‌مند داشته‌اند؟

ضمن تحقیق، معلوم می‌شود که به‌هیچ تناقضی برخورد نمی‌کنیم، روشن کرده‌ایم که گزاره‌های (۷) و (۸) درست و گزارهٔ (۹) نادرست است. وقتی که از باشگاه ورزشی هریك از ورزشکاران اطلاع داشته باشیم، بدون هیچ زحمتی، می‌توانیم ارزش درستی بقیهٔ گزاره‌ها را معلوم کنیم. نتیجهٔ نهائی چنین است:

گزاره‌های (۱)، (۳) و (۷) درست‌اند: A رفتاری شبیه فرد ساکن

آبادی «حق گو» دارد؛

گزاره‌های (۳)، (۶) و(۹) نادرست‌اند: رفتار C شبیه رفتار مردم اهل آبادی «کج‌رو» است؛

گزاره‌های (۲) و (۸) درست و گزارهٔ (۵) نادرست است: B، اهل آبادی «میانه» است.

راه حل دوم. همهٔ شرطهای مساله، وقتی برقرارخواهند بودکه بتوانیم، هریك از ورزشکاران را درباشگاهی قراردهیم که، گزاره‌های یکی ازآن‌ها، همیشه درست، گزاره‌های دیگری همیشه نادرست و گزاره‌های سومی، یك درمیان، درست ونادرست باشند.

به‌این‌ترتیب ،همهٔ حالت‌های ممکن مربوط به‌عضویت ورزشکاران در باشگاه‌های ورزشی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و روشن می‌کنیم: آیا حالتی وجود داردکه سه‌ورزشکار، به‌ترتیب، همچون مردم اهل‌آبادی‌های «حق گو»، «کج‌رو» و «میانه» پاسخ داده باشند.

این‌روش راه‌حل، عاقلانه‌تراست، زیرا تعداد حالت‌های ممکن،چندان زیاد نیست. (کسی که با نظریهٔ ترکیب‌ها آشنا باشد، متوجه می‌شود که صحبت بر سر تبدیل‌های مختلف باشگاه‌های ورزشی است و تعداد چنین تبدیل‌هایی، برابر است با $۶ = ۳ \times ۲ \times ۱ = !۳$. کسی هم‌که بااین نظریه آشنا نباشد، بدون هیچ زحمتی، می‌تواند همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسد.)

در جدول I (صفحهٔ ۵۱۰) همهٔ این حالت‌ها را نشان داده‌ایم.

ازروی جدول به‌سادگی دیده می‌شودکه درسطردوم (II)، A همیشه راست گفته است (اهل «حق گو»)، B همیشه دروغ (اهل «کج‌رو») و C یك درمیان راست ودروغ (اهل «میانه») گفته است. درهیچ حالت دیگری، این نظم دیده نمی‌شود: مثلاً، در هیچ‌کدام ازآن‌ها، C نمی‌تواند اهل یکی ازآبادی‌های جزیرهٔ بویان باشد.

۱۵۶. حالت «کوتاه شده»

بخشی از جدول راه حل دوم مسالهٔ قبل را آورده‌ایم (جدول II):

	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
				(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)	(۹)
(I)	ابر	طوفان	رعد	د	ن	ن	د	ن	د	ن	ن	د
(II)	ابر	رعد	طوفان	د	د	ن	د	ن	ن	د	د	ن
(III)	طوفان	ابر	رعد	ن	ن	د	د	د	د	ن	د	ن
(IV)	طوفان	رعد	ابر	د	د	د	ن	د	ن	د	د	ن
(V)	رعد	ابر	طوفان	ن	د	د	د	ن	د	ن	د	ن
(VI)	رعد	طوفان	ابر	د	د	د	ن	ن	د	ن	د	ن

جدول I

	A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
				(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)
(I)	ابر	طوفان	رعد	د	ن	ن	د	ن	د
(II)	ابر	رعد	طوفان	د	د	ن	د	ن	ن
(III)	طوفان	ابر	رعد	ن	ن	د	د	د	د
(IV)	طوفان	رعد	ابر	د	د	د	ن	د	ن
(V)	رعد	ابر	طوفان	ن	د	د	د	ن	د
(VI)	رعد	طوفان	ابر	د	د	د	ن	ن	د

جدول II

به‌سادگی دیده‌می‌شود که، درسطراول (I)(صفحهٔ ۵۱۱)، ورزشکاران A،BوC، به‌ترتیب، رفتاری همچون مردم آبادی‌های «حق گو»، «کج‌رو» و «میانه»دارند. درسطردوم (II)، A همچون‌مردم «حق گو»، B همچون‌مردم «میانه»وCهمچون‌مردم «کج‌رو» پاسخ‌داده‌اند. بقیهٔ‌سطرها، باشرطهای‌مساله سازگار نیستند، زیرا در هریك از آن‌ها، دو ورزشکار، رفتاری همچون رفتار مردم «میانه» دارند: A و C درسطرIV وA وB درسطرهای III وVوVI.

به‌این‌ترتیب، جواب مسالهٔقبلی (سطردوم) به‌قوت‌خود باقی‌می‌ماند، ولی جواب جدیدی هم پیدا می‌شود (سطر اول). یعنی، با حذف بخشی از شرطها (سه شرط آخر)، به جای یك جواب، دو جواب بـه دست می‌آید. بنابراین، تصورکسی که گمان می‌کرد، باحذف بخشی ازشرطها، هیچ تغییری درجواب مساله پدید نمی‌آید، تصوری نادرست است.

۱۵۷. یك عقب‌نشینی کوچك نظری

الف) می‌توان. وقتی‌کـه دوشیزگان ورزشکار متعلق بـه باشگاه‌هایی باشند (A عضو «ابر»، B عضو «طوفان» و C عضو «رعد») که گزاره‌های (۱) تا (۹) از نظر ارزش درستی متناظر با پاسخ‌های مورد نظر باشند (یعنی A مثل مردم آبادی «حق گو»، B مثل مردم آبادی «کج‌رو» و C مثل‌مردم آبادی «میانه» پاسخ بدهند)، روشن‌است‌که پاسخ‌های (۱) تا (۶) هم، همین خصلت را خواهند داشت.

[در واقع، بـا حـذف گزاره‌های (۷)، (۸) و (۹)، هیچ تغییری در جواب‌های ورزشکاراهل «میانه» (ازنظر یك‌درمیان بودن درستی و نادرستی آن‌ها) نمی‌دهد.]

ب) ممکن است. مثلاً، اگرگزارهٔ (۶) را حذف‌کنیم وبقیهٔ‌گزاره‌های (۱) تا (۵) و (۷) تا (۹) را نگه‌داریم، به‌این جدول می‌رسیم:

A	B	C	A	B	A	B	C
(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۷)	(۸)	(۹)
د	د	ن	د	ن			

سه‌ستون آخر را بـه‌این مناسبت پر نکرده‌ایم کـه، باید ارزش درستی آن‌ها را تغییر داد. چون تااین‌جـا، هر کـدام از ورزشکاران B و C، یك‌بار دروغ گفته‌اند (و C بیشتر از B دروغ نگفته است)، بنابـراین گزارهٔ (۷) باید نادرست باشد.

A	B	C	A	B	A	B	C
(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۷)	(۸)	(۹)
د	د	ن	د	ن	ن		

بین پاسخ‌های (۱) تا (۵) و (۷)، تعداد گزاره‌های درست ونادرست باهم برابرند، بنابراین (چون، بیش ازنصف گزاره‌ها، درست نیست)، گزارهٔ (۸) نادرست است:

A	B	C	A	B	A	B	C
(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۷)	(۸)	(۹)
د	د	ن	د	ن	ن	ن	

تا این‌جـا، بیش از نصف پاسخ‌ها نادرست است، بنابراین گزارهٔ (۹) درست است. بنابـراین، بعد از حذف گزارهٔ (۶) ، ارزش درستی گزاره‌ها ، چنین می‌شود:

A	B	C	A	B	A	B	C
(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۷)	(۸)	(۹)
د	د	ن	د	ن	ن	ن	د

از آن‌جاکه، نه A و نـه B، رفتاری شبیه رفتاریکی ازساکنان جزیرهٔ

بویان ندارند، مساله بدون جواب می‌شود.

[تنها همین‌مورد نیست، که جواب مسالهٔ اصلی درآن صدق نمی کند. مثلاً، به‌سادگی روشن می‌شودکه، اگرگـزارهٔ (۷) را حذف‌کنیم، آن‌وقت ارزش درستی گـزاره‌های (۸) و (۹) تغییرمی‌کند و ورزشکاران B و C در وضعی قرار می گیرند کـه نمی‌توانند از مردم جزیرهٔ بویان باشند. مثال‌های دیگری هم‌وجود دارد: تعدادآن‌ها خیلی زیاد است (البته، می‌توان، به‌جای یك‌گزاره، چند گزاره را حذف کرد). طرح ایـن مطلب جالب است‌که، چه ترکیبی ازگزاره‌ها، بـاجواب مسالهٔ اصلی سازگار وچـه ترکیبی ازآن‌ها، با جواب مسالهٔ اصلی ناسازگـار است. ولی، پاسخ‌دادن به‌این پرسش، چندان ساده نیست. درواقع، برای پاسخ‌دادن بـه این پرسش، باید در مورد تعداد انبوهی ازحالت‌ها، تحقیق‌کرد.]

۱۵۸. حالت‌تازه

مساله بدون جواب می‌شود.

اثبات اول. چون تنها گزارهٔ (۷) تغییرکرده است، ازهمهٔ استدلال‌های حل مسالهٔ ۱۵۵ (منظورمان راه حل اول‌آن است)، می‌توان درمسالهٔ۱۵۸ هم‌استفاده‌کرد؛ یعنی برای حل مسالهٔ ۱۵۸، می‌توانیم راه حل مسالهٔ ۱۵۵ را از جملهٔ

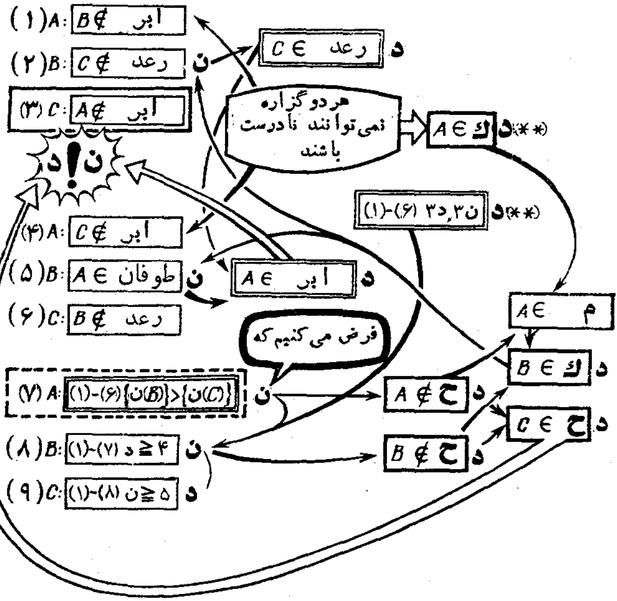
«دوگزارهٔ اول A — گزاره‌های (۱) و(۴)— نمی‌توانند هردو درست باشند. . .»

تا جملهٔ

«II. بنابراین، گزارهٔ (۷)، تنها می‌تواند درست باشد. بنابراین،بین گزاره‌های (۱) تا (۷)، ۴ گزارهٔ درست وجود دارد و، درنتیجه، گزارهٔ(۸) درست وگزارهٔ (۹) نادرست است.

چون هر دوگزارهٔ (۷) و (۸) درست‌اند، دراین صورت، هیچ‌کدام از دو ورزشکار A و B نمی‌توانند اهل آبـادی «کج‌رو» باشند. یعنی، C اهل آبادی «کج‌رو» است».

برای حل مسالهٔ ۱۵۸ تکرار کنیم.



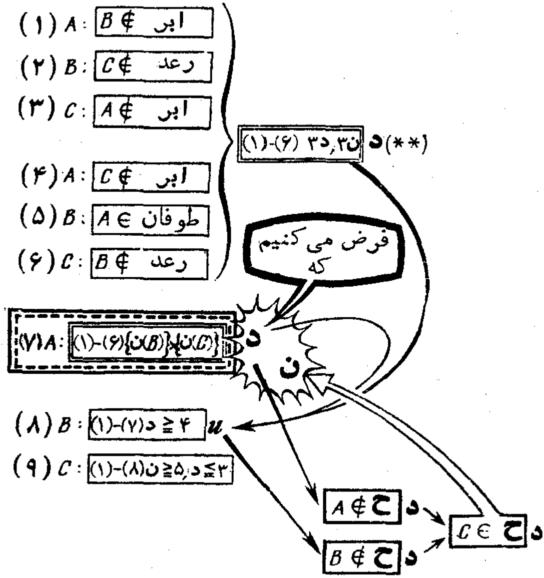
شکل ۲۳۶

ازاین گذشته، حتی استدلال اخیر هم بـه‌قوت خود باقی است، زیرا مضمون گزارهٔ (۷)، اثری‌درآن ندارد وتنها ازارزش درستی‌آن استفاده‌کرده است. بنابراین، در مسالهٔ ۱۵۸ هم ، ورزشکار C تنها می‌تواند اهل آبادی «کج‌رو» باشد.

همهٔ این‌ها درست، ولی گزارهٔ جدید (۷) حاکی است: «B بیشتر از C دروغ گفته است ». اگـر تعداد گزاره‌های درست و نـادرست را (از روی نقل قولی‌که ازحل مسالهٔ ۱۵۵ آوردیم) بشماریم، معلوم می‌شودکه گزارهٔ (۷) درحالت جدید، درست است. ولی دراین‌صورت، ورزشکار C نمی‌تواند اهل‌آبادی «کج‌رو» باشد (زیـرا، درشش گزارهٔ اول، B بیشتر از C دروغ گفته است؛ باوجودی‌که هرکدام، ۲ گزاره ارائه داده‌اند).

به‌این‌ترتیب، به‌تناقض می‌رسیم («ورزشکارCتنها می‌تواند اهل‌آبادی کج‌رو بـاشد»، و «ورزشکار C نمی‌تـواند اهل آبـادی کج‌رو باشد»). این

نتیجه‌گیری ، به معنای متناقض بودن شرط‌های مساله است : مسالهٔ ۱۵۸ جواب ندارد.



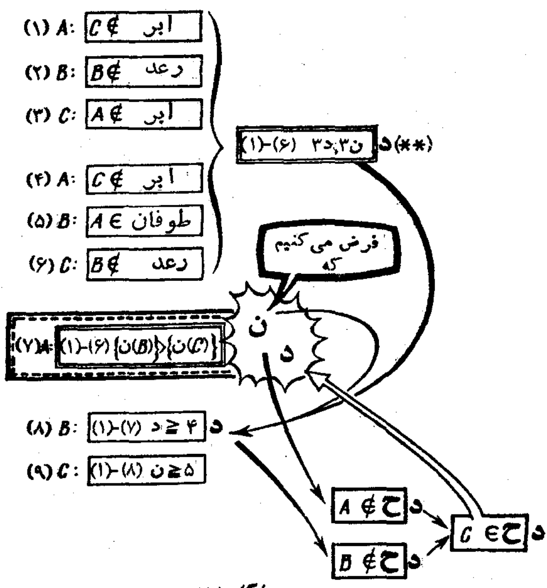
شکل ۲۳۷

[به شکل‌های ۲۳۶ و ۲۳۷ توجـه کنید. روی آن‌هـا، اثبات کامل بی‌جواب بودن مسالهٔ ۱۵۸، نشان داده شده‌است. دریکی از شکل‌ها(شکل ۲۳۶) فرض را برنادرستی گزارهٔ (۷) گذاشته‌ایم، و در شکل دیگر (شکل ۲۳۷)، بردرستی آن؛ ودر هردوحالت، به‌تناقض رسیدیم.]

اثبات دوم. این مطلب دارای اهمیت است کـه، درشکل ۲۳۶، تنها از ارزش درستی گزارهٔ (۷) استفاده‌کرده‌ایم، نـه از مضمون آن. به همین علت است که، بعد ازتغییرمضمون گزارهٔ (۷)، همهٔ استدلال‌ها، به‌قوت خود باقی می‌مانند.

[ضمن تنظیم شکل‌های ۲۳۶ و ۲۳۷، به نظر می‌رسد کـه بخش دوم اثبات، به‌مراتب ساده‌تر ازبخش اول آن است. با کمی فکر، می‌توانیم علت اختلاف به‌این‌زیادی‌را، بین‌طرح‌ها، پیداکنیم. علت‌را باید دراین‌جاجست و

جو کرد که، در بخش دوم اثبات، ازمضمون گزارهٔ (۷) استفاده شده است. ببینیم، اگر در بخش اول اثبات هم،که درشکل ۲۳۶ نشان داده شده است، علاوه برارزش درستی گزاره، ازمضمون آن‌هم استفاده‌کنیم، چه وضعی پیش می‌آید. گزارهٔ (۷) چه‌مضمونی دارد؟ ازآن جاکه فرض‌کرده‌ایم، این گزاره نادرست است، پس درشش گزارهٔ اول، ورزشکار C بیشتر از ورزشکار B دروغ گفته است. ولی‌درست درهمین‌بخش اثبات، C همیشه راست‌می‌گوید. بنابراین، به تناقض برخورد می‌کنیم. این تناقض، خیلی سریع‌تر از حالت قبلی، ضمن مقایسهٔ یکی از نتیجه‌ها با گزارهٔ (۳)، به‌دست آمد: بعد ازآن‌که راست‌گویی C روشن شد، می‌توانیم آن را با گزارهٔ (۷) مقایسه‌کنیم و نه با گزارهٔ (۳). روی شکل۲۳۶، به‌خوبی دیده می‌شودکه، چه زنجیرهٔدرازی ازاستدلال‌ها، ما را به‌این نتیجه می‌رساندکه C، اهل‌آبادی «حق‌گو»است.]



شکل ۲۳۸

فرض می‌کنیم، گزارهٔ (۷) درست باشد. آن‌وقت اگر به نحوی که در شکل ۲۳۷ نشان داده شده است، استدلال‌کنیم (بخشی ازاستدلال، ازراه‌حل

اول مسالهٔ ۱۵۵ اقتباس شده است)، بـه‌تناقض بـرمی‌خوریم: گــزارهٔ (۷) نادرست از آب درمی‌آید.

فرض می‌کنیم، گزارهٔ (۷) نادرست باشد. آن‌وقت، با استدلالی‌که در شکل ۲۳۸ نشان داده شده‌است، دوباره‌به‌تناقض می‌رسیم: گزارهٔ (۷) درست ازآب درمی‌آید.

بنابراین، اعم ازاین‌که گزارهٔ (۷) را درست بگیریم یانادرست، مسالهٔ ۱۵۸ بدون جواب می‌شود.

یادداشت ۱. جالب این‌جاست که‌دراثبات دوم، درهردوحالت، تناقض به‌نقطهٔ آغاز استدلال‌ها برمی‌گردد: به‌گزارهٔ (۷).

