گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

(فصل ۵)

🕮 مثلثات

زوایا و اندازه‌ی زوایا:

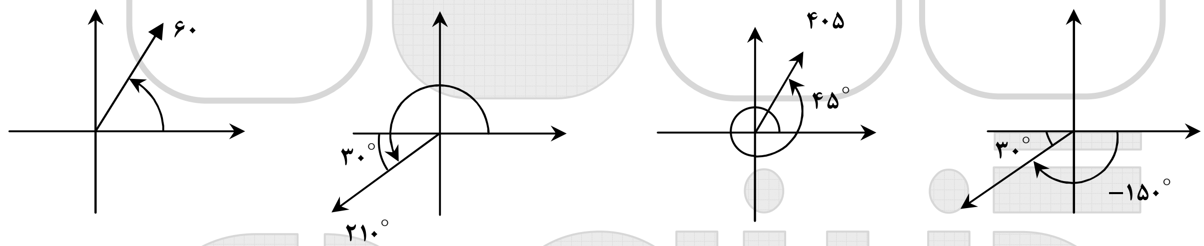
در صفحه‌ی مختصات یک زاویه به وسیله‌ی دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند، ایجاد می‌شود که یک نیم‌خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع حرکت نیم‌خط دوم است و دیگری را ضلع انتهایی که مکان انتهایی نیم‌خط می‌باشد در نظر می‌گیریم.

یک زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی تعیین می‌شود.

اگر تغییر مکان نیم‌خط دوم از مکان شروع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه با یک مقدار منفی و اگر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد با یک مقدار مثبت مشخص می‌شود.

☜ **مثال: زاویه‌های ۶۰°، ۲۱۰°، ۴۰۵° و -۱۵۰° را روی نمودار مشخص کنید؟**

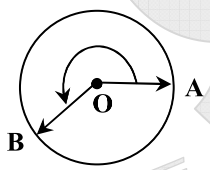
✍ حل:



واحد دیگری برای زاویه:

اگر متحرکی از نقطه‌ی **A** روی دایره‌ای به شعاع واحد در جهت مثبت حرکت کند و به مکان **B** برسد، مسافت طی شده توسط متحرک را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران پاره‌خط **OA** حول **O** برحسب رادیان می‌نامند.

اگر در جهت منفی حرکت کنیم همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می‌دهیم.



چون می‌دانیم محیط یک دایره به شعاع **R**، برابر $۲\pi R$ است، لذا اگر ما کمانی از دایره به اندازه‌ی θ را طی کنیم، مسافت طی شده توسط متحرک یا همان طول کمان برابر است با: $L = R\theta$ (دقت کنید در این رابطه θ حتماً باید با واحد رادیان بیان شود.)

حال اگر دایره مثلثاتی را در نظر بگیریم (دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ) محیط این دایره برابر ۲π رادیان است، لذا می‌توان واحدهای درجه و رادیان را به صورت زیر بهم تبدیل نمود:

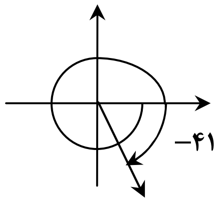
$$\begin{array}{cc} \text{رادیان} & \text{درجه} \\ ۲\pi & ۳۶۰^\circ \\ x & ۱ \end{array} \Bigg\} \rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳۶۰} = \frac{\pi}{۱۸۰}$$

یعنی ۱ درجه برابر $\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان است در حالت کلی می‌توان گفت:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰} \rightarrow \underset{\text{رادیان}}{R} = \frac{\pi}{۱۸۰} \underset{\text{درجه}}{D}$$

☜ **مثال: زاویه‌ی ۷- رادیان را روی نمودار نشان دهید.**

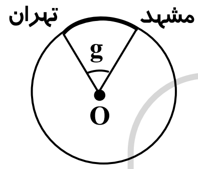
✍ حل:



$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}R=\frac{۱۸۰\times -۷}{۳/۱۴۱۵}\simeq -۴۰۱$$

☜ **مثال: فرض کنیم فاصله‌ی تهران تا مشهد روی قسمتی از سطح زمین تقریباً ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. اگر شعاع زمین ٦٤٤٠ کیلومتر فرض شود، زاویه‌ای از مرکز زمین که یک ضلع آن منتهی به تهران و ضلع دیگر منتهی به مشهد شود، چقدر است؟**

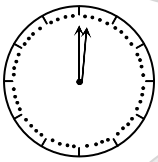
✍ حل:



اگر فاصله‌ی تهران تا مشهد را کمان طی شده در نظر بگیریم، داریم:

$$R\theta=L\rightarrow ۶۴۴۰\theta=۱۰۰۰\rightarrow\theta=\frac{۱۰۰}{۶۴۴}=۰/۱۵۵\,\mathrm{rad}$$

☜ **مثال: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار به اندازه‌ی $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟**



✍ حل: دقیقه شمار هر ۱ دقیقه $\frac{۱}{۶۰}$ دایره یعنی $\frac{۲\pi}{۶۰}=\frac{\pi}{۳۰}$ رادیان دوران می‌کند، لذا برای $۲/۵\pi$ رادیان دوران $۷۵=\frac{۲/۵\pi}{\frac{\pi}{۳۰}}$ دقیقه زمان لازم است.

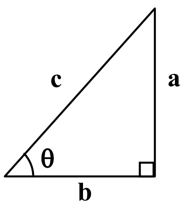
☜ **مثال: اگر چرخ و فلکی ٤٠ کابین داشته باشد و در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت روی کابین ۳ قرار داشته باشیم، پس از $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ رادیان دوران در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیریم؟**

✍ حل: چون چرخ و فلک دایره را به ٤٠ قسمت مساوی تقسیم کرده است، لذا فاصله‌ی هر ۲ کابین $\frac{۲\pi}{۴۰}=\frac{\pi}{۲۰}$ است، یعنی پس از هر $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان دوران، ما در جایگاه کابین بعدی قرار می‌گیریم، لذا اگر بخواهیم $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ دوران کنیم، در واقع به اندازه‌ی $۹۴=\frac{\frac{۴۷\pi}{۱۰}}{\frac{\pi}{۲۰}}$ کابین جلو رفته‌ایم چون هر ۲π رادیان یکبار به جایی که هستیم برمی‌گردیم، پس باید فرض کنیم به اندازه‌ی ١٤ کابین پیش رفته‌ایم.

چون $\frac{۴۷\pi}{۱۰}=۴\pi+\frac{۷\pi}{۱۰}$ و $۱۴=\frac{\frac{۷\pi}{۱۰}}{\frac{\pi}{۲۰}}$ یعنی الآن در جایی قرار داریم که کابین ۱۷ ام در ابتدای حرکت قرار داشت.

