خلاصه فرمول های آمار و احتمال

مخصوص مهندسان صنایع

(بر اساس کتاب وحیدی اصل)

مهندسی صنایع در محیط دانشگاه

www.ieuni.ir

فرمولهای فصل اول

آمار و احتمال

n : تعداد داده ها ، حجم جامعه آماری

K : تعداد رده ها ، تعداد طبقات

C : طول رده ، فاصله طبقات

F_i : فراوانی مطلق

R : دامنه تغییرات

f_i : فراوانی نسبی

FC_i : فراوانی تراکمی یا تجمعی کمتر از یا فراوانی تجمعی بیشتر از

۱) $R = x_{max} - x_{min}$ $\Rightarrow$ دامنه تغییرات = مقدار بزرگترین داده − مقدار کوچکترین داده

۲) $n = 2^K$

۳) $k = 1 + 3.3\log(n)$

۴) $C = \frac{R}{k}$ $\Rightarrow$ طول رده = دامنه تغییرات / تعداد رده

۵) $\sum F_i = n$

۶) $\sum f_i = 1$

۷) فراوانی نسبی = فراوانی مطلق / حجم جامعه آماری $\Rightarrow f_i = \frac{F_i}{\sum F_i} = \frac{F_i}{n}$

شاخص های گرایش مرکزی :

۱- میانگین $\bar{X}$: فرمول میانگین حسابی در جوامع نمونه (داده) (عدد متوسط جامعه)

۸) $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

فرمول " " در جدول : m_i معدل هر رده و F_i فراوانی مطلق هر رده

۹) $\bar{X} = \frac{\sum F_i m_i}{n}$

۲- میانه : (عدد وسط جامعه) (Md : یا $\tilde{X}$)

الف - روش داده های معمولی برای محاسبه میانه : اول داده ها را به ترتیب نزولی یا صعودی مرتب می کنیم. اگر تعداد داده ها فرد باشد $n = 2K+1$ یک عدد در وسط قرار می گیرد عدد $(K+1)$ ام میانه خواهد بود. K عدد در چپ و K عدد در راست قرار می گیرد.
ولی اگر تعداد داده ها زوج باشد ($n = 2K$) معدل دو عدد وسط میانه خواهد بود. یعنی معدل عدد K ام و $(K+1)$ ام

ب - روش محاسبه میانه از روی جدول : ستون فراوانی تجمعی را پیدا می کنیم (FC_i) - $\frac{N}{2}$ را حساب می کنیم ← در ستون FC_i عددی که بلافاصله بعد از $\frac{N}{2}$ قرار دارد پیدا کرده و آن را طبقه ~~ضمنی~~ میانه دار می نامیم

L_i : کرانه پایین طبقه میانه دار

۱۰) $Md = L_i + \frac{\frac{N}{2} - FC_{i-1}}{F_i} \times C$

نکته : اگر داده ها پیوسته باشند در L_i همان کرانه پایین طبقه را می نویسیم ولی در صورتیکه داده ها ناپیوسته باشند، از کرانه پایین طبقه ۰/۵ کم می کنیم $L_i = L_i - 0.5$

۳- مد MO : بیشترین تکرار در جامعه آماری الف- روش محاسبه مد از روی داده ها :

۸-۴-۲-۳-۴-۵ $\Rightarrow MO = 4$

۸-۴-۳-۳-۴-۵ $\Rightarrow MO = 4, 3$

ب - روش محاسبه مد از روی جدول :

d_1 : اختلاف فراوانی طبقه مددار با طبقه بالاتر

d_2 : اختلاف فراوانی طبقه مددار با طبقه پایین تر

۱۱) $MO = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times C$

انواع نمودار ها : ۱- نمودار چند ضلعی (پلی گون) ۲- نمودار میله ای ۳- نمودار ستونی (هیستوگرام - بارگراف) ۴- نمودار دایره ای

هیستوگرام : پیوسته - برای واحدهای پیوسته یا شاخص های که بصورت پیوسته اند.

بارگراف : ناپیوسته - جداولی که ستون اول آن ناپیوسته نوشته شده باشد. شاخص ها دارای یک واحد فاصله اند.

نکته : برای رسم نمودار از دو بعد استفاده می کنیم. یکی نمودار افقی و دیگری نمودار عمودی. در محور افقی اگر x_i داشته باشیم آن را می نویسیم و اگر نداشته باشیم، CL را می نویسیم. در محور عمودی F_i را می نویسیم. در نمودار شاخص بجای x_i در محور افقی CL می نویسیم.

نمودار دایره ای : کل حجم جامعه را یک دایره فرض می کنیم.

۳۵) $S=\frac{360}{N}\times F_i$

توزیع های فراوانی می تواند هر شکل و وضعی داشته باشند:

۱- توزیع زنگ شکل متقارن ۲- توزیع با چولگی منفی یا چولگی به چپ ۳- توزیع با چولگی مثبت یا چولگی به راست

۴- توزیع J معکوس شکل ۵- توزیع U شکل

ضریب چولگی پیرسن : $\tilde{x}$ میانه ، $\bar{x}$ میانگین

۳۶) $SK=\frac{3(\bar{x}-\tilde{x})}{S}$

میزان کشیدگی یا برجستگی منحنی : S انحراف معیار نمونه ، M_4 گشتاور مرکزی رتبه چهارم

۳۷) $K=\frac{M_4}{S^4}-3$

گشتاور مرکزی رتبه چهارم :

۳۸) $M_4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4$

جدولهای دو متغیره : مشاهدات جفتی مربوط به دو صفت از جامعه که بصورت تصادفی نمونه گیری شده اند را در جدولهای دو بعدی مرتب می کنیم:

(x_1,y_1) و (x_2,y_2) و ... و (x_n,y_n)

معیارهای توصیفی برای دو متغیر :

۳۹) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s}n_{ij}x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}n_{i0}x_i$

۴۰) $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s}n_{ij}y_j=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}n_{0j}y_j$

۴۱) $S_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}n_{ij}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}n_{i0}(x_i-\bar{x})^2$

۴۲) $S_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}n_{ij}(y_i-\bar{y})^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}n_{0j}(y_i-\bar{y})^2$

ترکیب کمیتی که می تواند تاثیرات دو متغیر بر یکدیگر را اندازه گیری کند کوواریانس x و y می نامند.

