جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان دانش‌آموزی شهر تهران

خانه ریاضی تهران

آزمون انتخابی هجدهمین دوره مسابقات جهانی ریاضی
IMC 2016

دفترچه سوال مرحله دوم

ویژه دانش‌آموزان پایه هفتم

(*Key Stage 2*)

(متولدین ۱۰ مرداد ۱۳۸۱ به بعد)

اردیبهشت ماه ۱۳۹۵

مدت زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

*** پیام ویژه ***

دانش‌آموزان عزیز لطفاً متن زیر را دقیق مطالعه نمایید.

۱. انتشار پاسخ‌نامه آزمون، اطلاعیه‌ها و اخبار بعدی فقط از طریق کانال تلگرام خانه ریاضی تهران: Mathhome@ یا Telegram.me/Mathhome می‌باشد. پس همین امروز بعد از آزمون، به ما بپیوندید.

۲. نتایج آزمون خرداد ماه از طریق سایت www.MathHome.ir منتشر می‌گردد.

۳. مراحل بعدی آزمون انتخابی بعد از اعلام نتایج مرحله دوم، منتشر خواهد شد.

این سوالات ویژه دانش‌آموزان پایه هفتم متولدین ۱۰ مرداد ۱۳۸۱ به بعد خواهد بود.

بدیهی‌است اگر قانون سنی توسط دانش‌آموزان رعایت نشود حضور آن‌ها به‌صورت آزمایشی منظور می‌گردد و تعهدی برای اعزام وجود ندارد.

1. **سوالات نمره منفی ندارد.**
2. **استفاده از ماشین‌حساب، تبلت، تلفن همراه و هر گونه وسیله الکترونیکی ممنوع است.**
3. **در سوالات پاسخ کوتاه فقط بایستی جواب نهایی را در برگه پاسخ نامه وارد نمایید و از نوشتن هرگونه توضیح اضافی خودداری نمایید. چون نه تنها امتیازی نخواهد داشت؛ بلکه موجب می‌شود امتیاز آن سوال نیز سلب شود.**
4. **در سوالات تشریحی بایستی به صورت کامل و جامع راه حل خود را تشریح نمایید.**
5. **در سوالات پاسخ کوتاه فقط جواب نهایی را به‌صورت یک عدد صحیح در پاسخنامه بنویسید و از نوشتن اعداد به‌صورت توان‌دار، فاکتوریل‌دار و ... خودداری کنید.**

خانه ریاضی تهران: میدان فاطمی، خیابان شهید گمنام، خیابان پیروزه، کوچه رادافزون پلاک ۷۴
تلفن:۸۸۹۷۲۸۱۷/۸۸۹۷۱۷۵۱/۸۸۹۶۰۲۶۴/۸۸۹۶۰۷۳۹(۰۲۱)
سامانه پیامکی: ۵۰۰۰۲۲۶۳۴۳۰
WWW.Mathhome.ir
Telegram.me/Mathhome

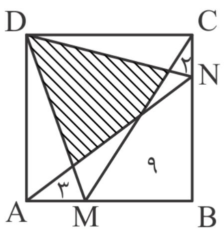
سوالات پاسخ کوتاه

۱. در مثلث ABC با مساحت $۳۶cm^2$ دو میانه‌ی BM و CN یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده‌اند. مساحت چهارضلعی $AMON$ برابر با چند سانتی‌مترمربع است؟

۲.چند عدد ۲۰۰۸ رقمی می‌توان پیدا کرد که هر دو رقم متوالیشان عددی دو رقمی تشکیل می‌دهد که بر ۱۷ یا ۲۳ بخش‌پذیر است؟

۳. در چند عدد سه رقمی، رقم دهگان، میانگین دو رقم یکان و صدگان است؟

۴.در شکل زیر، نقاط M و N روی اضلاع مربع $ABCD$ طوری انتخاب شده‌اند که مربع به هشت قسمت با مساحت‌های نابرابر تقسیم شده است. مساحت سه قسمت نیز داخل آن‌ها نوشته شده است. مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده برابر با چه عددی است؟



۵. مجموعه‌ای از اعداد صحیح و مثبت متوالی که از ۱ شروع می‌شوند، روی تخته‌سیاه نوشته شده است. یکی از این اعداد پاک شده و میانگین عددهای باقی‌مانده برابر با $۳۵\frac{۷}{۱۷}$ است. عدد پاک شده چیست؟