سینوس و کسینوس یک زاویه:

نسبت ضلع مقابل یک زاویه به وتر را در مثلث قائم‌الزاویه سینوس آن زاویه می‌نامند. همچنین نسبت ضلع مجاور به یک زاویه به وتر را در مثلث قائم‌الزاویه کسینوس آن زاویه می‌نامند.



$$\mathrm{Sin}\theta=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

$$\mathrm{Cos}\theta=\frac{b}{c}=\frac{b}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

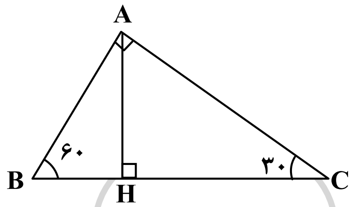
دامنه‌ی تابع $f(x)=\operatorname{Sin}x$ و $f(x)=\operatorname{Cos}x$ برابر $\mathbb{R}$ است.

چون همواره $|a|\leq\sqrt{a^۲+b^۲}$ و $|b|\leq\sqrt{a^۲+b^۲}$ است، لذا $|\operatorname{Sin}x|\leq ۱$ و $|\operatorname{Cos}x|\leq ۱$ پس:

$$-۱\leq \operatorname{Sin}x\leq ۱$$
$$-۱\leq \operatorname{Cos}x\leq ۱$$

☜ **مثال: اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا ۳۰° باشد و ضلع نظیر این زاویه (ضلع غیروتر) ۱۲ باشد، طول ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه و اندازه‌ی قطعاتی که ارتفاع وارد بر وتر روی وتر ایجاد می‌کند را به دست آورید.**

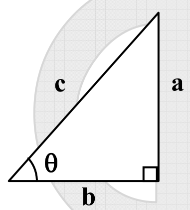
✍ حل:



$$\operatorname{Sin}۳۰=\frac{AH}{AC}\to AH=۱۲\operatorname{Sin}۳۰=۶$$
$$\operatorname{Cos}۳۰=\frac{CH}{AC}\to CH=۱۲\operatorname{Cos}۳۰=۶\sqrt{۳}$$
$$\operatorname{Sin}۶۰=\frac{AH}{AB}\to AB=\frac{AH}{\operatorname{Sin}۶۰}=\frac{۶}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}=۴\sqrt{۳}$$
$$\operatorname{Cos}۶۰=\frac{BH}{AB}\to BH=۴\sqrt{۳}\operatorname{Cos}۶۰=۲\sqrt{۳}$$

تانژانت و کتانژانت یک زاویه:

بنابر تعریف تانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:



$$\tan x=\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}$$

دامنه‌ی تابع تانژانت $D=\mathbb{R}-\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ است.

نکته: در واقع می‌توان گفت شیب یک خط، تانژانت زاویه‌ی بین آن خط و جهت مثبت محور xها است.

بنابر تعریف کتانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مجاور به ضلع مقابل در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:

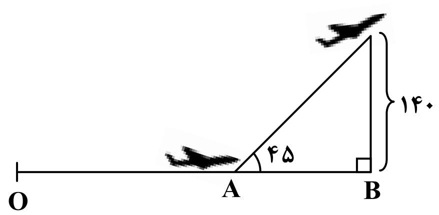
$$\operatorname{Cot}x=\frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}=\frac{b}{a}$$

دامنه‌ی تابع کتانژانت $D=\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ است.

لذا برای $x\neq\frac{k\pi}{۲}$ داریم: $\tan x=\frac{۱}{\operatorname{Cot}x}$ یا $\tan x.\operatorname{Cot}x=۱$

☜ **مثال: هواپیمایی می‌خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند، سپس با زاویه‌ی ۴۵° از زمین بلند می‌شود. وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟**

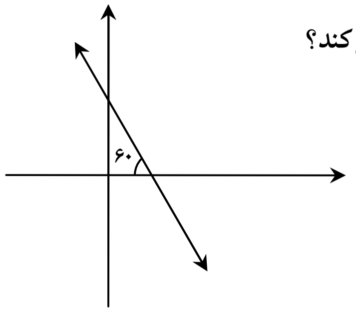
✍ حل:



$$\tan ۴۵=\frac{۱۴۰}{AB}\ \Rightarrow\ AB=\frac{۱۴۰}{۱}\ \Rightarrow\ AB=۱۴۰$$

$$OA=۳۰۰\to OB=۳۰۰+۱۴۰=۴۴۰$$

☜ **مثال: خط مقابل از نقطه $\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ می‌گذرد. این خط محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟**



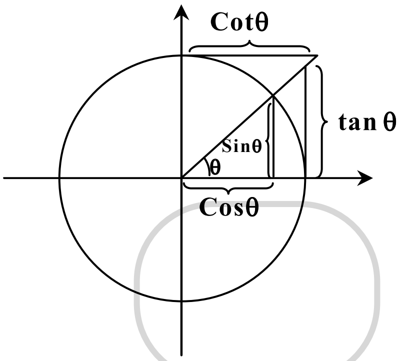
✍ حل: شیب تانژانت زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور xها است.

$$m = \tan\theta = \tan 120 = -\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \text{معادله خط: } y - 2 = -\sqrt{3}\,(x-1)$$

$$\rightarrow y = 0 \Rightarrow x - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

نمایش هندسی توابع مثلثاتی روی دایره‌ی مثلثاتی:

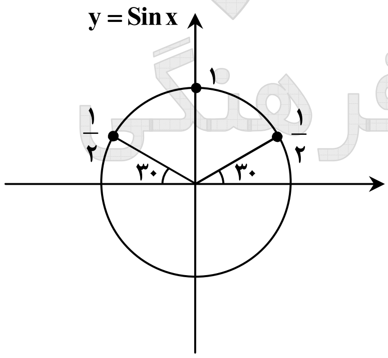


اگر دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ (دایره‌ی مثلثاتی) را داشته باشیم، توابع مثلثاتی را می‌توان روی این دایره نمایش داد.

سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت زوایای مهم:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Sin x	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-1	۰
Cos x	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-1	۰	۱
tan x	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
Cot x	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

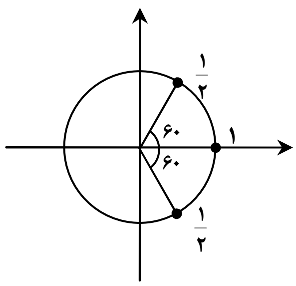
☜ **مثال: اگر $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ باشد، محدوده‌ی تغییرات $y = \operatorname{Sin} x$ چقدر است؟**



✍ حل: با دقت در دایره‌ی مثلثاتی و تغییرات $\operatorname{Sin} x$ در ربع اول و دوم ملاحظه می‌شود:

$$\frac{1}{2} \le \operatorname{Sin} x \le 1$$

☜ **مثال: اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ باشد، $\operatorname{Cos} 3x = \frac{m-1}{2}$ باشد، مقادیر x در کدام فاصله است؟**



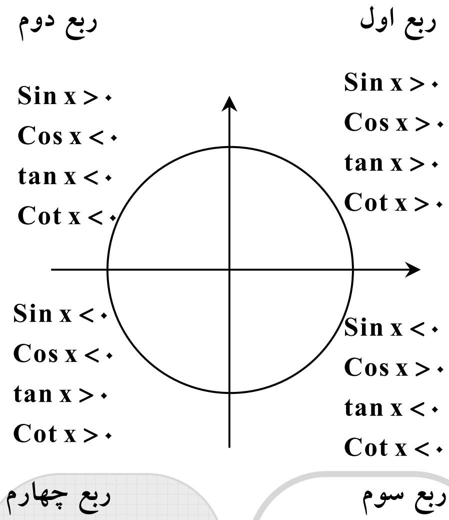
✍ حل: با دقت در دایره‌ی مثلثاتی و ملاحظه‌ی تغییرات $3x$ داریم:

$$-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9} \rightarrow -\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \le \operatorname{Cos} 3x \le 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{m-1}{2} \le 1 \rightarrow 2 \le m \le 3$$

علامت توابع مثلثاتی در ربع‌های مختلف:



اتحادهای مثلثاتی مهم:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta . \cot\theta = 1 \qquad \theta \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} \qquad \theta \neq k\pi$$

تذکر: $\sin^2\theta$ به معنای $(\sin\theta)^2$ است و با مقدار $\sin(\theta)^2$ متفاوت است.

☜ مثال: اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ و انتهای کمان x در ناحیه‌ی سوم باشد، مقدار $\sin x$ کدام است؟

✍ حل:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \to \cos^2 x = \frac{9}{10}$$

$$\to \cos x = \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \to \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \to \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

چون انتهای کمان در ناحیه‌ی سوم است، لذا $\sin x < 0$ است، پس: $\sin x = \frac{-1}{\sqrt{10}}$

روابط توابع مثلثاتی در کمان‌های مثلثاتی مختلف با هم:

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$ $\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$	$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$ $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta$ $\tan(\theta+\frac{\pi}{2})=-\cot\theta$ $\cot(\theta+\frac{\pi}{2})=-\tan\theta$
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta \rightarrow \tan(k\pi+\theta)=\tan\theta$ $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta \rightarrow \cot(k\pi+\theta)=\cot\theta$
$\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\cos\theta$ $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$ $\cot(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$	$\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cos\theta$ $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$ $\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$ $\cot(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$
$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$	$\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta \rightarrow \sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta$ $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta \rightarrow \cos(2k\pi+\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta \rightarrow \tan(2k\pi+\theta)=\tan\theta$ $\cot(2\pi+\theta)=\cot\theta \rightarrow \cot(2k\pi+\theta)=\cot\theta$

☜ مثال: از تساوی $2=\dfrac{2\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}$ مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

✍ حل:

$\sin(\alpha\pm 2k\pi)=\sin\alpha$

$\cos(\alpha\pm 2k\pi)=\cos\alpha$

$$\frac{2\sin(\alpha-\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}=\frac{-2\sin\alpha+\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha=2 \Rightarrow \tan\alpha=2$$

☜ مثال: ساده شده‌ی عبارت $A=\cos(\pi-x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)+\cos(\pi+x)+\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ را به‌دست آورید.

✍ حل:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x\\ \cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x\end{array}\right\} \Rightarrow A=-\cos x+\cos x-\cos x-\cos x=-2\cos x$$

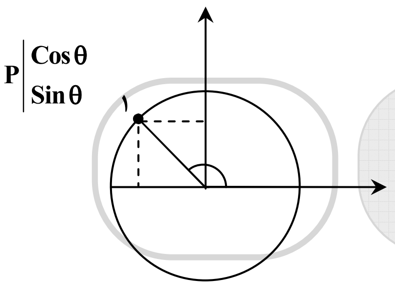
☜ مثال: حاصل $A = \text{Sin}\,۱۸۶۰^\circ + \text{Cos}\,۱۸۶۰^\circ$ چقدر است؟

✍ حل:

$$۱۸۶۰^\circ = ۵\times۳۶۰+۶۰ \rightarrow \begin{cases} \text{Sin}\,(۱۰\pi+\frac{\pi}{۳}) = \text{Sin}\,\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \text{Cos}\,(۱۰\pi+\frac{\pi}{۳}) = \text{Cos}\,\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \end{cases} \rightarrow A = \frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$$

☜ مثال: نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$ را به اندازه‌ی $\frac{۲\pi}{۳}$ در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی حاصل کدام است؟

✍ حل:



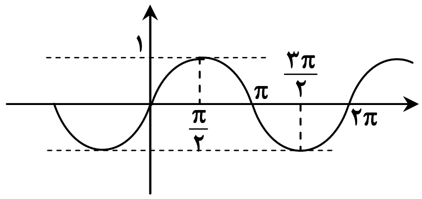
$$P = \left|\begin{matrix} \text{Cos}\,\frac{۲\pi}{۳} \\ \text{Sin}\,\frac{۲\pi}{۳} \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} -\frac{۱}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{matrix}\right.$$

توابع مثلثاتی

بسیاری از حرکات متناوب در طبیعت با توابع مثلثاتی بیان می‌شوند.

توابع $y = \operatorname{Sin} x$, $y = \operatorname{Cos} x$, $y = \tan x$, $y = \operatorname{Cot} x$ توابع مثلثاتی نام دارند و دامنه و برد و نمودارشان به‌صورت زیر است:

الف)



$y = \operatorname{Sin} x$

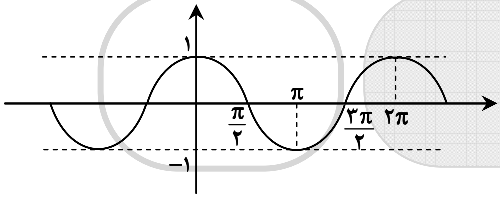
$D = \mathbb{R}$

$R = [-۱,۱]$

چون $\operatorname{Sin}(x + ۲\pi) = \operatorname{Sin} x$ تابع $y = \operatorname{Sin} x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است.