۴۳) $S_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s}n_{ij}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x}) \Rightarrow S_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s}n_{ij}(x_iy_j-\bar{x}\bar{y})$

اگر دو متغیر همسو باشند مقدار کوواریانس مثبت می شود و اگر دو متغیر همسو نباشند مقدار کوواریانس منفی می شود.

۴۴) $S_{ax+b,cy+d}=acS_{xy}$

ضریب همبستگی خطی : سنجش میزان وابستگی دو متغیر

۴۵) $r_{xy}=r=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}$

نکته : ۱- $r_{ax+b,cy+d}=\pm r_{xy}$

۲- ضریب همبستگی خطی r در فاصله $-1\le r\le 1$ تغییر می کند.

۳- $r=\pm1$ ضریب همبستگی کامل
$r<0$ ضریب همبستگی معکوس
$r>0$ ضریب همبستگی مستقیم

$\Leftarrow$ بنابراین هرچه r به ±1 نزدیکتر، همبستگی خطی شدیدتر و هرچه به صفر نزدیک تر شود همبستگی ضعیف تر می شود. (مثالها در جزوه)

فرمول محاسبه میانگین به روش کدگذاری :

۲۴) $\bar{x} = m_0 + \dfrac{\sum_{i=1}^{k} u_i f_i}{n} c$

که در آن m_0 نماینده رده‌ای است که در کدگذاری نماینده‌ی جدید و دارای آن در نظر گرفته‌ایم و c طول مشترک رده‌هاست.

فرمول محاسبه انحراف معیار به روش کدگذاری

۲۵) $S = c\sqrt{\dfrac{n\left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2 f_i\right) - \left[\sum_{i=1}^{k} u_i f_i\right]^2}{n(n-1)}}$

کاربردهای انحراف معیار :

۱- ضریب تغییر : از تقسیم انحراف معیار بر میانگین بدست می‌آید. و معمولاً در عدد ۱۰۰ ضرب می‌شود.

۲۶) $V = \dfrac{S}{\bar{x}} \times 100$

۲- نمره استاندارد : $x_n, \dots, x_2, x_1$ داده‌ها و $\bar{x}$ میانگین این داده‌ها و $n, \dots, 1 = i$

۲۷) $Z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{S}$

چنانچه بخواهیم دو مشاهده از دو نمونه‌ی مختلف را با هم مقایسه کنیم، استاندارد شده آن کار را آسان می‌کند.

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n \Rightarrow \bar{Z} = 0$ و $S_Z = 1$

۳- قضیه چبیشف : چنانچه پراکندگی دو نمونه از یک جمعیت را با یکدیگر مقایسه کنیم می‌گوییم نمونه‌ای که دارای انحراف معیار بزرگتری است پراکندگی آن بیشتر است. چنانچه داده به میانگین نزدیک شود انحراف معیار به صفر نزدیک می‌شود.

قضیه : برای هر مجموعه از داده‌ها و هر عدد ثابت $k \geq 1$، حداقل $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times 100$ درصد داده باید به فاصله k برابر انحراف معیار در دو طرف میانگین قرار گیرند.

قضیه چبیشف برای حالتهای خاص k به صورت زیر است :

۱- ممکن است تعداد خیلی کم داده‌ها به بازه $(\bar{x} - S , \bar{x} + S)$ تعلق داشته باشند.

۲- حداقل ۷۵ درصد داده‌ها به بازه $(\bar{x} - 2S , \bar{x} + 2S)$ تعلق خواهند داشت.

دستور تجربی : برای داده‌هایی که منحنی فراوانی آنها زنگی شکل است داریم :

الف - تقریباً ۶۸ درصد داده‌ها به بازه $(\bar{x} - S , \bar{x} + S)$ تعلق دارد.

ب - 〃 ۹۵ 〃 〃 〃 $(\bar{x} - 2S , \bar{x} + 2S)$ 〃 〃.

ج - 〃 ۹۹٫۷ 〃 〃 〃 $(\bar{x} - 3S , \bar{x} + 3S)$ 〃 〃.

چارک ها :

چارک اول (Q_1) نقطه‌ای است که ۲۵ درصد حجم جامعه آماری در پایین آن قرار دارد و چارک دوم (Q_2) (میانه) ، نقطه‌ای است که ۵۰٪ داده‌ها در پایین آن قرار دارد و چارک سوم (Q_3) نقطه است که ۷۵٪ داده‌ها در پایین آن قرار دارد.

۲۸) $Q = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ انحراف چارکی

۲۹) $R = Q_3 - Q_1$ دامنه تغییرات بین چارکها

۳۰) $Q_1 = L_i + \dfrac{\frac{N}{4} - FC_{i-1}}{F_i} \times C$ چارک اول

۳۱) $Q_3 = L_i + \dfrac{\frac{3N}{4} - FC_{i-1}}{F_i} \times C$ چارک سوم

۳۲) $D_6 = L_i + \dfrac{\frac{6N}{10} - FC_{i-1}}{F_i} \times C$ دهک ششم

۳۳) $P_{70} = L_i + \dfrac{\frac{70N}{100} - FC_{i-1}}{F_i} \times C$ صدک هفتادم

۳۴) ضریب تغییر چارکی $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

۴- میانگین هماز (هارمونیک): معکوس میانگین حسابی معکوس های داده هاست. $(\bar{X}_H)$

فرمول میانگین هماز برای زمانی که داده ها در اختیار باشند. $\frac{1}{\bar{X}_H}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \Rightarrow$

$$۱۲)\quad \bar{X}_H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

فرمول میانگین هماز برای زمانی که جدول فراوانی (داده های رده بندی شده) در اختیار باشند.

$$۱۳)\quad \bar{X}_H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}f_i}$$

m_i: مرکز رده یا طبقه

نکته: اگر داده ها دارای واحد اندازه گیری ترکیبی باشد مثل متر بر ثانیه و ... یا داده های مربوط به آهنگ تغییرات میانگین هماز مفیدتر از حسابی است.