یادداشت ۲. اگر از طرح استدلالی‌کـه درشکل ۲۳۶ نشان داده شده است، «اضافه‌ها» راکنار بزنیم، گزاره‌هایی باقی می‌ماندکه ازآن‌ها، درستی گزارهٔ(۹) نتیجه‌می‌شود. وقتی‌که زنجیرهٔ استدلال‌ها را، برای‌اثبات بی‌جواب‌ـ بودن مساله، دنبال می‌کـردیم، از گــزارهٔ (۹) استفاده نکردیم. بنابراین، گزارهٔ (۹)، دراین حالت مساله، به‌کلی اضافه است. درتحقیق هم، گزارهٔ (۹) به‌کار نیامد: وقتی‌که مساله جواب نداشته باشد، نمی‌توان اثبات‌کردکه هرورزشکار متعلق به کدام باشگاه ورزشی است و، بنابراین، انجام تحقیق، معنایی ندارد.

۱۵۹. برخورد زودگذر

نه. گزاره‌هایی‌که درصورت مساله داده شده است، متناقض‌اند.

[اثبات این مطلب، بسیارساده است. شکل‌های ۲۳۷ و۲۳۸ ازمسالهٔ قبلی را درنظرمی‌گیریم. روی‌این شکل‌ها، دیده‌می‌شودکه شرطهای مساله، منجر به‌تناقض می‌شوند. بـه‌روشنی معلوم است‌کـه گزارهٔ (۹)، درزنجیرهٔ استدلال‌ها وارد نشده است و، ضمناً، به‌جای‌گزاره‌های (۱) تا (۶)، می‌توان ازیك گزاره (**) استفاده‌کرد. کافی است ثابت‌کنیم‌که، گزارهٔ (**) بستگی به‌مضمون گزاره‌های (۱) تا (۶) ندارد وتنها به‌این مربوط است که، درآن، دوگزاره متعلق به ساکن آبادی «کج‌رو» ویك‌گزاره ازساکن آبادی «میانه»

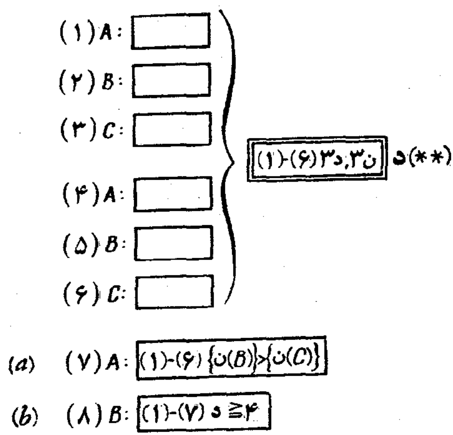
دروغ و بقیهٔ گزاره‌ها درست‌اند (ازسه گزارهٔ اخیر، دو گزاره متعلق به‌ساکن آبادی «حق گو» و یك گزاره متعلق به‌ساکن آبادی «میانه» است). این که درگزاره‌ها، دربارهٔ چه‌موضوعی صحبت شده‌است، مهم نیست. به‌این‌ترتیب، می‌توان‌ازمضمون‌این گزاره‌ها و ،همچنین، مضمون گزارهٔ(۹) صرف‌نظر کرد.]

گزاره‌هایی را که در (الف) از آن‌ها سخن رفته است، از (۱) تا (۶) شماره‌گذاری می‌کنیم؛ گزاره (ب) را (۷) و گزارهٔ (ج) را (۸) می‌نامیم. چون از (الف) و (ج)، همان گزاره‌ای نتیجه می‌شودکه درشکل‌های ۲۳۷ و ۲۳۸ با علامت (**) نشان داده شده است، بنابراین گزاره‌های مسالهٔ ۱۵۹، درمجموع، همان‌گزاره‌هایی هستندکه‌دراثبات دوم مسالهٔ قبلی، مورد استفاده قرار گرفته بودند.

بنابراین، نتیجهٔ نهایی‌حل‌مسالهٔقبل، برای مسالهٔ۱۵۹ هم درست‌است. به‌زبان دیگر، مسالهٔ ۱۵۹ همان مسالهٔ است، بااین تفاوت‌که، همهٔ چیزهایی که برای اثبات دوم مسالهٔ ۱۵۸ زیادی بود، از آن حذف شده است.

یادداشت ۱. در صورت مساله، هیچ صحبتی از ردیف گزاره‌های (۱) تا (۶) نشده‌است. درشکل ۲۳۹، ردیف دلخواهی برای این گزاره‌هاانتخاب شده است: «شمارهٔ» گزاره، هیچ تاثیری دراثبات ندارد.

یادداشت ۲. گزارهٔ (چ) درصورت‌مساله، به‌گزاره‌هایی مربوط‌می‌شود



شکل ۲۳۹

که جزیره‌نشینان ارائه داده‌اند و نه به‌آن‌چه ما در گزارهٔ (الف) به خواننده اطلاع داده‌ایم، زیرا B، حرف ما را نمی‌شنید.

یادداشت ۳. مسالهٔ ۱۵۹ از این جهت جالب است که، توانستیم بی‌جواب بودن آن را، بدون این‌که ازمرز منطق خالص خارج شویم، ثابت کنیم. تمامی اثبات، برپایهٔ‌درستی و نادرستی، یعنی برارزش منطقی گزاره‌ها، بنا شده است. هیچ جا، محتوای گزاره‌ها، مورد استفاده قرارنگرفته است و ازاین بابت، می‌توانند دلخواه باشند.

۱۶۰. بازهم مسابقهٔ دو

[برای این‌که، شرط‌های مساله، عینی‌تر باشند، آن‌ها را به‌صورتی کوتاه‌تر می‌نویسیم. مثلاً این‌طور:

(۱) A: $\bar{A}\neq ۱$ و $\bar{A}<\bar{C}$

(۲) B : $\bar{B}<\bar{C}$

(۳) C : $\bar{D}<\bar{B}$

(۴) D : $\bar{D}\neq ۴$

(۵) N: «ن» نفراول و «د» دوم وسوم وچهارم

حداکثر، ۲ گزاره نادرست است (*)

($\bar{A}$؛ $\bar{B}$، $\bar{C}$ و $\bar{D}$ را به‌ترتیب، شمارهٔ مقام دونده‌های A، B، C و D در مسابقه گرفته‌ایم.)]

الف. اگر C در ردیف اول یا دوم قرارگرفته باشد، آن‌وقت

گزارهٔ (۱) نادرست است (زیرا درآن گفته می‌شود که A زودتر از C به‌خط پایان رسیده است، ولی چون کس دیگری هم از A جلو افتاده است، بنابراین ۲ نفرجلوتر از C بوده‌اند)؛

دست کم، یکی از دو گزارهٔ (۲) و (۳) نادرست است (زیرا، اگر هردوی آن‌ها درست باشند، باید داشته باشیم: $\bar{D}<\bar{B}<\bar{C}$، یعنی C بعداز دو دوندهٔ D و B به‌پایان خط رسیده است)؛

گزارهٔ (۵) نمی‌تواند درست باشد (زیرا از گزاره‌های قبلی نتیجه

می‌شود که، دست کم، ۲ دونده دروغ گفته‌اند).

به‌این ترتیب، دست کم، سه گزاره از گزاره‌های (۱) تا (۵)، نادرست ازآب درمی‌آیند که، در واقع، گزارهٔ (*) را نقض می‌کند. بنابراین، فرض اولیهٔ ما نادرست است: دونده C نفر اول یا دوم نشده است.

ب. به‌سادگی دیده می‌شود که مضمون (*)، هیچ تناقضی با گزارهٔ تماشاچی N ندارد. بنابراین، اگر بتوانیم ردیف دوندگان را در نتیجهٔ مسابقه، طوری تنظیم کنیم که گزارهٔ N درست باشد، آن‌وقت، N راست گفته است.

ببینیم، مقام‌های دوندگان‌را چگونه تقسیم کنیم تا، گزارهٔ N، درست از آب درآید. برای این منظور، قبل از هر کار، باید روشن کنیم، به‌فرض درست‌بودن گزارهٔ(۵)، کدام‌یك از گزاره‌های (۱) تا (۴) می‌توانند نادرست باشند (می‌دانیم که تنها یکی از این گزاره‌ها باید نادرست باشد).

گزارهٔ (۲) نمی‌تواند نادرست باشد، زیرا اگر گزارهٔ (۲) نادرست باشد به‌معنای آن است که B برندهٔ مسابقهٔ دو است [طبق گزارهٔ (۵)، کسی دروغ گفته است که برندهٔ مسابقه‌است] و، دراین صورت، گزارهٔ(۲) درست از آب درمی‌آید، نه نادرست.

گزارهٔ (۳) نمی‌تواند نادرست باشد، زیرا نادرست‌بودن گزارهٔ(۳) به‌معنای برنده بودن C است که، دراین صورت، گزارهٔ(۲) نادرست‌می‌شود.

گزارهٔ (۴) هم نمی‌تواند نادرست باشد، زیرا نادرست بودن آن، هم به‌معنای اول شدن D وهم به‌معنای آخرشدن اوست.

به‌این‌ترتیب، گزارهٔ (۵) تنها درحالتی می‌تواند درست باشد، که‌گزارهٔ (۱) را نادرست بگیریم، یعنی وقتی‌که، A، به‌مقام اول رسیده باشد.

آیا این وضع ممکن است؟

بله، ممکن است. وقتی‌که مقام اول متعلق به A باشد، بخش اول، گزارهٔ (۱) و، بنابراین، تمامی آن نادرست است. گزاره‌های (۲) و (۳)، تنها وقتی درست‌اندکه، ردیف مقام‌ها، به‌صورت D، B و C باشد؛ ضمناً، گزارهٔ (۴) هم خود به‌خود درست ازآب درمی‌آید.

بنابراین، گزارهٔ (۵)، وقتی وتنها وقتی می‌تواند درست باشدکه A اول، D دوم، B سوم و C چهارم شده باشد.

یادداشت. ممکن است خواننده‌ای، به‌درست‌بودن گزارهٔ(۱) اعتراض داشته باشد. اگر گزارهٔ (۱) نادرست باشد، بایدگزارهٔ متناقض آن درست باشد. ولی، متناقض گزارهٔ (۱) حاکی است: «من مسابقهٔ دو را بردم، ولی قبل از C به‌پایان خط نرسیدم». این اعتراض، کاملاً جدی است، ولی نادرستی گزارهٔ (۱) را نباید به‌مفهومی گرفت‌که خوانندهٔ ما تصور می‌کند. در واقع، گزارهٔ (۱)، که گزاره‌ای نادرست است، از دو بخش تشکیل شده است‌که با هم درنظر گرفته شده‌اند. اگر یکی ازبخش‌ها نادرست باشد،تمام گزاره را باید نادرست به‌حساب‌آورد. این،یکی ازقانون‌های منطق‌است (که درستی‌آن‌را، با مراجعه به «عقل سلیم» درمی‌یابیم. در واقع،نادرستی گزارهٔ (۱)، به‌این معناست: «من به‌خط پایان مسابقه رسیدم و از C جلو افتادم».

۱۶۱. زن و شوهرها

[این‌مسأله، چندان ساده نیست! درمورد درستی یانادرستی هر گزاره، به‌طور جداگانه، نمی‌توان داوری‌کرد. اگربخواهیم، ارزش درستی گزاره‌ها را بررسی‌کنیم، باید حالت‌های بسیار زیادی را در نظر بگیریم. مثلاً، روشن است‌که گزاره‌های (۱) و (۲) نمی‌توانند با هم درست باشند: یا گزارهٔ (۱)، یاگزارهٔ (۲) ویا هردوی‌آن‌ها نادرست‌اند.

برای حل مسألهٔ ۱۶۱، بهتر از همه این است که از راه‌حل دوم مسألهٔ ۱۵۵ استفاده‌کنیم، زیرا در این‌جا هم، مثل مسألهٔ ۱۵۵، با شش حالت ممکن سروکار داریم.]

تنها شش حالت، برای زوج‌ها، وجود دارد. این شش حالت را در جدولی ردیف (جدول صفحهٔ ۵۲۳ را ببینید) و ارزش درستی گزاره‌ها را، در هرحالت، مشخص می‌کنیم.

به‌سادگی دیده می‌شودکه، حالت‌های (I)، (III) و(V)، نمی‌توانند جواب مسأله باشند، زیرا مثلاً، در حالت‌های (I) و (III)، زوج زمان-

	توفان	مهرداد	زمان	زمان	مهرداد	زمرد	توفان	مژده	توکا
				(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)
(I)	توکا	مژده	زمرد	د	ن	د	ن	ن	د
(II)	توکا	زمرد	مژده	ن	ن	د	ن	د	د
(III)	مژده	توکا	زمرد	ن	ن	ن	ن	د	د
(IV)	مژده	زمرد	توکا	ن	د	ن	ن	د	د
(V)	زمرد	توکا	مژده	ن	د	ن	د	ن	د
(VI)	زمرد	مژده	توکا	ن	ن	ن	د	د	د

زمرد، و در حالت (V)، زوج مهرداد ـ توکا، با شرط(*) سازگار نیستند. حالت‌های (II)، (IV) و (VI) با شرط (*) و، بنابراین، باهمهٔ شرطهای مسأله سازگارند.

به‌این ترتیب، نمی‌توان با دقت روشن‌کردکه، چه‌کسی همسر چه‌کسی است، زیرا سه‌حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد.

۱۶۲. گزارهٔ جدید

a. اگر شرط ($۷a$) توفان را به شرطهای مسألهٔ قبل اضافه کنیم، به‌مسأله‌ای با ۲ جواب می‌رسیم: حالت‌های(II) و(IV) ازحل مسألهٔ قبل.

دراین‌حالت، همهٔ گزاره‌های توکا درست است؛ بنابراین طبق‌شرط(*) باید شوهر او دروغ بگوید. گزارهٔ ($۷a$) ازتوفان نادرست است. درنتیجه، حالت (VI) نمی‌تواند جواب مساله باشد، زیرا در این حالت، توفان گاهی راست می‌گوید و گاهی دروغ، درحالی‌که، بنابرشرط (*)، چنین‌وضعی ممکن نیست. حالت‌های (II) و (IV)، مثل قبل، جواب مسأله‌اند: در آن‌ها، توفان پشت سرهم دروغ گفته است.

b. بااضافه‌کردن‌گزارهٔ($۷b$)، به‌شرطهای‌مسألهٔ‌قبل، به‌مسأله‌ای می‌رسیم که تنها یك‌جواب دارد: حالت (VI) ازمسألهٔ قبل (زوج‌ها چنین‌اند: توفان وزمرد، مهرداد و مژده، زمان وتوکا).

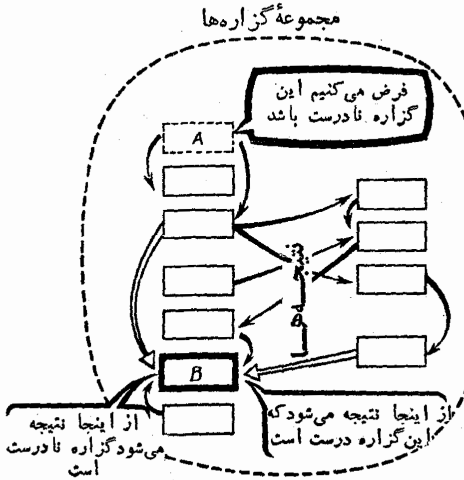
حالت (II) و (IV)، دیگر نمی‌توانند جواب مسأله باشند، زیرا در آن‌ها، توفان، یك‌بار راست ویك‌بار دروغ گفته است. همهٔ شرطهای مسأله، تنها در مورد حالت (VI) صدق می‌کند.

c. در این حالت، مساله جواب ندارد.

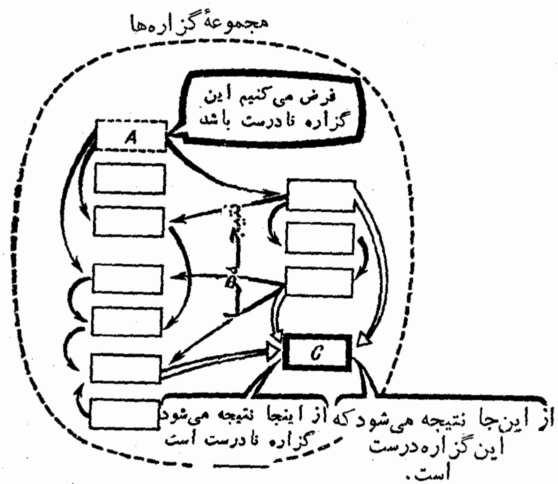
در هریك از موردها ، گزارهٔ ($۷c$) زمان، شرط (*) را نقض می‌کند.

d. در این حالت هم مساله جواب ندارد: گزارهٔ ($۷d$) نه درست می‌تواند باشد و نه نادرست [اگر بخواهیم با شرط (*) سازگار باشد].

در واقع، اگر همسر توفان راست گفته باشد، آن‌وقت باید شوهر او، یعنی توفان دروغ بگوید واز درستی گزارهٔ ($۷d$) به‌نادرستی آن می‌رسیم.



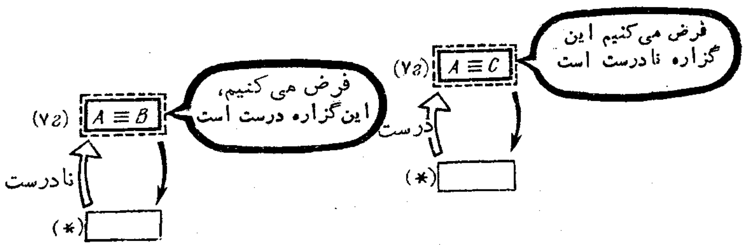
شکل ۲۴۰



شکل ۲۴۱

یادداشت ۱. روشن است که، اگربه‌جای‌توفان، یکی‌دیگر ازشوهرها، گزاره ($\text{۷}d$) را می‌داد، باز هم به همین نتیجه می‌رسیدیم. گزاره ($\text{۷}d$) با خودش متناقض است.

یادداشت ۲. این‌مسأله نشان می‌دهدکه چطور ممکن است مجموعه‌ای از گزاره‌ها ناسازگار باشند. در واقع، در چنین مسأله‌هایی، اگر گزاره‌ای مثل A را درست فرض‌کنیم ، می‌توان دو زنجیرهٔ متفاوت از نتیجه‌گیری‌ها را تشکیل داد، به‌نحوی‌که هردوی‌آن‌ها، به‌گزارهٔ B برسند. اگر در طول یکی از زنجیره‌ها حرکت‌کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که B درست‌است، و اگر در طول زنجیرهٔ دوم حرکت‌کنیم، ثابت می‌شودکه B نادرست است. در حالتی هم‌که گزارهٔ A را نادرست فرض‌کنیم، به‌همین نتیجه‌ها می‌رسیم، یعنی یك‌بار درستی ویك‌بار نادرستی گزارهٔ C به‌دست می‌آید (البته، درحالت کلی ، درستی و نادرستی C، ربطی به‌درستی و نادرستی B ندارد؛ طرح استدلال‌هایی را که در شکل‌های ۲۴۰ تا ۲۴۲ داده شده است ببینید). در چنین موردهایی، می‌گویند، مساله متناقض است.