❊ صفر های (ریشه‌های) تابع $y = \operatorname{Sin} x$ در $x = k\pi$ رخ می‌دهد.

ب)



$y = \operatorname{Cos} x$

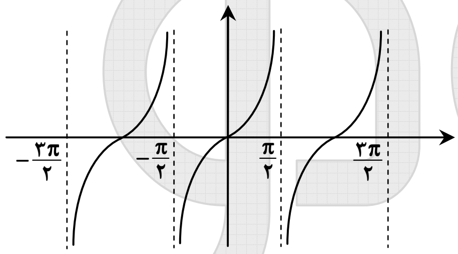
$D = \mathbb{R}$

$R = [-۱,۱]$

چون $\operatorname{Cos}(x + ۲\pi) = \operatorname{Cos} x$ تابع $y = \operatorname{Cos} x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است.

❊ صفرهای تابع $y = \operatorname{Cos} x$ در $x = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۲}$ رخ می‌دهد.

ج)



$y = \tan x$

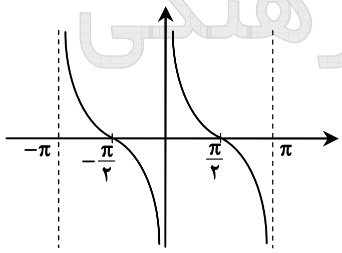
$D = \mathbb{R} - \{(۲k + ۱)\frac{\pi}{۲} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$R = \mathbb{R}$

چون $\tan(x + \pi) = \tan x$ تابع $y = \tan x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است.

❊ صفرهای تابع $y = \tan x$ در $x = k\pi$ رخ می‌دهد.

د)



$y = \operatorname{Cot} x$

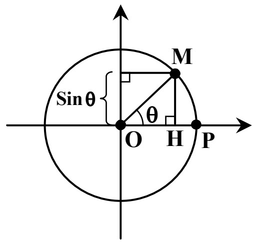
$D = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

چون $\operatorname{Cot}(x + \pi) = \operatorname{Cot} x$ تابع $y = \operatorname{Cot} x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است.

❊ صفرهای تابع $y = \operatorname{Cot} x$ در $x = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۲}$ رخ می‌دهد.

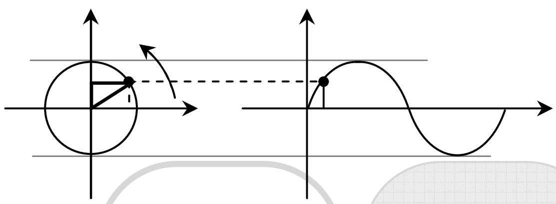
نکته: توابع $y = A\operatorname{Sin}(ax + b)$ و $y = A\operatorname{Cos}(ax + b)$ متناوب با دوره‌ی تناوب $T = \frac{۲\pi}{a}$ می‌باشند. دامنه‌ی این توابع $\mathbb{R}$ و برد آن‌ها $-|A| \le y \le |A|$ است.

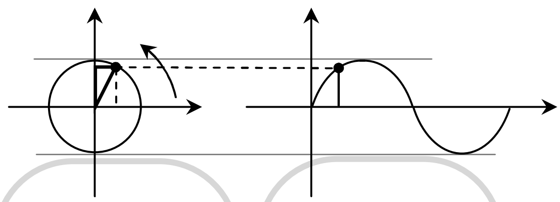
ارتباط بین دایره‌ی مثلثاتی و تابع سینوس:



اگر نقطه‌ای روی دایره‌ی مثلثاتی حرکت کند، مقدار y نقطه در هر لحظه، برابر مقدار سینوس زاویه‌ای است که نقطه با مبدأ و محور xها می‌سازد. در واقع تصویر متحرک M روی محور yها برابر با سینوس زاویه در هر لحظه است.

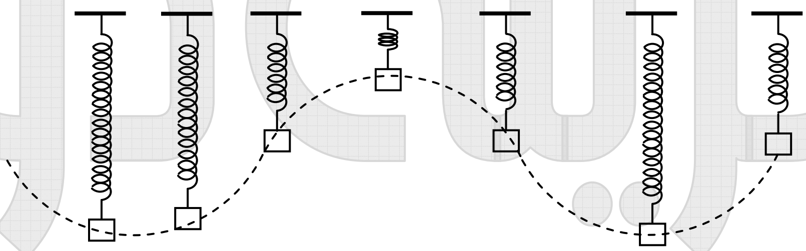
❋ یعنی حرکت تصویر M روی محور yها با تابعی سینوس صورت می‌پذیرد.





برخی حرکات در طبیعت وقتی در قالب زمان مورد بررسی قرار می‌گیرند، نموداری سینوسی دارند، مثلاً فرض کنید وزنه را از یک فنر آویزان کرده‌ایم و فنر به حالت تعادل رسیده است. اگر وزنه به یک مقدار اندک کشیده شود و رها شود با فرض کم بودن اصطکاک، وزنه حرکتی نوسانی انجام خواهد داد. اگر مبدأ محاسبه ارتفاع وزنه حالت تعادل وزنه باشد و وزنه در $t = 0$ در حالت تعادل باشد، ارتفاع وزنه در هر حالت برابر است با: $y(t) = A\sin \omega t$

اگر از مقابل به آونگ نگاه کنیم، و حرکت را در زمان‌های مختلف تصویربرداری کنیم، چیزی شبیه حرکت تصویر نقطه‌ی روی محور yها در دایره‌ی مثلثاتی مشاهده می‌شود.

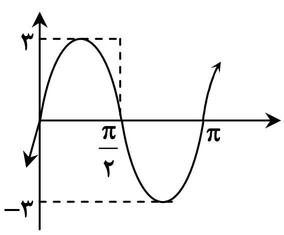


☜ **مثال: حداقل و حداکثر و دوره‌ی تناوب توابع زیر را به‌دست آورده و آن‌ها را رسم کنید.**

✍ حل:

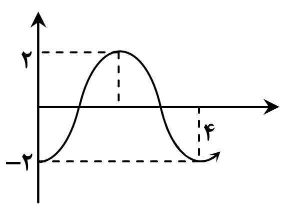
$y = 3\sin 2x$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi \qquad -3 \le y \le 3$