۵- میانگین هندسی: میانگین هندسی n عدد مثبت، ریشه ی n ام حاصلضرب آنهاست.

اگر داده ها در اختیار باشند $\Leftarrow$

$$۱۴)\quad \bar{x}_G=\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}=(x_1x_2\dots x_n)^{\frac{1}{n}} \qquad ۱۵)\quad \log\bar{x}_G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

اگر جدول در اختیار باشد $\Leftarrow$ m_i: مرکز رده i ام و f_i فراوانی این رده

$$۱۶)\quad \log(\bar{x}_G)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_i\log(m_i)$$

نکته ۱: میانگین هندسی در پیدا کردن آهنگ متوسط تغییرات، مثلاً در جمعیت و یا محاسبه میانگین نسبت تغییرات مانند افزایش قیمت و غیره، مفید است.

نکته ۲: در داده های مثبت رابطه بین میانگین ها به صورت زیر است:

$$۱۷)\quad \underset{\text{حسابی}}{\bar{x}} \geq \underset{\text{هندسی}}{\bar{x}_G} \geq \underset{\text{هماز}}{\bar{x}_H}$$

شاخص های پراکندگی:

۱- دامنه: ساده ترین معیار سنجش پراکندگی

مقدار بزرگترین داده − مقدار کوچکترین داده = دامنه تغییرات

عیب عمده دامنه آن است که فقط بزرگترین و کوچکترین مقدار داده ها را در نظر می گیرد.

۲- انحراف معیار: مفیدترین معیار سنجش پراکندگی

نکته: در هر جامعه آماری مجموع انحراف از میانگین صفر است. برای رفع این مشکل، انحراف داده ها از میانگین را داخل قدر مطلق قرار می دهیم.

$$۱۸)\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overset{\text{میانگین}}{\bar{x}})=0$$

۱۹) فرمول میانگین قدر مطلق انحرافات (انحراف میانگین) $E=\frac{\sum|x_i-\bar{x}|}{n}$

فرمول انحراف معیار و واریانس در صورتیکه داده ها در اختیار باشند.

$$۲۰)\quad S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} \qquad ۲۱)\quad S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

فرمول 〃 〃 〃 〃 داده های رده بندی شده در اختیار باشند.

$$۲۲)\quad S^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}(m_i-\bar{x})^2f_i}{n-1} \qquad ۲۳)\quad S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(m_i-\bar{x})^2f_i}{n-1}}$$

واریانس و میانگین به روش کدگذاری:

در این روش نماینده یکی از رده ها (ترجیحاً رده ی وسطی یا یکی از رده های واقع در اواسط جدول) را صفر (۰) اختیار می کنیم. سپس نماینده های رده های بالای این رده را اعداد صحیح منفی، یعنی ۱-، ۲-، ... و نماینده های رده های واقع در زیر این رده را اعداد صحیح مثبت، یعنی ۱، ۲، ... اختیار می کنیم و این نماینده های جدید رده ها را با $u_1, u_2, \dots, u_n$ نشان می دهیم.

فرمولهای فصل هفتم

تعمیم اصل اول شمارش (اصل جمع): اگر در انجام عملی بتوانیم یکی از k عمل را انتخاب کنیم به طوری که عمل اول به n_1 راه و عمل دوم به n_2 راه و ... کل عمل به $n_1+n_2+\dots+n_k$ طریق انجام می‌شود.

تعمیم اصل دوم شمارش (اصل ضرب): اگر عملی مرکب از k مرحله باشد به طوری که مرحله اول به n_1 طریق و برای هر یک از این راهها مرحله دوم به n_2 طریق و بدین ترتیب و آنگاه کل عمل به $n_1 n_2 \cdots n_k$ طریق صورت می‌پذیرد.

جایگشت: صورتهای مختلف قرار گرفتن n شیء مختلف را (n به n)، پهلوی هم، جایگشت می‌گویند.

1) $n! = n(n-1)\cdots\times 2\times 1 \Rightarrow$ 1) $P_n = n!$

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز که روی یک دایره مرتب شده‌اند برابر است با:

2) $P_n = (n-1)!$

ترتیب: تعداد ترتیب r تایی از n شیء متمایز برای $r=0,\dots,n$ عبارت است از:

3) $_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

نکته: ترتیب قرار گرفتن اشیا پهلوی هم مهم می‌باشد.

فرمول ترتیب یا جایگشت با تکرار بصورت n^r می‌باشد.

4) n^r

ترکیب: اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم از n شیء فقط r شیء انتخاب کنیم به طوریکه ترتیب r شیء مهم نباشد برابر است با:

5) $_nC_r = \binom{n}{r} = \dfrac{_nP_r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

فرمول ترکیب با تکرار بصورت مقابل است:

6) $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$

نکته:

۱- ترکیب هر عدد با یک خود آن عدد است. $\binom{n}{1} = n$

۲- ترکیب هر عدد با خودش یک است. $\binom{n}{n} = 1$

۳- $0! = 1$

۴- $_nP_0 = 1$ $_nP_0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = 1$

ضرایب دوجمله‌ای:

برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

7) $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^{n}$

8) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ $r=0,1,2,\dots,n$ $\xrightarrow{\text{اثبات}}$ $\binom{n}{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$

9) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

10) $\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$ k، m و n عدد صحیح مثبت

نکته: ضریب چندجمله‌ای $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ در بسط $(x_1+x_2+\dots+x_n)^n$ برابر است با:

11) $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots r_k!}$

فرمولهای فصل سوم

آمار و احتمال

آزمایش تصادفی: یک آزمایش تصادفی (یا آماری) آزمایشی است که در آن فضای نمونه (S) مشخص باشد، نتایجی که از قبل قطعی نیست (پیشامد یا برآمد) بدست آید و تحت شرایط یکسان تکرار شود.

