

لعنزه فکره

فصل اول تبدیل لاپلاس

۱	- تعریف.....
۲	- لاپلاس مشتق.....
۳	- یافتن معکوس تبدیل لاپلاس
۴	- آنالیز کیفی ریشه ها.....
۵	- حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس.....
۶	- قضایای تبدیل لاپلاس.....
۷	- ورودی های استاندارد در کنترل فرآیند.....
۸	- تست های تبدیل لاپلاس.....
۹	- پاسخ تست های تبدیل لاپلاس.....
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸

فصل دوم سیستم های کنترلی درجه اول

۱۹
۲۰	- سیستم درجه اول.....
۲۱	- ۱ - پاسخ سیستم درجه اول به ورودی پله
۲۲	- ۲ - پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضرباتی
۲۳	- ۳ - پاسخ سیستم درجه اول به ورودی سینوسی.....
۲۴	- مثال های دیگری از سیستم درجه اول
۲۵
۲۶	- سیستم های درجه اول غیرخطی.....
۲۷	- ۵ - تست های سیستم های درجه اول
۲۸	- ۶ - پاسخ تست های سیستم درجه اول

فصل سوم سیستم های درجه اول متوالی و درجه دوم

۳۲	- سیستم های درجه اول متوالی
۳۵	- سیستم های درجه دوم.....
۴۰	- ۳ - پسی انتقال (Transportation Lag)
۴۱	- ۴ - تست های فصل سوم
۴۲	- ۵ - پاسخ تست های فصل سوم

فصل چهارم شیرهای کنترل، کنترلرها، ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها و افت کنترل

۴۳.....	۱- انواع شیرهای کنترل
۴۴.....	۲- کنترلرها و اقسام آن
۴۶.....	۳- توابع انتقال مدار بسته
۴۸.....	۴-۴- افت کنترل (offset)
۵۰.....	۴-۵- تست‌های فعلی
۵۱.....	۴-۶- پاسخ تست‌های فعلی فصل چهارم

فصل پنجم پایداری، آزمون روث، مکان هندسی ریشه‌ها

۵۲.....	۱- پایداری
۵۲.....	۲- آزمون روث
۵۵.....	۳- مکان هندسی ریشه‌ها
۶۰.....	۴- تست‌های فصل پنجم
۶۱.....	۵- پاسخ تست‌های فصل پنجم

فصل ششم پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست

۶۲.....	۱- پاسخ فرکانسی
۶۵.....	۲- نمودارهای بد (Bode Diagram)
۷۰.....	۳- بررسی پایداری به کمک دیاگرام بد
۷۳.....	۴- میزان کننده‌های زیگلر-نیکولز
۷۴.....	۵- دیاگرام نایکویست
۷۸.....	۶- بررسی پایداری به کمک دیاگرام نایکویست
۸۲.....	۷- تست‌های فصل ششم
۸۳.....	۸- پاسخ تست‌های فصل ششم

فصل هفتم نمونه سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۸۵.....	۱- سوالات آزمون سراسری سال
۸۹.....	۲- پاسخ سوالات کنترل آزمون سراسری
۹۳.....	۳- سوالات کنترل آزمون سال
۹۸.....	۴- پاسخ سوالات آزمون
۱۰۳.....	۵- سوالات آزمون
۱۰۸.....	۶- پاسخ سوالات آزمون
۱۱۶.....	۷- سوالات آزمون
۱۱۸.....	۸- پاسخ سوالات آزمون
۱۲۴.....	۹- سوالات آزمون
۱۲۷.....	۱۰- پاسخ سوالات آزمون
۱۳۲.....	۱۱- سوالات آزمون
۱۳۶.....	۱۲- پاسخ سوالات آزمون

سیمین هدیه صفحه ۱۲۰ :

فصل اول

تبدیل لاپلاس

۱-۱) تعریف

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}f(t) \quad (1)$$

مثال ۱: لاپلاس تابع $f(t) = 1$ برابر است با:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \times 1 dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

نکات قابل توجه تبدیل لاپلاس:

- ۱- تبدیل لاپلاس هیچ اطلاعی در مورد رفتار تابع $f(t)$ به ازای $t > 0$ به ما نمی‌دهد در بحث کنترل، t معرف زمان خواهد بود. و در زمان‌های منفی $0 < t < 0$ $f(t) = 0$ خواهد بود.
- ۲- تبدیل لاپلاس توسط یک انتگرال معین تعریف شده است؛ لذا برای هر تابع $f(t)$ ، تبدیل لاپلاس وجود نخواهد داشت.
- ۳- تبدیل لاپلاس یک تبدیل خطی است.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}f(s) + b\mathcal{L}g(s) \quad (2)$$

۴- تبدیل لاپلاس تابعی از متغیر t را به تابعی از متغیر s تبدیل می‌کند.

در جدول (۱) توابع مختلف نشان داده شده است.

$f(t)$	$f(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$e^{\pm at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s \mp a)^2 + \omega^2}$
$e^{\pm at} \cos \omega t$	$\frac{s \mp a}{(s \mp a)^2 + \omega^2}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n f(s)}{ds^n}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty f(s) ds$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{f(s)}{s}$
$e^{\pm at} f(t)$	$f(s \mp a)$

جدول (۱): تبدیل لاپلاس توابع مختلف

مثال ۲: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = t \sin 3t$ کدام است؟

$$\ell \rightarrow \text{از جدول (۱)}$$

$$\ell t^n g(t) = (-1)^n \frac{d^n g(s)}{ds^n}$$

$$g(t) = \sin 3t$$

$$g(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

در نتیجه از معادلات فوق داریم:

$$\ell f(t) = (-1)^1 \frac{d \left[\frac{3}{s^2 + 9} \right]}{ds} = \frac{6s}{(s^2 + 9)^2}$$

۹ | تبدیل لاپلاس | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

مثال ۳: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ کدام است؟

$$\ell \frac{g(t)}{t} = \int_s^\infty g(s) ds \rightarrow \text{از جدول (۱)}$$

$$g(t) = \sin t$$

$$g(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

در نتیجه از معادلات فوق داریم:

$$f(s) = \int_s^\infty \frac{ds}{s^2 + 1} = \operatorname{Arctg}(s) \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}(s)$$

مثال ۴: تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{-3t} \sinh 2t$ کدام است؟

$$\ell \sinh 2t = \frac{2}{s^2 - 4}$$

$$\ell e^{-3t} \sinh 2t = \frac{2}{(s+3)^2 - 4} = \frac{2}{s^2 + 6s + 5}$$

۱-۲) لاپلاس مشتق

$$\ell \frac{df(t)}{dt} = ?$$

حال از انتگرال‌گیری جز به جز انتگرال زیر را حل می‌کنیم:

$$u = e^{-st}, \quad dV = \frac{df}{dt} dt \Rightarrow dV = df$$

$$\ell f'(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^\infty + S \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = 0 - f(0) + Sf(s)$$

در نتیجه

$$\ell f'(t) = Sf(s) - f(0) \quad (۳)$$

لاپلاس مشتق دوم تابع برابر است با:

$$\ell f''(t) = S^2 f(s) - Sf(0) - f'(0) \quad (۴)$$

اثبات معادله (۴) مشابه اثبات معادله (۳) است.

نکته: لاپلاس مشتق n ام یک تابع در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\ell \frac{d^n f}{dt^n} = S^n f(s) - S^{n-1} f(0) - S^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - S f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (۵)$$

۱-۳) یافتن معکوس تبدیل لاپلاس

در این حالت می‌خواهیم بدانیم چگونه می‌توان تابع $f(t)$ را در صورتی که لاپلاس آن مشخص باشد، به دست آورد. در این صورت مسئله به دو حالت اصلی تقسیم می‌شود:

الف) توابعی که در جدول (۱) وجود دارند.

این حالت بسیار ساده است و با یک مراجعت ساده به جدول (۱) قابل محاسبه است.

مثال (۵): تبدیل لاپلاس تابعی $\frac{2}{s^3}$ است مقدار $f(t)$ برابر است با:

$$\rightarrow \text{از جدول (۱)} \quad f(t) = t^2$$

ب) یافتن معکوس تبدیل لاپلاس توابعی که در جدول (۱) وجود ندارند.
این قسمت در قالب چندین مثال توضیح داده خواهد شد.

مثال (۶): معکوس تبدیل لاپلاس $\frac{1}{s(s+1)}$ کدام است؟

در این حالت نیاز به تجزیه کسر داریم:
ابتدا ثابت‌های A و B را پیدا می‌کنیم:

$$S(S+1) = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{S+1} = A + \frac{BS}{S+1}$$

سپس ۰ = S قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{1} = A + 0 \rightarrow A = 1$$

$$(S+1) \rightarrow \frac{1}{S} = \frac{A(S+1)}{S} + B$$

با قراردادن $S = -1$ می‌توان B را محاسبه کرد:

$$-1 = 0 + B \rightarrow B = -1$$

اکنون به راحتی می‌توان تابع $f(t)$ را محاسبه کرد:

$$f(t) = \ell^{-1} \left[\frac{1}{S} - \frac{1}{S+1} \right] = 1 - e^{-t}$$

مثال (۷): لاپلاس معکوس تابع $\frac{1}{S(S+2)^2}$ کدام است؟

$$\frac{1}{S(S+2)^2} = \frac{A}{S} + \frac{B}{(S+2)^2} + \frac{C}{(S+2)}$$

باز هم نیاز به تجزیه کسر داریم:

$$S = 0 \rightarrow \text{ضرب طرفین در } S \quad A = \frac{1}{4}$$

$$S = -2 \rightarrow \text{ضرب طرفین در } (S+2)^2 \quad B = -\frac{1}{2}$$

اما برای محاسبه C روش محاسبه متفاوت است.

$$(S+2)^2 \rightarrow \text{ضرب طرفین در } \frac{1}{S} = \frac{A}{S}(S+2)^2 + B + C(S+2)$$

برای محاسبه C از معادله فوق مشتق می‌گیریم و سپس ۲ = S قرار می‌دهیم:

$$-\frac{1}{S^2} = \left[\frac{A(S+2)^2}{S} \right] + 0 + C$$

$$-\frac{1}{4} = 0 + 0 + C \rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

۱۱ | تبدیل لاپلاس | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

نکته: دقت شود که در معادله بالا نیازی به گرفتن مشتق از عبارت داخل کروشه نیست چون به هر حال جمله $S+2$ پس از مشتق‌گیری هم در معادله باقی می‌ماند و لذا وقتی $S=-2$ قرار داده می‌شود اثربخشی خواهد داشت و مقدار آن صفر خواهد شد.

$$\ell^{-1} \frac{1}{S(S+2)^2} = \ell^{-1} \left[\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{(S+2)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{(S+2)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} te^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} = \frac{1}{4} [1 - (2t+1)e^{-2t}]$$

مثال (۸): لاپلاس معکوس تابع $\frac{2}{S(S^2+4)}$ کدام است؟

$$\frac{2}{S(S^2+4)} = \frac{C}{S} + \frac{a+bi}{S+2i} + \frac{a-bi}{S-2i}$$

دقت شود که ثابت‌های تجزیه کسر در اعداد مختلف مزدوج هم هستند.

$$S=0 \rightarrow \text{ضرب طرفین در } S \text{ و } 0 \quad C = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(S+2i) \rightarrow \text{ضرب طرفین در } (S+2i) \quad \frac{2}{S(S-2i)} = \frac{C(S+2i)}{S} + (a+bi) + \frac{(a-bi)(S+2i)}{S-2i}$$

سپس $S=-2i$ قرار داده می‌شود.

$$\frac{2}{(-2i)(-4i)} = 0 + (a+bi) + 0$$

$$-\frac{1}{4} = a+bi \rightarrow a = -\frac{1}{4}, b=0$$

در نتیجه:

$$\ell^{-1} \frac{2}{S(S^2+4)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2it} - \frac{1}{4} e^{2it} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} [\cos 2t - i \sin 2t] - \frac{1}{4} [\cos 2t + i \sin 2t] = \frac{1}{2} [1 - \cos 2t]$$

در حل مثال فوق از دو قضیه مربوط به اعداد مختلط به صورت زیر استفاده شده است:

$$e^{(a+bi)t} = e^{at} [\cos bt + i \sin bt] \quad (6)$$

$$e^{-(a+bi)t} = e^{-at} [\cos bt - i \sin bt] \quad (7)$$

مثال (۹): لاپلاس معکوس تابع $\frac{1}{(S+K_1+iK_2)(S+K_1-iK_2)}$ کدام است؟

$$\frac{1}{(S+K_1+iK_2)(S+K_1-iK_2)} = \frac{a+bi}{S+K_1+iK_2} + \frac{a-bi}{S+K_1-iK_2}$$

$$\ell^{-1} f(s) = (a+bi) e^{-(K_1+iK_2)t} + (a-bi) e^{-(K_1-iK_2)t}$$

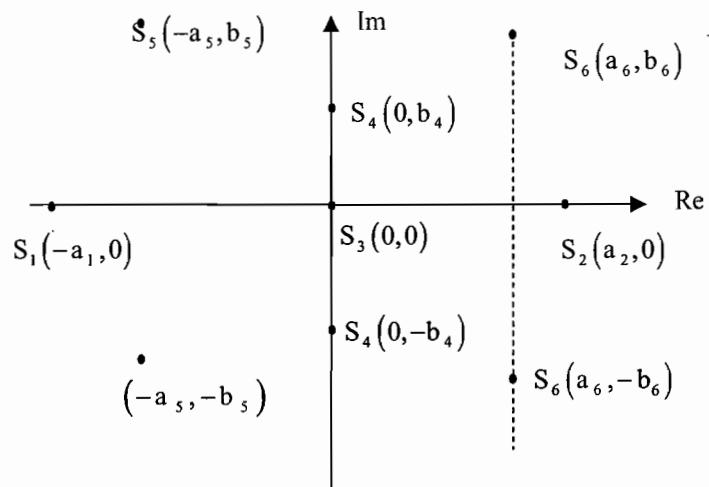
$$f(t) = 2e^{-K_1 t} [a \cos K_2 t + b \sin K_2 t] \quad (8)$$

اثبات معادله (۸) به عهده خواننده است.

۱-۴) آنالیز کیفی ریشه‌ها

در این بخش می‌خواهیم بدانیم چگونه بر اساس دانستن موقعیت ریشه در صفحه مختصات موهومی می‌توانیم به طور کیفی رفتار پاسخ را پیش‌بینی کنیم.

در حالت کلی و چنان‌که در شکل (۱) نشان داده شده است، یکی از موقعیت‌های شش‌گانه نشان داده شده برای یک ریشه، در مختصات موهومی قابل تصور است.



تابع نمایی میرا با زمان

$$e^{-a_1 t}$$

S_1

تابع نمایی غیر میرا با زمان

$$e^{+a_2 t}$$

S_2

عدد ثابت

$$1$$

S_3

تابع نوسانی دائم

$$C_1 \sin b_4 t + C_2 \cos b_4 t$$

S_4

تابع نوسانی کاهنده با زمان

$$e^{-a_5 t} [C_0 \sin b_5 t + C_1 \cos b_5 t]$$

S_5

تابع نوسانی با دامنه افزاینده با زمان

$$e^{a_6 t} [C_0 \sin b_6 t + C_1 \cos b_6 t]$$

S_6

نکات مهم بحث کیفی ریشه‌ها عبارتند از:

اگر ریشه دارای جز حقیقی مثبت، منفی و یا صفر باشد تغییرات دامنه آن با زمان به ترتیب غیرمیرا، میرا و با دامنه ثابت خواهد بود.

اگر ریشه دارای جز موهومی باشد رفتار نوسانی خواهد داشت و در غیر این صورت فاقد نوسان خواهد بود.

در نتیجه قرار گرفتن ریشه در سمت راست محور موهومی موجب غیر میرا شدن آن و قرار گرفتن آن در سمت چپ محور موهومی موجب میرایی پاسخ می‌شود و داشتن و نداشتن جز موهومی معیار نوسانی یا غیر نوسانی بودن پاسخ است.

مثال (۱۰): رفتار کیفی پاسخ سیستمی که تابع تبدیل آن $\frac{1}{(S^2+S+1)}$ است چگونه است؟

$$S^2 + S + 1 = 0 \rightarrow S = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

دامنه تابع کاهنده با زمان است \rightarrow جز حقیقی منفی است

نوسانی است \rightarrow ریشه جز موهومی دارد

بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت رفتار پاسخ سیستم فوق یک تابع نوسانی با دامنه کاهنده با زمان خواهد بود.

۱-۵) حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیلات لاپلاس

مراحل حل یک معادله دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس به صورت زیر است:

۱) از طرفین معادله دیفرانسیل، لاپلاس می‌گیریم.

۲) معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری بر حسب S تبدیل می‌شود. $(X(s))$

۳) گرفتن تبدیل معکوس از تابع تبدیل لاپلاس حاصل از مرحله فوق منجر به یافتن پاسخ معادله دیفرانسیل می‌شود.

مثال (۱۱): معادله دیفرانسیل روبرو را با شرط اولیه داده شده حل کنید.

$$x'' + 4x = 2e^{-t}$$

$$x(0) = x'(0) = 0$$

$$\text{از معادله لاپلاس می‌گیریم} \quad S^2x(s) - Sx(0) - x'(0) + 4x(s) = \frac{2}{(S+1)}$$

$$x(s) = \frac{2}{(S^2 + 4)(S+1)} = \frac{A + Bi}{S+2i} + \frac{A - Bi}{S-2i} + \frac{C}{S+i}$$

$$C = \frac{2}{5}, \quad A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{10}$$

$$X(t) = \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t$$

۱-۶) قضایای تبدیل لاپلاس

الف) قضیه مقدار نهایی

بیان قضیه فوق به صورت زیر است:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{S \rightarrow 0} Sf(S) \quad (9)$$

$$t \rightarrow \infty \quad S \rightarrow 0$$

$$\text{مثال (۱۲): اگر } f(s) \text{ باشد مقدار نهایی تابع } f(t) \text{ برابر است با:} \quad S^2 + 4 \\ S(s^2 + 3s + 1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{S \rightarrow 0} S \times \frac{S^2 + 4}{S(s^2 + 3s + 1)} = 4$$

ب) قضیه مقدار اولیه

بیان این قضیه به صورت زیر است:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{S \rightarrow \infty} Sf(S) \quad (10)$$

مثال (۱۳): مقدار اولیه تابع مثال (۱۲) را محاسبه کنید؟

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{S \rightarrow \infty} S \times \frac{S^2 + 4}{S(s^2 + 3s + 1)} = 1$$

ج) قضیه انتقال تابع

بیان این قضیه به صورت زیر است:

$$\ell f(t-t_0) = e^{-st_0} f(s) \quad (11)$$

هنگامی که

$$\ell f(t) = f(s)$$

مثال (۱۴): لaplas تابع $\sin(2t-2)$ را محاسبه کنید؟

$$t_0 = 2$$

$$\ell f(t) = e^{-2s} \times \frac{3}{s^2 + 9} = \frac{3e^{-2s}}{s^2 + 9}$$

د) قضیه کانولوشن

اگر لaplas تابع $f(t)$ و $g(s)$ به ترتیب $f(s)$ و $g(s)$ باشد، لaplas معکوس حاصل ضرب آنها چنین است:

$$\ell^{-1} f(s) g(s) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

مثال (۱۵): لaplas معکوس تابع $\frac{1}{(s-1)(s-2)}$ را به کمک قضیه فوق محاسبه کنید.

$$f(s) = \frac{1}{s-1} \rightarrow f(t) = e^t$$

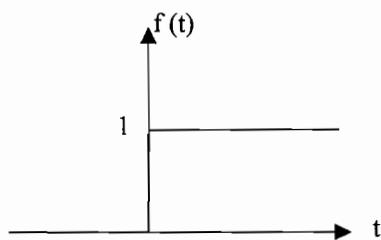
$$g(s) = \frac{1}{s-2} \rightarrow g(t) = e^{2t}$$

$$\ell^{-1} \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \int_0^t e^\tau e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} - e^t$$

۱-۷) ورودی‌های استاندارد در کنترل فرآیند**الف) ورودی پله‌ای واحد: (unit step function)**

$$f(t) = u(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}, \quad f(s) = \frac{1}{s} \quad (13)$$

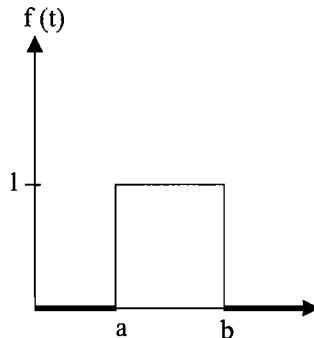
شکل تابع پله‌ای واحد به صورت زیر است:



شکل (۲): نمودار تابع پله‌ای واحد

ب) ورودی پالسی:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & b \leq t \end{cases} \quad (14)$$



شکل تابع پالسی به فرم زیر است.