$y = -2\cos \frac{\pi}{2} x$

$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \qquad -2 \le y \le 2$



☜ مثال: اگر $y = Cos^۲x - ۳Sin^۲x$ باشد، محدوده‌ی تغییرات y کدام است؟

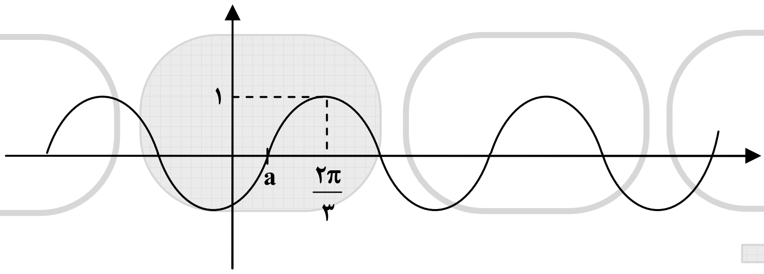
✍ حل:

$y = Cos^۲x - ۳(۱ - Cos^۲x) = ۴Cos^۲x - ۳$

$۰ \le Cos^۲x \le ۱ \rightarrow ۰ \le ۴Cos^۲x \le ۴ \rightarrow -۳ \le ۴Cos^۲x - ۳ \le ۱ \rightarrow -۳ \le y \le ۱$

☜ مثال: اگر $x = \frac{۲\pi}{۳}$ طول اولین نقطه‌ای با طول مثبت باشد که تابع $y = Sin(x - a)$ در آن به مقدار حداکثر می‌رسد، a چقدر است؟

✍ حل: در تابع $y = Sin x$، $x = \frac{\pi}{۲}$ اولین نقطه‌ای است که $y = Sin x$ در آن به اوج می‌رسد. لذا چون این نقطه به اندازه‌ی $\frac{۲\pi}{۳} - \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۶}$ به جلو حرکت کرده است، پس $a = \frac{\pi}{۶}$ می‌باشد.



☜ مثال: کدام عبارت نادرست است؟

۱) $Sin ۳۷ > Cos ۷۵$　　۲) $Sin ۱۶۰ > Cos ۲۸۵$

۳) $Cos ۱۲۵ < Cos ۲۱۲$　　۴) $Cos(-۶۵) < Sin ۵۵$

✍ حل:

گزینه‌ی ۱ : چون $Cos ۷۵ = Sin ۱۵$ و $Sin x$ در فاصله‌ی $[۰ , \frac{\pi}{۲}]$ صعودی است، لذا:

$Sin ۳۷ > Cos ۷۵ = Sin ۱۵$

گزینه‌ی ۲:

$$\left.\begin{array}{l} Sin ۱۶۰ = Sin ۲۰ \\ Cos ۲۸۵ = Cos(-۷۵) = Cos ۷۵ = Sin ۱۵ \end{array}\right\} \rightarrow Sin ۲۰ > Sin ۱۵$$

گزینه‌ی ۳:

$Cos ۱۲۵ = Cos(۱۸۰ - ۵۵) = -Cos ۵۵$

$Cos ۲۱۲ = Cos(۱۸۰ + ۳۲) = -Cos ۳۲$

تابع $y = Cos x$ در فاصله‌ی $[۰ , \pi]$ تابعی نزولی است، لذا:

$Cos ۳۲ > Cos ۵۵ \rightarrow -Cos ۳۲ < -Cos ۵۵ \rightarrow Cos ۲۱۲ < Cos ۱۲۵$

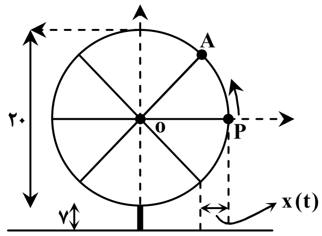
پس گزینه‌ی ۳ نادرست است.

گزینه‌ی ٤:

$Cos(-۶۵) = Cos ۶۵ = Sin ۲۵$

$Sin ۵۵ > Sin ۲۵ = Cos(-۶۵)$

☜ مثال: فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۰ داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض کنید پایین‌ترین نقطه‌ی چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه‌ی $t=0$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است.



الف) در هر لحظه ارتفاع کابین از سطح زمین را مشخص کنید.

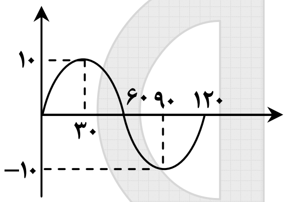
ب) اگر در لحظه‌ی t فاصله‌ی سایه این کابین روی زمین تا نقطه‌ی A را با x(t) نشان دهیم، این تابع را به‌دست آورید.

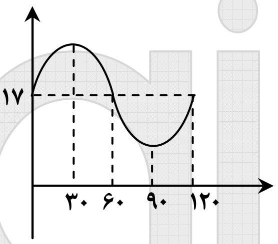
✍ حل:

الف) اگر محورهای مختصات را بر مرکز دایره قرار دهیم در لحظه‌ی $t=30$، $y=10$ است و در لحظه‌ی $t=60$، $y=0$ و در لحظه‌ی $t=90$، $y=-10$ و در لحظه‌ی $t=120$ مجدداً $y=0$ می‌شود.

لذا چون معادله‌ی این حرکت نوسانی $y=A\sin\omega t$ است، لذا با داده‌های فوق می‌توان ω و A را یافت. چون ماکزیمم تابع در $t=30$ رخ می‌دهد. پس باید: $\omega\times 30=\frac{\pi}{2}$ باشد، پس: $\omega=\frac{\pi}{60}$ است. اما چون این مقدار ماکزیمم برابر ۱۰ است، لذا هنگامی‌که سینوس برابر یک است، y باید برابر ۱۰ باشد؛ پس: $y=10\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{60}t)$

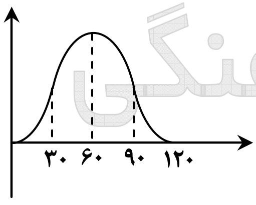
حال اگر محورهای مختصات را نسبت به زمین در نظر بگیریم، معادله‌ی حرکت نقطه‌ی P عبارت است از: $y=10\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{60}t)+17$ چون در لحظه‌ی $t=0$ فاصله‌ی نقطه‌ی P از زمین ۱۷ متر است.

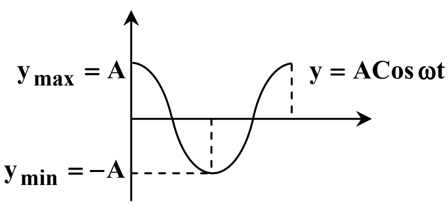




ب) چون طول سایه هم نوسانی است و در لحظه‌ی $t=0$ برابر $x=0$ و در لحظه‌ی $t=30$ برابر $x=10$ و در لحظه‌ی $t=60$ برابر $x=20$ و در لحظه‌ی $t=90$ برابر $x=10$ و در لحظه‌ی $t=120$ برابر $x=0$ است.