پیشامد: یک پیشامد زیرمجموعه‌ای از S است و با A و B و C نشان داده می‌شود. گوییم پیشامد A رخ می‌دهد هرگاه برآمد آزمایش عضوی از آن باشد.

نکته ۱: اگر پیشامد A تنها یک عضو داشته باشد ⟸ پیشامد ساده. اگر $A=S$ ⟸ پیشامد حتمی. اگر تهی باشد ⟸ پیشامد محال.

نکته ۲: اگر $A\subset B$ و $B\subset A$ ⟸ $A=B$ پیشامدهای برابر. اگر هر عضو A در B نیز باشد ⟸ $A\subset B$ زیرپیشامد

نکته ۳: $A\cup B$: اجتماع دو پیشامد از تمام عضوهای A یا B یا هر دو تشکیل می‌شود. زمانی رخ می‌دهد که لااقل یکی از A و B رخ دهد.

نکته ۴: اگر A و B دو پیشامد از S باشند $A\cap B=\phi$ ⟸ A و B را دو پیشامد جدا از هم یا ناسازگار می‌نامند.

نکته ۵: تفاضل دو پیشامد A از B را با $A-B$ نشان می‌دهد که برابر است با تمام عناصری که در A باشد در B نباشد.

نکته ۶: اگر $A\subset B$ باشد $A-B=\phi$ و به $B-A$ یک تفاضل واقعی گویند، زیرا B تمام A را در بر می‌گیرد.

نکته ۷: تفاضل پیشامد A از فضای نمونه یعنی $S-A$ را متمم پیشامد A می‌گویند و آن را با A' نشان می‌دهند.

برای محاسبه متمم احتمال، احتمال محاسبه شده را از یک کم می‌کنیم.

۱) $A\cup A'=S$ ، $A\cap A'=\phi$ ۱۰) $P(A')=1-P(A)$

نکته: تفاضل متقارن دو پیشامد A و B عناصر آن یا عضوی از A، یا عضوی از B ولی نه عضو هر دو تشکیل می‌شود و آن را با $A\Delta B$ نشان می‌دهند.

۲) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

دو پیشامد سازگار و ناسازگار: هرگاه در وقوع دو پیشامد اشتراک آنها تهی باشد، ناسازگار و اگر غیر تهی باشد ⟸ سازگار.

$A\cap B=\phi \Rightarrow$ ناسازگار

$A\cap B\neq\phi \Rightarrow$ سازگار

احتمال اجتماع دو پیشامد:

۳) $A\cap B=\phi \Rightarrow$ ناسازگار $\Rightarrow P_{A\cup B}=P_A+P_B$

۴) $A\cap B\neq\phi \Rightarrow$ سازگار $\Rightarrow P_{A\cup B}=P_A+P_B-P_{A\cap B}$

احتمال: هر موقع از وقوع قطعی یک حادثه نتوانیم با اطمینان حرف بزنیم از کلمهٔ احتمال استفاده می‌کنیم، و با P نشان می‌دهیم.

مجموع حالات مساعد، مجموعه‌ای است که حالات دلخواه از انجام یک آزمایش را نشان می‌دهد.

$$P(A)=\frac{\text{تعداد مجموعهٔ حالات مساعد}}{\text{تعداد مجموعهٔ فضای نمونه}} \Rightarrow \text{۵)}\ P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A)=1$ حتمی الوقوع $P(A)=0$ غیرممکن $0<P(A)<1$ تصادفی ۶) $P(\phi)=0$

احتمال یک پیشامد عدد حقیقی نامنفی است

۷) $P(S)=1$ ۸) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

اگر $A_1, A_2, A_3, \ldots$ دنباله متناهی یا نامتناهی از پیشامدهای دو به دو ناسازگار در S باشند، آنگاه ⟸

۹) $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots$

فرمول تعداد عضوهای فضای نمونه : ۱۱) $n(S) = (\text{تعداد پیشامد در یک آزمایش})^{\text{تعداد آزمایش}}$

نکته : در سکه پایه ۲ است و در تاس پایه ۶ است.

مثال : سه بار پرتاب تاس => ۱۳) $n(s) = 6^3$ سه بار پرتاب سکه => ۱۲) $n(s) = 2^3$

نکته : در احتمال اگر (و) تغییر بشود، احتمال ضعیف تر می شود => در هم ضرب می کنیم.
" " " (یا) " " " قوی تر " " => با هم جمع می کنیم.

قضیه : برای هر دو پیشامد ناسازگار از S مانند A و B داریم :
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

نکته : اگر A یک پیشامد و A' متمم آن باشد داریم :
$$S = A\cup A'$$
$$P(S) = P(A\cup A') = P(A) + P(A') \quad , \quad P(A') + P(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A') = 1 - P(A)$$

قضیه : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $A\subset B$ آنگاه ۱۴) $P(A) \leq P(B)$

قضیه : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند آنگاه
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

قضیه : اگر A و B و C سه پیشامد دلخواه از فضای نمونه ی S باشند آنگاه

۱۵) $P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

احتمال شرطی : هرگاه وقوع یک احتمالی را مشروط بر وقوع احتمال دیگری کنیم، آن را احتمال شرطی می نامند و با $P(A|B)$ نشان می دهند.

۱۶) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \xrightarrow{\text{قاعده ضرب}} P(A)\neq 0 \Rightarrow$ ۱۷) $P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$

$\xrightarrow{\text{تعمیم قاعده ضرب}} P(A)\neq 0 \,,\, P(A\cap B)\neq 0 \Rightarrow$ ۱۸) $P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$

طبق جزوه : فرمول احتمال شرطی => $P(A|B) = P(A)\times P(B)$ معمولاً حرف ربط (و) علامت احتمال شرطی است. یا اینکه جمله را بتوان طوری تغییر کرد که از (و) استفاده نشود.