شکل (۳): نمودار تابع پالسی

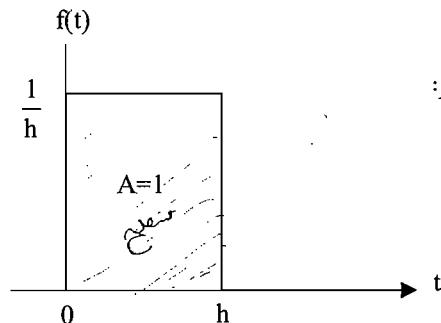
$$f(t) = u(t-a) - u(t-b) \quad (15)$$

$$f(s) = \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s} \quad (16)$$

ج) تابع ضربانی: (Impulse)

تابع $f(t)$ را به فرم زیر در نظر بگیرید: (حالت خاص از تابع پالسی)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{h} & 0 \leq t < h \\ 0 & h \leq t \end{cases} \quad (17)$$



$$f(t) = \frac{1}{h} u(t) - \frac{1}{h} u(t-h) \quad (18)$$

ویژگی تابع فوق آن است که سطح زیر نمودار آن واحد است. حال اگر h به سمت صفر میل کند خواهیم داشت:

$$f(s) = \frac{1}{hS} - \frac{e^{-hs}}{hS}$$

$$f(s) = \frac{1}{hS} [1 - e^{-hs}]$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t) = \frac{0}{0} = \text{اعمال قاعده هوپیتال} = \frac{\frac{d}{dt} f(t)}{\frac{d}{dt} s} = \frac{Se^{-hs}}{S} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t) = \delta(t) \quad \text{تابع ضربان ایدهآل}$$

بنابراین:

$$\ell \delta(t) = 1 \quad (21)$$

۱-۸) تست‌های تبدیلات لاپلاس

۱ - معکوس تبدیل $\frac{n!}{(S+a)^{n+1}}$ و همچنین تبدیل لاپلاس تابع $\cos kt$ کدام است؟

$$\frac{S}{k^2 - S^2}, \quad t^n e^{-at} \quad (۲)$$

$$\frac{S}{S^2 - k^2}, \quad t^n e^{-at} \quad (۴)$$

$$\frac{S}{S^2 + k^2}, \quad e^{-nat} u(t) \quad (۱)$$

$$\frac{S}{S^2 + k^2}, \quad t^n e^{-at} u(t) \quad (۳)$$

۲ - تبدیل لاپلاس تابع $\int_0^t \sin kt dt$ کدام است؟

$$\frac{S}{k(S^2 + k^2)} \quad (۴)$$

$$\frac{k}{S(S^2 + k^2)} \quad (۳)$$

$$\frac{S}{S^2 + k^2} \quad (۲)$$

$$\frac{k}{S^2 + k^2} \quad (۱)$$

۳ - در مورد ریشه‌های واقع بر محور موهومی کدام جمله صحیح است؟

(۱) به طور نمایی در طول زمان از بین می‌روند.

(۲) به طور نمایی در طول زمان افزایش می‌یابند.

(۳) با دامنه ثابت برحسب زمان نوسان می‌کنند. اگر ریشه‌ها تکراری باشند دامنه نوسان به صورت یکسری توانی با زمان افزایش می‌یابد.

(۴) دامنه نوسان برحسب زمان کاهش می‌یابد.

۴ - قضیه مقدار نهایی کدام است؟

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{S \rightarrow \infty} S f(S) \quad (۲)$$

$$\mathcal{L}f(t-t_0) = e^{-St_0} f(s) \quad (۴)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{S \rightarrow 0} S f(S) \quad (۱)$$

$$\mathcal{L}e^{-at} f(t) = f(S+a) \quad (۳)$$

۵ - لاپلاس تابع $\cos\left(\frac{t}{a}\right)$ برابر است با:

$$\frac{a^2(S-a)}{(aS-a^2)^2 + 1} \quad (۴)$$

$$\frac{S-a^2}{(aS-a^2)^2 - 1} \quad (۳)$$

$$\frac{S^2-a^2}{(s-a^2)^2 + 1} \quad (۲)$$

$$\frac{S(S-a)}{(a^2-aS)^2 + 1} \quad (۱)$$

۶ - لاپلاس توابع $t u(t)$ و $t^2 u(t)$ کدام هستند؟

$$\frac{1}{S^2}, \frac{1}{S+1} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{S^2}, \frac{1}{S^2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{S^2}, \frac{1}{S} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{S}, \frac{1}{S^2} \quad (۱)$$

۷ - معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $x''' + 3x'' - 3x' + 4x = 3e^t$ کدام است؟

(۴) هیچ‌کدام

$$S^3 + 3S^2 - 3S + 4 = 0 \quad (۳)$$

$$(S+1)^2 = 0 \quad (۲)$$

$$S^3 + 3S = \frac{3}{S+1} \quad (۱)$$

۸ - مقدار $x(t)$ وقتی t در ناحیه $0.5 < t < 0.9$ قرار گرفته چقدر است؟ در صورتی که $x(S) = \frac{1-e^{-s}}{S}$ باشد.

$$t \quad (۴)$$

$$0.5 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۱۷ | تبدیل لاپلاس | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۹ - لاپلاس $t^n u(t)$ کدام است؟

$$\frac{n!}{S^{n+1}} \quad (۱)$$

$$\frac{n!}{S^{n+1}} \quad (۲)$$

$$\frac{n!}{S^n} \quad (۳)$$

$$\frac{(n+1)!}{S^{n+1}} \quad (۴)$$

۱۰ - لاپلاس تابع $f(t) = u(t) + u(t+b) - tu(t)$ کدام است؟

$$\frac{1}{S} \left[1 + \frac{e^{-bs}}{s} - \frac{1}{s^2} \right] \quad (۱)$$

$$e^s + \frac{e^{-bs}}{s} - \frac{1}{s^2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{S} + \frac{e^{+bs}}{s} - \frac{1}{s^2} \quad (۳)$$

$$e^s + e^{-bs} + e^s \quad (۴)$$

۱۱ - تبدیل لاپلاس $a u(t+a)$ کدام است؟

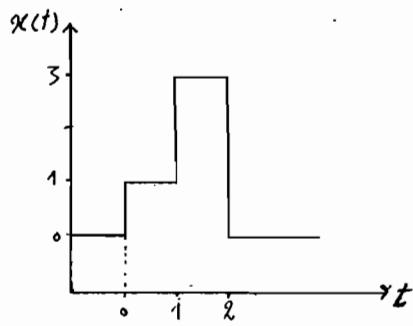
$$\frac{a}{S}, a \quad (۱)$$

$$\frac{a}{S}, \frac{a}{S} \quad (۲)$$

$$S, aS \quad (۳)$$

$$a, \frac{a}{S} \quad (۴)$$

۱۲ - نمودار تابعی مطابق شکل رو برو است، لاپلاس این تابع $X(s)$ برابر است با:



$$\frac{1+3e^{-s}}{s} \quad (۱)$$

$$\frac{(1-e^{-s}-3e^{-2s})}{s} \quad (۲)$$

$$\frac{(1+2e^{-s}+3e^{-2s})}{s} \quad (۳)$$

$$\frac{(1+2e^{-s}-3e^{-2s})}{s} \quad (۴)$$

۹-۱) پاسخ تست‌های تبدیل لاپلاس

۱ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{f(s)}{s} = \frac{1}{s} \frac{K}{s^2 + K^2}$$

۲ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۴ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۵ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\int e^{at} f(t) dt = f(s-a)$$

$$\int \cos\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{a^2}}$$

$$\int e^{at} \cos\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{(s-a)}{(s-a)^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{a^2(s-a)}{a^2(s-a)^2 + 1}$$

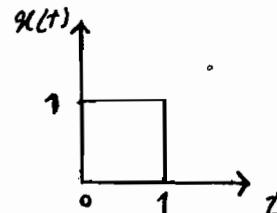
۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۷ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۸ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$X(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \rightarrow x(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$0.5 < t < 0.9 \rightarrow x(t) = 1$$



۹ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۰ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۱۱ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۲ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

دستور
 اول
 دستور
 دوم
 دستور
 سوم
 $x(t) = u(t) + 2u(t-1) - 3u(t-2)$
 $x(s) = \frac{1}{s} + \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{3e^{-2s}}{s}$
 $x(s) = \frac{(1+2e^{-s}-3e^{-2s})}{s}$

فصل دوم

سیستم‌های کنترلی درجه اول

۱-۲- سیستم درجه اول

سیستم درجه اول سیستمی است که معادله دیفرانسیل بیان کننده تغییرات در آن از درجه اول باشد.

مثال ۱: دماسنجد درجه اول

اگر دماسنجدی درون سیالی به دمای x قرار گیرد روند تغییرات دمای نشان داده شده توسط دماسنجد چگونه است؟
با نوشتن بیلان انرژی داریم:

$$\text{Input} - \text{Out} = \text{Acc.} \quad (1)$$

$$h(x - y) - 0 = mc \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

که در معادله فوق:

x : دمای محیطی است که دماسنجد در آن واقع است.

y : دمای نشان داده شده توسط دماسنجد

h : ضریب انتقال حرارت کنوکسیونی محیط

A : سطح تماس دماسنجد با محیط

معادله (۲) را برای حالت پایدار هم می‌نویسیم:

$$hA(x_s - y_s) = 0 \quad (3)$$

که x_s و y_s به ترتیب مقادیر x و y در حالت پایدار هستند. با تعریف متغیرهای انحرافی به صورت زیر:

$$X = x - x_s \quad (4)$$

$$Y = y - y_s \quad (5)$$

معادلات (۲) و (۳) را از هم کم می کنیم:

$$hA[(x - x_s) - (y - y_s)] = mc \frac{d(y - y_s)}{dt} \quad (6)$$

$$hA(X - Y) = mc \frac{dY}{dt} \quad (7)$$

$$X - Y = \frac{mc}{hA} \frac{dY}{dt} \quad (8)$$

$$X = Y + \tau \frac{dY}{dt} \quad (9)$$

که در معادله بالا τ ثابت زمانی این سیستم درجه اول است:

$$\tau = \frac{mc}{hA} \quad (10)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله بالا داریم:

$$X(S) - Y(S) = \tau SY(S) \quad (11)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (12)$$

عبارت $\frac{1}{\tau s + 1}$ تابع انتقال سیستم درجه اول دماستج است، که نسبت تغییرات دمای نشان داده شده توسط دماستج را نسبت به دمای محیط نشان می دهد. و آن را با $G(S)$ نشان می دهیم. تابع انتقال $G(S)$ مشخصات دینامیکی سیستم را کاملاً تشریح می کند. اگر تغییری در دمای محیط (t) انجام شود به کمک تابع انتقال و از طریق معادله زیر می توان تغییرات دمای دماستج را پیدا کرد:

$$Y(S) = X(S) G(S) \quad (13)$$

حال می توان پاسخ (t) Y را به هر ورودی دلخواه (t) X به دست آورد. در ادامه به بررسی پاسخ سیستم درجه اول به ورودی های استاندارد می پردازیم.

۱-۲-۲ پاسخ سیستم درجه اول به ورودی پله ای

اگر $X(t) = Au(t)$ باشد در نتیجه:

$$X(S) = \frac{A}{S} \quad (14)$$

از ترکیب معادلات (۱۳) و (۱۴) داریم:

$$Y(S) = \frac{A}{S} \cdot \frac{1}{\tau S + 1} \quad (15)$$

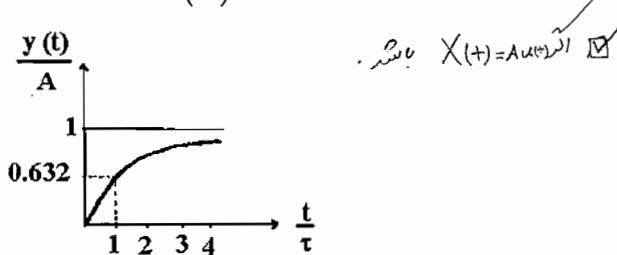
$$Y(S) = \frac{C_1}{S} + \frac{C_2}{\tau S + 1} \quad (16)$$

که $C_1 = A$ و $C_2 = -A\tau$ است. با لاپلاس معکوس گرفتن از معادله (۱۶) داریم:

$$Y(t) = A \left[1 - e^{-\tau t} \right] \quad (17)$$

۲۱ مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های کنترلی درجه اول

در شکل زیر منحنی تغییرات $(t)Y$ نسبت به زمان بی بعد نشان داده شده است.



شکل (۱): پاسخ سیستم درجه اول به ورودی پله‌ای

نکته: ثابت زمانی، زمانی است که سیستم به ۶۳.۲ درصد مقدار نهایی خودش می‌رسد.
البته مقدار نهایی تابع برابر است با:

$$\text{که حدم} \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \text{حد}_{S \rightarrow 0} SY(S) = \text{حد}_{S \rightarrow 0} S \frac{A}{S(\tau S + 1)} = A$$

هنگامی که زمان طی شده به 2τ ، 3τ و 4τ برسد، درصد پاسخ به ترتیب ۸۶.۵، ۹۵ و ۹۸ درصد مقدار نهایی اش می‌رسد. از این‌رو می‌توان گفت پس از سه یا چهار ثابت زمانی، پاسخ سیستم درجه اول را می‌توان کامل فرض کرد.

نکته: شیب تابع $\frac{Y(t)}{A}$ در لحظه صفر برابر $\frac{1}{\tau}$ است. به بیانی اگر شدت اولیه تغییرات ثابت بماند، پاسخ پس از یک ثابت زمانی کامل می‌شود.

مثال ۲: اگر دما‌سنجی به دمای 90°F در لحظه صفر وارد محیطی با دمای 100°F شود پس از چه زمانی دمای آن به 98°F می‌رسد. (ثابت زمانی دما‌سنج 0.1 min است).

$$A = 100 - 90 = 10$$

$$Y(t) = 98 - 90 = 8$$

$$(17) \quad 8 = 10 \left[1 - e^{-\frac{t}{0.1}} \right] \rightarrow 8 = 10 \left[1 - e^{-\frac{t}{0.1}} \right]$$

$$t = 0.16 \text{ min}$$

۲-۲-۲- پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی

اگر $X(t) = \delta(t)$ باشد. داریم:

$$X(S) = 1$$

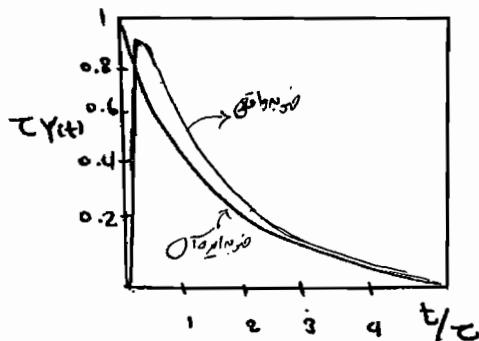
$$Y(S) = 1 \times \frac{1}{\tau S + 1} \quad (18)$$

با گرفتن لاپلاس معکوس، پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی به دست می‌آید.

$$Y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (19)$$

$$\tau Y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (20)$$

در شکل (۲) روند تغییرات $y(t)$ بر حسب t رسم شده است.



شکل (۲): پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی

همان‌طور که در شکل (۲) ملاحظه می‌شود پاسخ سریعاً به ۱ می‌رسد و سپس به صورت نمایی فروکش می‌کند. چنان افزایش نمایی از لحاظ فیزیکی غیرممکن است ولی در شرایط ایده‌آل می‌توان به آن نزدیک شد.

۲-۳-۲-۲- پاسخ سیستم درجه اول به ورودی سینوسی

اگر $X(t) = A \sin \omega t$ باشد. داریم:

$$X(S) = \frac{A\omega}{S^2 + \omega^2} \quad (21)$$

$$Y(S) = \frac{A\omega}{S^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{\tau S + 1} \quad (22)$$

$$Y(t) = \frac{A\omega\tau e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2 \omega^2 + 1} + \frac{A}{\tau^2 \omega^2 + 1} \sin \omega t - \frac{A\omega\tau}{\tau^2 \omega^2 + 1} \cos \omega t \quad (23)$$

به کمک رابطه زیر خواهیم داشت:

$$p \cos A + q \sin A = r \sin(A + \theta) \quad (24)$$

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \tan \theta = \frac{p}{q} \quad (25)$$

$$Y(t) = \frac{A\omega\tau e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2 \omega^2 + 1} + \frac{A}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (26)$$

$$\Phi = \tan^{-1}(-\omega\tau) \quad (27)$$

هنگامی که $t \rightarrow \infty$ اولین جمله سمت راست معادله (۲۶) صفر است و فقط جواب تناوبی باقی می‌ماند که آن را جواب حالت یکنواخت می‌نامیم.

$$Y(t) = \frac{A}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \sin(\omega t + \Phi) \quad : t \rightarrow \infty \quad \text{برای سینوسی به پاسخ هاربر به مرسته نهاده} \quad (28)$$

با مقایسه تابع محرک سینوسی ورودی و پاسخ آن متوجه می‌شویم:
الف) فرکانس پاسخ و ورودی یکسان است.

ب) دامنه پاسخ همواره از دامنه ورودی کوچکتر است.

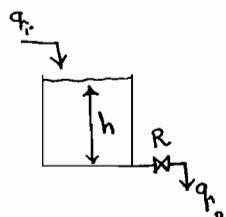
ج) پاسخ دارای یک تأخیر زمانی به اندازه $\tan^{-1}(-\omega\tau)$ است.

ترم تأخیر زمانی Φ را به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\underbrace{\Phi}_{\text{تاخیر (برحسب زمان)}} = \frac{|\Phi|}{360f} \quad (29)$$

که f فرکانس نوسان است.

۴-۳-۲- مثال‌های دیگری از سیستم درجه اول



شکل (۳): سیستم کنترل سطح مایع

$$q = \frac{h}{R} \quad (30)$$

بیلان جرم را برای این سیستم می‌نویسیم:

$$q_i - q_o = A \frac{dh}{dt} \quad (31)$$

معادله (۳۱) را برای حالت پایدار هم می‌نویسیم:

$$q_{is} - q_{os} = 0 \quad (32)$$

با کم کردن معادلات (۳۱) و (۳۲) از هم داریم:

$$Q_i - Q_o = A \frac{dH}{dt} \quad (33)$$

اکنون H را از معادله (۳۰) در معادله (۳۳) جایگزین می‌کنیم:

$$Q_i - \frac{H}{R} = A \frac{dH}{dt} \quad (34)$$

با لاپلاس گیری از معادله فوق داریم:

$$Q_i(S) - \frac{H(S)}{R} = ASH(S) \quad (35)$$

در نتیجه

$$\left\{ \frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{R}{RAS+1} \right. \quad (36)$$

با مقایسه معادله فوق با فرم استاندارد تابع تبدیل سیستم درجه اول یعنی $\frac{k}{\tau S + 1}$ داریم:

$$\tau = RA \quad , \quad K = R \quad (37)$$

در معادله (۳۶) به جای $H(S)$ از معادله (۳۰) بر حسب Q_0 جایگزین می‌کنیم:

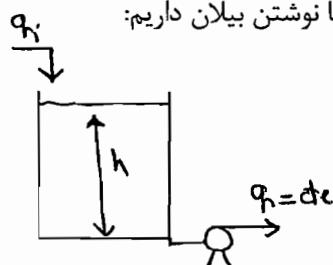
$$\frac{Q_0(S)}{Q_i(S)} = \frac{1}{RAS+1} \quad (38)$$

ملاحظه می‌شود وقتی نسبت دبی خروجی به دبی ورودی نوشته شود، بهره حالت پایدار (K) برابر یک می‌شود. یعنی نسبت

خروجی به ورودی در حالت پایدار برابر واحد است.