چون این تابع با مقدار می‌نیمم آغاز و به مقدار ماکزیمم ختم می‌شود، از تابع $\operatorname{Cos}x$ استفاده می‌کنیم. منتها چون این تابع از می‌نیمم به ماکزیمم حرکت می‌کند، نمودار آن به‌صورت مقابل است:





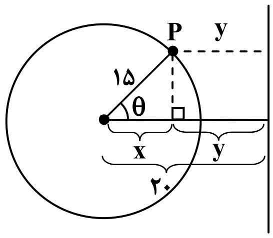
با دقت در نمودار $y=A\operatorname{Cos}\omega t$ و مقایسه‌ی آن با نمودار فوق درمی‌یابیم این تابع به‌صورت $y=-A\operatorname{Cos}\omega t+B$ است.

ابتدا ω را می‌یابیم:

$$t=0 \Rightarrow y=-10 \Rightarrow y=-A\operatorname{Cos}(\omega\times 30)=-10 \Rightarrow \omega\times 30=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{60}\ ,\ A=10$$

پس تابع با انتقال ۱۰ واحدی به بالا نهایتاً به‌صورت: $y=-10\operatorname{Cos}(\frac{\pi}{60}t)+10$ است.

مثال: فاصله‌ی مرکز یک تابِ گردان از میله‌های محافظ کنار آن ۲۰ متر و شعاع آن در هنگام گردش ۱۵ متر است. کدام معادله فاصله‌ی هر نقطه‌ی تاب در حال گردش را از میله‌ی محافظ به‌دست می‌دهد؟ (θ زاویه‌ی بین نقطه‌ی روی تاب و خط فاصله‌ی مرکز دوران تا میله‌هاست.)



حل: فاصله‌ی هر نقطه مانند **P** از میله‌ی فلزی برابر **y** می‌باشد که به زاویه‌ی **θ** بستگی دارد. داریم:

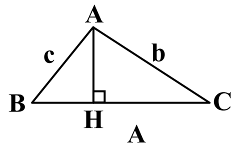
$$\cos\theta = \frac{x}{۱۵} \Rightarrow x = ۱۵\cos\theta \quad (*)$$

$$y = ۲۰ - x \overset{(*)}{=} ۲۰ - ۱۵\cos\theta$$

کاربردهایی از مثلثات

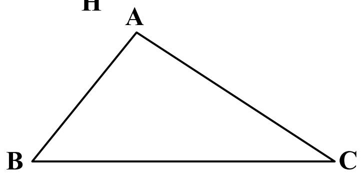
قضیه‌ی کسینوس‌ها:

در هر مثلث داریم:



$$BC = BH + HC$$
$$\rightarrow\ a = c\,\text{Cos}\,\hat{B} + b\,\text{Cos}\,\hat{C}$$

لذا در هر مثلث داریم:



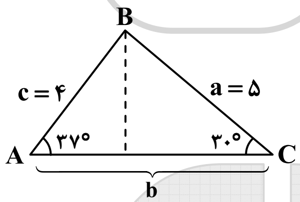
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Cos}\,\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\text{Cos}\,\hat{B}$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\,\text{Cos}\,\hat{C}$$

اثبات روابط فوق بر اساس قضیه‌ی فیثاغورس و رابطه‌ی فوق صورت گرفته و در کتاب درسی موجود است.

☜ **مثال: زمینی مثلث شکل برای ساخت یک فروشگاه زنجیره‌ای در نظر گرفته شده است. محیط این زمین کدام است؟**

($\text{Cos}\,30° = 0/86$ و $\text{Cos}\,37° = 0/8$)

✍ حل: از رابطه‌ی $b = c\,\text{Cos}\,A + a\,\text{Cos}\,C$ داریم:



$$b = 4\,\text{Cos}\,37° + 5\,\text{Cos}\,30° = 4(0/8) + 5(0/86) = 3/2 + 4/3 = 7/5$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با:

$$\text{محیط} = a + b + c = 5 + 7/5 + 4 = 16/5$$

☜ **مثال: اگر اضلاع مثلثی $a = 3$ و $b = 3\sqrt{3}$ و $c = 6$ باشد، زاویه‌ی A چقدر است؟**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Cos}\,A\ \rightarrow\ 9 = 27 + 36 - 2\times 3\sqrt{3}\times 6\,\text{Cos}\,A$$

$$\Rightarrow\ 36\sqrt{3}\,\text{Cos}\,A = 54\ \rightarrow\ \text{Cos}\,A = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \rightarrow\ A = \frac{\pi}{6}$$

☜ **مثال: اگر در مثلث غیر متساوی‌الساقینی رابطه‌ی $a^3 - b^3 = c^2(a-b)$ برقرار باشد، زاویه‌ی C کدام است؟**

✍ حل:

$$(a-b)(a^2 + b^2 + ab) = c^2(a-b) \xrightarrow{a \neq b} a^2 + b^2 + ab = c^2$$

از طرفی همواره داریم:

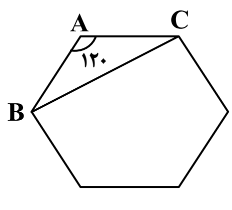
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\text{Cos}\,\hat{C}$$

با مقایسه‌ی این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\rightarrow\ -2ab\,\text{Cos}\,\hat{C} = ab\ \rightarrow\ \text{Cos}\,\hat{C} = -\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \hat{C} = 120°$$

☜ **مثال: طول قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم را پیدا کنید که طول ضلع آن ۲ است.**

✍ حل: می‌دانیم هر زاویه‌ی شش‌ضلعی منتظم $120°$ است. لذا طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

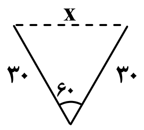


$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,.\,AC\,\text{Cos}\,120$$
$$= 2^2 + 2^2 - 2\times 2\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 12$$
$$\rightarrow\ BC^2 = 12\ \rightarrow\ BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

نکته: هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم از رابطه‌ی $\frac{(n-2)\times 180}{n}$ به‌دست می‌آید.

☜ **مثال: متحرکی ابتدا ۳۰ متر حرکت کرده و سپس روی مسیری که با مسیر اول زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازد به همان اندازه حرکت می‌کند. وقتی متحرک به انتهای مسیر دوم می‌رسد، فاصله‌ی وی از نقطه‌ی شروع چقدر است؟**

✍ حل: با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



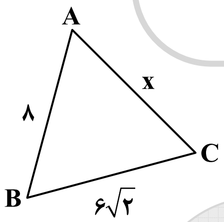
$$x^{۲} = (۳۰)^{۲} + (۳۰)^{۲} - ۲(۳۰)(۳۰) \times \frac{۱}{۲} = ۹۰۰$$
$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{۹۰۰} = ۳۰$$

البته این مثال را با روش هندسی نیز می‌توان حل کرد.