۶.چهل توپ را با اعداد ۱ تا ۴۰ شماره‌گذاری کرده‌ایم. می‌خواهیم توپ‌ها را در تعدادی جعبه قرار دهیم؛ به‌طوری‌که اگر در یک جعبه توپی با شماره‌ی n قرار داده شده باشد، توپ دیگری با مضرب n را نمی‌توانیم در آن جعبه بگذاریم. حداقل چند جعبه برای قرار دادن همه‌ی توپ‌ها لازم است؟

۷. در رابطه‌ی $(\overline{AB})\times(\overline{CB})=\overline{DDD}$ هر حرف نماینده‌ی یک رقم است و حروف متمایز نشان‌دهنده‌ی ارقام متمایز ۰ تا ۹ هستند. مجموع $D+A+C+B$ برابر با چه مقداری می‌شود؟

۸. چند عدد نه رقمی با ارقام متمایز و فاقد رقم صفر می‌توان پیدا کرد که در آن‌ها رقم یکان کوچک‌تر از رقم دهگان و رقم دهگان نیز کوچک‌تر از رقم صدگان باشد؟

۹.در یک مهمانی ۱۲ نفر شرکت کرده‌اند. هنگام ورود مهمان‌ها، هر کدام یک شماره از اعداد ۱ تا ۱۲ می‌گیرند. شماره‌ی هیچ دو نفری مثل هم نیست. مهمانان دور یک میز دایره‌ای می‌نشینند. میزبان یک ظرف شیرینی برای پذیرایی می‌برد. اما هرکس به شماره‌ی خودش و نفر سمت راستش نگاه می‌کند و به تعداد شماره‌ی بیشتر شیرینی برمی‌دارد. میزبان، حداقل چند شیرینی باید در ظرف شیرینی قرار دهد تا مطمئن شود که همه‌ی مهمانان بتوانند شیرینی بردارند؟

۱۰.چند متوازی‌الاضلاع می‌توان پیدا کرد که رأس‌هایشان از بین رئوس یک ۲۴ ضلعی منتظم باشد؟

۱۱.قورباغه‌ای می‌تواند پرش‌های یک متری و دو متری انجام دهد. اگر این قورباغه بخواهد مسافت ۹ متری را بپیماید، به چند روش مختلف می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱۲. در مثلث ABC یکی از میانه‌ها بر یکی از نیم‌سازهای داخلی عمود است. اگر اندازه‌ی ضلع‌های این مثلث سه عدد صحیح متوالی باشند، محیط این مثلث برابر با چه عددی است؟

۱۳. مقدار دو عدد $۲^{۱۳۹۵}$ و $۵^{۱۳۹۵}$ را حساب کرده و رقم‌هایشان را کنار یکدیگر می‌نویسیم. عدد حاصل چند رقمی است؟

۱۴. مربع اعداد طبیعی متوالی را به‌صورت زیر پشت سر هم می‌نویسیم:

۱۴۹۱۶۲۵۳۶۴۹...

صدمین رقم این دنباله‌ی عددی چیست؟

۱۵. حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی و مثبت x و y برابر ۶ شده است. کمترین مقدار ممکن برای $۲۱x + ۱۴y$ چیست؟

سوالات تشریحی

۱. اعداد ۱ تا ۱۰ را روی یک دایره نوشته‌ایم و نوع نوشتن طوری است که نظم خاصی ندارد؛ یعنی به‌ترتیب نیست. نشان دهید سه عدد متوالی یافت می‌شوند که جمع آن‌ها حداقل ۱۷ است.

۲. ۱۰۰۱ مهره را در یک دسته روی میز قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توان از دسته‌ای که بیش از یک مهره دارد، یک مهره را کنار گذاشت. سپس یکی از دسته‌ها را به دو بخش تقسیم کرد. آیا می‌توان پس از چند حرکت به وضعی رسید که روی میز فقط دسته‌هایی که هر یک شامل سه مهره‌اند، وجود داشته باشند؟ توضیح دهید.