مثال ۳: اگر در سیستم سطح مایع به جای شیر در خروجی یک پمپ نصب کنیم چون پمپ، دبی ثابتی را پمپ می‌کند. لذا مقدار

دبی مایع خروجی همواره مقداری ثابت است لذا با نوشتن بیلان داریم:



شکل (۴): سیستم سطح مایع با نصب پمپ در خروجی

$$q_i - q_{os} = A \frac{dh}{dt} \quad (39)$$

$$q_{is} - q_{os} = 0 \quad (40)$$

که در معادلات فوق $q_{os} = q_{os}$ است لذا اگر معادلات (۳۹) و (۴۰) را از هم کم کنیم داریم:

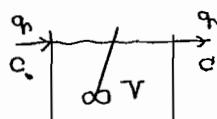
$$Q_i - 0 = A \frac{dH}{dt} \quad (41)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله فوق داریم:

$$\frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{1}{AS} \quad (42)$$

که دیگر مانند فرم استاندارد سیستم درجه اول نیست.

مثال ۴: مخزن اختلاط در شکل (۵) جریانی از مایع به غلظت C_0 وارد تانک اختلاط می‌شود با فرض جریان درون mixed-Well مخزن و نوشتن بیلان جرم داریم:



شکل (۵): مخزن اختلاط

$$qC_0 - qC = V \frac{dC}{dt} \quad (43)$$

$$qC_{os} - qC_s = 0 \quad (44)$$

با کسر کردن معادلات فوق داریم:

$$qC_0 - qC = V \frac{dC}{dt} \quad (45)$$

که در معادله بالا

C_0 : غلظت جریان ورودی به مخزن

q : دبی حجمی خوراک و خروجی

V : حجم مخزن

معادله (۴۵) را به فرم زیر می‌توان نوشت:

$$C_0 - C = \frac{V}{q} \frac{dC}{dt} \quad (46)$$

و لاپلاس می‌گیریم:

$$C_0(S) - C(S) = \frac{V}{q} SC(S) \quad (47)$$

۲۵ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های کنترلی درجه اول

با مقایسه با فرم استاندارد معادله درجه اول داریم:

$$\tau = \frac{V}{q} , \quad K = 1 \quad (48)$$

$$\frac{C(S)}{C_0(S)} = \frac{1}{\tau S + 1} \quad (49)$$

مثال ۵: مخزن اختلاط به همراه واکنش شیمیایی درجه اول.

این مثال مانند مثال قبلی است فقط در آن واکنش شیمیایی درجه اول هم داریم، بنابراین:

$$qC_0 - qC - V(-r_A) = V \frac{dC}{dt} \quad (50)$$

که معادله سرعت واکنش به فرم زیر است:

$$-r_A = kC \quad (51)$$

در نتیجه داریم:

$$qC_0 - qC - V k C = V \frac{dC}{dt} \quad (52)$$

$$C_0 - \left(1 + \frac{V k}{q}\right) C = \frac{V}{q} \frac{dC}{dt} \quad (53)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس داریم:

$$\frac{C(s)}{C_0(s)} = \frac{k_p}{\tau s + 1} \quad (54)$$

که در معادله بالا مقادیر ثابت زمانی (τ) و بهره (K_p) عبارتند از:

$$\tau = \frac{V}{1 + \frac{V k}{q}} \quad (55)$$

$$k_p = \frac{1}{1 + \frac{V k}{q}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{مخزن با واکنش شیمیایی} \\ \text{خرجی اول} \end{array} \right\} \quad (56)$$

۴-۲- سیستم‌های درجه اول غیرخطی

مثال ۶: اگر در مثال ۲ فرض کنیم ارتباط دبی خروجی و ارتفاع مایع درون مخزن به صورت زیر باشد:

$$q = C\sqrt{h} \quad (57)$$

نتیجه بیلان به صورت زیر خواهد شد:

$$Q_i - (C\sqrt{h} - C\sqrt{h_s}) = A \frac{dH}{dt} \quad (58)$$

ملحوظه می‌شود جمله دوم در سمت چپ معادله فوق غیرخطی است و باید خطی شود برای خطی‌سازی از بسط تیلور استفاده کنیم:

$$f(x) = f(x_s) + (x - x_s) f'(x_s) + \dots \quad (59)$$

بنابراین اگر $f = C\sqrt{h}$ باشد داریم:

$$C\sqrt{h} = C\sqrt{h_s} + (h - h_s) \frac{C}{2\sqrt{h_s}} \quad (60)$$

$$C\sqrt{h} - C\sqrt{h_s} = \frac{CH}{2\sqrt{h_s}} \quad (61)$$

با جایگذاری معادله (61) در معادله (58) داریم:

$$Q_i - \frac{CH}{2\sqrt{h_s}} = A \frac{dH}{dt} \quad (62)$$

با مقایسه معادله (62) با معادله (35) داریم:

$$R = \frac{2\sqrt{h_s}}{C} \quad (63)$$

که مقاومت فوق فرم خطی شده مقاومت شیر است، در نتیجه:

$$\frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{R}{\tau S + 1} \quad (64)$$

مثال ۷: در مثال (۵) اگر واکنش انجام گرفته از درجه دو باشد در این صورت سیستم غیرخطی می‌شود.

$$-r_A = kC^2 \quad (65)$$

و بیلان جرم به صورت زیر در می‌آید:

$$qC_0 - qC - Vkc^2 = V \frac{dC}{dt} \quad (66)$$

$$qC_{0s} - qC_s - Vkc_s^2 = 0 \quad (67)$$

بنابراین ترم Vkc^2 باید خطی شود. طبق بسط تیلور داریم:

$$Vkc^2 = Vkc_s^2 + (C - C_s)(2Vkc_s) \quad (68)$$

با کسر کردن معادلات (66) و (67) از هم و جایگذاری $Vkc^2 - Vkc_s^2$ از معادله (68) داریم:

$$qC_0 - qC - (2Vkc_s)C = V \frac{dC}{dt} \quad (69)$$

$$C_0 - \left(1 + \frac{2Vkc_s}{q}\right)C = \frac{V}{q} \frac{dC}{dt} \quad (70)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{2Vkc_s}{q}} C_0 = C + \frac{\frac{V}{q}}{1 + \frac{2Vkc_s}{q}} \frac{dC}{dt} \quad (71)$$

با مقایسه معادله (71) با فرم استاندارد سیستم‌های درجه اول نتیجه می‌دهد:

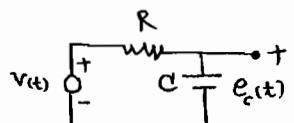
$$\tau_p = \frac{\frac{V}{q}}{1 + \frac{2Vkc_s}{q}} \quad (71)$$

$$K_p = \frac{1}{1 + \frac{2Vkc_s}{q}} \quad (72)$$

۲۷] مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های کنترلی درجه اول

اکنون می‌خواهیم به مقایسه ثابت زمانی فرآیندهای درجه اول شیمیایی، با مدار RC در الکتریسته بپردازیم.

در مدار RC روبه‌رو داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_c(s)}{V(S)} = \frac{1}{\tau s + 1} \\ \tau = RC \end{array} \right.$$

(۷۳)

و ثابت زمانی τ برابر است با:

$$(74)$$

بنابراین با توجه به مثال فوق، ثابت زمانی یک سیستم درجه اول را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$\text{ظرفیت} \times \text{ مقاومت} = \text{ثابت زمانی} \quad (75)$$

$$\frac{\text{نیروی محرکه}}{\text{جریان}} = \frac{\text{مقاومت}}{\text{ظرفیت}} \quad (76)$$

$$\frac{\text{ذخیره}}{\text{نیروی محرکه}} = \frac{\text{ظرفیت}}{\text{ذخیره}} \quad (77)$$

بنابراین با توجه به معادلات (۷۵) تا (۷۷) می‌توان جدول زیر را برای ثابت زمانی سیستم‌های درجه اول بررسی شده، ارائه کرد.

⇒

	نیروی محرکه	جریان	مقاومت	ذخیره	ظرفیت	ثابت زمانی
سطح مایع	h	q	$R = \frac{h}{q}$	$hA = V$	$\frac{hA}{h} = A$	RA
مخزن اختلاط	C	qC	$\frac{1}{q}$	VC	$\frac{VC}{C} = V$	$\frac{V}{q}$
دماسنجد	ΔT	$hA\Delta T$	$\frac{\Delta T}{hA\Delta T} = \frac{1}{hA}$	$mc\Delta T$	mc	$\frac{mc}{hA}$
مدار RC	V	I	$R = \frac{V}{I}$	VC	C	RC

جدول: مقادیر ثابت زمانی و مقاومت برای سیستم‌های کنترلی مختلف

۵-۲- تست‌های سیستم‌های درجه اول

۱ - پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی $X(t) = A \sin \omega t$ برابر است با:

$$y(t) = \frac{A\omega t}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \sin(\omega t + \Phi) \quad (2)$$

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \sin \omega t \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \sin(\omega t + \phi) \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \sin(\omega^2 t) \quad (3)$$

۲ - کدام یک از عبارات زیر صحیح است:

(۱) دامنه پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی همواره کوچک‌تر از دامنه ورودی است.

(۲) دامنه پاسخ یک سیستم درجه دوم به یک ورودی سینوسی همواره کوچک‌تر از دامنه ورودی است.

(۳) دامنه پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی همواره بزرگ‌تر از دامنه ورودی است.

(۴) دامنه پاسخ یک سیستم درجه دوم به یک ورودی سینوسی همواره بزرگ‌تر از دامنه ورودی است.

۳ - در یک سیستم درجه اول $\tau = 5 \text{ sec}$ است پاسخ یک ضربان ایده‌آل به مقدار ۵ پس از گذشت ۳ ثانیه چقدر است؟

$$0.55 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$0.65 \quad (2)$$

$$0.4 \quad (1)$$

۴ - یک دما‌سنج به جرم مایع 4 g و ظرفیت حرارتی $4000 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$ و ضریب کنوکسیون $4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ و سطح 0.5 m^2 می‌باشد. اگر یک ورودی سینوسی با دامنه 5 W در دما حاصل شود؛ پاسخ سیستم درجه اول دارای چه دامنه‌ای خواهد بود؟

$$1.5 \quad (4)$$

$$0.3 \quad (3)$$

$$0.5 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

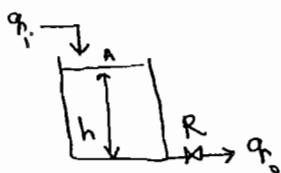
۵ - اگر سیستم درجه اول با ثابت زمانی ۱ تحت یک ورودی سینوسی به شکل $X(t) = 2 \sin(t)$ قرار گیرد، خروجی این سیستم پس از گذشت زمان نسبتاً طولانی چه خواهد شد.

$$\sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2)$$

$$y(t) = \sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$



۶ - در سیستم ارتفاع مایع مقابل نسبت $\frac{Q_o(S)}{Q_i(S)}$ برابر است با:

$$\frac{1}{AS} \quad (2)$$

$$\frac{R}{\tau S + 1} \quad (1)$$

$$\frac{R}{AS'} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\tau S + 1} \quad (3)$$

۷ - اگر در یک سیستم سطح مایع، رابطه بین دبی مایع خروجی و ارتفاع مایع درون تانک به فرم $q = c\sqrt{h}$ باشد. و ارتفاع حالت پایدار h_s باشد ثابت زمانی خطی شده این سیستم برابر است با:

$$\frac{2A\sqrt{h_s}}{c} \quad (4)$$

$$\frac{c\sqrt{h_s A}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{A\sqrt{h_s}}{c} \quad (2)$$

$$\tau = \frac{2A}{c\sqrt{h_s}} \quad (1)$$

۲۹ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های کنترلی درجه اول

۸ - تابع تبدیل بین ورودی و خروجی یک سیستم به صورت $\frac{y(S)}{x(S)} = \frac{1}{S+2}$ می‌باشد. اگر ورودی $X(t) = 2\sin 2t$ وارد آن شود

خروجی پس از زمان طولانی برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (۲)$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (۳)$$

۹ - در یک سیستم سطح مایع اگر ثابت زمانی برابر یک دقیقه و دبی حجمی مایع ورودی $\frac{ft^3}{min} = 4$ در حالت یکنواخت باشد. در

لحظه $t=0$ دبی حجمی به طور ناگهانی به $\frac{ft^3}{min} = 14$ افزایش یافته و پس از ۰.۲ دقیقه به مقدار اولیه اش باز گردد. $(s) H$ برابر

است با:

$$H(s) = 10R(s+1) \quad (۲)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad (۱)$$

$$H(s) = \frac{10R}{s+1} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-0.2s}}{s} \right] \quad (۴)$$

$$H(s) = 10R(s+1) \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-0.2s}}{s+1} \right) \quad (۳)$$

۱۰ - تابع تبدیل یک سیستم درجه اول به صورت $\frac{y(S)}{x(S)} = \frac{k}{S+a}$ می‌باشد، اگر یک ورودی پله‌ای واحد وارد آن شود خروجی

سیستم به صورت $y(t) = 1 - e^{-2t}$ می‌شود. بنابراین می‌توان گفت:

$$\tau = 2, k = 2 \quad (۴)$$

$$\tau = \frac{1}{2}, k = 2 \quad (۴)$$

$$\tau = \frac{1}{2}, k = 1 \quad (۲)$$

$$\tau = 2, k = 1 \quad (۱)$$

۱۱ - مقاومت کنترلی در سیستم مخزن اختلاط برابر است با:



$$\frac{1}{f} \quad (۲)$$

$$f \quad (۱)$$

$$\frac{1}{V} \quad (۴)$$

$$V \quad (۳)$$

۲-۶- پاسخ تست‌های سیستم درجه اول

- ۱ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
- ۲ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.
- ۳ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$y(t) = \frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{5}{5} e^{-0.6} = 0.55$$

۴ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\tau = \frac{mc}{h} = \frac{4 \times 4}{4 \times 0.5} = 8$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{64 \times 4 + 1}} = 0.3$$

۵ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$= \frac{A}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{1 \times 1 + 1}} = \sqrt{2}$$

$$= \tan^{-1}(-\omega\tau) = \tan^{-1}(-1 \times 1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$y(t) = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۷ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$R = \frac{2\sqrt{h_s}}{C} \rightarrow \tau_{خطی\ شده} = \frac{2A\sqrt{h_s}}{C}$$

۸ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{s+2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}s+1} \rightarrow K = \frac{1}{2}, \quad \tau = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{Ak}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} \times 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \tan^{-1}(-\omega\tau) = \tan^{-1}\left(-2 \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

۹ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{\tau s + 1}$$

۳۱ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های کنترلی درجه اول

$$Q(t) = (14 - 4)[u(t) - u(t - 0.2)] = 10[u(t) - u(t - 0.2)]$$

$$Q(s) = \frac{10}{s} - \frac{10e^{-0.2s}}{s}$$

$$H(s) = \frac{10R}{s+1} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-0.2s}}{s} \right)$$

۱۰ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\frac{y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{k}{a}}{\frac{1}{a}s + 1} \rightarrow K_p = \frac{K}{a}, \quad \tau_p = \frac{1}{a}$$

$$X(t) = u(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \rightarrow y(t) = K_p \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right]$$

$$y(t) = \frac{K}{a} \left[1 - e^{-at} \right]$$

$$\frac{K}{a} = 1, \quad a = 2 \rightarrow K = 2, \quad \tau = \frac{1}{2}$$

۱۱ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

طبق جدول متن درس

فصل سوم

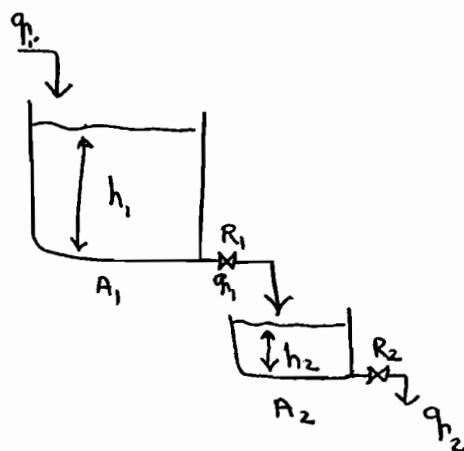
سیستم‌های درجه اول متوالی و درجه دوم

۳-۱- سیستم‌های درجه اول متوالی

سیستم‌های درجه اول متوالی دو دسته‌اند:

الف) غیر تداخلی

سیستم غیر تداخلی سطح مایع مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱: سیستم غیر تداخلی سطح مایع

با نوشتن بیلان برای تانک‌های اول و دوم داریم:

$$\frac{Q_1(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\tau_1 S + 1} \quad (1)$$

$$\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{\tau_2 S + 1} \quad (2)$$

۳۳ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های درجه اول متوالی و درجه دوم

جایی که $\tau_1 = R_1 A_1$ و $\tau_2 = R_2 A_2$ در معادله (۲) به $\frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$ ترتیب ثابت زمانی دو تانک هستند. از طرفی برای یافتن نسبت

جای Q از معادله (۱) جایگزین می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1} \quad (3)$$

$$Q_2(s) = \frac{H_2(s)}{R_2} \quad (4)$$

در نتیجه از معادلات (۳) و (۴) داریم:

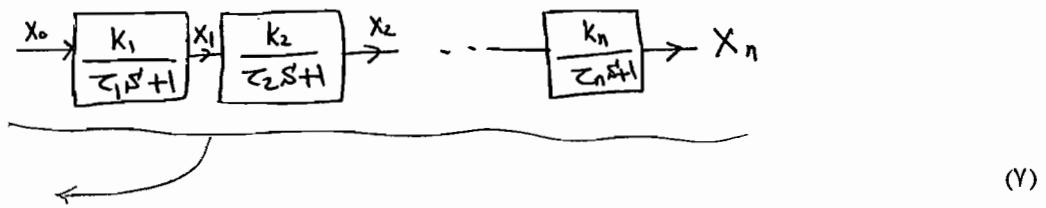
$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (5)$$

حال اگر بخواهیم نسبت $\frac{H_2(s)}{H_i(s)}$ را محاسبه کنیم کافی است به جای $Q_1 = \frac{H_1}{R_1}$ و به جای $Q_2 = \frac{H_2}{R_2}$ قرار دهیم، در نتیجه معادله

(۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{H_2(s)}{H_1(s)} = \frac{R_2 / R_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (6)$$

به طور کلی با توجه به نتیجه به دست آمده از معادله (۳) برای n سیستم درجه اول متوالی و غیر تداخلی مطابق شکل زیر می‌توان تابع تبدیل بین خروجی از واحد n ام و ورودی به اول را بدست آورد:



يعنى در سیستم‌های غیر تداخلی تابع تبدیل کلی، حاصل ضرب تابع تبدیل هر یک از مراحل است.