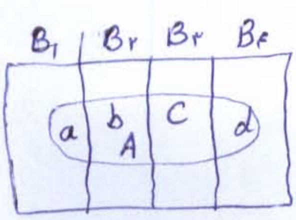
دو پیشامد مستقل و غیرمستقل : اگر وقوع یک پیشامدی بر احتمال وقوع پیشامد دیگر هیچ تأثیری نداشته باشد آن دو پیشامد را مستقل و اگر نتیجه آنها بر هم دیگر تأثیر داشته باشد، آن دو پیشامد را غیرمستقل می نامند.

(بدون جایگذاری => غیرمستقل (وابسته)   و با جایگذاری => مستقل (غیروابسته))

دو پیشامد A و B را مستقل گویند اگر و فقط اگر $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A و B' ، A' و B ، A' و B' نیز مستقل هستند.

قاعده بیز :



$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_4)P(A|B_4) \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ P(B_i) \neq 0 \end{cases}$$

$a = P(A|B_1) \quad b = P(A|B_2) \quad c = P(A|B_3) \quad d = P(A|B_4)$

۱۹) $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(A|B_i)$

۲۰) $P(B_r|A) = \dfrac{P(B_r)\,P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(A|B_i)} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ P(B_i) \neq 0 \\ P(A) \neq 0 \\ r = 1, 2, \dots, k \end{cases}$

آمار و احتمال

فرمولهای فصل چهارم

متغیر تصادفی X : متغیری است که مقدار آن پس از انجام آزمایش مشخص می‌شود. (تابعی است عضوی که روی S تعریف می‌شود.)

متغیر تصادفی گسسته (جدا) : متغیری است که مجموعه برد آن مجموعه‌ای با تعداد اعضای متناهی یا نامتناهی ولی شمارش پذیر باشد.

متغیر تصادفی پیوسته : متغیری است که مجموعه برد آن مجموعه‌ای با تعداد اعضای نامتناهی و شمارش ناپذیر باشد.

مراحل حل مسأله :

۱. شناخت کامل آزمایش تصادفی — ۲. تعریف فضای نمونه آزمایش (به طور مناسب)

۳. تعریف متغیر تصادفی مناسب — ۴. تعیین برد متغیر تصادفی

۵. احتمال برابر متغیر تصادفی را با هر کدام از اعضای برد متغیر تصادفی محاسبه می‌کنیم.

۶. محاسبه احتمال مجهول با استفاده از مقادیر تابع احتمال

تابع احتمال (توزیع احتمال) : تابعی است که دامنه آن مقادیر ممکن متغیر تصادفی و حوزه آن احتمال مربوط به هر تعداد متغیر تصادفی است.

تابع احتمال گسسته (توزیع احتمال گسسته) : $f(x)$

x_i	x_1	x_2	....	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

۱. شرایط تابع احتمال گسسته $\Rightarrow$

$1)\ \forall x_i \in X \quad f(x_i) \geq 0$ $\qquad 2)\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

تابع احتمال پیوسته (تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته) : اگر متغیر تصادفی X پیوسته $\Rightarrow$ نمودار توزیع احتمال پیوسته

۲. شرایط تابع احتمال پیوسته :

$1)\ f(x) \geq 0$ $\qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$3)\ x=a \Rightarrow P(x=a)=0$ $\qquad 4)\ a<x<b \Rightarrow P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx$

$5)\ P(a<x<b)=P(a\leq x<b)=P(a<x\leq b)=P(a\leq x\leq b)$

تابع توزیع (تابع احتمال تجمعی) : تابعی است که به ازاء جمیع مقادیر ممکن متغیر تصادفی X، احتمال وقوع مقدار کوچکتر یا مساوی با X را نشان می‌دهد. با $P(X\leq x)$ یا $F(x)$ نشان می‌دهند.

۳. اگر متغیر تصادفی X گسسته باشد $\Rightarrow$ تابع توزیع $\Rightarrow$ $F_x(x)=P(X\leq x)=\sum_{t\leq x} f_x(t)$

۴. اگر متغیر تصادفی X پیوسته باشد $\Rightarrow$ تابع توزیع $\Rightarrow$ $F_x(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f_x(t)$

۵. شرایط تابع توزیع :

$1)\ F(x)\geq 0$ $\qquad 2)\ 0\leq F(x)\leq 1$ $\qquad 3)\ F(x)$ تابعی غیر نزولی

$4)\ a<b \Rightarrow F(a)\leq F(b)$ $\qquad 5)\ F(x)$ از راست پیوسته است $\qquad 6)\ F(+\infty)=1\ ,\ F(-\infty)=0$

$7)\ P(a\leq X\leq b)=F(b^{+})-F(a^{-})$ $\qquad 8)$ اگر تابع توزیع پیوسته باشد $\Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx} \\ P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \end{cases}$$

فرمولهای فصل چهارم

آمار و احتمال

۹) درصورتیکه تابع توزیع نقاط گسستگی داشته باشد

$$f(x)=\begin{cases}(F(x))' & \text{در فواصل}\\ |F(x^+)-F(x^-)| & \text{در نقاط مرزی}\end{cases}$$

۱۰) محاسبه احتمال با استفاده از تابع توزیع $\Rightarrow$

$$\begin{cases}P(X=a)=|F(a^+)-F(a^-)| & \text{در نقاط گسسته } a\\ P(X=a)=0 & \text{در صورت پیوسته بودن}\end{cases}$$

نکته: اگر از تابع چگالی مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم، مد یا نما بدست می آید.

۶) مد: $f'(x)=0 \Rightarrow X=MO$

$F''(x)=0 \Rightarrow X=MO$

نکته: اگر تابع توزیع را برابر $\frac{1}{2}$ قرار دهیم، مقدار میانه بدست می آید.

۷) میانه: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\frac{1}{2} \Rightarrow x=$ میانه

نکته: اگر تابع توزیع را برابر $\frac{a}{4}$ قرار دهیم. $(a=1,2,3)$ چارک ها بدست می آید.