۳. به چند روش می‌توان یک تیم ۱۲ نفره از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس هفتم، ۱۰ دانش‌آموز کلاس هشتم و ۱۰ دانش‌آموز کلاس نهم انتخاب کرد، به‌طوری‌که از هر کلاس حداقل یک نفر عضو تیم باشد؟

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان دانش آموزی شهر تهران

خانه ریاضی تهران

آزمون انتخابی هجدهمین دوره مسابقات جهانی ریاضی
IMC 2016

پاسخنامه سوال مرحله دوم

ویژه دانش‌آموزان پایه هفتم و هشتم بخش الف

(*Key Stage 2*)

(متولدین ۱۰ مرداد ۱۳۸۱ به بعد)

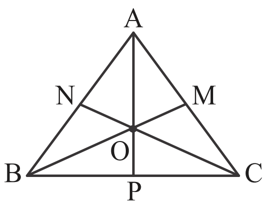
اردیبهشت ماه ۱۳۹۵

مدت زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

پاسخ کوتاه

۱.

جواب: ۱۲



راه‌حل: میانه‌ی AP را نیز رسم می‌کنیم. مثلث ABC به شش مثلث هم‌مساحت تبدیل می‌شود که مساحت چهارضلعی AMON برابر است با: $۲\times\frac{۳۶}{۶}=۱۲cm^{۲}$

۲.

جواب: ۹

راه‌حل: همه‌ی مضرب‌های دورقمی ۱۷ یا ۲۳ عبارتند از ۱۷، ۲۳، ۳۴، ۴۶، ۵۱، ۶۸، ۶۹، ۸۵ و ۹۲. توجه کنید که اگر جایی رقم ۱ باشد، باید عدد به ۱۷ ختم شود. اگر جایی رقم ۵ باشد، باید عدد به ۵۱۷ ختم شود و به همین ترتیب.

۳.

جواب: ۴۵

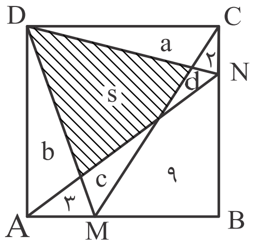
راه‌حل: در عدد سه رقمی $\overline{abc}$ باید $a+c$ زوج باشد. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب عبارت است از:

$$۴\times۵+۵\times۵=۴۵$$

خانه ریاضی تهران: میدان فاطمی، خیابان شهید گمنام، خیابان پیروزه، کوچه رادافزون پلاک ۷۴
تلفن:۸۸۹۷۲۸۱۷/۸۸۹۷۱۷۵۱/۸۸۹۶۰۲۶۴/۸۸۹۶۰۷۳۹(۰۲۱)
سامانه پیامکی: ۵۰۰۰۲۲۶۳۴۳۰
WWW.Mathhome.ir
Telegram.me/Mathhome

۴.

جواب: ۱۴



راه‌حل: مساحت هر یک از مثلث‌های AND و CMD برابر با نصف مساحت مربع است.

$$\begin{cases} s+b+d=a+۳+۲+c+۹ \\ s+a+c=b+۲+۳+d+۹ \end{cases} \Rightarrow ۲s+a+b+c+d=۲۸+a+b+c+d \Rightarrow ۲s=۲۸ \Rightarrow s=۱۴$$

۵.

جواب: ۷

راه‌حل: آخرین عدد روی تخته‌سیاه را برابر با n فرض می‌کنیم. بزرگ‌ترین مقدار ممکن میانگین، وقتی حاصل می‌شود که ۱ پاک شده باشد. در این حالت، مقدار میانگین برابر است با:

$$\frac{۲+۳+...+n}{n-۱}=\frac{n+۲}{۲}$$

کوچک‌ترین مقدار میانگین موقعی به دست می‌آید که n پاک شده باشد. در این‌صورت مقدار میانگین عبارت است از $\frac{n}{۲}$.

بنابراین $\frac{n}{۲} \le ۳۵\frac{۷}{۱۷} \le \frac{n+۲}{۲}$ و درنتیجه $n \le ۷۰\frac{۱۴}{۱۷} \le n+۲$ و $۶۸\frac{۱۴}{۱۷} \le n \le ۷۰\frac{۱۴}{۱۷}$. بنابراین $n=۶۹$ یا $n=۷۰$

چون $۳۵\frac{۷}{۱۷}$ میانگین $(n-۱)$ عدد صحیح است، حاصل‌ضرب $(n-۱)(۳۵+\frac{۷}{۱۷})$ باید صحیح باشد و درنتیجه $n=۶۹$.