شکل ۲۴۲

(برایتان جالب خواهد بودکه کتاب را بازکنید، حل مسألهٔ ۱۵۸ را بیاورید و طرح شکل‌های ۲۳۶ و ۲۳۷ را با طرح‌های کلی‌تر شکل‌های ۲۴۰ و ۲۴۱ مقایسه کنید. مسألهٔ ۱۵۸ را می‌توان ، نمونهٔ مشخصی از مسأله‌های متناقض دانست.)

همان طورکه دیدیم، شرطهای ($\text{۷}d$) و (*)، با سرعتی غیرعادی،

منجر به‌تناقض شدند (شکل ۲۴۲). خصلت متمایز این گونه مسأله‌ها در آن است که تناقض، در خود گزارهٔ اولیه است: هم گزارهٔ B و هم گزارهٔ C، بر گزارهٔ A منطبق‌اند.

(جالب است که طرح شکل ۲۴۲ را با راه‌حل دوم مسألهٔ ۱۵۸ مقایسه کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که طرح شکل‌های ۲۳۷ و ۲۳۸، چیزی جز حالت بغرنج‌تری از طرح شکل ۲۴۲ نیستند.)

البته طرح شکل‌های ۲۴۰ تا ۲۴۲، تنها وجود این گونه تناقض را نشان می‌دهد که می‌تواند در مسأله‌های مختلف به‌وجود آید. نوع طرح، در مسأله‌های مشخص، می‌تواند مختلف باشد.

یادداشت ۳. گاهی، مسأله‌هایی را که، ضمن جست و جوی راه‌حل آن‌ها، استدلال‌ها روی یک‌دایرهٔ بسته حرکت می‌کنند (یعنی، یک دور باطل تشکیل می‌دهند)، به‌غلط معما و پارادوکس می‌نامند. در واقع، وقتی که از فرض درستی یک گزاره به‌نتیجهٔ نادرست بودن آن برسیم و، برعکس، با فرض نادرستی آن، درستی گزاره را نتیجه بگیریم، به هیچ‌وجه نباید دچار تعجب بشویم. در این‌جا، با مسأله‌ای سروکار داریم که، از نظر منطقی، متناقض است، یعنی مسأله جواب ندارد.

در همهٔ شاخه‌های ریاضیات، ومنجمله منطق، مسأله‌های بدون جواب وجود دارد و، اغلب، اثبات بی‌جوابی مسأله، به‌کمک کشف تناقض در درون صورت مسأله، انجام می‌گیرد.

معما یا پارادوکس در ریاضیات، به‌مسأله‌های دیگری گفته‌می‌شود که، از نظر اصالت، به‌کلی با مساله‌های متناقض متفاوتند. ولی ما، دراین‌جا، نمی‌توانیم به‌این بحث بسیار جالب بپردازیم.

۱۶۳. راه‌حل ساده‌تر

در گزاره‌های از (۱) تا (۶)، هرکسی یک‌بار صحبت کرده است. بنابراین، با توجه به‌شرط (*)، بین گزاره‌های (۱) تا (۶)، باید سه گزارهٔ درست و سه گزارهٔ نادرست وجود داشته باشد.

دست کم، یکی از گزاره‌های (۱) یا (۲) نادرست‌اند.
دست کم، یکی از گزاره‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند.

بنابراین، بین گزاره‌های (۱) تا (۴)، دست کم، ۲ گزارهٔ نادرست وجود دارد ، در نتیجه ، اگر گزارهٔ (۵) نادرست باشد، گزارهٔ (۶) حتماً درست است (از ۵ گزاره ، تنها ۳ گزاره نادرست است). ولی، اگر گزارهٔ (۵) درست باشد ، آن‌وقت، بین ۵ گزارهٔ اول، بیش از نصف گزاره‌ها، یعنی ۳ گزاره نادرست است، ولی این ۳ گزارهٔ نادرست بین ۴ گزاره اول است و، بنابراین، باید گزارهٔ (۶) درست باشد. یعنی توکا راست گفته است.

در این صورت، با توجه به‌شرط (*) باید شوهر توکا دروغ گفته باشد. درنتیجه، گزارهٔ (۷) درست از آب درمی‌آید: توفان راست گفته است. پس، گزارهٔ (۴) هم درست است: توفان با زمرد ازدواج کرده است.

از این‌جا ، باید نتیجه گرفت که زمرد دروغ گفته است. ولی با کمال تأسف، از نادرست‌بودن گزارهٔ (۳)، هیچ نتیجهٔ دیگری نمی‌توان گرفت. به جز این، روشن است که گزارهٔ (۱) نادرست است. وقتی‌که زمان دروغ گفته باشد، همسر او راست گفته است، ولی بلافاصله نمی‌توانیم نام همسر او را پیدا کنیم. اگر به گزارهٔ (۲) توجه کنیم، به‌طور غیرمستقیم، سریع‌تر به‌نتیجه می‌رسیم.

این گزاره نمی‌تواند درست باشد، زیرا اگر مهرداد راست گفته باشد، همسر او ، که اسم او با حرف دیگری آغاز می‌شود ، فقط توکا می‌تواند باشد (زمرد، همسر توفان است و مژده هم با حرف «م» آغاز می‌شود). ولی توکا باید راست گفته‌باشد، زیرا درغیر این‌صورت، شرط(*) به‌هم می‌خورد.

بنابراین ، گزارهٔ (۲) تنها وقتی می‌تواند نادرست باشد، که مهرداد با مژده و، در نتیجه، زمان با توکا ازدواج کرده باشد.

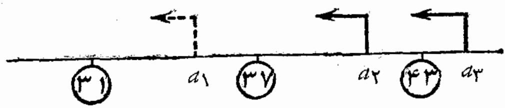
وما می‌دانیم که، این جواب، نه‌تنها از همهٔ شرطهای مسأله استفاده کرده است، بلکه با همهٔ آن‌ها، سازگار هم می‌باشد.

بخش دوازدهم

۱۶۴. سوپرمن و دوستداران او

سعی می‌کنیم، عدد ۴۹۳۲۱ را به‌صورت ضرب سه‌عددطبیعی بنویسیم. با آزمایش معلوم می‌شود که، این عدد، برهیچ‌کدام از عددهای ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳ و ۲۹ بخش‌پذیر نیست، ولی بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

به‌هرحال، با آزمایش، معلوم می‌شود که، عدد ۴۹۳۲۱ را، تنها می‌توان به‌صورت ضرب ۴۳ × ۳۷ × ۳۱ نوشت و، به‌هیچ‌صورت دیگری، به‌ضرب سه‌عامل تجزیه نمی‌شود. بنابراین .N. N هنرپیشه، تنها می‌تواند ۳۱ سال، یا ۳۷ سال ویا ۴۳ سال داشته باشد.



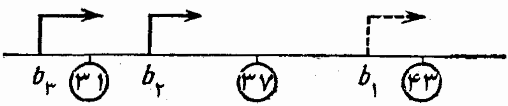
شکل ۲۴۳

۱وی می‌دانست که، هنرپیشه، از پدرش جوان‌تر است (و البته، از سن پدر خود اطلاع دارد)، با وجود این نتوانست سن هنرپیشه‌را پیداکند. سن پدر ۱وی چقدر بوده است که او، نتوانست مشکل خود را حل کند؟

روشن‌است که، پدر ۱وی، حتماً بیش از ۳۱ سال دارد، زیرا دست‌کم، از یکی از سه هنرپیشه (یعنی .N. N) بزرگتر است. ولی، پدر ۱وی، باید از ۳۷ سال هم بیشتر داشته باشد، زیرا اگر از ۳۷ سال‌کمتر داشته باشد [یعنی، سن او برابر a_1 باشد (شکل ۲۴۳)]، آن وقت، ۱وی می‌توانست فوراً متوجه شود که هنرپیشهٔ دلخواه او، .N.N، ۳۱ساله است (بنابراین، سن پدر ۱وی در شکل ۲۴۳، یا برابر a_2 است ویا برابر a_3).

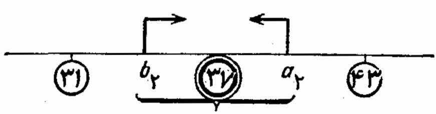
کاتی می‌دانست که برادرش از .N.N جوان‌تر است، با وجود این نتوانست سن هنرپیشهٔ موردنظر خود را پیدا کند.

روشن است که برادرکاتی، کمتر از ۴۳ سال دارد، زیرا دست کم، یکی از سه قهرمان فیلم، از او کوچکتر است. برادرکاتی باید از ۳۷ سال هم کمتر داشته باشد، زیرا اگر بیش از ۳۷ سال داشت (وسن او، متناظر با عدد b_1 روی شکل ۲۴۴ بود)، کاتی می‌توانست سن $N.N.$ را پیدا کند (۴۳سال). بنابراین، سن برادرکاتی روی شکل ۲۴۴، تنها می‌تواند متناظر با یکی از عددهای b_2 و b_3 باشد).



شکل ۲۴۴

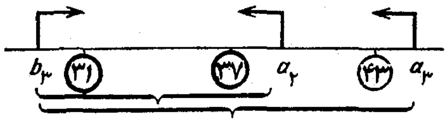
وقتی که اوی و کاتی، آگاهی‌های خود را روی‌هم ریختند (سن پدر اوی را با سن برادر کاتی مقایسه‌کردند) توانستند سن قهرمان اصلی فیلم $(N.N.)$ را پیدا کنند. این امکان، تنها وقتی وجود دارد که، تنها یکی از عددهای ۳۱، ۳۷ و ۴۳، بین عددهای مربوط به‌سن پدر اوی و برادرکاتی قرار گرفته باشد و به‌نوبهٔ خود، این‌وضع، تنها وقتی پیش می‌آید که، سن برادر کاتی، بین ۳۱ و ۳۷ سال و، سن پدر اوی، بیشتر از ۳۷ و کمتر از ۴۳ سال باشد (البته، برادرکاتی می‌تواند ۳۱ سال و پدر اوی می‌تواند ۴۳ سال تمام داشته باشد). ولی، در این صورت، $N.\ N.$، ۳۷ ساله است (شکل ۲۴۵).



شکل ۲۴۵

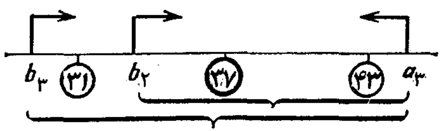
درهیچ‌حالت دیگری، اوی‌وکاتی نمی‌توانستند، بامجموعهٔ آگاهی‌های خود، به نتیجهٔ لازم برسند. در واقع، اگر برادر کاتی کمتر از ۳۱ سال

داشته باشد، چون پدر اوی بیشتر از ۳۷ سال دارد، آن وقت، سن هنرپیشهٔ مورد نظر، یکی از ۲ یا ۳ عدد می‌شود، بسته به‌این که پدر اوی بیشتر یا کمتر از ۴۳ سال داشته باشد (شکل ۲۴۶).



شکل ۲۴۶

به‌همین ترتیب، اگر پدر اوی، بیشتر از ۴۳ سال داشته باشد، چون برادرکاتی از ۳۷ سال کمتر دارد، سن هنرپیشهٔ $N. N.$ ، می‌تواند متناظر با ۲ یا ۳ عدد باشد، بسته به‌این که برادرکاتی، بیشتر از ۳۱ سال یا کمتر از آن داشته باشد (شکل ۲۴۷).



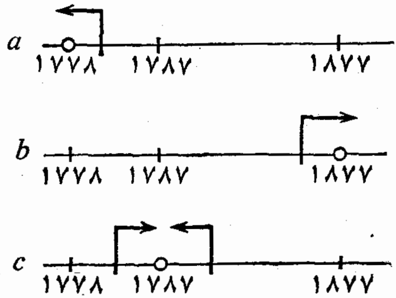
شکل ۲۴۷

۱۶۵. خاطرهٔ گذشته

راه‌حل اول. با این چهار رقم، می‌توان سه‌تاریخ را ـ که به‌گذشته مربوط باشند ـ درآورد: ۱۷۷۸، ۱۷۸۷ و۱۸۷۷. تاریخ‌بنای مهمان‌خانه، تنها یکی از این سه‌سال، می‌تواند باشد.

در جریان بحث، از سه‌تاریخ نام برده شده است که، البته، برای ما معلوم نیست: سالی که $P.R.$، نقاشی منظره راکشیده است؛ ۲) سال بنای کلیسا ؛ ۳) سال مسافرت $X. Y.$ به مجارستان. مهمان‌خانه بعد از دومین تاریخ و قبل از تاریخ‌های اول وسوم ساخته شده است. با تعیین مرزهای

سه تاریخی که، در جریـان بحث، نـام برده شده‌اند ، می‌توان سال بنـای مهمان‌خانه را پیداکرد: برای تاریخ‌های اول و سوم ، مرز یاکران بالا و، برای تاریخ دوم، کران پایین به‌دست می‌آید.



شکل ۲۴۸

باستان شناس و مورخ، به‌کمك همین مرزها، توانستند تـاریخ بنای مهمان‌خانهٔ را پیداکنند. و این، به‌معنای آن است که، یك مرز پـایین ودو مرز بالا ، امکان انتخاب تنها یکی از سه تـاریخ ۱۷۷۸، ۱۷۸۷ و ۱۸۷۷ را به‌دست می‌دهند. اگر دست‌کم یکی از مرزهای بالا در تـاریخی کمتر از سال ۱۷۸۷ باشد، آن وقت، تاریخ بنای مهمان‌خانه ، سال ۱۷۷۸ می‌شود (این شرط، لازم و کافی است) ـ شکل ۲۴۸ ـ a. اگر مرز پایین، درتاریخی بیشتر از سال ۱۷۸۷ باشد، آن وقت، تاریخ بنای مهمان‌خانه برابر ۱۸۷۷ می‌شود (شرط، لازم و کافی است) ـ شکل ۲۴۸ـb. اگر یکی ازمرزهای‌بالا، بین تاریخ‌های ۱۷۸۷ و ۱۸۷۷ ومرز پایین بین سال‌های ۱۷۷۸ و ۱۷۸۷ بـاشد، تـاریخ بنای مهمان‌خانه، برابر ۱۷۸۷ می‌شود (شرط، لازم و کافی است) ـ شکل ۲۴۸ـc.

باستان شناس، تنها وقتی توانست تاریخ بنای مهمان‌خانه را بداندکه گـزارهٔ (۲) داده شده بود. چون، بـا این گزاره، مرز پـایین تـاریخ بنای مهمان‌خـانه را معین می‌کند ، بـاستان شناس نمی‌تـوانست سال ۱۷۷۸ را انتخاب کند.

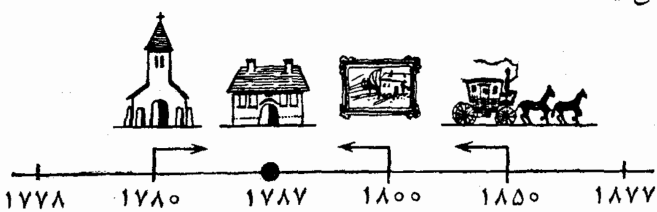
مورخ، تاریخ بنای مهمان‌خانه را، بعد از شنیدن گزارهٔ(۳) پیدا کرد. این گزاره، یکی از مرزهای بالا را معین می‌کند، بنابراین او نمی‌توانست سال ۱۸۷۷ را انتخاب کند.

به‌این‌ترتیب، ازسه تاریخ ممکن، تنها یکی باقی‌می‌ماند: مهمان‌خانه تنها می‌تواند در سال ۱۷۸۷ ساخته شده باشد.

یادداشت . این راه‌حل، به‌اندازه‌کافی کوتاه است، ولی از دیدگاه ریاضی، چندان قانع کننده نیست. در واقع، اگر نتیجهٔ حاصل، یعنی «مهمان‌خانه، تنها می‌تواند در سال ۱۷۸۷ ساخته شده باشد» را با گزارهٔ «بنابراین، مهمان‌خانه، در سال ۱۷۸۷ ساخته شده است» کامل کنیم، آن‌وقت چه‌بسا که، نتیجهٔ جدید، با شرطهای مسأله متناقض باشد، اگرچه قانع شده‌ایم که، این تناقض، به‌هیچ‌وجه حتمی نیست. باید با تحقیق روشن کنیم که، نتیجهٔ نهائی، با «شرطهای» مسأله متناقض نیست.

ولی، این تحقیق را، چگونه باید انجام داد؟ «شرطهای» مسأله، در فکر باستان شناس و مورخ است، و چندان روشن نیستند. با وجود این، می‌توان تحقیق را انجام داد.

درچه موردی، شرطهای مسألهٔ ۱۶۵، متناقض با یکدیگر از آب درمی‌آیند؟



شکل ۲۴۹

در موردی که، در بین شرطها، فرض‌ها، گزاره‌ها و یا آگاهی‌هایی وجود داشته باشد که، از آن‌ها، بتوان نتیجه گرفت که، تاریخ بنای مهمان‌خانه، نمی‌تواند سال ۱۷۸۷ باشد. بنابراین، باید ثابت کرد که، چنین آگاهی‌هایی، در مضمون شرطها وجود ندارد. ساده‌ترین راه، برای این منظور، آن‌است

که، در جست و جوی مثالی باشیم که باهمهٔ شرطهای مسأله سازگارباشد. مثال خود را، به‌این ترتیب، انتخاب می کنیم:

منظره، درسال ۱۸۰۰ نقاشی شده است. باستان‌شناس ازاین موضوع اطلاع دارد، ولی مورخ ازآن بی‌اطلاع است.

کلیسا در سال ۱۷۸۰ ساخته شده‌است. هم باستان‌شناس وهم‌مورخ، از این موضوع آگاهند.

$X.Y.$، در سال ۱۸۵۰ به‌مجارستان سفرکرده است. مورخ از این موضوع اطلاع دارد (شکل ۲۴۹).

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، در این حالت، هم باستان‌شناس و هم مورخ، می‌توانند تاریخ بنای مهمان‌خانه را، به‌همان صورتی که درحل مسأله گفته شده است، پیدا کنند.

اگر ، در واقع امر ، همه‌چیز بـه‌همین گونه پیش آمده بـاشد (البته، روشن‌است که، حالت‌های دیگری هم‌می‌تواند وجود داشته باشد)،آن‌وقت، نه تنها می‌توان تـاریخ بنای مهمان‌خـانه (یعنی سال ۱۷۸۷) را، از این تاریخ‌های فرضی، بلکه ازآگاهی‌های موجود در مسأله هم به‌همـان طریقی که در حل مسأله آمده است، نتیجه گرفت. بنابراین، شرطهای مسأله، بـا تاریخ ۱۷۸۷ (برای بنای مهمان‌خانه)، تناقضی ندارند.

راه‌حل دوم. بعید است که خواننده (به‌خصوص، اگر برای نخستین بار، باچنین‌مسأله‌هایی روبه‌رو می‌شود) بتواند، این راه‌حل ظریف وبی‌عیب را، برای حل مسألهٔ ۱۶۵، طرح کند.