☜ **مثال: فاصله‌ی بین دو شهر A و B، ۸ کیلومتر و فاصله‌ی دو شهر B و C، $۶\sqrt{۲}$ کیلومتر است. اگر این سه شهر را دوبه‌دو روی نقشه با خط راست به هم وصل کنیم، زاویه‌ی A با دو شهر دیگر ۶۰° می‌شود. فاصله‌ی شهر A تا شهر C چند کیلومتر است؟**

✍ حل:

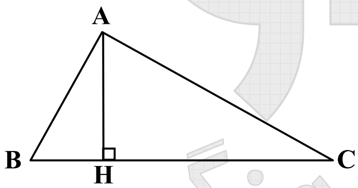
طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



$$(۶\sqrt{۲})^{۲} = x^{۲} + ۸^{۲} - ۲(۸)(x)\cos ۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \quad (۷۲) = x^{۲} + ۶۴ - ۸x \quad \Rightarrow \quad x^{۲} - ۸x - ۸ = ۰$$
$$\xrightarrow[\Delta = (-۸)^{۲} + ۳۲ = ۹۶]{\text{حل معادله}} \begin{cases} x = ۴ + \sqrt{۲۴} = ۴ + ۲\sqrt{۶} \\ x = ۴ - \sqrt{۲۴} = ۴ - ۲\sqrt{۶} < ۰ \Rightarrow \text{ضلع با طول منفی نداریم پس غیرقابل قبول است} \end{cases}$$

مساحت مثلث و قضیه‌ی سینوس‌ها:

در مثلث **ABC** مساحت مثلث برابر است با:



$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{۱}{۲} AH \times BC \\ AH &= AB \times \sin B = AC \times \sin C \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B = \frac{۱}{۲} AC \times BC \sin C$$

$$\to \quad AB \sin B = AC \sin C \quad \to \quad \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

با نوشتن این رابطه با یکی دیگر از ارتفاع‌ها و اثباتی مشابه داریم:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} ab \sin C = \frac{۱}{۲} ac \sin B = \frac{۱}{۲} bc \sin A$$

پس: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

قضیه‌ی فوق را قضیه‌ی سینوس‌ها می‌نامند.

نکته: مساحت متوازی‌الاضلاعی به اضلاع **a** و **b** و زاویه‌ی بین θ عبارتست از:

$$S = ab \sin \theta$$

☜ **مثال: اگر در مثلثی $A=۳۰^\circ$ و $B=۱۲۰^\circ$ و $a=۸$ باشد، سه ضلع مثلث و مساحت آن را بیابید.**

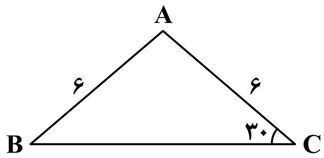
✍ حل:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ \rightarrow\ \frac{۸}{\sin ۳۰}=\frac{b}{\sin ۱۲۰}=\frac{c}{\sin ۳۰}\ \Rightarrow\ ۱۶=\frac{b}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۲c\ \Rightarrow\ c=۸\ ,\ b=۸\sqrt{۳}$$

حال مساحت را با هر کدام از دو ضلع به‌صورت دلخواه می‌توان نوشت:

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸\sqrt{۳}\ \sin ۳۰=۱۶\sqrt{۳}$$

☜ **مثال: مؤسسه‌ای غرفه‌ی فروش محصولات خود را در زمینی به ابعاد مقابل برپا کرده است. مساحت این زمین کدام است؟**

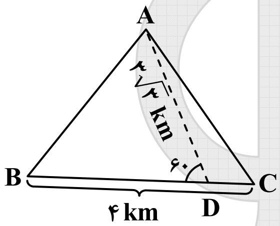


✍ حل: مثلث **ABC** متساوی‌الساقین است، لذا $\hat{B}=\hat{C}=۳۰^\circ$، بنابراین $\hat{A}=۱۸۰-(۳۰+۳۰)=۱۲۰^\circ$ داریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\times \sin ۱۲۰^\circ=۱۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۹\sqrt{۳}$$

☜ **مثال: بانکی مثلثی شکل با پارتیشن‌بندی به‌طول $۳\sqrt{۳}$ متر به دو قسمت برای استفاده‌ی کارمندان و ارباب رجوع تقسیم شده است. اگر بزرگ‌ترین ضلع بانک به‌طول ٤ متر بوده و زاویه‌ی مرز AD و یکی از نواحی جدید ۶۰° باشد، مساحت بانک چند متر مربع است؟**

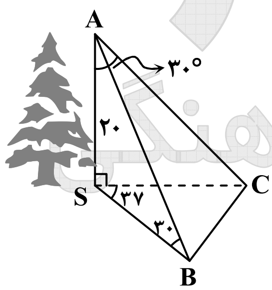
✍ حل:



$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}=\frac{۱}{۲}AD\times DB\times \sin ۶۰^\circ+\frac{۱}{۲}AD\times DC\times \sin ۱۲۰^\circ$$

$$=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}BD+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}DC=\frac{۹}{۴}(BD+DC)=\frac{۹}{۴}(BC)=\frac{۹}{۴}\times ۴=۹$$

☜ **مثال:** رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است، اندازه بگیرد. او روبه‌روی درخت در نقطه‌ی A ایستاده است. زاویه‌ی دید رضا با نوک درخت ۳۰° است. سپس رضا به سمت نقطه‌ی C حرکت می‌کند به‌گونه‌ای که SB و SC با یکدیگر زاویه‌ی ۳۷° می‌سازند. اگر در این حالت رضا طول درخت را ۲۰ متر اندازه‌گیری کند، مساحت مثلث SBC چقدر است؟ (زاویه‌ی بین AS و AB، ۱۵° است و داریم: $\sin ۱۵^\circ=۰/۲۶$)



✍ حل:

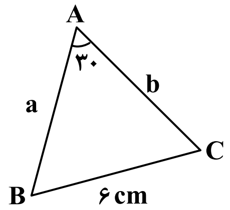
$$\overset{\Delta}{ASC}:\tan A=\frac{SC}{SA}\ \Rightarrow\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{SC}{۲۰}\ \rightarrow\ SC=\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}$$

$$\overset{\Delta}{ASB}:\frac{SB}{\sin ۱۵}=\frac{AS}{\sin ۳۰}=\frac{۲۰}{\frac{۱}{۲}}\ \Rightarrow\ SB=۴۰\times ۰/۲۵۶=۱۰/۴$$