۸) چارک: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\frac{a}{4} \Rightarrow$ ($X=$ ام a چارک)

توزیع احتمال توام: چگالی احتمال توام (مشترک):

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند احتمال پیشامد همزمان X و Y را توزیع احتمال توام X و Y گویند و با $f(x,y)$ نشان می دهند.

خواص توزیع احتمال توام:

9) $f(x,y)\geq 0 \Rightarrow \forall(x,y)$

10) $\sum_x \sum_y f(x,y)=1$ (گسسته)

11) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ (پیوسته)

توزیع حاشیه ای X و Y:

12) اگر X و Y گسسته باشند. $\Rightarrow$

$$\begin{cases}f(x)=\sum_y f(x,y) & \text{توزیع حاشیه ای } X\\ f(y)=\sum_x f(x,y) & \text{توزیع حاشیه ای } Y\end{cases}$$

13) اگر X و Y پیوسته باشند $\Rightarrow$

$$\begin{cases}f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy & \text{توزیع حاشیه ای } X\\ f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx & \text{توزیع حاشیه ای } Y\end{cases}$$

نکته: X و Y را مستقل می گویند اگر و فقط اگر

14) $f(x,y)=f(x)\,f(y)$

توزیع احتمال شرطی:

توزیع احتمال شرطی متغیر تصادفی X درصورتی که $Y=y$ چنین است:

15) $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ ,\ f_Y(y)>0$

توزیع احتمال شرطی متغیر تصادفی Y درصورتیکه $X=x$ چنین است:

16) $f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\ ,\ f_X(x)>0$

امید ریاضی E :

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته و f تابع احتمال آن، آنگاه :

۱) $$E(X)=\sum_{x} x f(x)$$

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته و f تابع چگالی آن، آنگاه :

۲) $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

قضیه ۱: اگر X متغیر تصادفی گسسته و $f(x)$ مقدار توزیع احتمال آن به ازای x باشد، آنگاه :

۳) $$E(g(X))=\sum_{x} g(x) f(x)$$

اگر X متغیر تصادفی پیوسته و $f(x)$ تابع چگالی احتمال آن به ازای x باشد، آنگاه :

۴) $$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$$

قضیه ۲: اگر a و b مقادیر ثابتی باشند، آنگاه :

۵) $$E(aX+b)=aE(X)+b$$

قضیه ۳: اگر $c_1, c_2, \ldots, c_n$ مقادیری ثابت باشند آنگاه :

۶) $$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X)\right]=\sum_{i=1}^{n} c_i E\left[g_i(X)\right]$$

نکته :

۷) $$E\left[(aX+b)^n\right]=\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i} E\left(X^{n-i}\right)$$

قضیه ۴: اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته بوده و $f(x,y)$ مقدار توزیع احتمال توام آنها در (x,y) باشند، مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی $g(X,Y)$ برابر است با :

۸) $$E\left[g(X,Y)\right]=\sum_{x}\sum_{y} g(x,y) f(x,y)$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته بوده و $f(x,y)$ مقدار چگالی توام آن در (x,y) باشند، مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی $g(X,Y)$ برابر است با :

۹) $$E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$$

قضیه ۵: اگر $c_1, c_2, \ldots, c_n$ مقادیری ثابت باشند آنگاه :

۱۰) $$E\left[\sum c_i g_i(X_1, X_2, \ldots, X_k)\right]=\sum_{i=1}^{n} c_i E\left[g_i(X_1, X_2, \ldots, X_k)\right]$$

گشتاورها :

تعریف : r امین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X که با μ'_r نشان داده می‌شود امید ریاضی متغیر تصادفی X^r است که $r=0,1,2,\ldots$

اگر X متغیر تصادفی گسسته باشد آنگاه :

۱۱) $$\mu'_r=E(X^r)=\sum_{x} x^r f(x)$$

اگر X متغیر تصادفی پیوسته باشد آنگاه :

۱۲) $$\mu'_r=E(X^r)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$$

نکته: μ'_1 میانگین توزیع X یا صرفاً میانگین X نامیده می‌شود و با μ نمایش می‌دهیم.

تعریف: گشتاور r ام حول میانگین متغیر تصادفی X که آن را با μ_r نشان می‌دهیم، مقدار امید ریاضی $(X-\mu)^r$ است برای ... و ۱ و ۲ و ۰ = r

اگر X متغیر تصادفی گسسته باشد، آنگاه:

$$۱۳)\ \mu_r = E[(X-\mu)^r] = \sum_x (x-\mu)^r f(x)$$

اگر X متغیر تصادفی پیوسته باشد، آنگاه:

$$۱۴)\ \mu_r = E[(X-\mu)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)\,dx$$

نکته: $\mu_0 = 1$ و $\mu_1 = 0$

نکته: μ_2 را واریانس توزیع X گویند و آن را با σ_X^2 یا $Var(X)$ یا $V(X)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۶:

$$۱۵)\ \sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2$$

اثبات: μ_2 برابر واریانس X است لذا:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E(X^2) - 2E(\mu X) + \mu^2$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = \mu'_2 - 2\mu\mu + \mu^2 = \mu'_2 - \mu^2$$

قضیه ۷: اگر واریانس X برابر σ^2 باشد آنگاه:

$$۱۶)\ Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

قضیه ۸: (قضیه چبیشف)

اگر μ و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی X باشند، آنگاه برای هر ثابت مثبت k احتمال اینکه X مقداری با فاصله کمتر از $k\sigma$ از میانگین اختیار کند حداقل $1-\frac{1}{k^2}$ است.

$$۱۷)\ P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

تعریف: تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X در صورت وجود اگر X گسسته باشد، آنگاه

t: عددی حقیقی

$$۱۸)\ M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

و اگر X پیوسته باشد، آنگاه، با تابع مقابل نمایش داده می‌شود.

$$۱۹)\ M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

$$۲۰)\ M_X(t) = \sum_x \left[1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \dots + \frac{t^rx^r}{r!} + \dots\right] f(x)$$

$$= \sum_x f(x) + t\sum_x x f(x) + \frac{t^2}{2!}\sum_x x^2 f(x) + \dots + \frac{t^r}{r!}\sum_x x^r f(x) + \dots$$

$$= 1 + \mu t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mu'_r \frac{t^r}{r!} + \dots$$

پس ضریب $\frac{t^r}{r!}$ همان μ'_r است.