به‌احتمال قوی، خوانندهٔ ما، ابتدا کوشش خواهدکرد ، موقعیت‌هـای زیر را روشن کند:

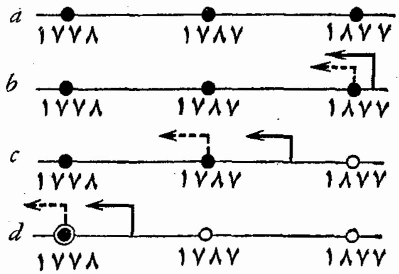
(I) به‌چه مناسبت بـاستان شناس، بـا شنیدن گزارهٔ (۱)، نتوانست تـاریخ بنای مهمان‌خانه را معین کند؟ در این مورد، می‌توان، یکی از سه توضیح را داد.

a) باستان شناس، از تاریخ نقاشی منظره، اطلاع نداشت، بنابراین، هرکدام ازسه تاریخ ـ ۱۷۷۸، ۱۷۸۷ و ۱۸۷۷ـ برای اودارای یك احتمال

می‌شوند (شکل ۲۵۰-a).

باستان‌شناس، از تاریخ نقاشی منظره اطلاع دارد، ولی

b) هنرمند نقاش، کار مربوط به تابلو خود را، بعد از سال ۱۸۷۷ (و یا در همان سال ۱۸۷۷) تمام‌کرده است. در این حالت‌ها، مهمان‌خانهٔ موردنظر، می‌تواند در هریك از سال‌های ۱۷۷۸، یا ۱۷۸۷ و یا ۱۸۷۷ ساخته شده باشد (شکل ۲۵۰-b).



شکل ۲۵۰

به این ترتیب، در حالت b)، چیزی روشن‌تر از حالت a) نیست: از آگاهی موجود، هیچ نتیجه‌ای را نمی‌توان به‌دست‌آورد.

c) تابلو منظره، بعد ازسال ۱۷۸۷ (یااحتمالاً درهمان سال۱۷۸۷)، ولی قبل از سال ۱۸۷۷ نقاشی شده است. در این صورت، تاریخ بنای مهمان‌خانه، می‌تواند یکی‌ازسال‌های ۱۷۷۸ و۱۷۸۷ باشد (شکل۲۵۰-c).

اگر منظره، قبل از سال ۱۷۸۷ (یا خود سال ۱۷۸۷) نقاشی شده باشد، وباستان‌شناس هم‌ازاین‌تاریخ اطلاع داشته‌باشد، آن‌وقت، باستان‌شناس، این امکان را به‌دست می‌آورد که تاریخ بنای مهمان‌خانه را معین‌کند (شکل ۲۵۰-d). بنابراین،تاریخ نقاشی منظره، نمی‌تواند قبل ازسال ۱۷۸۷باشد.

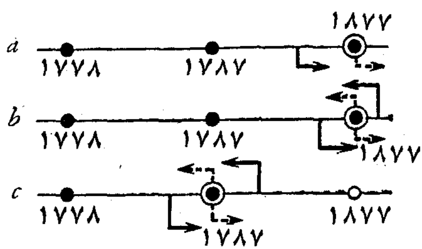
*

به این ترتیب، گزاره‌های (۱) و (I) امکان تعیین تاریخ بنای مهمان‌خانه را، به‌دست نمی‌دهند.

*

(II) باستان‌شناس، به‌چه‌ترتیب توانست، به‌کمك گزاره‌های (۱) و (۲)، تاریخ بنای مهمان‌خانه را پیدا کند؟ برای این منظور، باید از تاریخ بنای کلیسا اطلاع داشته باشد، در غیر این‌صورت، هیچ آگاهی تازه‌ای از گزارهٔ (۲)، عاید او نمی‌شود، ولی در حالت‌های a) و b)، تنها وقتی می‌توان تاریخ بنای مهمان‌خانه‌را، به‌صورت یك‌ارزشی، پیدا کرد که، کلیسا، بعد از سال ۱۷۸۷ و قبل از سال ۱۸۷۷ (یا در همان سال ۱۸۷۷) ساخته شده باشد. در این حالت، مهمان‌خانه، در سال ۱۸۷۷ ساخته شده است (شکل ۲۵۱-a و b). کلیسا، نمی‌تواند بعد از سال ۱۸۷۷ ساخته شده‌باشد. در حالتی هم که کلیسا، قبل از سال ۱۷۸۷ (یا در خود سال ۱۷۸۷) ساخته شده باشد، نمی‌توان تاریخ بنای مهمان‌خانه را، به‌صورت یك‌ارزشی، پیدا کرد: در این‌صورت، تاریخ بنای مهمان‌خانه، می‌تواند در سال ۱۷۷۸ یا در سال ۱۷۸۷ باشد. اگر کلیسا، قبل از سال ۱۷۷۸ ساخته شده باشد، ساختمان مهمان‌خانه می‌تواند در یکی از سال‌های ۱۷۷۸، ۱۷۸۷ و ۱۸۷۷ به‌پایان رسیده باشد.

به‌این‌ترتیب، باستان‌شناس، تنها وقتی می‌تواند تاریخ‌بنای‌مهمان‌خانه را، به‌صورت یك‌ارزشی، معین کند که، تاریخ ساختمان کلیسا، بعد از سال ۱۷۷۸، ولی قبل از سال ۱۷۸۷ (یا خود سال ۱۷۸۷) باشد. تاریخ بنای ساختمان مهمان‌خانه، در سال ۱۷۸۷ بوده است (شکل ۲۵۱-c).



شکل ۲۵۱

هر تاریخ دیگری را که، برای بنای کلیسا، در نظر بگیریم، تاریخ بنای مهمان‌خانه، یا نامعین می‌شود (تعداد تاریخ‌های ممکن، بیشتر از ۱

می‌شود) ویا غیرممکن (تعداد تاریخ‌های ممکن، برابر ۰ می‌شود).

به این ترتیب، با آغاز از گزاره‌های (۱)، (I)، (۲) و (II)، باستان شناس می‌تواند متوجه شود که، مهمان‌خانه، در یکی از سال‌های ۱۷۸۷ یا ۱۸۷۸ ساخته شده است.

*

(III) - (IV)، مورخ هم، به همین ترتیب ممکن است استدلال کرده باشد.

آگاهی‌های حاصل از (۱)، (I)، (۲) و (II)، امکان تعیین تاریخ بنای مهمان‌خانه را به‌او نمی‌داد. روشن می‌کنیم که او، چگونه توانست، در استدلال‌های خود، جلو برود.

a) مورخ توانست، سال ۱۷۷۸ را کنار بزند، زیرا، با وجودی که از هیچ‌یك از تاریخ‌های پیش‌آمدهای گزاره‌های (۱) و (۲) اطلاع نداشت، مثل ما توانست مسیر استدلال‌های باستان‌شناس را پیدا کند.

b) مورخ، اگر می‌دانست که، منظره، قبل از سال ۱۸۷۷ (و بعد از سال ۱۷۸۷) نقاشی شده است، حتی بدون تجزیه وتحلیل مسیراستدلال‌های باستان‌شناس، می‌توانست از سال ۱۸۷۷ صرف‌نظر کند.

c) می‌توان تصور کرد که، مورخ، سال ۱۷۸۷ را هم کنار می‌زند، اگرچه آگاهی‌های مربوط به‌گزاره‌های (۱)، (I)، (۲) و (II)، به‌این امر رأی‌نمی‌دهند: درسندهای تاریخی‌دیده است که، درسال۱۷۸۷، مهمان‌خانه‌ای درمحل موردنظر وجود نداشته است.

d) ممکن است مورخ نتواند هیچ‌کدام از سه‌تاریخ را کنار بگذارد، چراکه ممکن است به‌حرف‌های همکاران خود، توجه‌کافی نکرده باشد. (این فرض، با شرط‌های مسأله، متناقض نیست.)

به‌این ترتیب، در لحظه‌ای از بحث که نقاش، گزارهٔ (۳) را ارائه می‌دهد، مورخ می‌تواند به‌یکی از نتیجه‌های a، b، c و d برسد.

ولی، بعد از آن که گزارهٔ (۳) هم ارائه شد، مورخ توانست تاریخ بنای مهمان‌خانه را پیدا کند. از آن‌جا که گزارهٔ (۳)، مرز بالا را تعیین

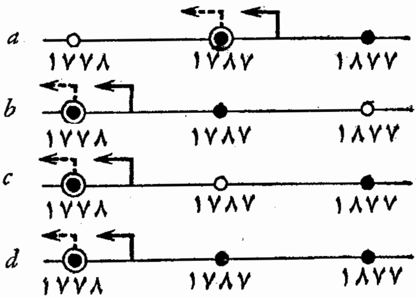
می‌کند، تاریخ بنای مهمان‌خانه، می‌تواند این‌طور معین شود:

در حالت a، فقط سال ۱۷۸۷ (شکل ۲۵۲–a)،

درحالت b فقط سال ۱۷۷۸ (شکل ۲۵۲–b).

درحالت c فقط ۱۷۷۸ (شکل ۲۵۲–c).

درحالت d فقط سال ۱۷۷۸ (شکل ۲۵۲–d).



شکل ۲۵۲

به‌این ترتیب، مورخ به‌این نتیجه می‌رسد که، بنای مهمان‌خانه، یا در سال ۱۷۷۸ و یا درسال ۱۷۸۷ اتفاق افتاده است.

*

بنابراین، مسألهٔ ۱۶۵ را می‌توان «در بخش‌های جداگانه» مورد رسیدگی قرارداد، ازبررسی این« بخش‌ها» دیده می‌شود که اگر تنها به‌استدلال باستان شناس یا تنها به‌استدلال مورخ تکیه کنیم ، نمی‌توانیم تاریخ بنای مهمان‌خانه را به‌دست‌آوریم. درهردوحالت، محدودهٔ جست‌وجوها، تنگ‌تر می‌شود، ولی ۲ امکان برای تاریخ بنای مهمان‌خانه باقی می‌ماند : برای باستان‌شناس، سال‌های ۱۷۸۷ و ۱۸۷۷، و برای مورخ سال‌های ۱۷۷۸ و و ۱۷۸۷. اکنون، اگر دوبخش حل را، باهم درنظر بگیریم، جواب مسأله به‌طور کامل، به‌دست‌می‌آید زیرا، در دوحالت، تنها یک‌تاریخ مشترک وجود دارد: سال ۱۷۸۷.

ابتدا ببینیم چه آگاهی‌های مستقیمی، می‌توان از گزاره‌های (۱)، تا (۶) به‌دست آورد.

از گزاره‌های (۱) و (۶) نتیجه می‌شود که، شناگران A، F و H، تنها می‌توانند به‌ردیف زیر، قرار گرفته باشند (آن‌که در سمت چپ نوشته شده، زودتر به‌خط پایان مسابقه رسیده است):

$$A, \quad H, \quad F$$

بین آن‌ها، شناگران دیگری هم، می‌توانند قرارداشته باشند. به‌همین مناسبت، بین نام شناگران، فاصله گذاشته‌ایم.

بنابرگزارهٔ (۲)، شناگر B قبل از A به‌خط پایان رسیده است، وشناگر C در جایی بعد از B قرار دارد (شکل ۲۵۳-a).

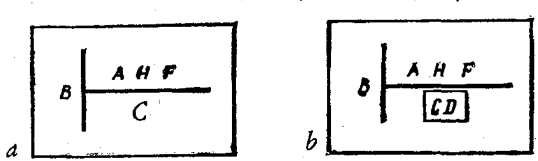
خط افقی در روی شکل، به‌این معناست که نمی‌دانیم که، ورزشکار C از ورزشکاران A، H و F جلو زده است یا از همهٔ آن‌ها عقب مانده است و، در صورت جلوزدن، ازکدام ورزشکار یا ورزشکاران!

گزارهٔ (۴) امکان می‌دهد تا شکل قبلی را کمی گسترش دهیم. (شکل ۲۵۳-b). مستطیلی که دور C و D قرار داده‌ایم، به‌این معناست که:

D درست بعد از C به‌خط پایان رسیده است. (I)

از گزارهٔ (۵) هم، بلافاصله نتیجه می‌شود:

G و E: مقام‌هایی با ردیف (G, E) به‌دست آورده‌اند. (II)



شکل ۲۵۳

هنوز نمی‌توانیم جای G و E را، روی طرح ۲۵۳ - b پیدا کنیم. به‌این ترتیب، آگاهی‌هایی که می‌توان از مضمون گزاره‌های (۱) تا (۶) بیرون کشید، به‌همین‌جا پایان می‌پذیرد.

آیا آگاهی‌های دیگری دراختیارداریم؟ ضمن مصاحبهٔ X باورزشکاران یادآوری شده است که او ، علاوه‌بر گـزاره‌های (۱) تا (۶) ، چه چیزی را دربارهٔ نتیجهٔ مسابقه می‌دانست و چه‌چیزی را نمی‌دانست. این آگاهی‌ها را می‌توان ازگزاره‌های (*) و (**) پیدا کرد و همچنین از همهٔ نتیجه‌هـای حاصل ازگزاره‌های (۱) تا (۶) استفاده‌کرد (***).

در صورت مسأله، گفته شده است‌که X ، نام دو نفر اول و دو نفر آخر را می‌دانست. بنابراین، او ورزشکاران ردیف‌های «وسط» را هم که از مقام سوم تا مقام ششم قـرار داشتند، می‌شناخت. به‌این ترتیب، می‌تـوان همهٔ ورزشکاران را به‌سه گروه تقسیم کرد: «گـروه اول»، «گروه وسط» و «گروه آخر». از شرط (*) می‌توان فهمید که:

B و A در دوگروه مختلف قرار دارند؛ ضمناً B درگروه جلوتر و A درگروه عقب‌تر است.

B و C در مقام‌های «مجاور» و در یك‌گروه قرار دارند.

از طرف دیگر، X از قبل نمی‌دانست که B و C، نسبت به‌هـم، در چه ردیفی قرار دارند: برای این منظور به‌این آگاهی نیاز داشت که، B از C جلو افتاده است.

این وضع، تنها به‌یکی از دوصورت می‌تواند پیش آید:

یا B و C دومقام اول و دوم را اشغال‌کرده‌اند و A در«گروه وسط» قرار دارد.

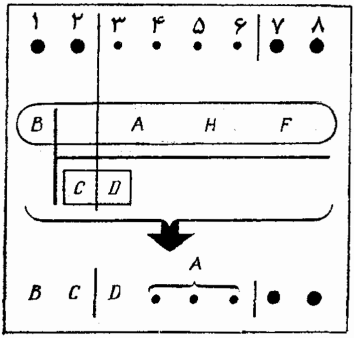
و یا B و C، دو مقـام از ردیف‌هـای «وسط» را به‌خـود اختصاص داده‌اند، و A یکی از دونفر آخر است.

حالت دوم، نمی‌توانست پیش‌آید، زیرا شناگر A، دست‌کم از دونفر H و F جلو افتاده است. بنابراین، دو مقـام اول را، B و C گرفته‌انـد: B به‌مقام اول و C به‌مقام دوم رسیده است. از آن‌جـا که D، بلافاصله بعد از C به‌خط پایان مسابقه رسیـده است، بنابراین C مقام سوم را کسب کرده است (شکل ۲۵۴).

دربارهٔ بقیهٔ ورزشکاران، فعلاً تنها این را می‌دانیم که ردیف‌هـایی به‌صورت زیر دارند:

$$\frac{A \quad H \quad F}{G \quad E}$$

و ورزشکار A به «گروه‌متوسط» تعلق دارد. (اکنون روشن می‌شودکه A، در ردیف چهارم، پنجم و یا ششم قرار دارد.)



شکل ۲۵۴

خبرنگار ورزشی X، آگاهی‌های تازه را ازگزارهٔ (**) به‌دست‌آورد وقتی‌که E اعلام کردکه از G عقب مانده است. از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که ورزشکاران E و G

(I) یا در گروه وسط قرار دارند،

(II) و یا جزو دو نفر آخرند.

در واقع، اگر آن‌ها، به‌دوگروه مختلف تعلق داشتند، آن‌وقت X، از ابتدا می‌دانست که به‌چه ردیفی قرارگرفته‌اند.

براساس شرطهایی‌که در صورت مسأله آمده است، ما نتوانستیم مقام هریك از شرکت کنندگان در مسابقه را تعیین کنیم، ولی خبرنگار ورزشی، توانست. برتری او برما این بودکه، از حرف‌های دیگران، شنیده بود چه کسانی دومقام آخر را احراز کرده‌اند.

X، چه نام‌هایی را ممکن است شنیده باشد؟

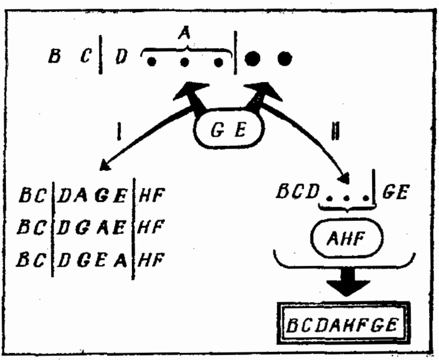
(I) اگر ورزشکاران G و E در «گروه متوسط» باشند، همراه با D و A، ردیف‌های سوم تا ششم را اشغال می‌کنند و در نتیجه، دو مقام آخر،

تنها می‌تواند متعلق به H و F باشد. بنابراین، در این حالت خبرنگار X شنیده است که H و F از همهٔ دیگر شرکت‌کنندگان در مسابقهٔ شنا، عقب مانده‌اند.

اکنون، ماهم ازهمهٔ آن‌چه X می‌داندآگاهیم، زیرا X جسته گریخته شنیده بود چه‌کسانی در ردیف‌های اول و دوم قرار دارند و ماهم آن‌ها را با استدلال منطقی پیدا کرده‌ایم.

ولی دربارهٔ ردیف مقام‌های A، G و E در «مصاحبه» حرفی نزده‌اند و، بنابراین، هم ما و هم X، ناچاریم سه حالت مختلف را در نظر بگیریم (شکل ۲۵۵)، ضمناً، نه ما ونه X نمی‌دانیم کدام‌یك از این سه حالت، با واقعیت تطبیق می‌کند. ولی، نباید چنین وضعی پیش آید، زیرا در صورت مساله گفته شده‌است که، X توانست ردیف مقام‌های شرکت‌کننده درمسابقه را پیدا کند. بنابراین، باید از فرضی که نمی‌تواند ما را به‌جایی برساند، صرف‌نظر کنیم؛ یعنی فرض را براین قرار دهیم که

II) X، چیز دیگری شنیده است: دو مقام آخر را G و E گرفته‌اند به‌این ترتیب، H و F (همراه با A) به «گروه متوسط» می‌روند و، ازقبل می‌دانیم به‌چه ردیفی به‌خط پایان مسابقه رسیده‌اند (شکل ۲۵۵).



شکل ۲۵۵

چون، در این حالت، X توانست به‌صورت یك ارزشی ردیف مقام‌ها

را پیدا کند (و به‌جز حالت‌های I و II، حالت دیگری وجود ندارد)، بنابراین، هشت شرکت‌کننده در مسابقه، به‌ردیف زیر، به‌خط پایان مسابقه رسیده‌اند: B اول، C دوم، D سوم، A چهارم، H پنجم، F ششم، Gهفتم و E هشتم شده است.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، این جواب با تمام شرطهای مساله سازگار است.