پاسخ سیستم درجه اول متوالی غیر تداخلی، به یک ورودی پله‌ای را به روش زیر می‌توان پیدا کرد:

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

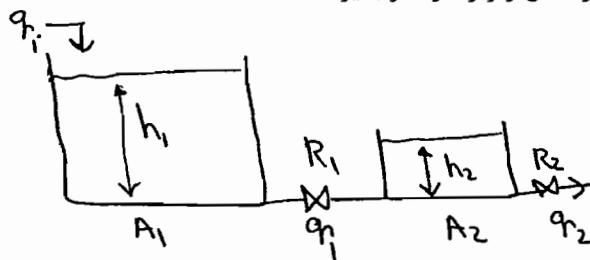
$$Q_i(s) = \frac{1}{s}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{R_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$H_2(t) = R_2 \left[1 - \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left(\frac{1}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right] \quad (8)$$

(ب) تداخلی:

اکنون سیستم تداخلی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



در این حالت پاسخ تانک دوم روی پاسخ تانک اول اثر می‌گذارد. بیلان جرم برای هر یک از این دو تانک به صورت زیر است:

$$Q_i(t) - Q_1(t) = A_i \frac{dH_i}{dt} \quad (9)$$

$$Q_1(t) - Q_2(t) = A_2 \frac{dH_2}{dt} \quad (10)$$

$$Q_1 = \frac{H_1 - H_2}{R_2}, \quad Q_2 = \frac{H_2}{R_2} \quad (11)$$

در این حالت چنان که از معادله (11) مشاهده می‌شود، دبی خروجی از تانک اول متناسب با اختلاف ارتفاع مایع در دو تانک است. بنابراین پاسخ تانک دوم (H_2) روی پاسخ تانک اول (H_1) اثر می‌گذارد. لابلس‌گیری از معادلات فوق نتیجه می‌دهد:

$$Q_i(s) - \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1} = A_1 s H_1(s) \quad (12)$$

$$\frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1} - \frac{H_2(s)}{R_2} = A_2 s H_2(s) \quad (13)$$

از حل همزمان معادلات فوق (با حذف $H_1(s)$ از معادلات فوق) نتیجه می‌گیریم:

$$\underbrace{\frac{H_2(s)}{Q_i(s)}}_{\text{غیر تداخلی}} = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) s + 1}, \quad \underbrace{\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)}}_{\text{تداخلی}} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) s + 1} \quad (14)$$

مثال: در صورتی که $\tau_1 = \tau_2$ باشد پاسخ به یک ورودی پله‌ای دو تانک تداخلی و غیرتداخلی را بدست آورید؟

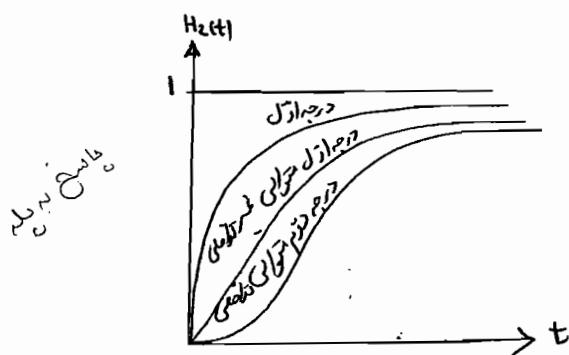
$$\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)}_{\text{غیر تداخلی}} = \frac{1}{(\tau s + 1)^2} \rightarrow Q_2(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)}_{\text{تداخلی}} = \frac{1}{\tau^2 s + 3\tau s + 1} \rightarrow Q_2(t) = 1 + 0.17 e^{-\frac{t}{0.38}} - 1.17 e^{-\frac{t}{2.62}}$$

$$Q_i(s) = \frac{1}{S}$$

در شکل زیر به طور شماتیک پاسخ یک سیستم درجه اول، یک سیستم درجه اول غیر تداخلی و یک سیستم تداخلی به یک ورودی پله‌ای نشان داده شده است.

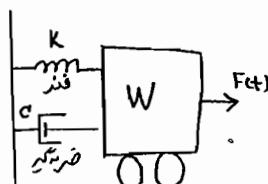
۳۵ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های درجه اول متواالی و درجه دوم



نکته: در سیستم‌های متواالی (تداخلی یا غیر تداخلی) پاسخ سیستم به ورودی‌های غیرنوسانی، همواره غیرنوسانی است چون ضریب میرایی (c) در این سیستم‌ها همواره بزرگتر از یک است. ملاحظه می‌شود که در هر سه حالت رفتار پاسخ غیرنوسانی است. و در سیستم‌های متواالی شیب در لحظه صفر برابر صفر است. به عبارتی با افزایش درجه سیستم، پاسخ سیستم کندتر می‌شود.

۳-۲- سیستم‌های درجه دوم

سیستم گلوله و فنر روبه رو را در نظر بگیرید.



۱- نیروی وارد شده توسط فنر $-K y$

۲- نیروی اصطکاک ضربه‌گیر $-c \frac{dy}{dt}$

۳- $F(t)$ نیروی وارد برای حرکت جعبه روی سطح بدون اصطکاک
با نوشتن قانون حرکت نیوتون داریم:

$$F(t) - Ky - c \frac{dy}{dt} = \frac{W}{g_c} \frac{d^2y}{dt^2} \quad (15)$$

$$\frac{W}{g_c} \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + Ky = F(t) \quad (16)$$

$$\frac{W}{g_c K} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{K} \frac{dy}{dt} + y = \frac{F(t)}{K} \quad (17)$$

$$\underbrace{\tau^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy}{dt} + y = X(t)}_{\text{معادله ۱۸}} \quad (18)$$

که معادله (۱۸) فرم استاندارد سیستم درجه دوم است. که در آن:

$$\tau = \sqrt{\frac{W}{g_c K}} \quad (19)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{g_c c^2}{4WK}} \quad (20)$$

با لaplas گیری از معادله (۱۸) خواهیم داشت:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1} \quad (21)$$

که معادله (۲۱) بیان گر فرم استاندارد تابع ترانسفر سیستم درجه دوم است:

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1} \quad (22)$$

ملاحظه می شود که در سیستم درجه دوم برخلاف سیستم اول دو پارامتر داریم که عبارتند از: ثابت زمانی (τ) و ضریب میرایی (ξ).

اکنون پاسخ سیستم های درجه دوم را به ورودی های استاندارد بررسی می کنیم.

۳-۲-۱- پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی پله ای

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1} \quad (23)$$

$$x(t) = u(t) \quad (24)$$

$$x(s) = \frac{1}{s} \quad (25)$$

$$y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1} \quad (26)$$

$$y(s) = \frac{\frac{1}{\tau^2}}{s(s - s_1)(s - s_2)} \quad (27)$$

$$s_1 = -\frac{\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad (28)$$

$$s_2 = -\frac{\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad (29)$$

همان طور که ملاحظه می شود موقعیت ریشه ها در صفحه مختصات موهومی به مقدار ضریب میرایی (ξ) بستگی دارد. بنابراین پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی پله ای برای مقادیر مختلف (ξ) به فرم زیر است:

الف) $1 > \xi$ (سیستم پرمیرا)

در این حالت هر دو ریشه حقیقی و منفی هستند و پاسخ غیرنوسانی و به صورت زیر است:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{\xi t}{\tau}} \left[\cosh \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} t + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} t \right] \quad (30)$$

ب) $1 = \xi$ (میرایی بحرانی)

در این حالت دو ریشه حقیقی، مضاعف و منفی داریم بنابراین پاسخ سیستم درجه ۲ در این حالت به صورت زیر است:

$$y(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (31)$$

ج) $1 < \xi$ (سیستم کم میرا)

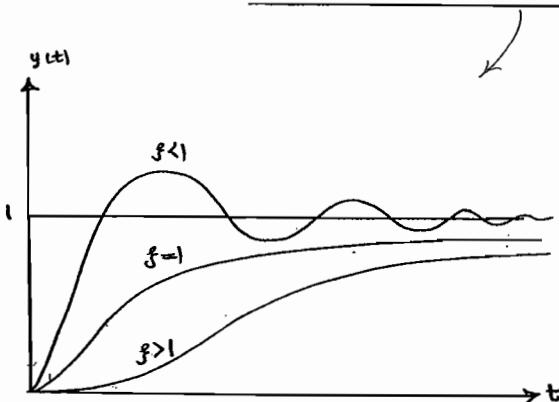
در این حالت دو ریشه موهومی با جز حقیقی منفی داریم:

۳۷ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های درجه اول متوالی و درجه دوم

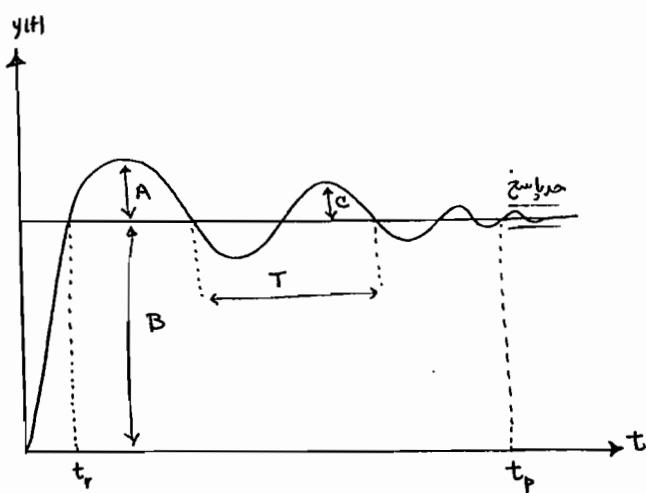
$$S_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm i \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad (32)$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (33)$$

در شکل زیر نمودار تغییرات پاسخ سیستم درجه ۲ به یک ورودی پله‌ای نشان داده شده است:



در حالت $g < 1$ چنان‌که گفته شد، پاسخ سیستم درجه ۲ به یک ورودی پله‌ای به صورت نوسانات با دامنه کاهنده با زمان است. در ادامه به تعریف یک سری اصطلاحات خاص این فرم از پاسخ می‌پردازیم:



۱- فرارفت (overshoot)

$$\frac{A}{B} = \exp \left[-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] \quad (34)$$

با افزایش ξ فرارفت کاهش می‌یابد.

۲- نسبت فروکش (Decay Ratio)

$$\frac{C}{A} = \exp \left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) = \left(\frac{A}{B} \right)^2 \quad (35)$$

۳- زمان خیز (Rise Time)

زمانی است که برای اولین بار پاسخ سیستم به مقدار نهایی خودش می‌رسد بنابراین در معادله (۳۳) مقدار $y(t)$ را برابر یک قرار می‌دهیم:

$$1 = 1 - \frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] \quad (36)$$

$$\frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] = 0 \quad (37)$$

در نتیجه

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = n\pi \quad (38)$$

در معادله فوق $n = 1$ مربوط به زمان خیز می‌باشد.

$$t_r = \left[\pi - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] \frac{\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (39)$$

افزایش ئی موجب افزایش زمان خیز می‌شود.

۴- زمان پاسخ (Response Time)

زمانی است که پاسخ برای رسیدن به $5 \pm$ درصد مقدار نهایی خود و باقی ماندن در این حدود نیاز دارد.

۵- زمان پیک (peak time)

زمانی است که پاسخ سیستم دارای ماکزیمم یا مینیمم است و با مشتق‌گیری از معادله (۳۳) و صفر قرار دادن آن بدست می‌آید:

$$t_{peak} = \frac{n\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad T = 2t_p \quad (40)$$

۶- دوره تناوب نوسان

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \text{ فرکانس رادیانی} \quad (41)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (42)$$

در نتیجه

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad (43)$$

۷- دوره طبیعی نوسان (Natural period of oscillation)

در حالت $\zeta = 0$ طبق معادله (۳۳) دامنه نوسانات ثابت می‌ماند و اساساً با یک نوسان دائم با دامنه ثابت سر و کار داریم در این حالت داریم:

$$\omega_n = \frac{1}{\tau} \text{ فرکانس رادیانی طبیعی} \quad (44)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi\tau} \text{ فرکانس سیکلی طبیعی} \quad (45)$$

$$\frac{f}{f_n} = \sqrt{1-\xi^2} \quad (46)$$

۳۹ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | سیستم‌های درجه اول متوالی و درجه دوم

۳-۲-۲- پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی ضربانی

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1} \quad (47)$$

$$x(t) = \delta(t) \quad (48)$$

$$x(s) = 1 \quad (49)$$

پیش‌تر و در بخش پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی گفتیم: پاسخ یک سیستم به ورودی ضربانی مشتق پاسخ سیستم به ورودی پله‌ای است بنابراین با مشتق گرفتن از معادلات مربوط به پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی پله‌ای می‌توان پاسخ سیستم درجه ۲ را به ورودی ضربانی بدست آورد:

الف) $\xi < 1$

$$y(t) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\xi t/\tau} \sinh \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} t \quad (50)$$

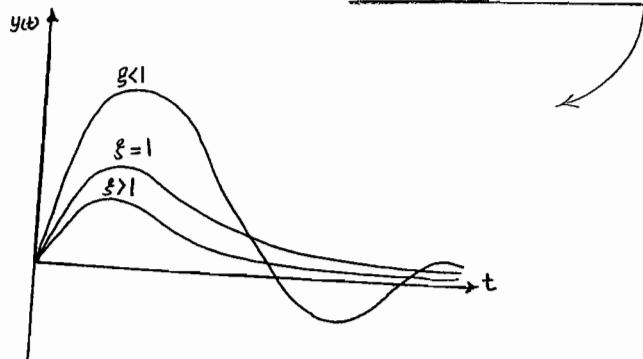
ب) $\xi = 1$

$$y(t) = \frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau} \quad (51)$$

ج) $\xi > 1$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{e^{-\xi t/\tau}}{\tau} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t \quad (52)$$

در شکل زیر پاسخ یک سیستم درجه ۲ به ورودی ضربانی نشان داده شده است:



۳-۲-۳- پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی سینوسی

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = A \sin \omega t \\ x(s) = \frac{A \omega}{S^2 + \omega^2} \end{array} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(s) = \frac{A \omega}{S^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1} \end{array} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = \frac{A}{\sqrt{[1-(\omega\tau)^2]^2 + (2\xi\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \phi) \end{array} \right\} \quad (55)$$

در نتیجه پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی سینوسی پس از زمان طولانی به فرم زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = \frac{A}{\sqrt{[1-(\omega\tau)^2]^2 + (2\xi\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \phi) \end{array} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi = -\tan^{-1} \frac{2\xi\omega\tau}{1-(\omega\tau)^2} \end{array} \right\} \quad (57)$$

مشاهده می شود که نسبت دامنه پاسخ به دامنه ورودی عبارت از $\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega\tau)^2]^2+(2\xi\omega\tau)^2}}$ که مقدار عبارت فوق بستگی به مقادیر ξ و $\omega\tau$ دارد و ممکن است کمتر یا مساوی و یا بیشتر از یک باشد.

به بیان دیگر به راحتی اثبات می شود اگر $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد دامنه پاسخ بزرگتر از دامنه ورودی است؛ و نیز در حالتی که $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ است دامنه پاسخ کمتر از دامنه ورودی است.

۳-۳-پسی انتقال (Transportation Lag)

اگر خروجی یک سیستم پس از زمان τ_d اندازه گیری شود همیشه اندازه گیری های انجام شده بیان گر موقعیت سیستم در t دقیقه قبل تر است بنابراین:

$$y(t) = x(t - \tau_d) \quad (58)$$

$$y(s) = e^{-\tau_d s} \cdot x(s) \quad (59)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = e^{-\tau_d s} \quad (60)$$

مثال: نشان دهید در سیستم های متوالی همواره $\zeta \geq 1$ است.

با مقایسه تبدیل سیستم های متوالی (معادله ۳) با فرم استاندارد سیستم درجه ۲ (معادله ۲) خواهیم داشت:

$$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2}, \quad \zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > 1$$

برای سیستم های تداخلی هم به طریق مشابه می توان اثبات کرد که $\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$ که همواره بزرگتر از یک است، لذا

می توان گفت:

$$\text{غیرتداخلی } \zeta > \text{ تداخلی } \zeta \geq 1$$

۳-۴- تست‌های فصل سوم

۱ - اگر در یک سیستم گلوله و فنر تعداد سه فنر موازی با ثابت‌های هوک k_1 و k_2 و k_3 داشته باشیم، ثابت زمانی این سیستم برابر است با:

$$\sqrt{\frac{M}{k_1} + \frac{M}{k_2} + \frac{M}{k_3}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2 + k_3}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{M}{k_1 k_2 k_3}} \quad (۳)$$

$$\frac{M}{k_1} \quad (۴)$$

۲ - در یک سیستم تداخلی نسبت $\frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$ برابر است با:

$$\frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 S^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2)S + 1} \quad (۱)$$

$$\frac{R_1}{\tau_1 \tau_2 S^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2)S + 1} \quad (۲)$$

$$\frac{R_2}{(\tau_1 S + 1)(\tau_2 S + 1)} \quad (۳)$$

$$\frac{R_1}{\tau_1 \tau_2 S^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_2 R_1)S + 1} \quad (۴)$$

۳ - در پاسخ فرکانسی یک سیستم درجه دوم کدام عبارت صحیح است؟

(۱) همواره یک فرکانس رزونالس داریم.

(۲) اگر ζ از حدی کمتر باشد نسبت دامنه‌ها دارای یک ماکزیمم است.

(۳) بسته به مقدار ζ نسبت دامنه‌ها می‌تواند کوچکتر، مساوی یا بیشتر از یک باشد.

(۴) هر سه.

۴ - اگر پاسخ یک سیستم به ورودی پله‌ای واحد به صورت $y(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$ باشد ثابت زمانی سیستم برابر است با:

$$0.4 \quad (۱)$$

$$0.04 \quad (۲)$$

$$0.1 \quad (۳)$$

$$\tau = 1 \quad (۴)$$

۵ - اگر تابع تبدیل سیستمی به صورت $G(s) = \frac{10}{S^2 + 1.6S + 4}$ باشد. ماهیت پاسخ این سیستم به یک ورودی پله‌ای:

(۱) سینوسی با دامنه ثابت است.

(۲) میرایی بحرانی است.

(۳) پرمیرا است.

(۴) کم میرا است.

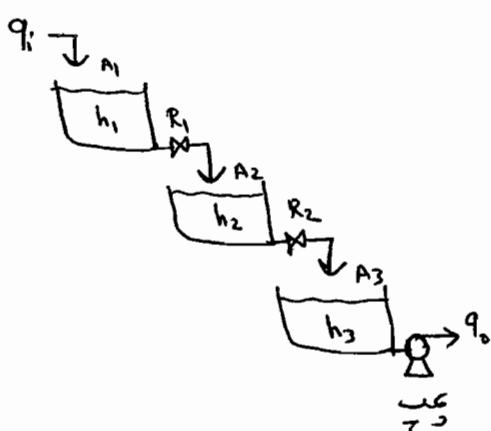
۶ - برای سیستم سه تانک غیرتداخلی روبرو $\frac{H_3}{Q_i}$ برابر است با:

$$\frac{1}{A_3 S(\tau_1 S + \tau_2 S + 1)} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{A_3 (\tau_1 S + 1)(\tau_2 S + 1)} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{A_3 S(\tau_1 S + 1)(\tau_2 S + 1)} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{(\tau_1 S + 1)(\tau_2 S + 1)} \quad (۴)$$



۳-۵- پاسخ تست‌های فصل سوم

۱ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$k_{\text{معادل}} = \sum k_i$$

۲ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۳ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۴ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.2}{s+60} - \frac{1.2}{s+10} = \frac{F(s)}{s(s+60)(s+10)} = \frac{F(s)}{(s+60)(s+10)} = \frac{F(s)}{s^2 + 70s + 600}$$

$$\text{مخرج کسر} = \frac{1}{600}s^2 + \frac{70}{600}s + 1$$

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{600}} = 0.04 \text{ sec} \quad \xi = \frac{\frac{70}{600}}{2 \times 0.04} = 1.46$$

۵ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$G(s) = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{1}{4}s^2 + \frac{1.6}{4}s + 1} \rightarrow \tau = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$2\xi\tau = \frac{1.6}{4} \rightarrow \xi = \frac{\frac{1.6}{4}}{2 \times \frac{1}{2}} = 0.4 < 1 \quad \text{کم میرا}$$

۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

فصل چهارم

شیرهای کنترل، کنترلرها، ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها و افت کنترل

۴-۱- انواع شیرهای کنترل

در واقع شیرهای کنترل به دو دسته اصلی تقسیم می‌شوند:

- ۱- شیرهای کنترل پنوماتیکی
- ۲- شیرهای کنترل برقی

در شیرهای کنترل پنوماتیک دبی جریان سیال عبوری از خط لوله توسط فشار هوای ایجاد شده توسط کمپرسور کنترل می‌شود. فشار سرشیر کنترل در این حالات بین 3 psi تا 15 psi متغیر است. بر اساس نحوه ارتباط میان دبی (Q) و فشار (P) این شیرها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

(الف) شیرهای پنوماتیک Air – to – open

در این شیرها با افزایش فشار سرشیر، دبی افزایش می‌یابد.