قضیه ۹:

$$۲۱)\ \left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \mu'_r$$

اگر تابعی به صورت سری توانی برحسب t بسط داده شود،

ضریب $\frac{t^r}{r!}$، مشتق مرتبه‌ی r ام تابع نسبت به t به ازای $t=0$ است.

قضیه ۱۰: اگر a و b دو مقدار ثابت باشند آنگاه:

۲۲) $M_{X+a}(t)=E\left[e^{(X+a)t}\right]=e^{at}M_X(t)$

۲۳) $M_{bX}(t)=E\left(e^{bXt}\right)=M_X(bt)$

۲۴) $M_{\frac{X+a}{b}}(t)=E\left[e^{\left(\frac{X+a}{b}\right)t}\right]=e^{\left(\frac{a}{b}\right)t}M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

نکته: قسمت اول این قضیه (۱۰) وقتی $a=-\mu$، اهمیت خاصی دارد و قسمت سوم (۲۴) وقتی $a=-\mu$ و $b=\sigma$ نیز دارای اهمیت خاصی است. در این حالت:

۲۵) $M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=e^{\frac{-\mu t}{\sigma}}M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$

تعریف: rامین و sامین گشتاور حاصلضرب حول مبدأ متغیرهای تصادفی X و Y که با $\mu'_{r,s}$ نشان داده می‌شود، مقدار مورد انتظار X^rY^s است؛ به صورت نمادی، برای $r=0,1,2,3,\ldots$ و $s=0,1,2,3,\ldots$

با X و Y گسسته

۲۶) $\mu'_{r,s}=E\left(X^rY^s\right)=\sum_x\sum_y x^ry^sf(x,y)$

و با X و Y پیوسته

۲۷) $\mu'_{r,s}=E\left(X^rY^s\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^ry^sf(x,y)\,dx\,dy$

نکته:

۲۸) $\mu'_{0,1}=E(Y)=\mu_Y$

۲۹) $\mu'_{1,0}=E(X)=\mu_X$

تعریف: rامین و sامین گشتاور حاصلضرب حول میانگین متغیر تصادفی X و Y که با $\mu_{r,s}$ نشان داده می‌شود، مقدار مورد انتظار $(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^s$ است که $r=0,1,2,3,\ldots$ و $s=0,1,2,3,\ldots$ که

برای X و Y گسسته به صورت

۳۰) $\mu_{r,s}=E\left[(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^s\right]=\sum_x\sum_y(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^sf(x,y)$

و برای X و Y پیوسته به صورت

۳۱) $\mu_{r,s}=E\left[(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^s\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(X-\mu)^r(Y-\mu)^sf(x,y)\,dx\,dy$

تعریف: $\mu_{1,1}$ را کوواریانس X و Y می‌نامند و آن را با σ_{XY}، $Cov(X,Y)$ یا $C(X,Y)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱۱:

۳۲) $\sigma_{XY}=\mu'_{1,1}-\mu_X\mu_Y$

اثبات:

$$\sigma_{XY}=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]=E\left[XY-\mu_XY-X\mu_Y+\mu_X\mu_Y\right]$$

$$=E[XY]-\mu_XE[Y]-\mu_YE[X]+\mu_X\mu_Y$$

$$=E[XY]-\cancel{\mu_X\mu_Y}-\mu_Y\mu_X+\cancel{\mu_X\mu_Y}=\mu'_{1,1}-\mu_X\mu_Y$$

قضیه ۱۲: اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه

$$۳۳)\begin{cases} E(XY)=E(X)E(Y) \\ \sigma_{XY}=0 \end{cases}$$

اثبات:

بنابه تعریف برای حالت گسسته داریم: $E(XY)=\sum_x\sum_y xy\,f(x,y) \xrightarrow[\text{مستقل اند}]{\text{چون } X \text{ و } Y} f(x,y)=g(x)\,h(y)$

که در آن $g(x)$ و $h(y)$ به ترتیب مقادیر توزیع های حاشیه ای X و Y هستند.

$$E(XY)=\sum_x\sum_y xy\,g(x)h(y)=\Big[\sum_x x\,g(x)\Big]\Big[\sum_y y\,h(y)\Big]=E(X)E(Y)$$

بنابراین

$$\sigma_{XY}=\mu'_{1,1}-\mu_X\mu_Y=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

نکته: استقلال دو متغیر تصادفی، صفر بودن کوواریانس را ایجاب می کند، اما صفر بودن کوواریانس الزاماً استقلال آنها را نتیجه نمی دهد

قضیه ۱۳: اگر X_1، X_2، ...، X_n مستقل باشند، آنگاه

$$۳۴)\ E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

قضیه ۱۴: اگر X_1، X_2، ...، X_n متغیرهای تصادفی و $Y=\sum_{i=1}^n a_iX_i$ باشند که در آن a_1، a_2، ...، a_n مقادیر ثابت اند آنگاه:

$$۳۵)\begin{cases} E(Y)=\sum_{i=1}^n a_i\,E(X_i) \\ var(Y)=\sum_{i=1}^n a_i^2\,var(X_i)+2\sum\sum_{i<j} a_ia_j\,cov(X_i,X_j) \end{cases}$$

که در آن مجموع یابی دوگانه روی تمام مقادیر i و j از ۱ تا n با شرط $i<j$ انجام می شود.