یادداشت. تفسیر دلخواه از گزاره‌ها و استفاده از آن برای‌حل مساله ممکن است ما را به‌اشتباه بیندازد. مثلاً، بیان گزارهٔ (۶)، ممکن است سرچشمهٔ یک اشتباه بشود. از این مطلب که H قوی‌تر از F است و، بنابراین، زودتر از F به‌خط پایان مسابقه رسیده است، به‌هیچ‌وجه نباید به‌این نتیجه رسید که، گویا، F بلافاصله بعد از H به‌پایان خط رسیده است. کاملاً امکان دارد که F، بعد از تلاشی بی‌ثمر، نه‌تنها از H، بلکه از شناگران دیگری هم عقب افتاده باشد. این‌که F، بلافاصله بعد از H قرار گرفته است، نیاز به‌اثبات دارد و ماهم، ضمن حل مساله، ثابت کردیم که، در واقع، F بلافاصله بعد از H به‌خط پایان مسابقه رسیده است، ولی این نتیجه را نمی‌توان از گزارهٔ (۶)، مستقیماً، به‌دست آورد.

۱۶۷. المپیاد منطق در تلویزیون (مرحلهٔ مقدماتی)

برنده، می‌تواند به‌این ترتیب، استدلال کرده باشد:

«فقط یک جفت گوشوارهٔ قرمز وجود دارد، بنابراین، اگر آن‌ها به‌گوش من بود، بقیهٔ شرکت‌کنندگان متوجه می‌شدند که گوشوارهٔ آن‌ها، به‌رنگ سفید است و، بلافاصله، این مطلب را اعلام می‌کردند. ولی، هیچ‌کدام از آن‌ها، کلمه‌ای حرف نزد. یعنی گوشواره‌های من قرمز نیستند و تنها می‌توانند سفید باشند.»

یادداشت. اگر بخواهیم دقیق باشیم، این راه حل کاملاً بی‌عیب نیست و نوعی ابهام در آن وجود دارد: هیچ صحبتی از این مطلب نشده است که، برنده به‌چه زمانی برای بیان استدلال خود نیاز دارد.

البته، این‌ابهام، چندان مهم نیست، زیرا اگر یکی ازشرکت‌کنندگان در المپیاد، با نگاه‌کردن به‌دیگران، گوشواره‌های قرمز را به‌گوش دیگری می‌دید، بدون هیچ زحمتی می‌فهمید که، گوشواره‌های خود او، سفید است با وجود این، در مساله‌های دشوارتر بعدی حتی چنین «ابهام‌های» ناچیزی ممکن است، منجر به‌وضع «ناگواری» بشود. به‌همین مناسبت، همهٔ مساله‌های بعدی را، طوری تنظیم کرده‌ایم‌که، چنین ابهامی درآن‌ها وجود نداشته باشد.

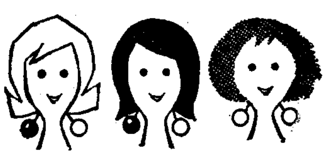
۱۶۸. المپیاد منطق در تلویزیون (*II*)

(مرحلهٔ نیمه نهائی)

همهٔ شرکت‌کنندگان دراین مرحله، ۲گوشوارهٔ سفید به‌گوش داشته‌اند.

(*I*) هیچ‌کدام ازشرکت‌کنندگان نتوانستند، رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کنند. این‌وضع نمی‌تواند درحالتی پیش آیدکه یکی ازشرکت‌کنندگان ۲ گوشواره قرمز را به‌گوش خود داشته باشد (زیرا، اگر چنین بود، سه شرکت کنندهٔ دیگر، بلافاصله تشخیص می‌دادند که گوشواره‌های آن‌ها، سفید است). بنابراین، هیچ یك از شرکت کنندگان، ۲ گوشوارهٔ قرمز به‌گوش

شکل ۲۵۶

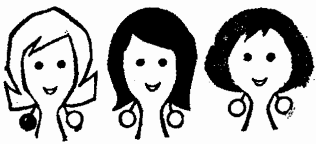


شکل ۲۵۷

خود ندارند (درغیر این صورت، هریك از سه شرکت‌کنندهٔ دیگر، چیزی را می‌دیدند که در شکل ۲۵۶ نشان داده شده است)، همچنین، در بین شرکت‌کنندگان، نمی‌تواند ۲ دختر وجود داشته باشد که، هرکدام از آن‌ها، یك گوشوارهٔ قرمز و یك گوشوارهٔ سفید به‌گوش‌های خود کرده باشند (درغیر این صورت، هرکدام از دو شرکت‌کنندهٔ دیگر، با طرحی شبیه شکل ۲۵۷

مواجه می‌شوند). به‌این ترتیب تنها یك حالت ممکن است وجود داشته باشد: فقط یکی از شرکت‌کنندگان به‌یکی از گوش‌های خود، ۱ گوشواره قرمز آویزان کرده باشد.

(*II*) وقتی که پیش‌پرده در تلویزیون اجرا می‌شد، شرکت‌کنندگان در مسابقه به‌اندازهٔ کافی فرصت فکر کردن داشتند. مسیر استدلال آن‌ها منجر به‌این نتیجه می‌شود:



شکل ۲۵۸

اگر شرکت‌کننده‌ای یك گوشوارهٔ قرمز به‌گوش شرکت‌کنندهٔ دیگری می‌دید، بلافاصله اعلام می‌کرد که گوشواره‌های خود او، سفید است. بنابراین، اگر یکی از شرکت‌کنندگان (و همراه با او، ۲ شرکت‌کنندهٔ دیگر) حالتی شبیه شکل ۲۵۸ را می‌دید، بلافاصله بعد از پایان مهلت قانونی، اعلام می‌کرد که، گوشواره‌های او، سفید است.

(*III*) می‌دانیم، کسی رنگ گوشواره‌های خود را اعلام نکرد. از این حقیقت که، همهٔ شرکت‌کنندگان، بعد از آن‌که به‌اندازهٔ کافی فکر کردند نتوانستند رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کنند، می‌توان نتیجه گرفت: هیچ‌کدام از ۴ نفر شرکت‌کنندهٔ در المپیاد منطق، گوشوارهٔ قرمز به‌گوش خود ندارند. و، بنابراین هرکسی می‌توانست تردیدکند که، ممکن است، یکی از گوشواره‌های خود او قرمز باشد. به‌زبان دیگر، هرکسی در این تردید بود که: آیا هردو گوشواره او سفید است، یا یکی سفید و دیگری قرمز.

و درست همین آگاهی جدید (که آگاهی‌های قبلی، امکان تعیین رنگ گوشواره‌های خود را به‌دست نمی‌دهد)، برای پیدا کردن نتیجه کافی بود: «در گوش‌های من، دو گوشواره سفید آویزان شده است». وقتی‌که، مجری برنامه علامت‌های سئوال قبلی را پاك کرد، یکی از دخترها زودتر ازدیگران

به‌این نتیجه رسید و برنده شد.

یادداشت ۱. هرشرکت‌کننده، به‌اندازهٔ کافی وقت اندیشیدن داشت تا بتواند گام بعدی را بردارد و به‌تقریب، به‌ایـن ترتیب استدلال کند: «اگر یکی ازشرکت‌کننده‌ها، گوشوارهٔ قرمز به‌گوش داشت، هرشرکت‌کنندهٔ دیگر بلافاصله، متوجه می‌شد کـه گوشواره‌های خـودش، سفید است. بنابراین، وقتی کـه هیچ‌کس، پاسخ مسالـه را نمی‌دهد، باید به‌این معنا باشد کـه، گوشواره‌هـای من، سفیدند». درست بـه‌همین علت است کـه بنابـرتصمیم اداره‌کنندگان، بایستی همهٔ شرکت‌کنندگان، هرآگاهی را، به‌طور هم‌زمان، به‌دست‌آورند: اگرکسی زودتر ازدیگران متوجه می‌شدکه، بقیه نمی‌توانند رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کنند، آن‌وقت، این امکان را پیدا مـی‌کرد که قبل از دیگران به‌پایان استدلال‌های خود برسد و رنگ گوشواره‌هـای خود را پیدا کند (بخش III را در شرطهای مساله ببینید). در این‌صورت، شرکت‌کنندگان در المپیاد، نه‌تنها در شرایط نابرابر قرار می‌گرفتند، بلکه ما هم نمی‌توانستیم به‌نتیجه‌گیری خود برسیم. دراین حالت، نمی‌شد فهمید که برندهٔ مرحلهٔ نیمه نهائی، به‌چه ترتیب، توانسته است جواب مسالـه را پیدا کند: با دیدن یك گوشوارهٔ قرمز درگوش یکی از رقیب‌ها، یا از ایـن طریق‌که دیگران نتوانسته‌اند جواب مساله را معین‌کنند؟

علاوه براین، رشتهٔ استدلال‌ها، نه‌تنها از دست‌گردانندگان، بلکه از دست‌شرکت‌کنندگان درمسابقه‌هم، بیرون‌می‌رود: هیچ‌کس‌نمی‌تواند اطمینان داشته باشدکه، آیا دیگری، ازآگاهی اضافی استفاده‌کرده است یانه! و به‌این ترتیب، نه‌تنها مسأله، بلکه خود المپیاد هم دچار آشفتگی می‌شود.

به‌این ترتیب، برای فاصله‌های مربوط به‌فکرکردن، این مطلب مهم است‌که، آگاهی‌ها، در فاصله‌های زمانی مشخص، مرتب شده باشند.

یادداشت ۲. این قانون که، اگر کسی راه حل مساله را پیـدا کند، ولی داوران را از راه‌حل خود آگاه نسازد، از دور مسابقه خارج می‌شود، قانونی عادلانه و، درعین حال، مهم است. قانون مذکور، ضامن این‌حقیقت است‌که، هروقت علامت سئوال روی یکی از اطاقك‌ها ظاهرشد، تنها به‌این

معنی است که شرکت‌کنندهٔ داخل آن، نمی‌تواند براساس فرض‌های موجود، رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کند. بدون این قانون، ممکن است شرکت‌کننده‌ای، تنها از نظر تاکتیکی، شستی علامت سئوال را فشار دهد: مثلاً، به‌این خاطر که رقیب‌های خود را گمراه کند و نتیجه‌ای را که به‌دست آورده است پنهان نگاه دارد. (کسی که، با چنین روش غیرشرافتمندانه، در صدد گمراه‌کردن دوستان خود برآید، بیش ازهمه، به‌خودش صدمه می‌زند، زیرا از دور مسابقه اخراج می‌شود.)

در واقع، با توجه به‌این قانون، آن بخش از صورت مساله که، در آن گفته می‌شود «هرشرکت‌کننده‌ای از هر فرض موجود، تمام نتیجه‌های ممکن را به‌دست می‌آورد»، زیادی خواهد بود. در واقع، اگر آن‌ها، استعداد تجزیه و تحلیل همهٔ داده‌ها و نتیجه‌های حاصل از آن‌ها را نداشته باشند، ازجریان مسابقه خارج می‌شوند و هیأت داوران، المپیاد را قطع می‌کند. وجود این قانون، ما را در حل مسأله از تکرار این شرط اضافی معاف می‌کند که: «چون شرکت‌کنندهٔ المپیاد، قدرت کافی برای تجزیه‌وتحلیل منطقی نداشت، هیأت داوران اجازهٔ ورود به‌مرحله نهائی را به او نداد، و یا، چون درست استدلال کرد، بنابراین...».

یادداشت ۳. برای حل مساله، لزومی ندارد که، در هر گروه، ۴ نفر شرکت کرده باشند. اگر ۳ نفرهم در مرحلهٔ نیمه نهائی شرکت کرده باشند، همهٔ استدلال‌های قبلی به‌قوت‌خود باقی می‌ماند (تنها به‌جای هشت گوشواره باید از شش گوشواره استفاده کرد).

۱۶۹. حرف‌های «اضافی»

قطعه‌ای که با علامت (*) مشخص شده است، به دلیل‌های زیر لازم است.

۱. از اساسی‌ترین دلیل آغاز می‌کنیم.

در تلاش (II)، هریك از دخترخانم‌ها، به‌این نتیجه رسیدند که، بین

همهٔ گوشواره‌های خارج شده از جعبه ، تنها یك گوشوارهٔ قرمز می‌تواند وجود داشته باشد.

اگر شرکت‌کننده‌ای، رنگ گوشواره‌های خود را، با تعداد بیشتری تلاش و آزمایش به‌دست آورد ، شکست می‌خورد . وقتی که یکی از شرکت‌کنندگان می‌بیند که گوشواره‌های هرسه نفر دیگر سفید است، پیش خود این طور استدلال می‌کند: «الف) یا هردو گوشوارهٔ من سفید است و ب) یا یکی از آن‌ها سفید و دیگری قرمز است. فعلاً نمی‌توانم ، رنگ گوشواره‌های خود را، دقیق‌تر معین کنم، بنابراین بهتر است شستی علامت سئوال را فشار دهم.

در واقع، اگر گوشواره‌های من، یکی سفید و دیگری قرمز باشد [حالت‌ب)]، بقیهٔ‌شرکت‌کنندگان، گوشوارهٔ قرمزمرا می‌بینند و ۲ شستی‌سفید را فشار می‌دهند و (اگر «هیچ» شرطی در المپیاد وجود نداشته باشد) برنده می‌شوند ومن، به‌خاطر این‌که شستی علامت سئوال رافشار داده‌ام، شکست می‌خورم. تنها وقتی شکست نمی‌خورم که آن‌ها هم شستی علامت سئوال را فشار دهند و، این موقعیت تنها وقتی پیش می‌آید که در گوش‌های من، گوشواره‌های سفید را دیده باشند. بنابراین، بهتر است ۲ شستی سفید را فشار دهم. اگر در گوش من، دو گوشواره با رنگ‌های مختلف وجود داشته باشد، مثل حالتی که شستی علامت سئوال را فشاردهم، خواهم باخت. ولی اگر دو گوشواره سفید داشته باشم ـ حالت (a) ـ با فشار دادن ۲ شستی سفید برنده می‌شوم. فشار دادن به‌شستی علامت سئوال، عاقلانه نیست.»

در واقع ، بدون قطعه‌ای که با علامت (*) مشخص شده است ، شرط‌های مساله متناقض می‌شوند: لزوم آزمایش III، با توانایی تجزیه و تحلیل شرکت‌کنندگان، یکدیگر را نقض می‌کنند. اگر آن‌ها در واقع قدرت تجزیه وتحلیل دقیق را داشته باشند، آن‌وقت همان‌طورکه در استدلال فوق (در داخل گیومه) دیدیم، به‌آزمایش III نیازی پیدا نمی‌کنند. (درست است که چنین تاکتیك‌هایی، همیشه ثمربخش نیست، ولی به‌هرحال امکان وجود آن‌ها، زیبائی مساله را از بین می‌برد.)

وجـود قطعهٔ (*)، شرط زیر را کـه برای المپیادهای منطق اهمیت خاصی دارد، تأمین می‌کند: هـر شرکت‌کنندهٔ المپیاد، تنها وقتی حـق دارد رنگ گوشواره‌های خود را اعلام کند که توانسته باشد آن را، به‌صـورت یك ارزشی، از داده‌های مسأله نتیجه بگیرد. در همهٔ موردهای دیگر، باید شستی علامت سئوال را بفشارد.

۲ . یـادآوری (*) ، به‌علت دیگری هم مفید است که ما، در مسألهٔ زیر، دربارهٔ آن صحبت می‌کنیم.

۱۷۰. یك پیش‌آمد کوچك

ژوژا می‌تـوانست، به‌محض شنیدن فرض اصلی مساله، ۲ دکمهٔ سفید را فشار دهد واعلام کندکه ۲ گوشوارهٔ او سفیدند.

ژوژا ، می‌تواند به این ترتیب، استدلال کند: «اگر پـاسخ من درست بـاشد، المپیاد را برده‌ام . اگـر هم پـاسخ من نـادرست بـاشد، آن‌وقت، شرکت‌کنندگان،درشرایط برابرنیستند و، مجری برنامه، رنگ گوشواره‌های افراد را، یکسان انتخاب نکرده است». (با حل مسالهٔ قبل، قانع شدیم که، اگر یکی از شرکت‌کنندگان ، گوشوارهٔ قرمز را به‌گوش دیگری می‌دید، با سادگی بیشتری می‌توانست رنگ گوشواره‌های خود را پیداکند)؛ بنابراین، بـا تـوجه به‌توضیح نمایندهٔ هیأت داوران، بـاید در هرحـال ژوژا را برنده اعلام کنند.

یادداشت . ممکن است تصور شود کـه، بـا استفاده از «لزوم چنین تقارنی» بتوان‌راه‌حل مسأله‌های ۱۶۷ و۱۶۸ راکوتاه‌ترکرد: هرشرکت‌کننده بلافاصله می‌فهمیدکه، همهٔ گوشواره‌ها، باید از یك رنگ باشند، زیرا درغیر این‌صورت، شرکت‌کننده‌ها، در شرایط برابر قرار نمی‌گیرند.

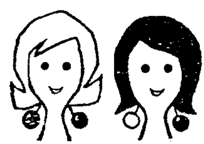
ولی، باآن‌که در بسیاری ازموردها می‌توان از تقارن جبری استفاده کرد ، در این‌جا ، کاربردی ندارد. در واقع، طبق قـانون حـاکم برالمپیاد، هیات داوری حق دارد، به افراد مختلف، امکان‌هـای متفاوتی بدهد، یعنی یك‌نفر بتواند، بعدازچند مرحله، پاسخ خودرا ارائه‌دهد، درحالی که دیگران

امکان استفاده از مرحله‌هـای کمتری را دارند؛ در این گونه موردهـا، همهٔ شرکت‌کنندگان را به‌طور هم‌زمان وارد در ماجرا نمی‌کنند، ضمناً آن‌هایی که دیرتر وارد می‌شوند، تـا لحظهٔ لازم، از نتیجه پـاسخ‌هـای قبلی‌هـا اطلاع پیدا نمی‌کنند. قانون (*)، امکان انتخاب برنده را به‌دست می‌دهد وانتخاب بهترین کسی که از عهدهٔ تجزیه وتحلیل منطقی برمی‌آید، ممکن می‌سازد.

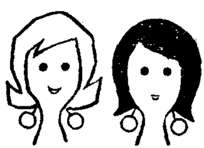
۱۷۱. المپیاد منطق در تلویزیون (*III*)
(مرحلهٔ نهائی)

همهٔ دخترها،گوشواره‌هایی با رنگ‌های متفاوت (یکی سفید ودیگری قرمز) به‌گوش داشتند.

(*I*) این‌که در آزمـایش اول، هیچ‌کدام از دختران نتوانستند رنگ گوشواره‌های خود را تشخیص دهند، به‌این معناست که هیچ‌یك ازآن‌ها، دو گوشوارهٔ سفید یا دو گوشوارهٔ قرمز، به‌گوش‌هـای دیگری ندیده‌اند. حتی یکی ازشرکت‌کنندگان، آن‌چه راکه در شکل‌های ۲۵۹ و ۲۶۰ نشان داده شده است، ندیده‌اند.



شکل ۲۵۹



شکل ۲۶۰

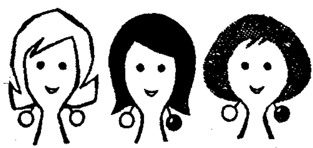
در حالت اول (شکل ۲۵۹)، بیننده متوجه می‌شدکه گوشواره‌های او سفید، ودرحالت دوم(شکل ۲۶۰) قرمزاست و،بنابراین، رنگ گوشواره‌های خود را اعلام می‌کرد.