شیر کاملاً بسته $\rightarrow P = 3 \text{ psi}$

شیر کاملاً باز $\rightarrow P = 15 \text{ psi}$

(ب) شیرهای Air – to – closed

در این شیرها با افزایش فشار سرشیر، دبی کاهش می‌یابد.

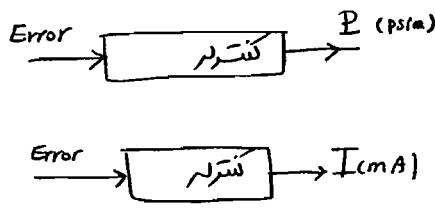
شیر کاملاً باز $\rightarrow P = 3 \text{ psi}$

شیر کاملاً بسته $\rightarrow P = 15 \text{ psi}$

در شیرهای کنترل برقی میزان دبی جریان سیال عبوری توسط شدت جریان الکتریسیته در سرشیر کنترل می‌شود. در محيط‌های آتش‌گیر شیرهای کنترل پنوماتیک از اینمی بالاتری برخوردار هستند. در شیرهای کنترل برقی جریان سرشیر از 20 mA تا 4 mA تغییر می‌کند.

۴-۲- کنترل‌های و اقسام آن

بلاک مربوط در کنترل‌ها به صورت زیر است:



یعنی در کنترل‌ها با توجه به میزان خطای موجود در فرآیند (Error) تصمیم گرفته می‌شود که فشار سرشیر کنترل (در صورتی که شیر پنوماتیک است) یا جریان (در صورتی که شیر برقی است) به میزان مشخصی تغییر کند. تنوع کنترل‌ها بر اساس تنوع رابطه میان P و ϵ می‌باشد.

۴-۱- کنترل تنااسبی

در این کنترل‌ها فشار اعمال شده به سرشیر کنترل متناسب با میزان خطا است:

$$\underline{P(t) = P_s + K_c \epsilon(t)} \quad (1)$$

با لاپلاس‌گیری از معادله بالا خواهیم داشت:

$$\underline{\frac{P(s)}{\epsilon(s)} = K_c} \quad (2)$$

که در معادله بالا K_c یک کنترل تنااسبی است. واحد K_c در شیرهای کنترل پنوماتیک $\frac{\text{psi}}{\text{Error}}$ و در شیرهای برقی $\frac{\text{mA}}{\text{Error}}$ می‌باشد.

به عنوان مثال، اگر در فرآیند کنترل دما صورت گیرد دیمانسیون K_c برای شیر کنترل پنوماتیک و برقی به ترتیب $\frac{\text{mA}}{\text{C}}$ و $\frac{\text{psi}}{\text{C}}$ خواهد بود.

$$\underline{\text{نسبت } \frac{P(s)}{\epsilon(s)} \text{ تابع تبدیل کنترل } (G_c(s)) \text{ می‌باشد.}}$$

پهنه‌ای تنااسبی

یکی از مباحث مهم در کنترل‌های تنااسبی بحث پهنه‌ای تنااسبی یا Proportional Bond است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{PB\% = \frac{\text{Error}}{\text{Range}} \times 100} \quad (3)$$

در حالی که K_c برای یک شیر برقی و پنوماتیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{K_c = \frac{(15-3)\text{psi}}{\text{Error}} = \frac{12}{\text{Error}}} \quad (4)$$

$$\underline{K_c = \frac{(20-4)\text{mA}}{\text{Error}} = \frac{16}{\text{Error}}} \quad (5)$$

بنابراین ارتباط میان $PB\%$ و K_c طبق معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\underline{PB\% = \frac{12 \times 100}{K_c \cdot \text{Range}}} \quad (6)$$

۴۵ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | شیرهای کنترل، کنترلرها، ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها و افت کنترل

$$PB\% = \frac{16 \times 100}{K_c \cdot Range} \quad (7)$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود PB % و Kc با هم نسبت عکس دارند.

$$PB\% \sim \frac{1}{K_c} \quad (8)$$

از این رو هنگامی که $K_c = \infty$ است و این کنترلر یک کنترل قطع و وصلی (on – off) نامیده می‌شود.

مثال: اگر کنترل دمای سیستمی در محدوده 60–100°C مورد نظر باشد و محدوده کلی تغییرات دما در این سیستم از 71–75°C باشد مطلوب است مقادیر PB % و نیز Kc برای شیرهای کنترل برقی و پنوماتیک؟

$$PB\% = \frac{75 - 71}{100 - 60} \times 100 = \frac{4}{40} \times 100 = 10$$

$$K_c = \frac{12}{75 - 71} = 3 \frac{\text{psi}}{\text{°C}} \quad \text{شیر پنوماتیک}$$

$$K_c = \frac{16}{75 - 71} = 4 \frac{\text{mA}}{\text{°C}} \quad \text{شیر برقی}$$

۴-۲-۲- کنترلر تناسبی مشتقی (PD)

در این حالت فشار سرشیر کنترل هم به میزان خطا ($\epsilon(t)$) و هم به روند تغییرات آن بستگی دارد، لذا:

$$P(t) = P_s + K_c \left[\epsilon(t) + \tau_D \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right] \quad (9)$$

$$\frac{P(s)}{\epsilon(s)} = K_c (1 + \tau_D S) \quad (10)$$

بنابراینتابع تبدیل کنترلر تناسبی مشتقی به صورت زیر است:

$$G_c(s) = K_c (1 + \tau_D S) \quad (11)$$

که در معادله بالا τ_D زمان مشتقی نامیده می‌شود.

۴-۲-۳- کنترل تناسبی انتگرالی (PI)

در این کنترلرها فشار سرشیر کنترل هم به میزان خطا ($\epsilon(t)$) هم به انتگرال کلی خطا $\int_0^t \epsilon(t) dt$ بستگی دارد، لذا:

$$P(t) = P_s + K_c \left[\epsilon(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \epsilon(t) dt \right] \quad (12)$$

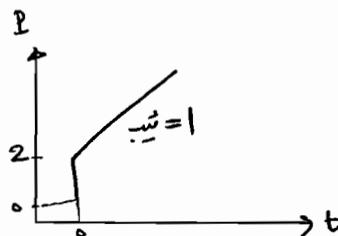
$$\frac{P(s)}{\epsilon(s)} = K_c \left[1 + \frac{1}{\tau_I S} \right] \quad (13)$$

که در معادله بالا τ_I زمان انتگرال نامیده می‌شود.

درجول زیر تابع تبدیل انواع کنترل‌ها ارائه شده است:

$G_c(s)$	نوع کنترل
K_c	P
$K_c(1 + \tau_D s)$	PD
$K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$	PI
$K_c \left(1 + \tau_D s + \frac{1}{\tau_I s}\right)$	PID

مثال: پاسخ یک کنترلر به ورودی خطی خطا به صورت $\epsilon(t) = 0.5t$ مطابق شکل زیر است نوع کنترلر و پارامترهای آن را تعیین کنید.



حل: کنترلر را PID فرض می‌کنیم: (که یک حالت کلی است)

$$P(s) = K_c \left(1 + \tau_D s + \frac{1}{\tau_I s}\right) \times \frac{0.5}{s^2}$$

$$P(t) = 0.5K_c t + \frac{k_c \cdot t^2}{4\tau_I} + 0.5K_c \tau_D$$

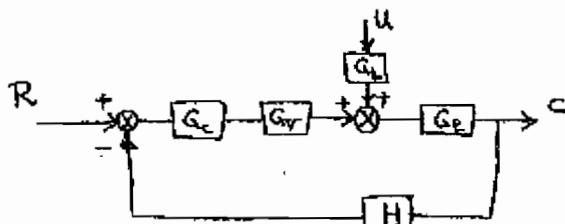
چون فرم پاسخ خطی است پس کنترلر عامل انتگرالی ندارد لذا:

$$2 = 0.5 k_c \tau_D \quad \text{عرض از مبدأ}$$

$$1 = 0.5 K_c \quad \text{شیب}$$

در نتیجه کنترلر تناسبی مشتقی است با $K_c = 2$ و $\tau_D = 2$.

۴-۳- توابع انتقال مدار بسته



می‌خواهیم در سیستم مدار بسته روابه‌رو نسبت‌های $\frac{C}{u}$, $\frac{C}{R}$ را بدست آوریم.

$$\{R - CH\}G_c G_v G_f = C$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p H} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_L} \quad (14)$$

۴۷ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | شیرهای کنترل، کنترلرها، ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها و افت کنترل

که در معادله بالا Π_f حاصل ضرب توابع انتقال بین C و R در مسیر پیشرو و Π_L حاصل ضرب توابع انتقال موجود در حلقه است. به

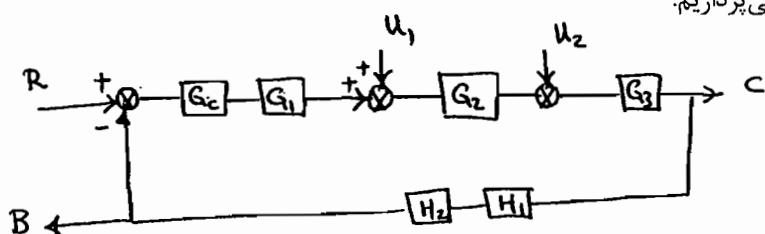
همین روش نسبت $\frac{C}{u}$ به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{C}{u} = \frac{G_L G_P}{1 + G_C G_V G_P H} \quad (15)$$

پس به طور ساده تابع ترانسفر سیستم مدار بسته را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} \quad (16)$$

که در معادله بالا علامت مثبت برای فیدبک منفی و علامت منفی برای فیدبک مثبت مثبت به کار می‌رود در ادامه به حل مثال‌هایی از ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها می‌پردازیم:



مثال:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_C G_1 G_2 G_3}{1 + G}$$

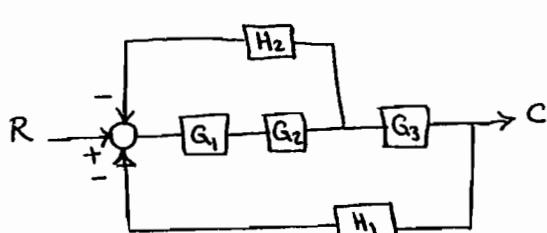
$$\frac{C}{u_1} = \frac{G_2 G_3}{1 + G}$$

$$\frac{C}{u_2} = \frac{G_3}{1 + G}$$

$$\frac{B}{u_2} = \frac{G_3 H_1 H_2}{1 + G}$$

$$G = G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 G_c$$

مثال: در شکل‌های رویه رو نسبت $\frac{C}{R}$ برابر است با (کنکور ۸۲)



$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_2 - G_1 G_2 G_3 H_1} \quad (1)$$

$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2} \quad (2)$$

$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1} \quad (3)$$

$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1} \quad (4)$$

حل:

$$\left[R - CH_1 - \frac{C}{G_3} H_2 \right] G_1 G_2 G_3 = C$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 H_2}$$

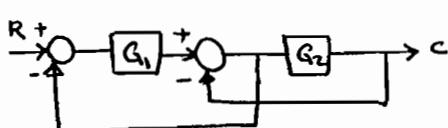
گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

راه حل کنکوری:

اگر H_2 را صفر قرار دهیم در نتیجه:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H_1}$$

با مقایسه با گزینه‌ها معلوم می‌شود فقط گزینه ۴ می‌تواند درست باشد.



مثال: در نمودار جعبه‌ای رو به رو تابع انتقال $\frac{C}{R}$ کدام است؟

$$\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2} \quad (2)$$

$$\frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 + G_2} \quad (1)$$

$$\frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 G_2} \quad (4)$$

$$\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \quad (3)$$

$$\left[\left\{ R - \frac{C}{G_2} \right\} G_1 - C \right] G_2 = C$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۴-۴- افت کنترل (offset)

افت کنترل یا خطای حالت ماندگار مطابق معادله زیر تعریف می‌شود:

$$\text{offset} = R(\infty) - C(\infty)$$

با اعمال قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\text{offset} = \lim_{s \rightarrow 0} SR(s) - SC(s)$$

در کنترل فرآیند با دو نوع مسئله سروکار داریم:

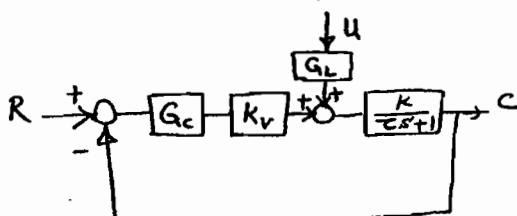
(۱) حالاتی که تغییر در مقدار مقرر ایجاد می‌شود که به مسئله سروو معروف است.

در این حالت افت کنترل به صورت زیر تعریف می‌شود.

(۲) حالاتی که تغییر در بار داریم که به مسئله تنظیم کننده معروف است. در این حالت افت کنترل مطابق معادله زیر بیان می‌شود:

$$R(s) = 0, \quad u(s) \neq 0$$

$$\text{offset} = -SC(s) = -Su(s) \frac{C(s)}{u(s)}$$



مثال: افت کنترل سیستم مدار بسته رو به رو را محاسبه کنید در صورتی که:

(۱) یک تغییر پله‌ای واحد در مقدار مقرر حاصل شود.

(۲) یک تغییر پله‌ای واحد در بار ایجاد شود.

$$G_c = K_c$$

$$G_L = \frac{K_L}{\tau_L s + 1}$$

در محاسبه offset دقیق شود چون در انتهای $S=0$ قرار داده می‌شود، پس بهتر است از همان ابتدا S را برابر صفر قرار دهیم.

$$\text{offset} = S \times \frac{1}{S} \times \left[1 - \frac{K_c K_v K}{1 + K_c K_v K} \right] = \frac{1}{1 + K_c K_v K}$$

۴۹ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | شیرهای کنترل، کنترلرها، ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها و افت کنترل

چنان‌که از معادله بالا معلوم است با ازدیاد بهره کنترلر (K_c) افت کنترل کاهش می‌یابد. اگر تغییر در بار باشد:

$$\text{offset} = -S \times \frac{1}{S} \times \frac{C}{u} = -S \times \frac{1}{S} \times \frac{K_L K}{1 + K_c K_v K} = -\frac{K_L K}{1 + K_c K_v K}$$

مثال: مثال قبلی را در صورتی که کنترلر را با یک کنترلر تناسبی مشتقی عوض کنیم حل کنید.

حل: در این حالت افت کنترل تغییر نخواهد کرد چرا که حد $(1 + \tau_D S) K_c$ با حد K_c وقتی $S \rightarrow 0$ برابر است، بنابراین می‌توان گفت عامل مشتقی اثری بر offset ندارد.

مثال: مثال قبلی را با کنترلر تناسبی انتگرالی حل کنید.

در این حالت در معادله مربوط به کنترلر یعنی $\left(1 + \frac{1}{\tau_I S}\right) K_c$ نمی‌توان از ابتدا S را مساوی صفر قرار داد چون مقدار تابع بینهایت می‌شود بنابراین قرار دادن $S = 0$ را به انتهای حل منتقل می‌کنیم:

$$\text{offset} = \text{حد } S \times \frac{1}{S} \left[1 - \frac{\frac{K_c}{\tau_I S} \left(1 + \frac{1}{\tau_I S} \right) K_v K}{1 + \frac{K_c}{\tau_I S} \left(1 + \frac{1}{\tau_I S} \right) K_v K} \right] = \text{حد } S \rightarrow 0 \left[1 - \frac{K_c K_v K (\tau_I S + 1)}{\tau_I S + K_c K_v K \tau_I S + K_c K_v K} \right] = 1 - 1 = 0$$

نکته: عامل انتگرالی $\left(\frac{1}{S}\right)$ موجب حذف offset می‌شود.

مثال: اگر تابع تبدیل مدار بسته سیستمی به صورت $\frac{K}{\tau S + 1}$ باشد اگر یک تغییر خطی در ورودی به صورت $t = R(t)$ ایجاد شود افت کنترل را محاسبه کنید.

$$\text{offset} = \text{حد } S R(s) \left[1 - \frac{C}{R} \right] = \text{حد } S \times \frac{1}{S^2} \left[1 - \frac{K}{\tau S + 1} \right] = \text{حد } S \rightarrow 0 \frac{1}{S} \times \frac{\tau S + 1 - K}{\tau S + 1}$$

اکنون دو حالت را در نظر می‌گیریم:

$$\text{offset} = \text{حد } \frac{1}{S} \frac{\tau S}{\tau S + 1} = \tau \quad (1) \text{ اگر } K=1 \text{ باشد در این صورت:}$$

$$\text{offset} = \text{حد } \frac{1}{S} \frac{\tau S + 1 - K}{\tau S + 1} = \pm\infty \quad (2) \text{ اگر } K \neq 1 \text{ باشد در این صورت}$$

+∞ برای $K < 1$ و -∞ برای $K > 1$ می‌باشد.

مثال: مثال فوق را برای حالتی که $\frac{C}{R} = \frac{K}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1}$ حل کنید.