اگر x پاک شده باشد، داریم:

$$\frac{\frac{۱}{۲}\times ۶۹\times ۷۰-x}{۶۸}=۳۵\frac{۷}{۱۷} \Rightarrow ۳۵-x=۲۸ \Rightarrow \boxed{x=۷}$$

۶.

جواب: ۶

راه‌حل: از میان اعداد $\{۱,۲^۱,۲^۲,۲^۳,۲^۴,۲^۵\}$ هیچ دوتایی نمی‌توانند در یک جعبه بیایند.

پس به حداقل شش جعبه نیاز داریم. به عنوان مثال $\{۱\}$، $\{۲,۳\}$، $\{۴,۵,۶,۷\}$، $\{۸,۹,...,۱۵\}$، $\{۱۶,۱۷,...,۳۱\}$ و $\{۳۲,۳۳,...,۴۰\}$ یک انتخاب مطلوب است.

۷.

جواب: ۲۱

راه‌حل: می‌دانیم که $\overline{DDD}=D\times ۱۱۱=D\times ۳\times ۳۷$. از طرفی باقی‌مانده تقسیم $\overline{AB}\times\overline{CB}$ بر ۱۰ برابر است با $B^{۲}$. اما ۳۷ یکی از دو عدد $\overline{CB}$ یا $\overline{AB}$ را عاد می‌کند.

به عنوان مثال، فرض کنید ۳۷، $\overline{CB}$ را می‌شمارد. بنابراین $\overline{CB}=۳۷$ یا $\overline{CB}=۷۴$. از $\overline{CB}=۷۴$ نتیجه می‌شود که $\overline{CB}\times\overline{AB}\geq ۷۴\times ۱۴=۱۰۳۶$ درصورتی که $\overline{DDD}\leq ۹۹۹$. پس $\overline{CB}=۳۷$ و $D=۹$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{AB}=\frac{۹۹۹}{۳۷}=۲۷$$
$$\overline{AB}=۲۷ \Rightarrow A=۲\,,\,B=۷$$
$$D=۹\,,\,\overline{CB}=۳۷ \Rightarrow C=۳$$
$$D+A+C+B=۹+۲+۳+۷=۲۱$$

۸.

جواب: ۶۰۴۸۰

راه‌حل: برای سایر رقم‌ها $p(۹,۶)=\frac{۹!}{۳!}=۶۰۴۸۰$ انتخاب وجود دارد و برای سه رقم یکان، دهگان و صدگان نیز یک انتخاب باقی می‌ماند.

۹.

جواب: ۱۱۴

راه‌حل: حداکثر دو نفر می‌توانند ۱۲ شیرینی بردارند که این دو نفر عبارتند از نفر شماره‌ی ۱۲ و نفر سمت چپ او. به همین ترتیب، حداکثر دو نفر می‌توانند ۱۱، ۱۰، ۹، ۸ و ۷ شیرینی بردارند.

$$۲\times(۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲)=۱۱۴$$

۱۰.

جواب: ۶۶

راه‌حل: فرض کنید ۲۴ ضلعی مورد نظر درون دایره‌ای محاط شده باشد. همه‌ی متوازی‌الاضلاع‌های مورد نظر مستطیل هستند. پس جواب نهایی مسئله عبارت است از:

$$\binom{۱۲}{۲}=۶۶$$

۱۱.

جواب: ۵۵

راه‌حل: a_n را تعداد حالت‌های مختلف پیمودن مسافت n متری در نظر می‌گیریم.

$$a_۰=a_۱=۱\,,\,a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲} \Rightarrow a_۹=۵۵$$

.۱۲

جواب: ۹

راه‌حل: فرض کنید AD نیم‌ساز زاویه‌ی A و BM میانه‌ی وارد بر ضلع AC باشد و $AD \perp BM$.