ولی وقتی‌که، هرشرکت‌کننده ، متوجه می‌شودکه، بین گوشواره‌های باقی‌مانده،ازهردورنگ سفیدوقرمز وجوددارد؛نمی‌تواند رنگ گوشواره‌های خود را معین کند: گوشواره‌های او ممکن است یك‌رنگ و یا بارنگ‌هـای

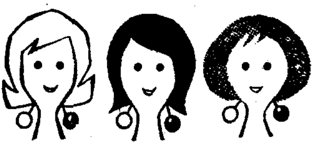
متفاوت باشند.

(II) به‌این ترتیب، بعد از آزمایش اول ، هم برای ما و هم برای شرکت‌کنندهٔ در المپیاد روشن است که: گوشواره‌ها طوری بین سه‌نفر تقسیم شده است که، هیچ شرکت‌کننده‌ای، نمی‌تواند طرحی راکه در شکل ۲۵۹ یا شکل ۲۶۰ نشان داده شده است، ببیند. گوشواره‌ها، به‌چه ترتیب، بین دخترها تقسیم شده است؟

دست‌کم، دو دختر ، حتماً گوشوارهٔ قرمز باید داشته باشند، زیرا در غیر این صورت، یکی از دخترها می‌توانست آن‌چه راکه درشکل ۲۶۰ داده شده است، ببیند. ولی هیچ‌کدام ازآن‌ها، نمی‌تواند دوگوشوارهٔ قرمز داشته باشد، زیرا، اگر دو گوشوارهٔ قرمز به‌گوش یکی از دخترها باشد،آن‌وقت، این دختر با دختری‌که یك‌گوشوارهٔ قرمز دارد، زوجی را تشکیل می‌دهند که درشکل ۲۵۹ نشان داده شده است (هم‌اکنون گفتیم که، دست‌کم ۲دختر باید گوشوارهٔ قرمز داشته باشند). بنابراین ، یا ۲ دختر و یا هر ۳ دختر، باید گوشواره‌هایی با رنگ‌های مختلف داشته باشند.



شکل ۲۶۱



شکل ۲۶۲

به‌این‌ترتیب، گوشواره‌های‌قرمز، به‌یکی ازدوترتیب زیر، می‌توانند تقسیم شده باشند که، یکی ازآن‌ها، در شکل ۲۶۱ و، دیگری، در شکل ۲۶۲ نشان داده شده است . همهٔ شرکت‌کنندگان می‌توانند، در جریان وقتی‌که ضمن آزمایش دوم به آن‌ها داده شده است، روی این موضوع‌ها فکرکنند. وقتی‌که، مجری برنامه، ازآن‌ها خواست تا شستی موردنظر خود را فشاردهند، هرکدام ازآن‌ها، می‌دانستندکه، تنها یکی ازدوحالت می‌تواند وجود داشته‌باشد. ولی، اگر گوشواره‌ها، طبق شکل ۲۶۱ تقسیم شده‌بود، هرکدام از دخترهایی‌که گوشواره‌های متفاوت دارند، یك‌شستی سفید و یك

شستی قرمز را فشار می‌دادند، زیرا وقتی که دو گوشوارهٔ سفید را به گوش یکی ازرقیبان می‌دیدند، مطمئن می‌شدندکه، طرح شکل ۲۶۲، وجود ندارد.

(III) ولی این حادثه پیش نیامد و، درجریان آزمایش دوم، هیچ کدام نتوانستند رنگ گوشواره‌های خود را پیداکنند. بنابراین، هیچ کس در گوش دیگری ۲ گوشوارهٔ سفید ندیده است، و گوشواره‌ها، طبق طرح شکل ۲۶۲ تقسیم شده‌اند.

۱۷۲. دربارهٔ مرده‌ها صحبت کنیم

همهٔ شرکت‌کنندگان، کلاه سفید به‌سر داشته‌اند.

مسیر راه‌حل، کاملاً شبیه راه‌حل مسألهٔ ۱۶۸ است، به‌همین‌مناسبت، حل آن را به عهدهٔ خواننده می گذاریم. این مسأله را، به این مناسبت در کتاب گذاشته‌ایم که، به‌مسأله‌ای ازاین نوع نیازداشتیم و، ضمناً، نتوانستیم مسأله‌ای را پیداکنیم که با این مسألهٔ سنتی، به‌کلی متفاوت باشد.

یادداشت. اغلب این مسأله را، بدون در نظر گرفتن وقتی‌که برای هرشرکت کننده منظور می‌شود، طرح می‌کنند. معمولاً، آن‌را به‌این صورت تنظیم می‌کنند: «سه نفر، هرکدام کلاهی به‌سر دارند و از آن‌ها، دربارهٔ رنگ کلاه خودشان سئوال می‌شود. آن‌ها به کلاه‌های یکدیگر نگاه می‌کنند و، بعد، یکی ازآن‌ها (یا هرسه باهم) می‌گوید: «کلاه من سفید است». به‌چه ترتیب متوجهٔ رنگ کلاه خود شده است؟»

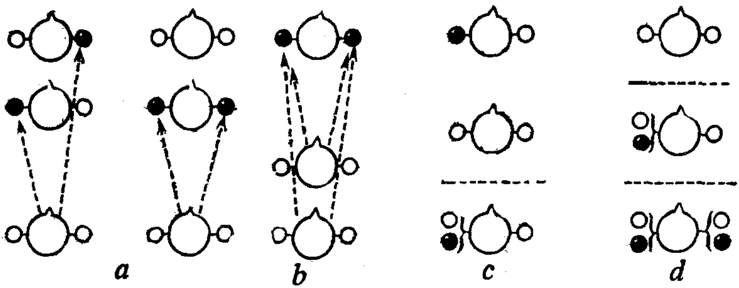
در این گونه طرح مسأله، که کاملاً کوتاه شده است، برای راه‌حل گفته می‌شود: «... باید قاعدتاً بقیه حدس می‌زدند، ولی چون‌آن‌ها سکوت کردند، بنابراین . . .» . در این‌جا، فرض براین گرفته شده است‌که، همه یک‌جور فکر می‌کنند و با یک سرعت به نتیجه می‌رسند . ولی این فرض، به‌خودی خود، قابل بحث است، زیرا اگر آن‌را درست بگیریم، درحالتی‌که هرسه کلاه سفید باشند، هیچ کدام نمی‌توانند رنگ کلاه خود را پیدا کنند.

a) دختری‌که در اطاقك عقب نشسته است، در همهٔ حالت‌هایی‌که تمامی گوشواره‌های قرمز به‌گوش دخترانی باشدکه در دو اطاقك جلوی و وسطی نشسته‌اند، برنده می‌شود، به‌شرطی‌که هردوگوشوارهٔ قرمز متعلق به‌دختر اطاقك جلو نباشد (شکل ۲۶۳-a). در واقع، در هردو مورد، نفر آخر متوجه می‌شود که گوشواره‌های خود او، تنها می‌توانند سفید باشند و، بنابراین، درهمان مرحلهٔ آزمایشی اول، دوشستی سفید را فشار می‌دهد.

روشن است که بقیهٔ شرکت‌کنندگان، نمی‌توانند رنگ گوشواره‌های خود را پیداکنند، زیرا نمی‌بینند، چندگوشوارهٔ قرمز تقسیم شده است. (از آن‌جاکه، در هیچ‌حالتی، شرکت‌کنندگان، نمی‌توانند همهٔ گوشواره‌های سفید را ببینند، همیشه، تنها می‌توان دربارهٔ گوشواره‌های قرمز صحبت کرد.)

(!) اگر همهٔ گوشواره‌های قرمز، به‌گوش دونفرجلوی نباشددختری که در اطاقك عقبی نشسته است نمی‌تواند برنده شود و در تمامی جریان مسابقه، از رنگ‌گوشواره‌های خود با خبر نمی‌شود. در واقع اگر، دراین حالت، گوشواره‌های دختر اطاقك آخر را، با دوگوشوارهٔ دیگر عوض‌کنیم (این تعویض ممکن است، زیرا وقتی‌که گوشواره‌ها را بین شرکت‌کنندگان تقسیم‌کرده‌ایم، هنوز گوشواره‌های از هردو رنگ در جعبه باقی می‌ماند)، هیچ‌یك از شرکت‌کنندگان، متوجهٔ این تغییر نمی‌شوند. بنابراین، چون فرض‌هایی‌که، برای‌استدلال، مورد استناد دخترهاقرارمی‌گیرد، تغییرنمی‌کند، نتیجه‌گیری‌ها هم تغییر نخواهد کرد. واین، به معنای آن است که، دختر اطاقك آخر، دراین دوحالت مختلف، نمی‌تواند به‌دونتیجهٔ مختلف برسد و، بنابراین، نمی‌تواند رنگ‌گوشواره‌های خودرا، به‌صورت‌یك‌ارزشی، پیداکند.

d) اگر دختری‌که در اطاقك جلوی نشسته است، دو گوشوارهٔ قرمز به‌گوش داشته باشد، دخترهایی‌که در اطاقك‌های وسطی و عقبی نشسته‌اند، از همان مرحلهٔ اول آزمایش، می‌توانند برنده شوند (ممکن است، مسابقه «هیچ به‌هیچ» شود). این، چهارمین حالت، از حالت‌های مورد بررسی است (شکل ۲۶۳-b).



شکل ۲۶۳

دخترهای اطاقك‌هـای وسطی و عقبی، دو گوشوارهٔ قرمز را می‌بینند و، بنابراین، می‌توانند رنگ گوشواره‌های خودرا معین کنند. هیأت‌داوران، تصمیم می‌گیرد که، کدام دختر، زودتر شستی‌ها را فشار داده است و او را برنده اعلام می‌کند.

b) دختر اطاقك دوم، وقتی برنده می‌شودکه دختر اطـاقك جلوی یك گوشوارهٔ قرمز و، خود او، دوگوشوارهٔ سفید داشته باشد (شکل ۲۶۳-c).

در این‌حالت، در مرحلهٔ نخست آزمـایش ، هرسه‌نفر، شستی علامت سئوال را فشار می‌دهند، زیرا هیچ‌یك ازآن‌ها، نه همهٔ گوشواره‌های قرمز و و نه‌همهٔ گوشواره‌های سفیدرا نمی‌بینند. ازبی‌نتیجه‌بودن مرحلهٔ اول‌آزمایش، دختر اطاقك وسطی، متوجه می‌شود که، گوشوارهٔ قرمزی، به گوش خود او نیست، زیرا اگراوهم گوشوارهٔ‌قرمزمی‌داشت، دختراطاقك‌عقبی می‌توانست، به‌صورت یك‌ارزشی، رنگ گوشواره‌هـای خود را اعلام کند. بنابراین، در مرحلهٔ دوم‌آزمایش، دختر اطاقك وسطی، رنگ گوشواره‌های خود را اعلام می‌کند و برنده می‌شود، زیرا هیچ‌کدام ازدو دختر دیگر، در موقعیتی نیستند که‌بتوانند ازرنگ گوشواره‌های خود مطلع‌شوند. درقطعه‌ای که باعلامت(!) مشخص‌کرده‌ایم، دیدیم که، دختراطاقك‌عقبی، نمی‌تواند رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کند و، دختر اطاقك اول، که می‌بیند در مرحلهٔ اول آزمـایش، هرسه نفر شستی علامت سئوال را فشار داده‌اند، تنهـا متوجه این مطلب می‌شود که خود او بـا دختر اطاقك وسط، روی‌هم، صاحب دو گوشوارهٔ

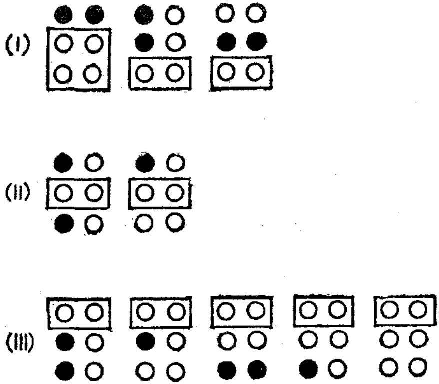
قرمز نیستند. ولی به‌این‌پرسش نمی‌تواند پاسخ بدهدکه‌آیا گوشوارهٔ‌قرمزی، بین سه‌دختر تقسیم شده‌است یانه و، اگرتقسیم شده است، به‌گوش چه‌کسی است: به‌گوش خود او یا به‌گوش دختر اطاقك وسطی.

c. دختر اطاقك جلوی، در همهٔ حالت‌های دیگر تقسیم گوشواره‌ها[1]، برنده می‌شود، یعنی حالت‌هایی‌که خود اوحتی یك‌گوشوارهٔ قرمز نداشته‌باشد و،به‌گوش دختر اطاقك‌وسطی، بیش ازیك‌گوشوارهٔ قرمز،آویزان نکرده‌باشند.

قبلاً دیدیم که، در این حالت‌ها، دختر اطاقك عقبی، به‌هیچ‌وجه نمی‌تواند رنگ‌گوشواره‌های خود را پیداکند. ولی، دختر اطاقك وسطی هم نمی‌تواند به‌رنگ گوشواره‌های خود پی ببرد. دختر اطاقك وسط، با دیدن دو گوشواره سفید دختر اطاقك جلوی، نمی‌تواند هیچ‌نتیجه‌ای در-بارهٔ‌گوشواره‌های خود بگیرد. تنها راهی‌که برای او باقی می‌ماند، روش غیرمستقیم است ـ به‌کمك استدلال ـ او تنها می‌تواند ازعلامت دختراطاقك عقبی استفاده کند، زیرا تنها اوست که بیشتر از خودش می‌بیند. ولی، در آزمایش اول دختر اطاقك عقبی، شستی علامت سئوال را فشار داده است واین، برای او، به معنای آن است که دخترهای اطاقك‌های جلو و وسط، روی‌هم، نمی‌توانند بیش ازیك‌گوشوارهٔ قرمز داشته باشند. بنابراین، برای دختر اطاقك وسط، دوحالت ممکن است پیش‌آید: یایکی ازگوشواره‌های او قرمز ویا هردوگوشواره‌اش سفید است.

به‌این ترتیب، در هرحالت، دختر اطاقك وسط، ناچار است شستی علامت سئوال را بفشارد ولی، در این صورت، دختر اطاقك جلو متوجهٔ می‌شودکه،گوشواره‌های خودش، هردوسفیدند؛ زیرا در هرحالتی غیرازاین، یکی از دو دختر اطاقك‌های عقبی، می‌توانند رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کنند.

بنابراین، بعد از دو مرحله آزمایش، که در آن‌ها، هرسه شرکت‌کننده شستی علامت سئوال را فشار داده‌اند، دختری‌که دراطاقك جلو نشسته‌است ۲ شستی سفید را فشار می‌دهد و برنده می‌شود. هیچ‌کدام از دو دختر عقبی نمی‌توانند از اوجلو بزنند: درمرحلهٔ سوم آزمایش، تنها کاری‌که می‌توانند



شکل ۲۶۴

انجام دهند، این است که شستی علامت سئوال را فشار دهند (و می‌دانیم که این کار، دیگر فایده‌ای ندارد) . بعد از این مرحلهٔ آزمایشی هم، دخترهای اطاقك‌های وسطی و عقبی نمی‌توانند رنگ گوشواره‌های خود را پیدا کنند. دربارهٔ علت موفقیت دختر اطاقك آخر، در قطعه (!) صحبت کردیم. اکنون «نمونهٔ» آن را، در مورد دختر اطاقك وسطی هم دنبال می کنیم. او تاآخر کار، نمی‌تواند بفهمد که آیا دو گوشوارهٔ سفید دارد یا یك گوشوارهٔ سفید و یك گوشواره قرمز، زیرا با توجه به‌مجموعهٔ آگاهی‌های او، هردوحالت، به‌یك اندازه ممکن است (شکل ۲۶۳-d).

یادداشت. همهٔ حالت‌های مربوط به‌تقسیم گوشواره‌ها، درشکل ۲۶۴ داده شده است. گوشواره‌های برنده، در داخل کادر قرار گرفته‌اند. عددهای رومی، نمایندهٔ تعداد آزمایش‌هایی است که، برای رسیدن به‌پیروزی، لازم است.

۱۷۴. دوباره کلاه‌ها

[شباهت این مسأله، با مسألهٔ قبل روشن است : در هر دو مورد، شرکت‌کنندگان در المپیاد، در یك ردیف و پشت سرهم نشسته‌اند.

در این نوع مساله‌ها، چه تمایزی وجود دارد؟

این که شرکت‌کنندگان در المپیاد، در شرایط یکسان قرار ندارند.
اگر سطح تکامل ذهنی و قدرت تفکر منطقی شرکت کنندگان در المپیاد، در سطح بالایی قرار داشته باشد (و بنابرشرط مساله، همین‌طور هم هست)، آن‌وقت نتیجهٔ المپیاد، برای هرکدام از شرکت‌کنندگان، نه از روی سرعت فکر کردن آن‌ها در جریان المپیاد، بلکه به‌کمك عامل‌های خارجی تعیین می‌شود: ردیفی که در آن، شرکت‌کنندگان قرار گرفته‌اند و نوع تقسیم کلاه‌ها. چون شرکت‌کنندگان، از گفت‌وگوی با یکدیگر محروم‌اند (دستگاه مکالمه، حتی بعد از آخرین مرحلهٔ آزمایش هم، روشن نمی‌شود)، کسی که سریع‌تر فکر می‌کند، نمی‌تواند از رقیبان خود جلو بزند: هیأت داوران، تنها به‌تعداد مرحله‌های آزمایش توجه دارد.

ولی «منظره‌ای» که در برابر شرکت‌کنندگان گشوده می‌شود، برای همه، یکسان نیست. جواب مساله هم، برهمین اساس ارائه شده است.]

شرکت‌کنندگان، آگاهی‌های لازم را، برای تعیین رنگ کلاه خود، از دو سرچشمه می‌توانند بیرون بکشند:

I) ازاین طریق که به‌جلو خود نگاه‌کنند و رنگ‌کلاه شرکت‌کنندگان جلو خود را ببینند؛

II) از این‌جا که ، در آزمایش قبلی، همهٔ شرکت‌کنندگان شستی علامت سئوال را فشار داده‌اند و، بنابراین ، نمی‌توانند رنگ کلاه خود را پیدا کنند.

(در واقع، اگرکسی شستی رنگ کلاه خود را فشارداده باشد، دیگر به‌آزمایش بعدی نیازی نخواهد بود، زیرا برندهٔ المپیاد، معلوم شده است.)

استفاده از سرچشمهٔ دوم آگاهی‌ها ، محدودیت مهمی دارد که، ضمن حل مسأله، نباید آن را از نظر دور داشت.

(*) برای هرشرکت کننده، تنها آگاهی‌های اضافی مفید است که، دربارهٔ تردیدکسانی‌که پشت سر او نشسته‌اند، به‌دست می‌آورد (یعنی تردیدی که موجب شده است، شستی علامت سؤال را فشار دهند). در واقع، کسانی که جلو او نشسته‌اند، چیزی بیشتر از خود او نمی‌بینند (حتی‌کمتر از خود

او می‌بینند) و، بنابراین، ممکن نیست چیزی بیشتر از آن‌چه به‌اندیشهٔ خود او رسیده است، فهمیده باشند.