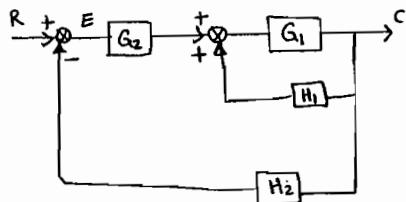
$$\text{offset} = \text{حد } S \times \frac{1}{S^2} \times \left[1 - \frac{K}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1} \right] = \text{حد } S \rightarrow 0 \frac{1}{S} \frac{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1 - K}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1}$$

offset = $2\xi\tau$ (1) اگر $K=1$ باشد در این صورت:

offset = ±∞ (2) اگر $K \neq 1$ باشد در این صورت:

۴-۵- تست‌های فصل چهارم

۱- برای سیستم کنترل روبه‌رو نسبت $\frac{E}{R}$ برابر است با:

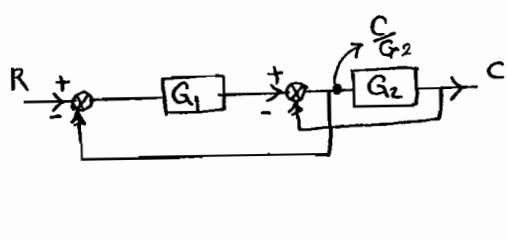


$$\frac{G_1 G_2}{1 - G_1 H_1 + G_1 G_2 H_2} \quad (2)$$

$$\frac{1 - G_1 H_1}{1 - G_1 H_1 + G_1 G_2 H_2} \quad (1)$$

$$\frac{G_1 G_2 H_2}{1 + G_1 H_1 - G_1 G_2 H_2} \quad (4)$$

$$\frac{G_1 G_2 H_1}{1 - G_1 H_1 + G_1 G_2 H_1} \quad (3)$$

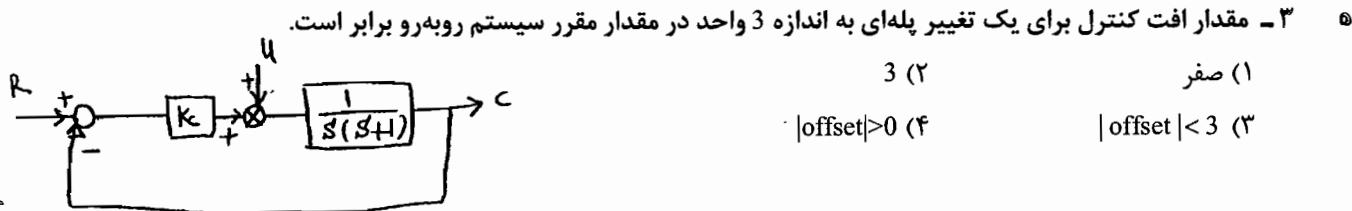


$$\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2} \quad (2)$$

$$\frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 + G_2} \quad (1)$$

$$\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \quad (4)$$

$$\frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 G_2} \quad (3)$$



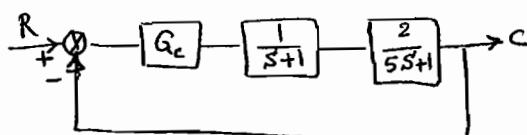
$$3 \quad (2)$$

$$1 \text{ صفر}$$

$$|offset| > 0 \quad (4)$$

$$|offset| < 3 \quad (3)$$

۴- در شکل روبه‌رو از یک کنترلر تناسبی استفاده می‌شود در صورتی که یک تغییر پله‌ای واحد در مقدار مقرر کنترلی به اندازه ۳ ایجاد کند بهره کنترلر عبارت است از:



$$K_c = 2 \quad (2)$$

$$K_c = 1 \quad (1)$$

$$K_c = 4 \quad (4)$$

$$K_c = 3 \quad (3)$$

۵- نحوه تغییرات میزان جریان عبوری از یک شیر کنترلر و فشار اعمال شده بر موتور شیر کنترل به صورت $Q = 3(P-3)$ است.

نوع شیر و حداکثر دبی عبوری برابر است با:

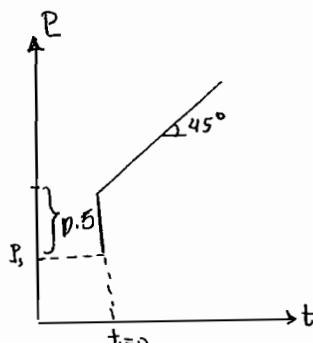
$$Q = 36 \frac{\text{lit}}{\text{min}}, \text{Air to close} \quad (2)$$

$$Q = 51 \frac{\text{lit}}{\text{min}}, \text{Air to open} \quad (1)$$

$$Q = 36 \frac{\text{lit}}{\text{min}}, \text{Air to open} \quad (4)$$

$$Q = 51 \frac{\text{lit}}{\text{min}}, \text{Air to close} \quad (3)$$

۶- عکس‌العمل یک کنترلر به یک ورودی خطی خطا به صورت $\varepsilon(t) = t$ مطابق شکل روبرو است نوع کنترلر و بهره آن عبارتند از:



(1) کنترلر PI با بهره 2

(2) کنترلر PI با بهره 1

(3) کنترلر PD با بهره 0.5

(4) کنترلر PD با بهره 2

$$R = CH_2 = E$$

۴-۶- پاسخ تست‌های پاسخ فصل چهارم

$$\frac{C}{E} = \frac{G_2 G_1}{1 + G_1 H_1} \Rightarrow C = \frac{E G_1 G_2}{1 + G_1 H_1} \Rightarrow R - \frac{E G_1 G_2 H_2}{1 + G_2 H_1} = E$$

۱ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد

راحل کوتاه: اگر $H_2 = 0$ قرار داده شود $\frac{E}{R} = 1$ خواهد شد که نشان می‌دهد فقط گزینه ۱ می‌تواند صحیح باشد.

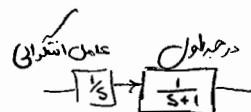
۲ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد

$$\left\{ \left(R - \frac{C}{G_2} \right) G_1 - C \right\} G_2 = C$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2}$$

۳ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد

$$\text{offset} = SR(s) \left(1 - \frac{C}{R} \right) = S \times \frac{3}{S} \left[1 - \frac{\frac{K_c}{S(S+1)}}{1 + \frac{K_c}{S(S+1)}} \right] = 0$$



راحل کوتاه: چون سیستم دارای غامل انتگرالی است پس $\text{offset} = 0$ می‌شود.

۴ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد

$$\text{offset} = SR(s) \left[1 - \frac{C}{R} \right] = S \times \frac{1}{S} \left[1 - \frac{2K_c}{1 + 2K_c} \right] = \frac{1}{1 + 2K_c} = 0.2 \rightarrow K_c = 2$$

۵ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد

$P \uparrow \Rightarrow Q \uparrow$ Air to open

$$Q_{\max} = 3(15 - 3) = 36 \text{ lit/min}$$

۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c \left[1 + \tau_D s + \frac{1}{\tau_I s} \right]$$

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow P(s) = K_c \left[\frac{1}{s^2} + \frac{\tau_D}{s} + \frac{1}{\tau_I s^3} \right]$$

چون جواب خطی است، پس کنترلر از نوع PD است.

$$K_c = 1$$

$$\tau_D K_c = 0.5 \rightarrow \tau_D = 0.5$$

فصل پنجم

پایداری، آزمون روث، مکان هندسی ریشه‌ها

پایداری

سیستم پایدار سیستمی است که به ازای تمام ورودی‌های محدود، پاسخ خروجی محدودی داشته باشد و به ازای یک ورودی نامحدود پاسخ نامحدودی داشته باشد.

یک سیستم کنترل زمانی ناپایدار است که یکی از ریشه‌های معادله مشخصه آن روی محور موهومی یا در سمت راست محور موهومی قرار گرفته باشد. در غیر این صورت سیستم پایدار خواهد بود.

معادله مشخصه سیستمی که تابع مدار باز آن برابر GH باشد به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\text{معادله مشخصه} = 1 + GH(s)$$

که در واقع همان مخرج تابع مدار بسته است. برای بررسی پایداری روش‌های مختلفی وجود دارد. که عبارتند از:

۱- آزمون روث (Routh Test)

۲- مکان هندسی ریشه‌ها (Root Locus)

۳- پاسخ فرکانسی و دیاگرام بد (Bode Diagram)

۴- دیاگرام نایکویست (Nyquist Diagram)

۲-۵- آزمون روث (Routh Test)

آزمون روث یک روش صرفاً جبری برای تعیین عدد ریشه‌های ناپایدار سیستمی است که معادله مشخصه آن یک چند جمله‌ای با ضرایب ثابت می‌باشد.

$$1 + GH = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0$$

که در آن a_n عددی مثبت است در غیر این صورت باید طرفین معادله در (۱-) ضرب می‌شود تا ضریب S^n مثبت باشد.

۵۳ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | پایداری، آزمون روث، مکان هندسی ریشه‌ها

معیار پایداری روث به شرح ذیل بیان می‌شود:

- ۱- چند جمله‌ای $H+Gx^n$ را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم.
- ۲- ضرایب جملاتی را که نداریم صفر قرار می‌دهیم.
- ۳- جدول روث را به فرم زیر تشکیل می‌دهیم.

1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
3	b_1	b_2	b_3
:	c_1	c_2	
$n-1$:		
n	:		
$n+1$:		

عناصر هر سطر در جدول روث به وسیله دو سطر قبلی محاسبه می‌شوند از این رو:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}a_n}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}a_n}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_{n-3} - b_2a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_{n-5} - b_3a_{n-1}}{b_2}$$

شرط لازم و کافی برای پایداری آن است که تمام عناصر ستون اول آزمون روث، یعنی $a_n, b_1, a_{n-1}, \dots, c_1$ همگی مثبت باشند.

اگر بعضی از عناصر ستون اول منفی باشند به تعداد تغییر علامت‌های ستون اول، ریشه ناپایدار‌کننده داریم.

اگر سطر n ام جدول روث صفر شود، سیستم در مرز پایداری و ناپایداری است و در این حالت مقدار این ریشه‌های واقع بر روی محور موهومی از حل معادله $CS^2 + D = 0$ بدست می‌آید که در آن C و D ضرایب سطر $n-1$ ام جدول روث هستند.

مثال: تابع تبدیل مدار بسته سیستمی به صورت $S^4 + 3S^3 + 2S^2 + 1 = GS^4 + GH$ می‌باشد در مورد پایداری این سیستم بحث کنید.

طبق آزمون روث و با تشکیل جدول روث داریم:

1	2	1
3	0	
$\underline{3 \times 2 - 0 \times 1}$	$\underline{3 \times 1 - 0 \times 1}$	
3	3	
$\underline{-\frac{3}{2}}$		
1		

1
3
2
$-\frac{3}{2}$
1

با توجه به عناصر ستون اول جدول روث در می‌یابیم که دوبار تغییر علامت داریم، در نتیجه می‌توان گفت این سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $\frac{K}{S(S+1)(S+2)}$ است. در مورد K پایداری سیستم مدار بسته بحث کنید.

$$1 + GH = 1 + \frac{K}{S(S+1)(S+2)} = 0$$

$$S(S+1)(S+2) + K = 0$$

$$S^3 + 3S^2 + 2S + K = 0$$

با تشکیل جدول روث داریم:

1	2	
3	k	$\rightarrow 6 - K > 0 \rightarrow K < 6$
$6 - K$		$K > 0$
3		
K		

بنابراین سیستم مدار بسته در صورتی پایدار است که:

$$0 < K < 6$$

مثال: در مثال فوق K مرز پایداری و نیز ریشه‌های مرز پایداری را محاسبه کنید.

$$\text{سطر } n \text{ ام} \rightarrow \text{سیستم در مرز پایداری است}$$

$$6 - K = 0 \rightarrow K = 6$$

$$\text{از سطر } n-1 \text{ ام} \rightarrow 3S^2 + 6 = 0$$

$$S = \pm 2i$$

مثال: اگر معادله مشخصه سیستمی به صورت $1 + GH = S^4 + 2S^3 + 2S^2 + 4S + 1$ باشد، در مورد پایداری آن بحث کنید.

با تشکیل جدول روث خواهیم داشت:

1	2	1	
2	4		
0	1		

با تشکیل جدول روث متوجه می‌شویم که در ستون اول سطر سوم صفر ظاهر می‌شود، بنابراین ادامه تشکیل جدول روث غیرممکن است. برای حل این مشکل چون تمام اعضای این سطر صفر نشده است صفر را به ϵ (کوچکترین عدد حقیقی و مثبت) تبدیل می‌کنیم و در انتهای تشکیل جدول روث برای پایداری $0 \rightarrow \epsilon$ می‌دهیم.

1	2	1	
2	4		
ϵ	1	$\frac{4\epsilon - 2}{\epsilon}$ حد $\epsilon \rightarrow 0^+$	$4 - \frac{2}{\epsilon}$ حد $\epsilon \rightarrow 0^+$ $= -\infty$
$4\epsilon - 2$			
ϵ			
1			

در نتیجه می‌توان گفت $\frac{4\epsilon - 2}{\epsilon}$ عددی منفی است و بنابراین دو ریشه ناپایدار کننده داریم.

۵۵ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | پایداری، آزمون روث، مکان هندسی ریشه‌ها

مثال: اگر معادله مشخصه سیستمی به صورت $GH = S^5 + 2S^4 + 2S^3 + 4S^2 + S + 2$ باشد در مورد پایداری آن بحث کنید.

S^5	1	2	1
S^4	2	4	2
	0	0	

با تشکیل جدول به فرم بالا در می‌باییم که یک سطر صفر ظاهر می‌شود در این حالت چون همه اعضای سطر سوم صفر شده است با تبدیل صفر به ۰ مشکل حل نمی‌شود. بنابراین $P(s)$ (چند جمله‌ای متناظر سطر ماقبل سطرب) که همه اعضای آن صفر شده است) را تشکیل می‌دهیم:

$$P(s) = 2S^4 + 4S^2 + 2$$

از این چند جمله‌ای مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8S^3 + 8S$$

اکنون ضرایب چند جمله‌ای حاصل از $\frac{dP}{ds}$ را به جای ضرایب سطرب که صفر شده است قرار می‌دهیم؛ و جدول روث را ادامه می‌دهیم:

1	2	1
2	4	2
8	8	
2	2	
0		
2		

چون سطر n ام صفر شده است، پس سیستم در مرز پایداری و ناپایداری است.

نکته: توجه شود که آزمون روث فقط برای بررسی پایداری سیستم‌هایی کاربرد دارد که معادله مشخصه آنها یک چندجمله‌ای با ضرایب ثابت از S باشد و به عنوان مثال اگر معادله مشخصه حاوی ترمونی چون e^{-ts} باشد پایداری آن با آزمون روث قابل بررسی نیست.

۳-۳- مکان هندسی ریشه‌ها

ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها یک روش کیفی برای بررسی وضعیت ریشه‌های معادله $GH = 0 + 1$ در صفحه مختصات موهومی است. قواعد رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم فیدبک منفی به شرح ذیل است:

قاعده ۱: تابع مدار باز سیستم ($GH(s)$) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

که در آن با صفر قرار دادن (s) صفرهای مکان (Zero) را به دست می‌آوریم؛ و با صفر قرار دادن ($D(s)$) قطب‌های مدار باز (Pole) را به دست می‌آوریم:

$$N(s) = (s - Z_1) \dots (s - Z_m)$$

$$D(s) = (s - P_1) \dots (s - P_n)$$

یعنی مکان هندسی دارای m تا صفر و n تا قطب می‌باشد. صفرها را در مکان با علامت \circ و قطب‌ها را با علامت \times نشان می‌دهیم.

قاعده ۲: مکان از قطب آغاز می‌شود و به صفر ختم می‌شود. اما چون عده صفرها و قطبها مساوی نیستند لذا $(n-m)$ تا از قطبها به صفرهایی در بی‌نهایت ختم می‌شوند و در امتداد مجانبها قرار می‌گیرند. لذا مکان دارای $m-n$ مجانب است.

قاعده ۳: زاویه مجانبها با محور حقیقی از معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\theta = \frac{(2K+1)\pi}{n-m}$$

که در معادله فوق:

$$K = 0, 1, \dots, n-m$$

قاعده ۴: محل همرسی مجانبها از معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m}$$

محل همرسی مجانبها همواره بر روی محور حقیقی واقع است. (انبات به عهده خواننده)

قاعده ۵: آن قسمت از محور حقیقی جز مکان است که تعداد صفرها و قطب‌های سمت راست آن فرد باشد.

قاعده ۶: نقطه جدایی، نقطه‌ای است که در آن مکان هندسی ریشه‌ها که از قطب‌های مجاور ورودی محور حقیقی شروع شده‌اند به هم برخورد کرده و سپس محور حقیقی را ترک می‌کنند این نقطه از حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\sum \frac{1}{S-Z_i} = \sum \frac{1}{S-P_i}$$

مثال:تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$ می‌باشد مکان هندسی آن رسم کنید:

= تعداد صفرها

-2, -1, 0 = قطب‌ها

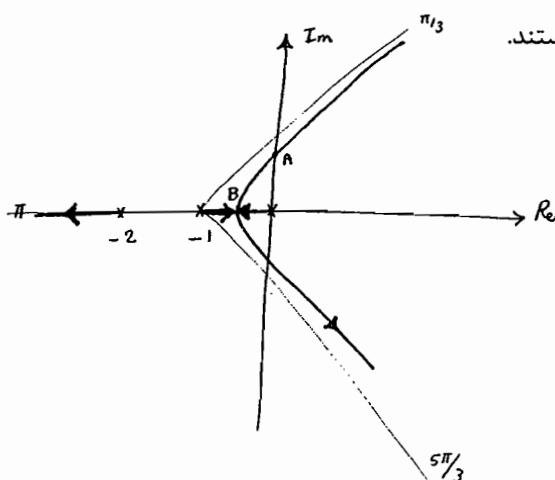
3 = تعداد قطب‌ها

بنابراین سیستم دارای $n-m=3$ مجانب می‌باشد که زاویه محل همرسی آنها به ترتیب برابر است با:

$$\theta = \frac{(2K+1)\pi}{3-0} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

$$\gamma = \frac{(0-1-2)-0}{3-0} = -1$$

نقاط $S=-1$ و $S=-2$ از محور حقیقی جزو مکان هندسی ریشه‌ها هستند.



تحلیل مکان

(الف) در مورد پایداری این سیستم می‌توان گفت:

$$0 < K < K_A \Rightarrow \text{سیستم پایدار است}$$

$$K_A < K \Rightarrow \text{سیستم دارای ۲ ریشه ناپایدار است}$$

که K_A (مرز پایداری) از جدول روث بدست می‌آید. (در مثال‌های قبلی بررسی نشد و مقدار آن برابر 6 است.)

(ب) در مورد نوسانی و غیر نوسانی بودن سیستم می‌توان گفت:

$$0 < K < K_B \Rightarrow \text{پاسخ سیستم غیر نوسانی است، چون ریشه‌ها حقیقی هستند}$$

$$K_B < K \Rightarrow \text{پاسخ سیستم نوسانی است، چون دو ریشه مکان موهومی هستند}$$

همان K در نقطه جدایی است که مختصات آن از حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S+1} + \frac{1}{S+2} = 0$$

توجه شود که معادله فوق دارای سه ریشه است. اما آن ریشه‌ای قابل قبول است که بین صفر و -1 باشد.

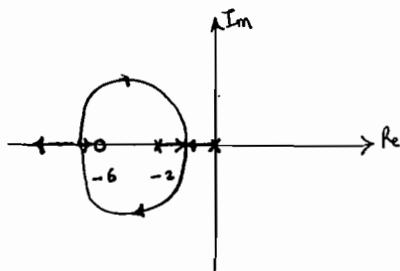
مثال: مکان هندسی ریشه‌های سیستمی که تابع مدار باز آن به صورت $\frac{K(S+6)}{S(S+2)}$ است را رسم کنید.

$$S+6=0 \rightarrow S=-6 \quad \text{صفرهای مکان}$$

$$S(S+2)=0 \rightarrow S=0, -2 \quad \text{قطبهای مکان}$$

$$n-m=2-1=1 \quad \text{تعداد مجانبها}$$

$$\theta = \frac{(2K+1)\pi}{n-m} = \pi$$



نقاط ناحیه $0 < S < -2$ و $-6 < S < 0$ جز مکان هندسی است.

تحلیل مکان:

- با توجه به مکان فوق می‌توان گفت: که به ازای جمیع مقادیر K سیستم پایدار است. این امر با آزمون روث هم قابل بررسی است.

- پاسخ سیستم مدار بسته در بهره‌های خیلی کم و خیلی زیاد غیر نوسانی است، ولی در بهره‌های متوسط پاسخ سیستم نوسانی است.

(با توجه به داشتن ریشه‌های موهومی در این ناحیه)

مثال: مکان هندسی ریشه‌های سیستمی که تابع مدار باز آن به صورت $\frac{K(S+1)}{S^2}$ می‌باشد را رسم کنید.

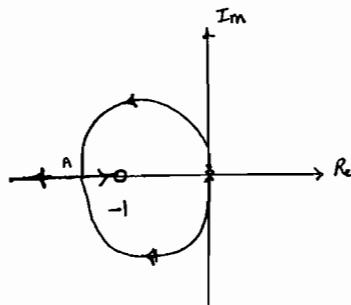
$$S+1=0 \rightarrow S=-1 \quad \text{صفرهای مکان}$$

$$S^2=0 \rightarrow S=0, 0 \quad \text{قطبهای مکان}$$

$$n-m=2-1=1 \quad \text{تعداد مجانبها}$$

$$\theta = \frac{(2K+1)\pi}{n-m} = \pi$$

ناحیه $-1 < S$ روی محور حقیقی جز مکان هندسی ریشه‌ها است.