لذا در مثلث **SBC** داریم:

$$S_{BCS}=\frac{۱}{۲}(SB\,.\,SC\,.\,\sin ۳۷^\circ)\simeq\frac{۱}{۲}\times ۱۰/۴\times\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}\times\frac{۶}{۱۰}=۳۶/۷$$

☜ مثال: در مثلث روبه‌رو اگر $a=۶\,cm$ و $\hat{A}=۳۰°$ و $Cos\,B=\frac{۳}{۵}$ باشد، طول ضلع b کدام است؟



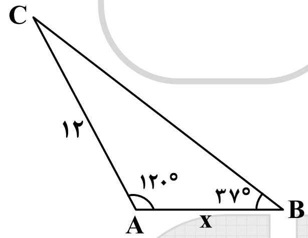
✍ حل:

$$Sin^۲B+Cos^۲B=۱ \Rightarrow Sin^۲B=۱-Cos^۲B=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow[\text{پس } Sin\,\hat{B} \text{ مثبت است}]{۰<\hat{B}<۱۸۰°} Sin\,B=\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{۶}{Sin\,۳۰°}=\frac{b}{Sin\,B} \Rightarrow \frac{۶}{\frac{۱}{۲}}=\frac{b}{\frac{۴}{۵}} \Rightarrow b=۱۲\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴۸}{۵}$$

☜ مثال: شکل کلی یک زمین گلف به‌صورت زیر است. مساحت این زمین چقدر است؟ ($Sin\,۲۳°\simeq۰/۴$ و $Sin\,۳۷°\simeq۰/۶$)

✍ حل:



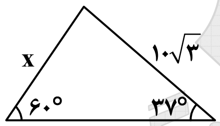
$$\hat{C}=۱۸۰°-(۱۲۰+۳۷)°$$

$$\frac{۱۲}{Sin\,۳۷°}=\frac{x}{Sin\,۲۳°} \Rightarrow x=\frac{۱۲\times۰/۴}{۰/۶}=۸$$

$$S\simeq\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۸\times Sin\,۱۲۰°=۴۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲۴\sqrt{۳}$$

☜ مثال: شمعی به‌طول ۱۵ سانتی‌متر را در حالی‌که خودکاری به‌طول $۱۰\sqrt{۳}$ به نوک آن تکیه داده شده و شمع با زمین زاویه‌ی $۶۰°$ می‌سازد، روشن می‌کنیم. مدتی پس از آب شدن شمع (بدون تغییر زاویه با زمین) خودکار بدون تغییر طول کمی روی زمین سُر خورده و زاویه‌ی آن با زمین به $۳۷°$ کاهش می‌یابد. چند سانتی‌متر از شمع آب شده است؟ ($Sin\,۳۷\simeq۰/۶$)

✍ حل: ابتدا طول شمع را پس از کاهش از رابطه‌ی سینوس‌ها می‌یابیم:

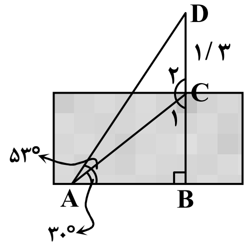


$$\frac{۱۰\sqrt{۳}}{Sin\,۶۰°}=\frac{x}{Sin\,۳۷°} \Rightarrow x=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\times۰/۶=۱۲$$

بنابراین $۱۵-۱۲=۳$ سانتی‌متر از شمع آب شده است.

☜ مثال: آنتنی روی زمین به‌صورت عمودی قرار گرفته است. اگر طول قسمت بیرون زمین آنتن، ۱/۳ متر باشد و قسمت انتهای میله با نقطه‌ی A در داخل زمین زاویه‌ی $۵۳°$ و قسمت ابتدایی بیرون زمین آنتن با آن نقطه زاویه‌ی $۳۰°$ بسازد، طول آنتن کدام است؟ ($Sin\,۲۳°\simeq۰/۳۹$ و $Sin\,۳۷°\simeq۰/۶$)

✍ حل: در مثلث ACD با توجه به قانون سینوس‌ها داریم:

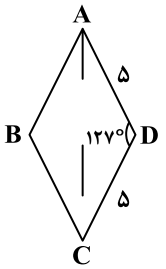


$$\frac{CD}{Sin\,(۵۳°-۳۰°)}=\frac{AC}{Sin\,D} \Rightarrow \frac{۱/۳}{Sin\,۲۳°}=\frac{AC}{Sin\,۳۷°} \Rightarrow AC=\frac{۱/۳\times۰/۶}{۰/۳۹}=۲$$

$$BC=AC\,.\,Sin\,۳۰°\simeq۲\times\frac{۱}{۲}=۱ \Rightarrow BD=BC+CD=۱+۱/۳=۲/۳$$

☜ **مثال: مساحت لوزی‌ای با ضلع ۵ و یک زاویه‌ی ۱۲۷ چقدر است؟** $(\cos 127^\circ \simeq -\frac{3}{5})$

✍ حل:



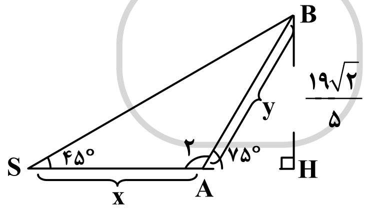
$$\sin^2 D + \cos^2 D = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 D = 1 - \cos^2 127^\circ = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow[\text{مثبت است}]{\text{Sin در ربع دوم}} \sin D = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot DC \cdot \sin D = 5 \times 5 \times \frac{4}{5} = 20$$

☜ **مثال: حمید و وحید در یک امتداد روی زمین دراز کشیده‌اند و به نوک یک کوه می‌نگرند. اگر یکی از آن‌ها قله‌ی کوه را در نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۷۵ درجه و دیگری در نقطه‌ی S با زاویه‌ی ۴۵ درجه ببیند و ارتفاع کوه برابر ۳/۸ کیلومتر باشد، فاصله‌ی آن دو از هم چند کیلومتر است؟** $(\sin 75^\circ \simeq 0/95)$

✍ حل: در مثلث **AHB** دایم:



$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{3/8}{y} \Rightarrow y = \frac{3/8}{0/95} \Rightarrow y = \frac{4 \times 0/95}{0/95} \rightarrow y = 2$$

هم‌چنین داریم:

$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$

از قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{y}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{2}} = 2x \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین این دو نفر به فاصله‌ی $2\sqrt{2}$ کیلومتر از هم قرار دارند.