بعد از این توضیح‌های مقدماتی، ببینیم برندهٔ المپیاد، درکجا (در چه شماره‌ای) می‌تواند نشسته باشد، و برای رسیدن به‌پیروزی، به‌چند مرحله آزمایش نیاز دارد.

($1a$) کسی که ۶ کلاه قرمز را در جلو خود ببیند، مطمئن می‌شود که کلاه خود او سفیداست و، درهمان‌آزمایش اول، پیروزی را به‌دست می‌آورد.

($1b$) کسی‌که، در جلو خود، کمتر از ۶ کلاه داشته باشد، در آزمایش اول، تنها می‌تواند شستی علامت سئوال را فشار دهد: او نمی‌تواند، در بارهٔ رنگ کلاه خود، مطمئن باشد. در واقع، تعداد کلاه‌های قرمز جلو او، کافی نیست تا بتواند رنگ کلاه خود را، با اطمینان، اعلام کند، و برای این‌که از پاسخ‌های افراد پشت سر خود، استفاده کند (که شستی با علامت سئوال را فشار داده‌اند)، ناچار است، دست‌کم تا آزمایش بعدی صبر کند.

از آن‌جا که پشت سر آخرین نفر (آن‌که با شمارهٔ ۱ مشخص شده است)، کس دیگری قرار ندارد، نمی‌تواند در انتظار آگاهی‌های مفیدی از نوع II باشد: اگر او درجلوخود، ناظر ۶ کلاه قرمز نباشد و، بنابراین نتواند رنگ کلاه خود را، درنخستین آزمایش پیدا کند، مسلماً درمرحله‌های بعدی آزمایش هم نخواهد توانست به‌رنگ کلاه خود پی ببرد.

($1c$). اگر شرکت‌کنندهٔ شماره ۱، نمی‌تواند رنگ کلاه خود را، در نخستین آزمایش، پیدا کند، تا پایان کار المپیاد، توفیقی در این راه پیدا نمی‌کند.

درصورت مساله، گفته شده است که، هیچ شرکت‌کننده‌ای، نتوانست رنگ کلاه خود را پیدا کند و، همهٔ آن‌ها، شستی علامت سئوال را فشار دادند. به‌همین مناسبت، به‌ناچار، مرحلهٔ دوم آزمایش هم، انجام شد.

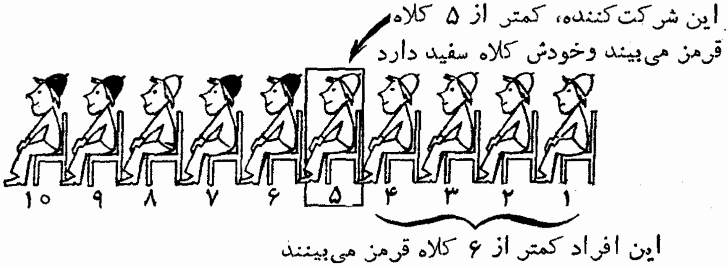
($2a$) کسی‌که ۵ کلاه قرمز را در جلو خود می‌بیند و، دست کم جلو یک‌نفر از رقیبان خود نشسته است (یعنی، دست‌کم یک‌نفر، پشت سر او قرار دارد)، می‌تواند رنگ کلاه خود را، در مرحلهٔ دوم آزمایش، اعلام کند.

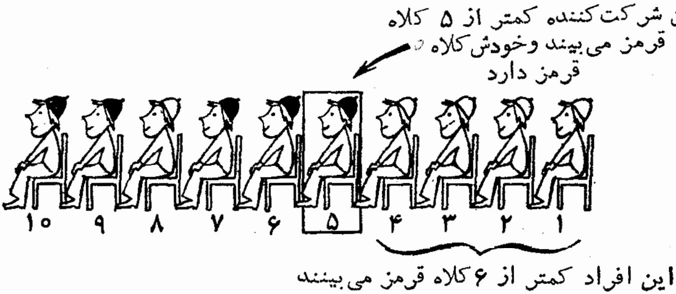
در واقع، وقتی‌که نفر پشت سر او، در آزمایش اول، شستی علامت

سئوال را فشار داده است، بنابرگزارهٔ ($1a$) نمی‌تواند ۶ کلاه قرمز در جلو خود دیده باشد و این به‌معنای آن است که، شرکت‌کنندهٔ ناظر ۵ کلاه‌قرمز، کلاه سفید به‌سر دارد.

($2b$). کسی‌که کمتر از ۵ کلاه قرمز می‌بیند، نمی‌تواند رنگ کلاه خود را، در آزمایش دوم، پیدا کند. روشن است که این تعداد کلاه قرمز، امکان تعیین رنگ کلاه خود را، به‌او نمی‌دهد. از آن‌جا که، در آزمایش اول، همهٔ کسانی که پشت سر او نشسته‌اند، شستی علامت سئوال را زده‌اند، نتیجه می‌گیرد که هیچ‌کدام از آن‌ها در جلو خود، ۶ کلاه قرمز ندیده‌اند ـ گزارهٔ ($1b$) را ببینید. این وضع می‌تواند هم در حالتی پیش آید که، کسی که کمتر از ۵ کلاه قرمز دیده است، خودکلاه قرمز به‌سر داشته باشد و هم درحالتی که برسر او کلاه سفید باشد [مثلاً، وقتی‌که همهٔ افراد عقبی، کلاه سفید داشته باشند (شکل ۲۶۵)، ولی نه‌حتماً (شکل ۲۶۶)].

($2c$) اگر شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۲، نمی‌تواند رنگ کلاه خود را، حتی

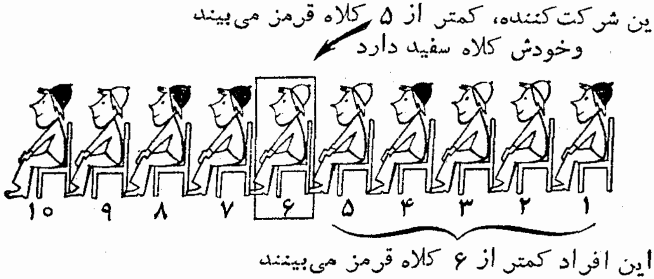


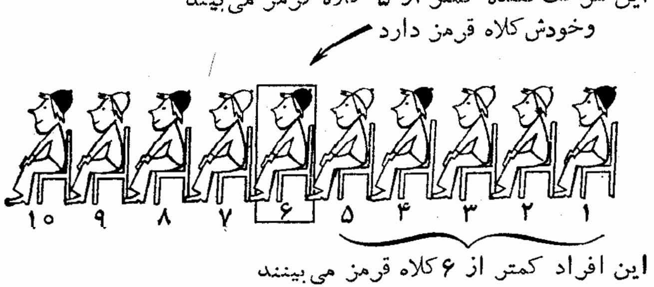


شکل ۲۶۵

بعد از آزمایش دوم پیدا کند، به‌معنای آن است که در مرحله‌های آزمایشی بعد هم ، توفیقی در این راه به‌دست نمی‌آورد. در واقع آگاهی‌هایی که بعد از آزمایش دوم به‌دست می‌آورد، چیزی به‌آگاهی‌های قبلی او اضافه نمی‌کند. تعداد کلاه‌های قرمز و سفیدی که او مستقیماً دیده است، تا پایان مسابقه، بی‌تغییر می‌ماند. این‌که شرکت‌کنندهٔ پشت سر او (شمارهٔ۱) درآغاز مرحلهٔ دوم آزمایش، شستی علامت سئوال را زده است، شامل هیچ آگاهی تازه‌ای برای او نیست : از گزارهٔ (۱c) روشن شد که وقتی، شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۱ نتواند رنگ کلاه خود را در آزمایش اول پیدا کند، درمرحله‌های بعدی آزمایش هم نخواهد توانست.

بنابرفرض‌مسأله هیچ کدام ازشرکت‌کنندگان نتوانسته‌اند در دومرحلهٔ اول آزمایش توفیقی در پیداکردن رنگ کلاه خود به‌دست آورند: همهٔ‌آن‌ها شستی علامت سئوال را زده‌اند. به‌همین مناسبت مرحلهٔ بعدی آزمایش هم انجام شد.





شکل ۲۶۶

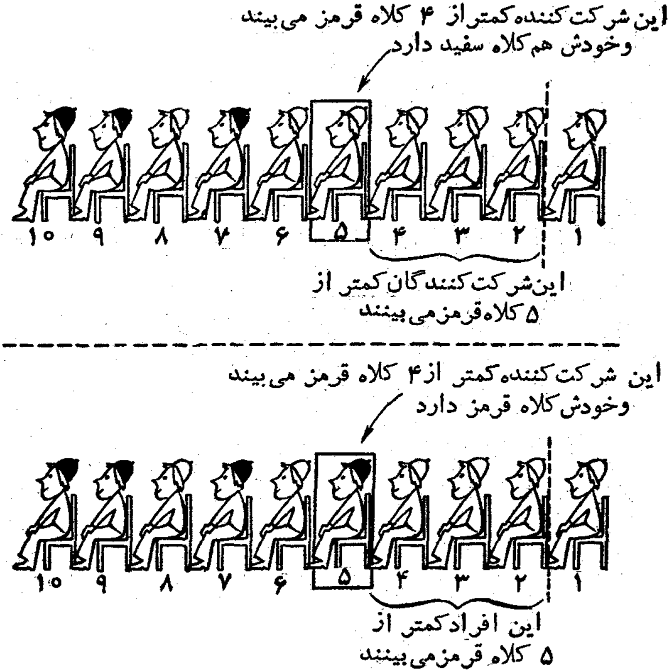
($3a$): کسی‌که، دست کم، ۴ کلاه قرمز می‌بیند و دست‌کم دو نفـر از شرکت‌کنندگان المپیاد پشت سر او نشسته‌اند، می‌توانـد رنگ کلاه خود را در مرحلهٔ سوم آزمایش پیدا کند.

درواقع همهٔ کسانی که پشت سر فرد مورد نظر ما نشسته‌اند و دست‌کم یك نفر را پشت سر خود دارند درآزمایش دوم هم شستی علامت سئوال را فشار داده‌اند؛ بنابر گزارهٔ ($2a$)، نمی‌توانند ۵ کلاه قرمـز دیده باشند. این وضع تنها وقتی می‌تواند پیش آید که شرکت کنندهٔ جلو آن‌ها (کسی کـه ۴ کلاه قرمز دیده است) کلاه سفید به‌سر داشته باشد.

($3b$). کسی‌که‌کمتر از ۴ کلاه قرمـز درمقابل خود می‌بیند، نمی‌تواند رنگ کلاه خود را درمرحلهٔ سوم آزمایش، پیداکند.

درواقع، آن‌چه مستقیماً به‌وسیلهٔ این فرد دیده می‌شود، برای او کافی نیست. این‌حقیقت هم که، افراد پشت سراوشستی علامت سئوال را زده‌اند، کمکی به او نمی‌کند: آن‌چه به‌شرکت کنندهٔ شماره ۱ مربوط می‌شود، آگاهی او، بنا بـر گـزارهٔ ($1c$)، هیچ مضمون تـازه‌ای ندارد؛ علامت سئوال بقیهٔ شرکت کنندگان هم، بنابر گزارهٔ ($2b$)، به‌این معناست که، هرکدام ازآن‌ها، ۵ کلاه قرمز ندیده‌اند. دراین حالت، کسی که کمتر از ۴ کلاه قرمزدیده باشد، ممکن است کلاه قرمز به سر داشته باشد یـا کلاه سفید: مثلاً وقتی که همهٔ شرکت کنندگان پشت سراو، کلاه سفید داشته باشند (شکل ۲۶۷) ویا بعضی ازآن‌ها باکلاه قرمز باشند (شکل ۲۶۸).

($3e$). وقتی‌که، شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۳، نتوانست درمرحلهٔ سوم‌آزمایش، رنگ کلاه خود را پیدا کند، دیگر هرگز توفیقی دراین راه به دست نمی‌آورد. درواقع، آگاهی‌هایی که، بعد از آزمایش سوم، به‌او برسد، هیچ تازگی برای او ندارد. اوهمان چیزی را می‌بیند که قبلاً هم دیده بود. علامت سئوال ۲ نفر پشت سراوهم، چیزتازه‌ای به‌او نمی‌دهد: شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۱، ازآغاز آزمایش دوم [گزارهٔ ($1c$)] وشرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۲، از آغاز آزمایش سوم [گزارهٔ ($2c$)]، نمی‌تـوانند آگاهـی تـازه‌ای بدهند. روشن است‌کـه، این شرکت‌کنندگان، تا آخرمسابقه هم نخواهند توانست رنگ کلاه‌خود را پیدا



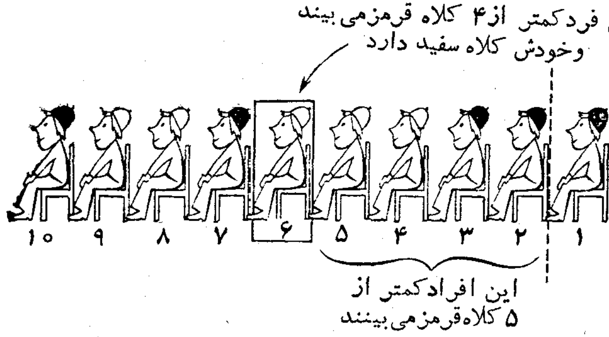
شکل ۲۶۷

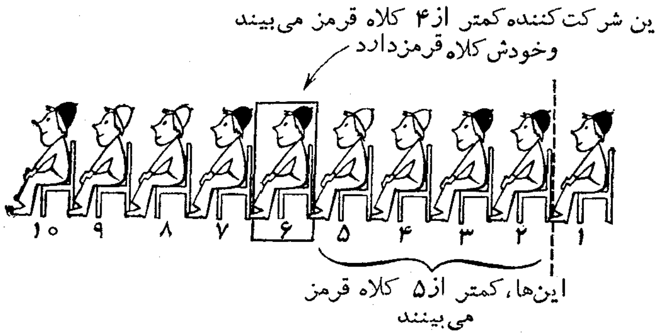
کنند و، هر بار، شستی علامت سئوال را می‌زنند.

بنا برصورت مساله، درسه آزمایش اول، هیچ شرکت کننده‌ای نتوانسته است رنگ کلاه خودرا پیدا کندوهمه، به‌شستی علامت سئوال فشارآورده‌اند. به همین مناسبت، مرحلهٔ چهارم آزمایش، انجام شد.

$(۴a)$. کسی که ۳ کلاه قرمز را در جلو خود می‌بیند و، دست کم، سه نفر از شرکت کنندگان المپیاد، پشت سر او هستند، می‌تواند در مرحلهٔ چهارم آزمایش، رنگ کلاه خود را اعلام کند.

در واقع، اگر یکی از شرکت کنندگان عقبی، که دست‌کم دو نفر را پشت سر دارد، نتوانسته است در مرحلهٔ سوم، رنگ کلاه خود را پیدا کند و شستی علامت سئوال را زده است، بنا بر گزارهٔ $(۳a)$، به این معناست که‌او نتوانسته است ۴ کلاه قرمز را در جلو ببیند. و ایـن وضع، تنها وقتی پیش می‌آید که، آن که ۳ کلاه قرمز دیده است، خود کلاه سفید برسر داشته باشند.





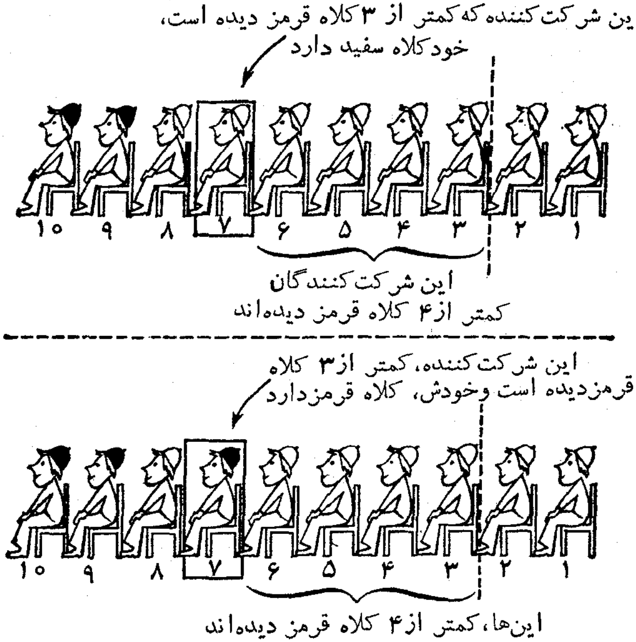
شکل ۲۶۸

($۴b$). کسی که کمتر از ۳ کلاه قرمز دیده است، نمی‌تواند در مرحلهٔ چهارم آزمایش، رنگ کلاه خود را پیدا کند.

در واقع روشن است که، آن چه مستقیماً می‌بیند، کافی نیست. این حقیقت هم که، افراد پشت سراو شستی علامت سئوال را فشار داده‌اند، چیز تازه‌ای به‌او نمی‌دهد. از گزاره‌های قبل می‌دانیم که، این آگاهی‌ها تازه‌نیست: شرکت کنندهٔ شماره ۱، از ($۱c$)؛ شرکت کنندهٔ شمارهٔ ۲، از ($۲c$)؛ در مورد بقیه‌آن‌ها هم، بنا بر گزارهٔ ($۳b$)،آگاهی تازه به‌معنای‌آن است که، هیچ‌کدام ازآن‌ها، ۴ کلاه قرمز ندیده‌اند. در این حالت، کسی که کمتر از ۳ کلاه قرمز دیده است، ممکن است کلاه سفید برسر داشته باشد یا کلاه قرمز [مثل حالت شکل ۲۶۹ (که همهٔ شرکت کنندگان پشت سر او کلاه سفید دارند) و یا حالت شکل ۲۷۰ (که شرکت کنندگان پشت‌سر او، بعضی کلاه سفیدو بعضی

دیگر کلاه قرمز دارند)].

می‌توانیم گزارهٔ ($۴c$) را هم روشن و ثابت کنیم، ولی به آن نیازی نداریم.



شکل ۲۶۹

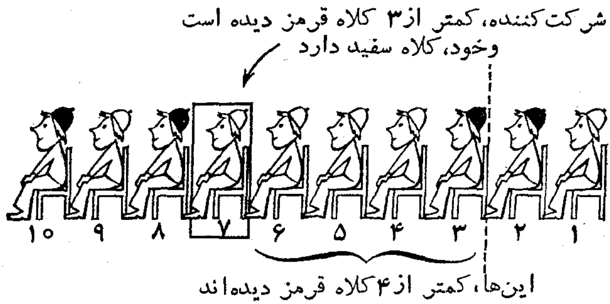
بنا بر گزاره‌های ($۱a$)، ($۲c$) و ($۳c$)؛ شرکت کنندگان شمارهٔ ۱، شمارهٔ ۲ و شمارهٔ ۳، نمی‌توانند برنده باشند. بنابراین، شمارهٔ اطاقك برنده، نمی‌تواند کمتر از ۴ باشد.