مختصات نقطه A از معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\sum \frac{1}{S - Z_i} = \sum \frac{1}{S - P_i}$$

$$\frac{1}{S+1} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S}$$

$$\frac{1}{S+1} = \frac{2}{S}$$

$$S = 2S + 2$$

$$S_A = -2$$

مقدار K نقطه A با قرار دادن مقدار S_A در معادله مشخصه حاصل می‌شود:

$$1 + GH = 0 \rightarrow 1 + \frac{K(S+1)}{S^2} = 0$$

$$1 + \frac{K_A(-2+1)}{(-2)^2} = 0$$

$$K_A = 4$$

تحلیل مکان:

- سیستم مدار بسته به ازای جمیع مقادیر K پایدار است چون ریشه‌ای در سمت راست محور موهومی ندارد.

- سیستم مدار بسته در بهره‌های کم ($K < 0$) نوسانی و در بهره‌های زیاد ($K > 4$) غیرنوسانی است.

قواعد رسم مکان هندسی سیستم فیدبک مثبت

در این حالت قواعد مشابه فیدبک منفی است به جز دو استثنای (قاعده ۳ و ۵)

قاعده ۳: زاویه مجانب‌ها با محور حقیقی از معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\theta = \frac{2K\pi}{n-m}, \quad K = 0, 1, \dots, n-m$$

قاعده ۵: آن قسمت از محور حقیقی جز مکان هندسی است که تعداد قطب‌ها و صفرهای سمت راست آن زوج باشد.

قواعد رسم مکان هندسی برای سیستم های دارای ترم تأخیر زمانی

اگر سیستم دارای ترم تأخیر زمانی $(e^{-\tau_d s})$ باشد. از تقریب pad به فرم زیر استفاده می کنیم:

$$e^{-\tau_d s} = \frac{e^{-\frac{\tau_d}{2}s}}{e^{\frac{\tau_d}{2}s}} = \frac{1 - \frac{\tau_d}{2}s}{1 + \frac{\tau_d}{2}s} = \frac{s - \frac{2}{\tau_d}}{s + \frac{2}{\tau_d}}$$

اولاً: ملاحظه می شود که ترم تأخیر زمانی یک صفر در $\frac{2}{\tau_d}$ و یک قطب در $\frac{2}{\tau_d}$ به مکان هندسی ریشه ها اضافه می کند و نیز علامت فیدبک را هم عوض می کند.

ثانیاً: با توجه به اضافه شدن صفر در سمت راست محور موهومی $\left(\frac{2}{\tau_d}\right)$ و نظر به آن که مکان هندسی به صفر ختم می شود، لذا وجود

ترم تأخیر زمانی بر پایداری سیستم اثر خواهد داشت، به این ترتیب که، یا به طور کل پاسخ سیستم را ناپایدار می کند یا K حد پایداری را کاهش می دهد.

اثر کنترل ها بر مکان هندسی ریشه ها

الف) اثر عامل مشتقی $(K_c(1 + \tau_D s))$

عامل مشتقی موجب افزوده شدن یک صفر به مکان در $\left(-\frac{1}{\tau_D}\right)$ می شود.

لذا:

۱- عامل مشتقی موجب بهبود پایداری سیستم می شود یعنی یا به طور کل سیستم را پایدار می کند یا K حد پایداری را افزایش می دهد.

۲- عامل مشتقی موجب افزایش سرعت رسپونس می شود.

۳- عامل مشتقی موجب کاهش تعداد مجانب ها و افزایش زاویه آن ها با محور حقیقی می شود.

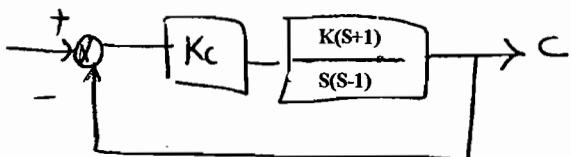
ب) عامل انتگرالی

$$K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = K_c \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}$$

عامل انتگرالی موجب افزوده شدن یک صفر در $\left(-\frac{1}{\tau_i}\right)$ و یک قطب در صفر، به مکان می شود؛ لذا تعداد مجانب ها و زاویه آن ها را

تغییر نمی دهد، ولی محل همرسی مجانب ها را به سمت راست محور موهومی شیفت می دهد.

۵-۴- تست‌های فصل پنجم



۱ - در مدار روبرو کدام عبارت صحیح تر است؟

- (۱) سیستم همواره پایدار است.
- (۲) سیستم همواره ناپایدار است.
- (۳) در بهره کم پایدار و در بهره زیاد ناپایدار است.
- (۴) سیستم در بهره کم ناپایدار در بهره زیاد پایدار است.

۲ - معادله مشخصه سیستمی به صورت $S^4 + S^3 + S^2 + 4S + 6 = 0$ است کدام مورد در مورد پایداری آن صحیح است؟

- (۱) همواره پایدار
- (۲) همواره ناپایدار
- (۳) دو ریشه ناپایدار کننده
- (۴) سیستم در بهره‌های پایین ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار می‌باشد.

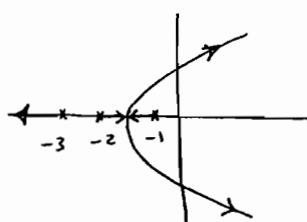
۳ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $\frac{K}{S(S+2)(S+3)}$ است که پایداری این سیستم برابر است با:

K < 5 (۴)	0 < K < 30 (۳)	K > 30 (۲)	K > 0 (۱)
-----------	----------------	------------	-----------

۴ - در مسئله قبل ریشه‌های مرز پایداری عبارتند از:

±6i (۴)	±√5i (۳)	±√30i (۲)	±√6i (۱)
---------	----------	-----------	----------

۵ - مکان هندسی ریشه‌های سیستمی مطابق شکل روبرو است در مورد پایداری این سیستم می‌توان گفت:



(۱) همواره پایدار است.

(۲) همواره ناپایدار است

(۳) در بهره کم پایدار در بهره زیاد ناپایدار است

(۴) در بهره کم ناپایدار در بهره زیاد پایدار است.

۶ - در مسئله فوق در مورد نوسانی و غیرنوسانی بودن پاسخ می‌توان گفت:

(۱) همواره نوسانی است.

(۲) همواره غیرنوسانی است.

(۳) در بهره زیاد نوسانی در بهره کم غیرنوسانی

۷ - در مسئله فوق محل همرسی مجانب‌ها کجاست؟

۴) مجانب ندارد (۴)	S = -3 (۳)	S = -2 (۲)	S = -1 (۱)
--------------------	------------	------------	------------

۸ - در مسئله فوق نقطه جدایی کجاست؟

۴) نقطه جدایی ندارد (۴)	۳) بین -2 و -3 (۳)	۲) بین 1 و 2 (۲)	۱) بین صفر و -1 (۱)
-------------------------	--------------------	------------------	---------------------

۹ - محل همرسی مجانب‌ها؟

(۱) همواره روی محور حقیقی است

(۲) همواره روی محور موهومی است

(۳) گاهی روی محور حقیقی و گاهی روی محور موهومی است

(۴) نمی‌توان قضاوت کرد

پاسخ تست‌های فصل پنجم

۱ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$1 + GH = 1 + \frac{K(S+1)}{S(S-1)} = 0$$

$$S(S-1) + K(S+1) = 0$$

$$S^2 + (K-1)S + K = 0$$

$$\begin{cases} K > 0 \\ K-1 > 0 \end{cases} \rightarrow K > 1$$

جدول روث	
1	k
1-k	
k	

در بهره‌های کم ناپایدار ($K < 1$) و در بهره‌های زیاد پایدار است.

۲ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

1	1	6
1	4	
-3	6	
6		
6		

سیستم دارای ۲ ریشه ناپایدار کننده است. →

۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$1 + GH = 1 + \frac{k}{S(S+2)(S+3)}$$

$$S(S+2)(S+3) + K = 0$$

$$S^3 + 5S^2 + 6S + K = 0$$

$$\begin{cases} 30 - K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \therefore \text{شرط پایداری}$$

در نتیجه $0 < K < 30$

1	6
5	K
$\frac{30-K}{5}$	
K	

۴ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{ام} \rightarrow 5S^2 + 30 = 0 \rightarrow S = \pm\sqrt{6}i$$

۵ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۶ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۷ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\gamma = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m} = \frac{(-1-2-3)-0}{3-0} = -2$$

۸ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۹ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

اگر در محاسبه $\sum Z_i$ و $\sum P_i$ قطب مختلط و صفر مختلط داشته باشیم از آنجا که مزدوج آن قطب و صفر هم حضور دارند، $\sum Z_i$ و $\sum P_i$ همواره اعدادی حقیقی هستند. بنابراین $\sum Z_i$ و $\sum P_i$ همواره اعدادی حقیقی هستند.

فصل ششم

پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست

پاسخ فرکانسی

$$\frac{y(s)}{x(s)} = G(s)$$

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$x(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = ?$$

پاسخ فرکانسی در واقع پاسخ یک سیستم به یک ورودی سینوسی است.

برای یافتن $y(t)$ باید لاپلاس معکوس $y(s)$ محاسبه شود:

$$y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s)$$

در حالت کلی پاسخ‌گذرای هر سیستم به یک ورودی سینوسی به فرم زیر است:

$$y(t) = AR \cdot A \sin(\omega t + \phi)$$

که در معادله فوق:

AR : نسبت دامنه پاسخ به دامنه ورودی است.

ϕ : تقدم و تأخیر پاسخ نسبت به ورودی می‌باشد.

AR و ϕ به روش زیر محاسبه می‌شوند:

۱- در تابع تبدیل باز سیستم (s) به جای $S = i\omega$ قرار دهید.

۲- مقادیر AR و ϕ از معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\left. \begin{aligned} S = i\omega &\Rightarrow G(i\omega) = a + bi \\ AR = |G(i\omega)| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = \angle G(i\omega) &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \right\}$$

۶۳ | پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست

مثال: پاسخ یک سیستم درجه اول را به یک ورودی سینوسی به فرم $x(t) = A \sin \omega t$ را محاسبه کنید.

$$G(S) = \frac{1}{\tau S + 1}$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{\tau i\omega + 1} = \frac{1}{1 + \tau i\omega} \times \frac{1 - \tau i\omega}{1 - \tau i\omega} = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} - \frac{\omega \tau}{1 + \tau^2 \omega^2} i$$

$$AR = \sqrt{\left[\frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \right]^2 + \left[\frac{-\omega \tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \right]^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{-\omega \tau}{1 + \tau^2 \omega^2}}{\frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2}} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1}(-\omega \tau)$$

در نتیجه:

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin \left[\omega t + \tan^{-1}(-\omega \tau) \right]$$

نکته: دامنه پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی همواره از دامنه ورودی کوچک‌تر است.

مثال: پاسخ یک سیستم درجه ۲ را به یک ورودی سینوسی پیدا کنید.

$$G(S) = \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi \tau S + 1}$$

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{1}{-\tau^2 \omega^2 + 2\xi \tau \omega i + 1} = \frac{1}{(1 - \tau^2 \omega^2) + 2\xi \tau \omega i} \times \frac{(1 - \tau^2 \omega^2) - 2\xi \tau \omega i}{(1 - \tau^2 \omega^2) - 2\xi \tau \omega i} \\ &= \frac{1 - \tau^2 \omega^2}{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi \tau \omega)^2} - \frac{2\xi \tau \omega}{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi \tau \omega)^2} i = a + bi \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$AR = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi \tau \omega)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) = -\tan^{-1} \frac{2\xi \tau \omega}{1 - \tau^2 \omega^2}$$

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi \tau \omega)^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

نکته: دامنه پاسخ یک سیستم درجه ۲ به یک ورودی سینوسی می‌تواند بزرگ‌تر، مساوی و یا کوچک‌تر از دامنه ورودی باشد. (بسته به مقدار ξ)

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{دامنه ورودی} > \text{دامنه پاسخ} \rightarrow AR > 1$$

$$\xi > \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{دامنه ورودی} < \text{دامنه پاسخ} \rightarrow AR < 1$$

مثال: پاسخ سیستمی که تابع تبدیل آن به صورت $G(S) = e^{-\tau_d S}$ است را به یک ورودی سینوسی پیدا کنید.

$$G(S) = e^{-\tau_d S}$$

$$G(i\omega) = e^{-\tau_d \omega i} = \cos(\omega \tau_d) - i \sin(\omega \tau_d)$$

$$AR = \sqrt{\cos^2(\omega \tau_d) + \sin^2(\omega \tau_d)} = 1$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\sin \omega \tau_d}{\cos \omega \tau_d}\right) = -\omega \tau_d$$

$$y(t) = A \sin(\omega t - \omega \tau_d)$$

نکته: ترم تاخیر زمانی اثری بر دامنه پاسخ ندارد.

مثال: اگر $\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{e^{-\pi s}}{s+1}$ باشد و $x(t) = \sin t$ باشد مقدار $y(t)$ را پیدا کنید.

$$G(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s+1}$$

$$G(i\omega) = \frac{e^{-\pi \omega i}}{i\omega + 1}$$

از قضایای اعداد مختلط داریم:

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1| |Z_2|$$

$$\angle \frac{Z_1}{Z_2} = \angle Z_1 - \angle Z_2$$

$$\angle Z_1 Z_2 = \angle Z_1 + \angle Z_2$$

در نتیجه:

$$AR = |G(i\omega)| = \frac{|e^{-\pi \omega i}|}{|i\omega + 1|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\phi = \angle G(i\omega) = \frac{\angle e^{-\pi \omega i}}{\angle(i\omega + 1)} = -\pi \omega - \tan^{-1} \omega = -\pi - \tan^{-1} 1 = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{5\pi}{4}\right)$$

مثال: اگر $G(s) = \frac{2(s+1)e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s(s+2)}$ باشد مقادیر AR و ϕ را محاسبه کنید.

$$G(i\omega) = \frac{2(i\omega + 1)e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{(i\omega)(i\omega + 2)}$$

طبق قضایای پیش گفته تبدیلات لاپلاس داریم:

$$AR = |G(i\omega)| = \frac{|2|i\omega + 1| |e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}|}{|i\omega| |i\omega + 2|}$$

۶۵ | پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

$$AR = \frac{2\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4}} = \frac{2\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4}}$$

$$\phi = \angle G(i\omega) = \left\{ \angle 2 + \angle(i\omega + 1) + \angle e^{-\frac{\pi}{4}\omega i} \right\} - \left\{ \angle i\omega + \angle(i\omega + 2) \right\} = 0 + \tan^{-1}\omega - \frac{\pi}{4}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

$$= \tan^{-1}\omega - \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

۶-۲- نمودارهای بد (Bode Diagram)

چنان‌که از مثال‌های قبلی برمی‌آید مقادیر AR و ϕ تابع ω (فرکانس نوسان) هستند. نمودارهای بد در واقع نمودارهایی هستند که در آن‌ها تغییرات AR و ϕ بر حسب ω نشان داده شده است. در یک منحنی لگاریتم AR بر حسب لگاریتم فرکانس رسم شده است و در منحنی دیگر زاویه فاز بر حسب لگاریتم فرکانس رسم می‌شود.

مثال: دیاگرام بد سیستم درجه اول را رسم کنید.

$$AR = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

چنان‌که گفته شد:

$$\phi = -\tan^{-1}\omega\tau$$

$$\log AR = 0 - \log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$$

$$\log AR = -\frac{1}{2}\log(1+\tau^2\omega^2)$$

$$\omega\tau \rightarrow 0 \Rightarrow \log AR = 0 \rightarrow AR = 1 \quad \text{مجانب Bode در فرکانس‌های کم}$$

$$\omega\tau \rightarrow \infty \Rightarrow \omega\tau \gg 1 \Rightarrow \log AR = -\frac{1}{2}\log(\omega\tau)^2$$

$$\log AR = -\log\omega\tau \quad \text{مجانب Bode در فرکانس‌های زیاد}$$

یعنی AR بر حسب $\omega\tau$ در مختصات لگاریتمی خطی با شیب (-1) می‌باشد.

محل تلاقی مجانب‌های بد در فرکانسی به نام فرکانس گوشه اتفاق می‌افتد که مقدار آن از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} AR = 1 \\ \log AR = -\log\omega\tau \end{cases} \rightarrow \omega_{c_0} = \frac{1}{\tau}$$

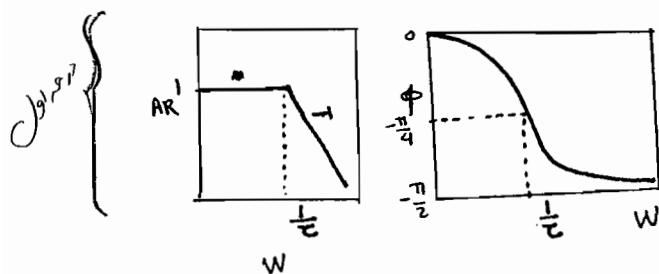
و برای زاویه فاز هم در ω های کم، زیاد و گوشه داریم:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \phi = -\tan^{-1}(0) = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

در شکل زیر دیاگرام مجانب‌های Bode نشان داده شده است.



مثال: دیاگرام Bode سیستم درجه ۲ را به دست آورید.

$$AR = \frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi \omega \tau)^2}}$$

$$\log AR = -\frac{1}{2} \log \left[(1-\tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi \omega \tau)^2 \right]$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \log AR = 0 \Rightarrow AR = 1$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \log AR = -\frac{1}{2} \log (\omega \tau)^4 = -2 \log (\omega \tau)$$

یعنی دیاگرام مجانب Bode در فرکانس‌های زیاد ($\omega \rightarrow \infty$) خطی با شیب (-2) می‌باشد.

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\xi \omega \tau}{1-\tau^2 \omega^2} \right)$$

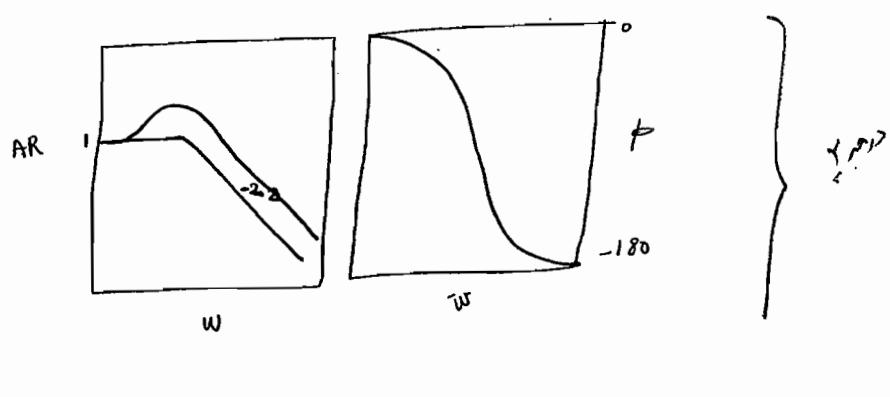
$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = -180^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi = -90^\circ$$

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AR > 1$$

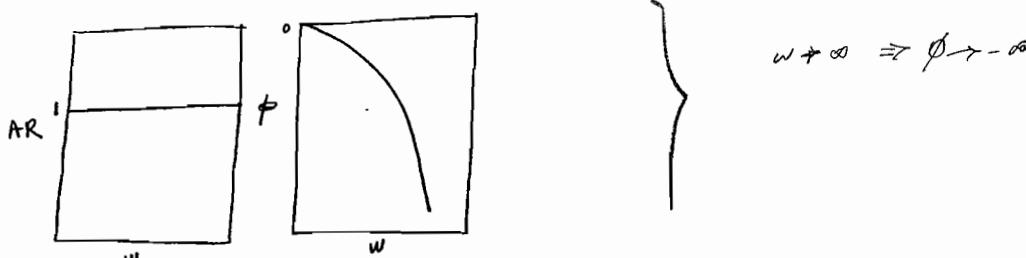
$$\xi > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AR < 1$$



مثال: دیاگرام Bode سیستمی که تابع تبدیل آن $e^{-\tau_d s}$ است را رسم کنید.

$$AR = 1$$

$$\phi = -\omega \tau_d$$



نکته: ترم تأخیر زمانی اثری بر منحنی AR ندارد.