نتیجه: اگر متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n مستقل باشند و $Y=\sum_{i=1}^n a_iX_i$ آنگاه:

$$۳۶)\ var(Y)=\sum_{i=1}^n a_i^2\,var(X_i)$$

قضیه ۱۵: اگر X_1، X_2، ...، X_n متغیرهای تصادفی باشند و $Y_1=\sum_{i=1}^n a_iX_i$ و $Y_2=\sum_{i=1}^n b_iX_i$ که در آنها a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n مقادیر ثابت اند، آنگاه:

$$۳۷)\ cov(Y_1,Y_2)=\sum_{i=1}^n a_ib_i\,var(X_i)+\sum\sum_{i<j}(a_ib_j+a_jb_i)\,cov(X_i,X_j)$$

نتیجه: اگر متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n مستقل باشند، $Y_1=\sum_{i=1}^n a_iX_i$ و $Y_2=\sum_{i=1}^n b_iX_i$، آنگاه:

$$۳۸)\ cov(Y_1,Y_2)=\sum_{i=1}^n a_ib_i\,var(X_i)$$

فرمولهای فصل ششم

آمار و احتمال

توزیع یکنواخت گسسته :

اگر یک متغیر تصادفی بتواند k مقدار مختلف را با احتمال های برابر اختیار کند، گوییم که دارای توزیع یکنواخت گسسته است؛ اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن، برای $i \neq j$ وقتی $x_i \neq x_j$ به صورت

۱) $f(x) = \frac{1}{k} \qquad x = x_1, x_2, \dots, x_k$

توزیع برنولی :

اگر آزمایشی دو برآمد داشته باشد، «موفقیت» و «شکست»، و احتمال آنها به ترتیب θ و $1-\theta$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی که منطبق با «موفقیت»، یا ۱ و ۰ را اختیار می‌کند، توزیع برنولی دارد اگر و فقط اگر توزیع احتمال آن بصورت زیر باشد :

۲) $f(x; \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad , \quad x = 0, 1$

توزیع دوجمله‌ای :

متغیر تصادفی X توزیع دوجمله ای دارد و به آن متغیر تصادفی دوجمله‌ای داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن بصورت زیر باشد :

۳) $b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$

که در آن n تعداد آزمایش ها و x تعداد موفقیت هاست.

نکته : $B(x; n, \theta)$ به صورت زیر تعریف می شود: در واقع هدف X موفقیت در n امتحان است.

۴) $B(x; n, \theta) = \sum_{k=0}^{n} b(k; n, \theta)$

قضیه ۱ :

۵) $b(x; n, \theta) = b(n-x; n, 1-\theta)$

قضیه ۲ : میانگین و واریانس توزیع دوجمله ای برابرند با :

۶) $\sigma^2 = n\theta(1-\theta) \quad , \quad$ ۷) $\mu = n\theta$

قضیه ۳ : اگر X توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n و θ داشته باشد و $Y = \frac{X}{n}$ آنگاه :

۸) $E(Y) = \theta \quad , \quad \sigma_Y^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

قضیه ۴ : تابع مولد گشتاور توزیع دوجمله‌ای به صورت :

۹) $M_X(t) = [1 + \theta(e^t - 1)]^n$

توزیع فوق هندسی :

جامعه با N عضو را به دو قسمت k و $N-k$ عضوی تقسیم می کنیم و یک نمونه nتایی از آن انتخاب می کنیم.

X : تعداد نمونه‌هایی که متعلق به قسمت kتایی هستند.

۱۰) $h(x; n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

قضیه ۵ : میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی عبارتست از :

۱۱) $\mu = \frac{nk}{N} \qquad$ ۱۲) $\sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$

توزیع پواسن: پواسن آزمایشی است که تعداد وقایع (تعداد پیروزی‌ها) را در یک فاصله زمانی یا مکانی به دست می‌آورد.

x: تعداد اتفاقات در یک فاصله زمانی یا مکانی.

λ: متوسط تعداد اتفاقات در یک فاصله زمانی یا مکانی.

۱۳) $P(x,\lambda) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$; $x = 0, 1, 2, \ldots$

قضیه ۶: میانگین و واریانس توزیع پواسن عبارتند از:

۱۴) $\mu = E(x) = \lambda$

۱۵) $\sigma^2 = \lambda$

قضیه ۷: تابع مولد گشتاورهای توزیع پواسن به صورت:

۱۶) $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

تعریف: متغیر تصادفی X دارای چگالی یکنواخت است اگر و فقط اگر چگالی احتمالی آن به صورت:

پارامترهای α و β ثابت‌های حقیقی اند و $\alpha < \beta$.

۱۷) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

قضیه ۸: میانگین و واریانس چگالی یکنواخت عبارتند از:

۱۸) $\mu = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

۱۹) $\sigma^2 = \dfrac{(\beta - \alpha)^2}{12}$

توزیع نرمال: توزیع نرمال یا توزیع گوسی به عنوان یک توزیع متقارن پیوسته بوده و دارای کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف از جمله موارد زیر می‌باشد.

الف- بسیاری از پدیده‌های طبیعی دارای توزیع نرمال هستند. ب- بسیاری از توزیع‌ها در شکل حدی دارای تقریب نرمال هستند.

در صورتی که متغیر تصادفی پیوسته x دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، تابع چگالی و مشخصات آن به صورت مقابل است:

۲۰) $n(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

قضیه ۹: تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال عبارت است از:

۲۱) $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای: اگر X متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ باشد آنگاه تابع مولد گشتاورهای وقتی $n \to +\infty$ به تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

۲۲) $Z = \dfrac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$

توزیع نرمال دومتغیره:

جهت متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع نرمال دومتغیره اند و به آن‌ها متغیرهای تصادفی که توأماً به صورت نرمال توزیع شده‌اند اطلاق می‌شوند اگر و فقط اگر چگالی احتمال توأم‌شان برای $-\infty < x < +\infty$ و $-\infty < y < +\infty$ به صورت زیر باشد

۲۳) $f(x,y) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ $\quad \sigma_1 > 0$ و $\sigma_2 > 0$ و $-1 < \rho < 1$

قضیه ۱۰: دو متغیر تصادفی که دارای توزیع نرمال دومتغیره اند مستقل اند اگر و فقط اگر $\rho = 0$.