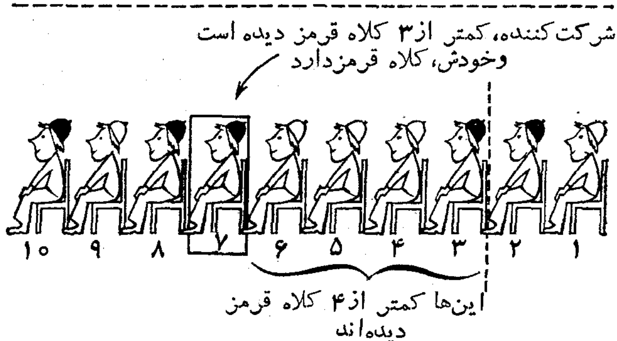
او چند کلاه قرمز دیده است؟ از گزارهٔ ($۴b$) نتیجه می‌شود که، این تعداد، نمی‌تواند کمتر از ۳ باشد، ولی بیش از ۳ کلاه قرمز هم نمی‌تواند دیده باشد، زیرا در این صورت، بنا بر گزارهٔ ($۱a$)، ($۲a$) و ($۳a$)، کسی می‌توانست رنگ کلاه خود را قبلاً پیدا کند، که ۳ کلاه قرمز دیده باشد. به این ترتیب، برندهٔ المپیاد، باید درست ۳ کلاه قرمز دیده باشد.

از گزارهٔ ($۴a$) معلوم است که، اگر شمارهٔ شرکت کنندهٔ در المپیاد از

۴ تجاوز نکند و، ضمناً، ۳ کلاه قرمز ببیند، می‌تواند رنگ‌کلاه خود را، در مرحلهٔ چهارم آزمایش، پیدا کند. بنابراین، اگر شماره پیشتا، از ۴ بیشتر باشد، همهٔ شرکت‌کنندگانی که پشت سر او نشسته‌اند و شماره‌ای کمتر از ۴ ندارند، می‌توانند رنگ‌کلاه خودرا، همراه با پیشتا، پیدا کنند(شکل ۲۷۱). ولی، بنا بر فرض مساله، پیشتا، تنها کسی بود که برندهٔ مسابقه شد. این وضع، تنها وقتی پیش می‌آیدکه

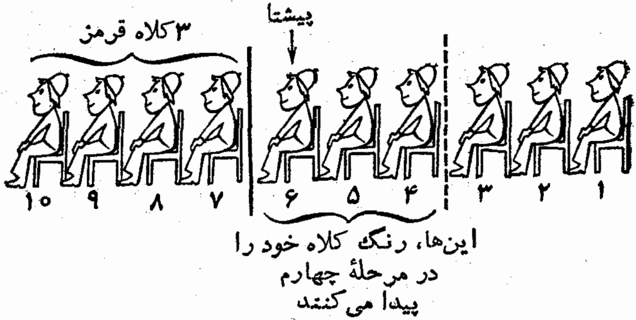
الف). پیشتا دراطاقک چهارم نشسته باشد





شکل ۲۷۰

ب). دربارهٔ رنگ‌کلاه شرکت‌کنندگان درالمپیاد، به‌ترتیب، می‌توان گفت: شرکت‌کننده‌ای که دراطاقک شمارهٔ ۵، جلو پیشتا، نشسته است، کلاه قرمز دارد، درغیر این‌صورت، شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۵ هم، ۳ کلاه قرمزمی‌دید و می‌توانست، همراه با پیشتا، رنگ‌کلاه خود را معلوم کند (شکل ۲۷۲).



شکل ۲۷۱

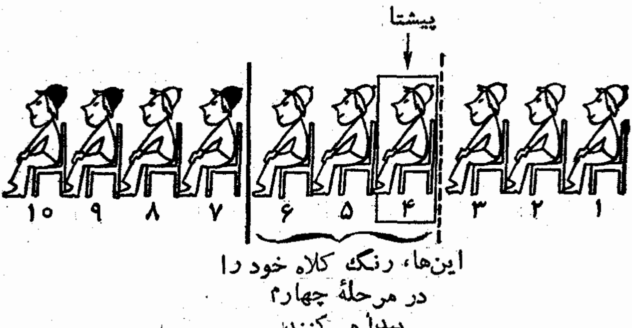
ولی ازآن‌جا که پیشتا، ۳ کلاه قرمزدیده است، بنابراین، دربین‌آن‌هایی که درپنج اطاقك جلو پیشتا نشسته‌اند (اطاقك‌های با شماره‌های ۱۰، ۹، ۸، ۷ و ۶)، باید ۲ کلاه قرمز و ۳ کلاه سفید وجود داشته باشد.

کلاه خود پیشتا چه‌رنگ است؟

او نمی‌تواندکلاه قرمز داشته باشد، زیرا اگرکلاه پیشتا قرمز بود، نفر پشت سراو(شمارهٔ ۳)، ۴ کلاه قرمزمی‌دید. پشت سرشرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۳، دو نفر دیگر (شمارهٔ ۲ و شمارهٔ ۱) وجود دارند و بنابراین، طبق گزارهٔ (۳a)، می‌توانست رنگ‌کلاه خود را، در سومین آزمایش، یعنی یك مرحله زودتر از پیشتا، پیداکند.

به‌این ترتیب، کلاه پیشتا، تنها می‌تواند سفید باشد.

رنگ‌کلاه کسانی‌که پشت‌سر پیشتا نشسته‌اند، چه‌بوده است؟



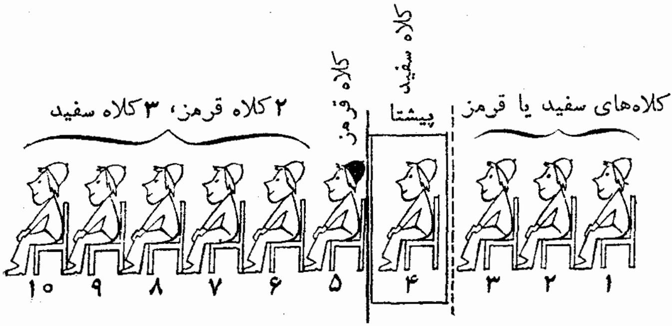
شکل ۲۷۲

رنگ کلاه هرکدام ازآن‌ها، می‌توانند سفید و می‌توانند قرمز باشد. در واقع، رنگ کلاه‌های شرکت‌کنندگان شماره‌های ۱، ۲ و ۳ هرچه باشد، شمارهٔ ۱ بیش از ۵ کلاه، شمارهٔ ۲ بیش از ۴ کلاه وشمارهٔ ۳ بیش از ۳ کلاه قرمز نمی‌توانند ببینند. بنابراین، هیچ‌کدام ازآن‌ها (باتوجه به گزاره‌های ($1b$)، ($2b$) و ($3b$))، نمی‌توانند در سه آزمایش اول و آزمایش چهارم (و بنابراین، تا پایان مسابقه) رنگ کلاه خود را پیدا کنند.

بنابراین، به‌پرسش ب) مساله، می‌توان این‌طور پاسخ داد.

بین پنج نفری که دراطاقک‌های جلو نشسته‌اند (اطاقک‌های شماره‌های ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰)، ۲ کلاه قرمز و۳ کلاه سفید وجود دارد، کلاه شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۵ قرمز وکلاه پیشتا سفید است.

هرترکیبی ازتقسیم کلاه‌های قرمزوسفیدکه بااین شرطها سازگارباشد، ممکن است (شکل ۲۷۳).



شکل ۲۷۳

به‌درستی این جواب، می‌توان از این طریق قانع شد که، با همهٔ موقعیت‌های المپیادکه درصورت مساله آمده، سازگاراست.

یادداشت ۱. روشن است که همهٔ گزاره‌های سری a ـ ($1a$)، ($2a$)، ($3a$) و ($4a$) ـ حالت‌های خاصی ازیک قانون‌مندی کلی هستند. همین حکم دربارهٔ گزاره‌های سری‌های b و c هم صادق است. این قانون مندی‌های کلی را می‌توان به‌صورت زیربیان کرد.

(a) کسی که k کلاه قرمز را در جلـو خود می‌بیند و جلو دست‌کم $k-6$ شرکت‌کننده دیگر نشسته است، می‌تـوانـد رنگ کلاه خود را، در $(7-k)$امین آزمایش پیدا کند (البته، بااین شرط‌که، همهٔ شرکت‌کنندگان، درآزمایش‌های قبلی، شستی علامت سئوال را فشار داده باشند).

(b) کسی کـه کمتر از k کلاه قرمز در مقابل خود می‌بیند، نمی‌تواند رنگ‌کلاه خود را در $(7-k)$امین آزمایش پیدا کند.

(c) اگر شرکت‌کنندهٔ شماره k ، نتواند تامرحلهٔ kام آزمایش، رنگ کلاه خود را پیدا کند، بعد از آن هم، توفیقی دراین راه پیدا نمی‌کند.

این گزاره‌ها را، می‌توان با روش استقرای ریاضی ثابت‌کرد.

این قانون‌مندی‌ها را، بازهم می‌توان کلی‌ترکرد: به‌جای ۶ کلاه قرمز، m کلاه قرمز و به جای ۱۰ شرکت‌کننده، n شرکت‌کننده (وبه همراه آن، n کلاه سفید) درنظر بگیریـد. (روشن است کـه، گزاره‌های (a)، (b) و (c) هیچ ربطی به n ندارند؛ تنها باید نابرابری $m<n$ برقرار باشد.)

یادداشت ۲. بـاتوجه بـه یادداشت ۱، می‌تـوان گزارهٔهای $(1a)$، $(1b)$ و $(1c)$ را، این‌طور تنظیم کرد:

$(1a)$. کسی‌که همهٔ‌کلاهای قرمز را درمقابل خود می‌بینند، بلافاصله رنگ کلاه خود را تعیین می‌کند و، درابتدای‌آزمایش اول، شستی سفید را فشار می‌دهد.

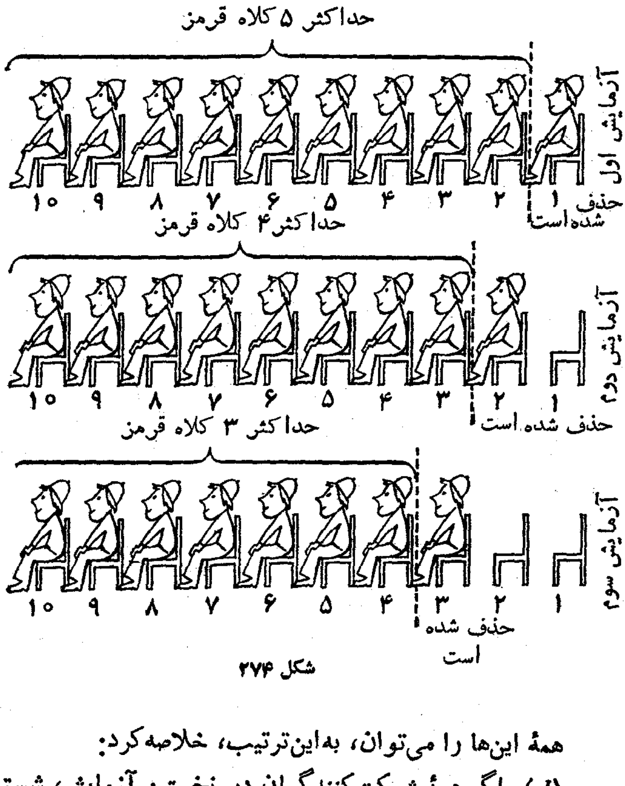
$(1b)$. کسی‌که‌همهٔ کلاه‌های قرمز را دربرابرخود نمی‌بیند، نمی‌تواند درآزمایش اول، رنگ‌کلاه خود را معین‌کند.

$(1c)$. وقتی‌کـه شرکت‌کنندهٔ اطاقك شمارهٔ ۱ (آن‌کـه پشت سر همهٔ دیگران نشسته است)، نتواند دراولین‌آزمایش، رنگ‌کلاه خود را پیداکند، تا آخر مسابقه هم، توفیقی دراین راه پیدا نخواهدکرد.

جالب‌است که،همین سه‌گزاره، به‌خودی‌خود، برای‌حل مساله،کافی‌اند.

وقتی‌کـه شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۱ ، درنخستین آزمـایش، شستی علامت سئوال را می‌زند، به‌معنای آن است‌که او هـر ۶ کلاه قرمز را نمی‌بیند و، بنابراین، ۹ شرکت‌کنندهٔ دیگر، بیش از ۵ کلاه قرمز نمی‌توانند ببینند. ولی

دراین‌صورت، ازگزارهٔ ($1c$) نتیجه‌می‌شودکه، شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۱، تمامی شانس خود را در برد از دست می‌دهد: می‌تواند خودش به خانه برود و «دستگاه خودکار» را طوری تنظیم‌کندکه، در هرمرحله، روی شستی علامت سئوال فشار بیاورد. او حتی می‌تواند، بدون تنظیم «دستگاه خودکار» هم، باآرامش خاطر، به‌خانه‌برود، زیرا علامت‌های سئوال او، شامل هیچ آگاهی تازه‌ای برای دیگران نیست و همه می‌دانندکه او باید تا پایان مسابقه، از همین شستی استفاده‌کند. بنابراین، او می‌تواند به‌خانه برود، نه‌تنها ازاین جهت‌که دیگر شانسی برای برد ندارد، بلکه ضمناً به‌این دلیل‌که، هیچ‌گونه تاثیری هم برجریان بعدی مسابقه، نمی‌تواند داشته باشد.



شکل ۲۷۴

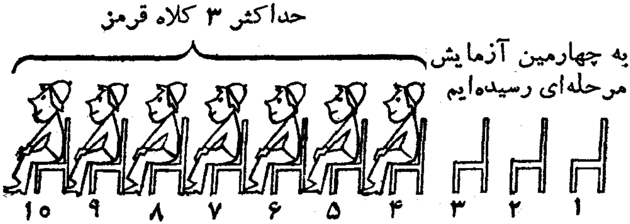
همهٔ این‌ها را می‌توان، به‌این‌ترتیب، خلاصه‌کرد:

(d). اگر همهٔ شرکت‌کنندگان در نخستین آزمایش، شستی علامت

سئوال را فشار بدهند، می‌توان از تعداد شرکت‌کنندگان، ۱ نفرکم کرد. در آزمایش بعدی، تعدادکلاه‌های قرمز، بیش از ۱ عددکم نمی‌شود

صورت‌مساله، این امکان را به‌ما می‌دهدکه، چهاربارمتوالی، ازگزارهٔ (d) استفاده کنیم (شکل ۲۷۴). در آخرین آزمایش، از ۱۰ شرکت‌کنندهٔ در المپیاد، تنها ۷ نفرباقی می‌مانند (با شماره‌های از۴ تا ۱۰) و تعدادکلاه‌های قرمز از۳ تجاوزنمی‌کنند (شکل ۲۷۵).

استدلال‌های بعدی، تکراری است ازآن چه در حل مساله گفته‌ایم (اگرچه، اندکی هم ساده‌تر می‌شود).



شکل ۲۷۵

یادداشت ۳. درتمامی حل‌مساله، جایی ازتعدادکلاه‌های سفیداستفاده نکرده‌ایم. علت این موضوع روشن است: کلاه سفید به‌اندازه کافی وجود داشت (به تعداد شرکت‌کنندگان) ، ضمناً هیچ شرکت‌کننده‌ای هم ، بدون کلاه نیست. بنابراین، لزومی نداردکه مراقب کلاه‌های سفید باشیم: کافی است،ازتعدادکلاه‌های قرمزمطلع باشیم: تاتعدادکلاه‌های سفید، روشن شود.

۱۷۵. یك پرسش ساده

[روشن است که، این مساله، تعمیمی از مسالهٔ قبل است. بنابراین، راه حل آن را هم، باید درهمان مسیر پیداکرد. کلید راه‌حل را می‌توان در یادداشت ۱ مسالهٔ قبل پیداکرد.]

بخش اول حل مسالهٔ قبلی را، می‌توان به‌صورت زیرتنظیم کرد:

n نفر درالمپیاد شرکت کرده‌انـد وتعدادکلاه‌های قرمز، برابر است با m (عـددهای m و n در نـابرابری $m<n$ صدق می کند). دراین صورت، شرکت‌کننده‌ای کـه، در مرحلهٔ k ام آزمایش، تنها برندهٔ مسابقه بوده است ($k\leqslant m<n$)، تنها می‌تواند دراطاقك شمارهٔ k نشسته باشد (اطاقك‌ها، از عقب به‌جلو، شماره‌گذاری شده‌اند) و ($m-k+۱$) کلاه قرمز دیده باشد.

این «قضیه» را می‌توان یا بـا تعمیم گزاره‌های (a)، (b) و (c)و یا بااستدلالی شبیه‌آن‌چه دریادداشت ۲ ازحل مسالهٔ قبلی‌آمده است،ثابت‌کرد.

گزارهٔ (a) را ، در کلی‌ترین صورت خود ، می‌توان بـه این ترتیب تنظیم کرد:

(a). بااضافه کردن تعدادکلاه‌های قرمزی‌که یکی از شرکت‌کنندگان می‌بیند.

($a_۱$) به تعدادکسانی کـه پشت سراو نشسته‌اند، تعداد همهٔ کلاه‌های قرمز دست‌آید و

($a_۲$) با اضافه‌کردن شمارهٔآزمایش‌های نوبتی به‌تعدادکلاه‌های قرمزی که همان شرکت‌کننده می‌بیند، مجموعی بیشتر از تعداد همهٔ‌کلاه‌های قرمز به‌دست‌آید، آن وقت، ایـن شرکت‌کننده، دراین مرحلهٔ ازآزمایش، می‌تواند رنگ‌کلاه خود را پیدا کند.

ازهمین‌جا نتیجه‌می‌شودکه، رنگ‌کلاه یوشکا حتماً به‌رنگ سفیداست.

در واقع، اگر یوشکا، در kامین آزمایش، تنها بـرنده مسابقه باشد، بنابر اثبات‌بالا، او دراطاقك k ام نشسته است و ($m-k+۱$) کلاه قرمزرا می‌بیند. اگر یوشکا کلاه قرمز داشته باشد، کسی‌کـه بلافاصله پشت سر او نشسته‌است (وپشت سرشرکت‌کننده اخیرهم $k-۲$ نفر نشسته‌اند)، ۱ کلاه قرمز بیشتر می‌بیند، یعنی $m-k+۲$ کلاه قرمز. ولی آن‌و قت، کسی‌که پشت سر یوشکا نشسته است، باشرط ($a_۱$) سازگار است:

$$(m-k+۲)+(k-۲)=m \quad \text{(تعداد همهٔ کلاه‌های قرمز)}$$

شرط ($a_۲$) هم ، قبلاً برقرار می‌شود ـ در ($k-۱$)امین آزمایش:

$$(m-k+۲)+(k-۱)=m+۱$$ (بیشتر از همهٔ کلاه‌های قرمز)

به‌این‌ترتیب، اگر کلاه یوشکا قرمز باشد، کسی که بلافاصله پشت سر او نشسته است، قبل از او به رنگ کلاه خود پی می‌برد و، درنتیجه، یوشکا برنده نمی‌شود.

پایان