در مثلث ABM، ارتفاع و نیم‌ساز نظیر رأس A بر هم منطبق شده‌اند. بنابراین مثلث ABM متساوی‌الساقین است و $AM = AB$ در نتیجه $AC=۲AB$. پس اگر $x-۱$، x و $x+۱$ طول اضلاع مثلث باشند، یکی از این سه عدد دو برابر دیگری است. بنابراین طول اضلاع مثلث عبارت است از ۲، ۳ و ۴. درنتیجه محیط این مثلث برابر است با:

$$۲+۳+۴=۹$$

.۱۳

جواب: ۱۳۹۶

راه‌حل: فرض کنید $۲^{۱۳۹۵}$ دارای m و $۵^{۱۳۹۵}$ دارای n رقم باشند.

$$\left.\begin{array}{l} ۱۰^{m-۱} < ۲^{۱۳۹۵} < ۱۰^{m} \\ ۱۰^{n-۱} < ۵^{۱۳۹۵} < ۱۰^{n} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۰^{m-۱} \times ۱۰^{n-۱} < ۲^{۱۳۹۵} \times ۵^{۱۳۹۵} < ۱۰^{m+n} \Rightarrow ۱۰^{m+n-۲} < ۱۰^{۱۳۹۵} < ۱۰^{m+n}$$

$$\Rightarrow \quad m+n-۱=۱۳۹۵ \quad \Rightarrow \quad m+n=۱۳۹۶$$

.۱۴

جواب: ۹

راه‌حل: به ازای $۱\le n \le ۳$، عدد $n^۲$ یک‌رقمی است. به ازای $۴ \le n \le ۹$، عدد $n^۲$ دورقمی است. به ازای $۱۰ \le n \le ۳۱$ عدد $n^۲$ سه رقمی است. به این ترتیب دنباله‌ی مربعات ۱ تا ۳۱ دارای ۸۱ رقم می‌باشد. درنتیجه برای اضافه کردن ۱۹ رقم بعدی باید ۵ مربع چهاررقمی به دنباله‌ی عددی حاصل، اضافه کنیم. آخرین رقم، رقم قبل از آخرین رقم مربع $۳۲+۵-۱=۳۶$ است. چون $۳۶^۲=۱۲۹۶$ پس رقم صدگان و جواب مسئله ۹ می‌باشد.

.۱۵

جواب: ۸۴

راه‌حل:

$$r=۳x\ ,\ s=۲y \quad u=۲۱x+۱۴y=۷r+۷s=۷(r+s)$$

برای این‌که حداقل مقدار u به‌دست بیاید، باید داشته باشیم:

$$s=r=۶ \quad \Rightarrow \quad u_{\min}=۸۴$$

پاسخ تشریحی

۱.

راه‌حل: اعداد نوشته شده دور دایره را $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ درنظر بگیرید. $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$
\begin{array}{ll}
S_1 = a_1 + a_2 + a_3 & S_2 = a_2 + a_3 + a_4 \\
S_3 = a_3 + a_4 + a_5 & S_4 = a_4 + a_5 + a_6 \\
S_5 = a_5 + a_6 + a_7 & S_6 = a_6 + a_7 + a_8 \\
S_7 = a_7 + a_8 + a_9 & S_8 = a_8 + a_9 + a_{10} \\
S_9 = a_9 + a_{10} + a_1 & S_{10} = a_{10} + a_1 + a_2
\end{array}
$$

هر کدام از a_iها در سه تا از S_iها ظاهر شده‌اند. بنابراین داریم:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{10} = 3(1+2+3+\ldots+10) = 165$$

حاصل جمع ۱۰ عدد S_1 تا S_{10} برابر ۱۶۵ شده است. بنابراین طبق اصل لانه کبوتر یکی از Sها وجود دارد که مقدار آن حداقل ۱۷ است.

۲.

راه‌حل: در این مسئله چیزی که ناوردا باقی می‌ماند، عبارت است: از تعداد مهره‌ها + تعداد دسته‌ها.
در ابتدا تعداد مهره‌ها به اضافه‌ی تعداد دسته‌ها عبارت است از ۱۰۰۲=۱+۱۰۰۱. در پایان اگر تعداد دسته‌ها برابر با x باشد، تعداد مهره‌ها برابر $4x$ خواهد بود. از آن‌جا که ۱۰۰۲ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، پس نمی‌توان به وضعیت خواسته شده در مسئله رسید.

۳.

راه‌حل: فرض کنید S مجموعه‌ی کل تیم‌های ۱۲ نفره از بین ۳۰ نفر باشد و A_1، A_2 و A_3 مجموعه‌ی تیم‌های ۱۲ نفره باشند که در آن‌ها به ترتیب هیچ کلاس هفتمی، هیچ کلاس هشتمی و هیچ کلاس نهمی حضور نداشته باشند.
در این صورت جواب عبارت است از:

$$\binom{30}{12} - 3\binom{20}{12} = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$