مثال: دیاگرام بد سیستم درجه اول به فرم $G(s) = 1 + \tau s$ را رسم کنید.

$$G(i\omega) = 1 + \tau \omega i$$

$$AR = \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$\log AR = \frac{1}{2} \log [1 + \tau^2 \omega^2]$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \log AR = 0 \Rightarrow AR = 1$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \log AR = \frac{1}{2} \log (\omega \tau)^2$$

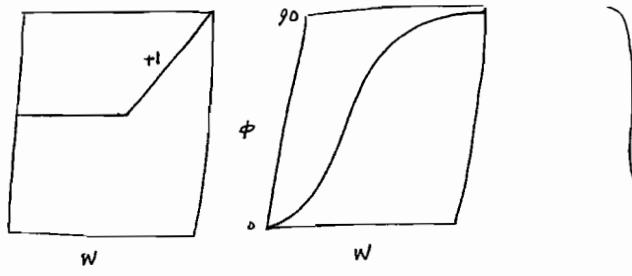
$$\log AR = \log (\omega \tau)$$

۶۷ | پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

یعنی دیاگرام مجانب بد در فرکانس‌های بالا خطی با شیب (+1) می‌باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \tan^{-1}(\omega \tau) \\ \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \phi = 0 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

AR



مثال: دیاگرام Bode سیستم $G(s) = \frac{1}{s^n}$ را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{k}{(i\omega)^n}$$

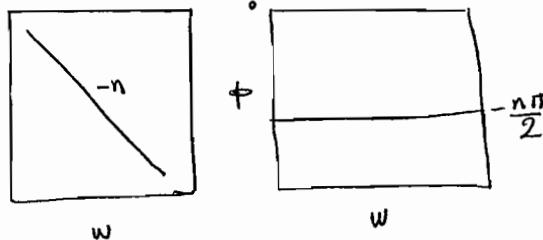
$$AR = \frac{k}{\omega^n} \rightarrow \log AR = -n \log \omega$$

یعنی دیاگرام مجانب بد همواره خطی با شیب (-n) و بدون نقطه شکست می‌باشد.

$$\phi = \angle G(i\omega) = 0 - n \frac{\pi}{2} = -\frac{n\pi}{2}$$

$$C_p(s) = \frac{1}{s^n}$$

AR



مثال: دیاگرام بد سیستمی باتابع تبدیل $G(s) = s^n$ را رسم کنید.

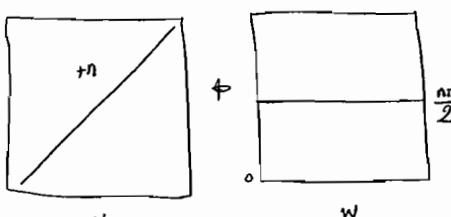
$$\left\{ \begin{array}{l} G(i\omega) = (i\omega)^n \\ AR = |G(i\omega)| = \omega^n \\ \log AR = n \log \omega \end{array} \right.$$

یعنی دیاگرام مجانب بد همواره خطی است با شیب n و بدون شکست.

$$\phi = \angle G(i\omega) = +\frac{n\pi}{2}$$

$$C_p(s) = s^n$$

AR



مثال: دیاگرام بد $\frac{(S+1)}{S(2S+1)}$ را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{S+1}{S(2S+1)}$$

$$G(i\omega) = \frac{i\omega + 1}{i\omega(2i\omega + 1)}$$

$$AR = |G(i\omega)| = \frac{|i\omega + 1|}{|i\omega||2\omega + 1|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\omega\sqrt{4\omega^2 + 1}}$$

$$\phi = \angle G(i\omega) = \angle(i\omega + 1) - \angle(i\omega) - \angle(2\omega i + 1) = \tan^{-1}\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}2\omega$$

$$\log AR = \log \sqrt{1 + \omega^2} - \log \omega - \log(1 + 4\omega^2)$$

با توجه به قضایای اعداد مختلط داریم:

$$G(i\omega) = \frac{Z_1 Z_2 \cdots Z_n}{Z_m \cdots Z_p}$$

$$AR = |G(i\omega)| = \frac{|Z_1||Z_2| \cdots |Z_n|}{|Z_m| \cdots |Z_p|}$$

$$\log AR = \{\log|Z_1| + \log|Z_2| + \dots + \log|Z_n|\} - \{\log|Z_m| + \dots + \log|Z_p|\}$$

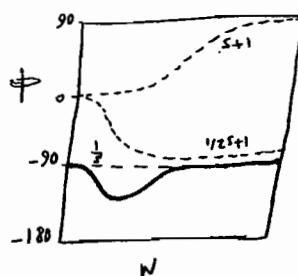
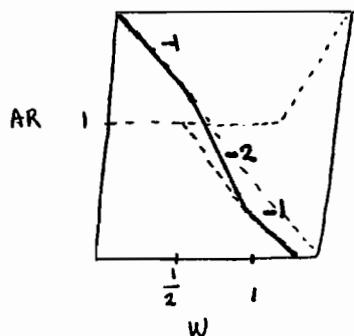
يعنى شيب مجانب‌های بد برای اجزا يك سيسنتم مرکب از مجموع و تفاضل شيب‌های اجزا اين سيسنتم حاصل مي‌شود.

فرکانس‌های گوشه:

$$S+1 \rightarrow \omega_{c_0} = 1$$

$$2S+1 \rightarrow \omega_{c0} = \frac{1}{2}$$

فرکانس شکست ندارد $\rightarrow S \rightarrow$



دیاگرام بد کنترل‌ها

الف) دیاگرام بد کنترل PD

$$G_c(s) = K_c(1 + \tau_D s)$$

$$G_c(i\omega) = K_c(1 + \tau_D \omega i)$$

$$AR = |G(i\omega)| = K_c \sqrt{1 + \tau_D^2 \omega^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(\omega \tau_D)$$

$$\log \frac{AR}{K_c} = \frac{1}{2} \log(1 + \tau_D^2 \omega^2)$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \log \frac{AR}{K_c} = 0 \Rightarrow \frac{AR}{K_c} = 1$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \log \frac{AR}{K_c} = \log \omega \tau_D$$

یعنی دیاگرام مجانب، خطی است با شیب $(+1)$ و فرکانس گوشه (محل تلاقی مجانب‌ها) که برابر است با

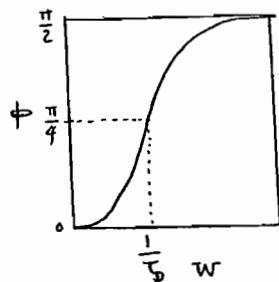
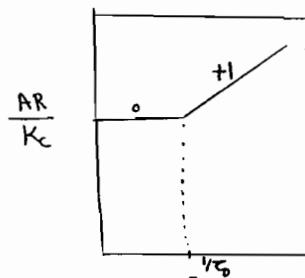
$$\omega_{c_0} = \frac{1}{\tau_D}$$

$$\omega = 0 \rightarrow \phi = 0$$

$$\omega = \infty \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau_D} \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

PD



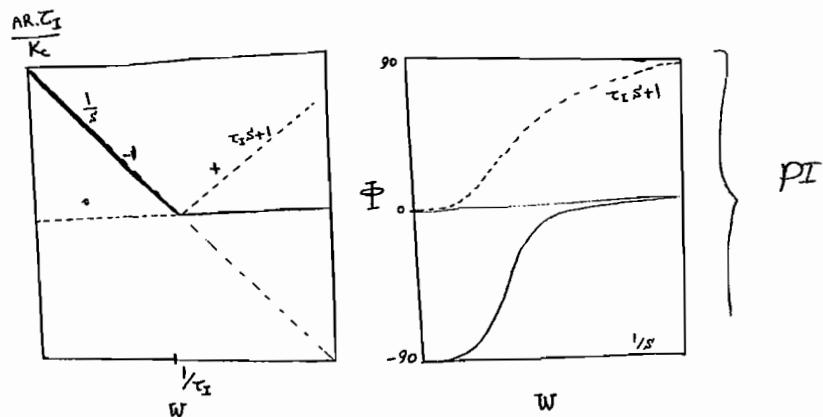
ب) دیاگرام بد کنترل PI

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I S} \right) = \frac{K_c}{\tau_I} \frac{\tau_I S + 1}{S}$$

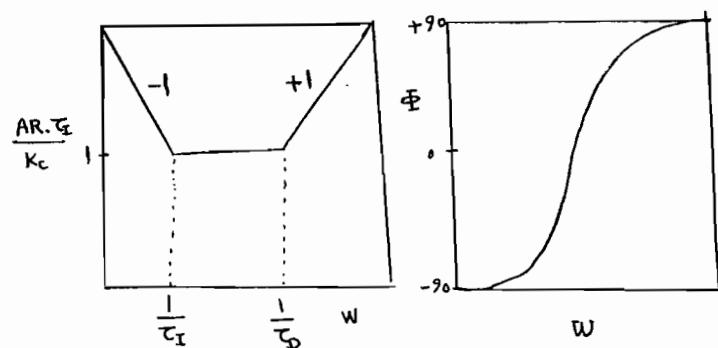
$$G_c(i\omega) = \frac{K_c}{\tau_I} \frac{\tau_I \omega i + 1}{i\omega}$$

$$AR = \frac{K_c}{\tau_I} \frac{\sqrt{1 + \tau_I^2 \omega^2}}{\omega}$$

$$\phi = \tan^{-1} \omega \tau_I - \frac{\pi}{2}$$

**ج) دیاگرام بد کنترل PID**

مشابه قسمت الف و ب دیاگرام‌های بد کنترل PID به شکل زیر است.

**۶-۳- بررسی پایداری به کمک دیاگرام بد**

برای بررسی پایداری ابتدا لازم است به معرفی حاشیه بهره (gain margin) و حاشیه فاز (phase margin) بپردازیم. در شکل روبرو حاشیه بهره و حاشیه فاز به طور شماتیک نشان داده شده است.

حاشیه بهره: عکس نسبت دامنه‌ها $\left(\frac{1}{A} \right)$ در فرکانسی که در آن زاویه فاز

-180° است حاشیه بهره گفته می‌شود.

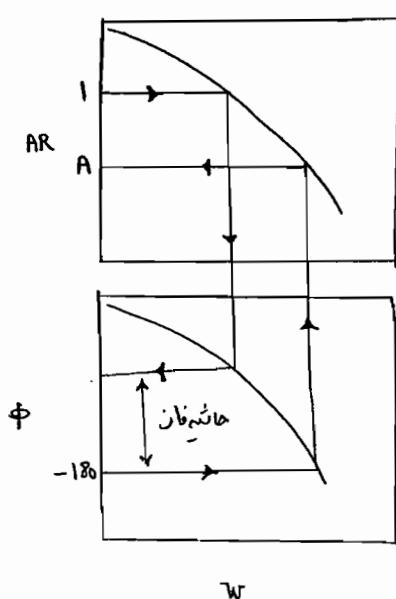
حاشیه فاز: اختلاف میان زاویه فاز $(-\phi_g) - (-180^\circ)$ در فرکانسی که نسبت دامنه‌ها واحد است با -180° - حاشیه فاز نامیده می‌شود.

در شکل روبرو حاشیه بهره و حاشیه فاز به صورت شماتیک نشان داده شده است. حال اگر به جای دیاگرام بد تابع تبدیل سیستم داده شده باشد به صورت زیر عمل می‌شود:

تابع مدار باز $= G(s)$

$$S = i\omega \rightarrow G(i\omega) = a + bi$$

$$AR = |G(i\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}, \phi = \angle G(i\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$



۷۱ مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست

محاسبه gain margin

۱) $\phi = -180^\circ$ قرار داده می‌شود.

۲) فرکانسی که در آن $\phi = 180^\circ$ شده محاسبه می‌شود.

۳) مقدار $AR = |G(i\omega)|$ در فرکانس حاصل از قسمت قبل محاسبه می‌شود.

۴) عکس AR حاصل از قسمت قبل $\left(\frac{1}{AR} \right)$ همان حاشیه بهره است.

محاسبه Phase Margin

۱) $AR = 1$ قرار داده می‌شود.

۲) فرکانسی که در آن $AR = 1$ است؛ محاسبه می‌شود.

۳) زاویه فاز در فرکانس حاصل از قسمت قبل (ϕ_g) ، محاسبه می‌شود.

۴) $Phase Margin = \phi_g - (-180^\circ)$

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s) = \frac{2e^{\frac{\pi s}{4}}}{s(s+1)}$ است مقدار حاشیه بهره و حاشیه فاز را محاسبه کنید.

$$G(i\omega) = \frac{2e^{\frac{\pi \omega i}{4}}}{(i\omega)(i\omega + 1)}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega$$

$$AR = \frac{2 \times 1}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}}$$

محاسبه حاشیه بهره:

$$1) \phi = -180 = -\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega$$

$$2) \omega = 1$$

$$3) AR = \frac{2 \times 1}{1 \times \sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$$

$$4) gain margin = \frac{1}{AR} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

محاسبه حاشیه فاز:

$$1) AR = 1 = \frac{2}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$2) \omega = 1.25$$

$$3) \phi_g = -\frac{\pi}{4} \times 1.25 - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} 1.25 = -56.25 - 90 - 51.34 = -197.56$$

$$4) Phase margin = -197.56 - (-180) = -17.56$$

اگر کنون که با تعاریف حاشیه بهره و حاشیه فاز آشنا شدیم، معیار پایداری بد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left. \begin{array}{l} \text{معیار تئوری} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{gain Margin} > 1 \\ \text{Phase Margin} > 0 \end{array} \right. \\ \text{معیار عملی} \\ \left\{ \begin{array}{l} g.M > 1.7 \\ P.M > 30 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

نکته: در کنکور معیار تئوری مورد نظر است.

مثال:تابع تبدیل مدار باز سیستمی به فرم $G(s) = \frac{Ke^{-\frac{\pi}{4}s}}{S(S+1)}$ می‌باشد. حد پایداری K برابر است با:

$$G(i\omega) = \frac{Ke^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{(i\omega)(i\omega+1)}$$

$$1) \phi = -180 = -\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega$$

$$2) \omega = 1$$

$$3) AR = \frac{k \times 1}{1 \times \sqrt{1^2 + 1}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$4) g.m = \frac{1}{AR} = \frac{\sqrt{2}}{K}$$

$$5) \rightarrow g.m > 1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{K} > 1 \rightarrow K < \sqrt{2}$$

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s) = \frac{\sqrt{2} e^{-\tau_d s}}{S(S+1)}$ می‌باشد مقدار τ_d پایداری را محاسبه کنید.

$$G(i\omega) = \frac{\sqrt{2} e^{-\tau_d \omega i}}{(i\omega)(i\omega+1)}$$

$$6) AR = \frac{\sqrt{2} \times 1}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}} \quad \phi = -\tau_d \omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega$$

$$1) AR = 1 = \frac{\sqrt{2}}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$2) \omega = 1$$

$$3) \phi_g = -\tau_d - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1) = -\tau_d + \frac{\pi}{4}$$

$$4) p.m = \phi_g - (-180) = -\tau_d - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi$$

$$p.m = -\tau_d + \frac{\pi}{4}$$

$$5) \rightarrow p.m > 0 \rightarrow -\tau_d + \frac{\pi}{4} > 0$$

$$\tau_d < \frac{\pi}{4}$$

نکته: به طور کلی در بررسی پایداری زیر از الگوریتم زیر استفاده می‌شود:

(۱) اگر سیستم قادر ترم تأخیر زمانی است از آزمون روث استفاده کنید.

(۲) اگر سیستم دارای ترم تأخر زمانی است دو حالت داریم:

(الف) اگر K پایداری خواسته شده است از معیار پایداری $g.m > 1$ استفاده کنید.

(ب) اگر τ پایداری خواسته شده است از معیار پایداری $p.m > 0$ استفاده کنید.

۶-۴- میزان کنندۀ‌های زیگلر نیکولز

یکی از روش‌های تعیین پارامترهای یک کنترل از قبیل K_c, τ_D, τ_I استفاده از جدول تنظیمات زیگلر- نیکولز است. اساس روش زیگلر- نیکولز به فرم زیر است:

(۱) ازتابع ترانسفر سیستم مدار باز جمله مربوط به کنترل را کنار بگذارید.

(۲) حاشیه بهره ($g.m$) سیستم بدون کنترل را حساب کنید.

$$\text{P}_u = \frac{2\pi}{\omega}, K_u = g.m \quad (3)$$

(۴) اکنون با توجه به مقادیر P_u, K_u, K_C از جدول زیر مقادیر τ_I, K_c و τ_D را می‌توانید محاسبه کنید.

τ_D	τ_I	K_c	$G_c(s)$	نوع کنترل
-	-	$0.5K_u$	K_c	P
-	$\frac{P_u}{1.2}$	$0.45K_u$	$K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I S}\right)$	PI
$\frac{P_u}{8}$	$\frac{P_u}{2}$	$0.6K_u$	$K_c \left(1 + \tau_D S + \frac{1}{\tau_I S}\right)$	PID

مثال: اگر برای کنترل سیستمی که تابع تبدیل مدار باز آن به صورت $G(s) = \frac{K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I S}\right) e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+1)}$ است از یک کنترل PI استفاده شود. مقادیر بهینه τ_I, K_C طبق جدول زیگلر- نیکولز کدام است؟

$$G_1(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+1)} \quad (\text{سیستم بدون کنترل})$$

$$1) \phi = -180 = -\frac{\pi}{4} \omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \omega$$

$$2) \omega = 1$$

$$3) AR = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4) g.m = \frac{1}{AR} = \sqrt{2}$$

$$5) K_u = \sqrt{2}, P_u = -\frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

طبق جدول زیگلر- نیکولز داریم:

$$K_c = 0.45 \times \sqrt{2} = 0.363$$

$$\tau_l = \frac{P_u}{1.2} = \frac{2\pi}{1.2} = 5.233$$

ع_۵- دیاگرام نایکویست

در بخش پاسخ فرکانسی گفته شد برای بررسی پاسخ فرکانسی یک سیستم درتابع ترانسفر آن $S=i\omega$ قرار داده می‌شود و سپس AR و ϕ به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$G(i\omega) = a + bi$$

$$AR = |G(i\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \angle G(i\omega) = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

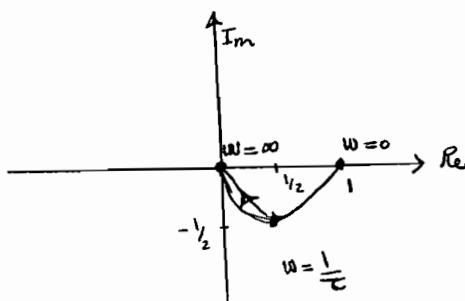
آنگاه دیاگرام‌های AR و ϕ بر حسب ω (دیاگرام‌های Bode) رسم شد. یکی از راه‌های دیگر بررسی پاسخ فرکانسی رسم خود عدد مختلط $G(i\omega) = a + bi$ در مختصات قطبی است.

مثال: دیاگرام نایکویست سیستمی که تابع تبدیل آن به صورت $\frac{1}{\tau s + 1}$ می‌باشد رسم کنید.

$$G(i\omega) = \frac{1}{\tau\omega i + 1} = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} - \frac{\omega\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} i$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 0 \rightarrow G(i\omega) = 1 - 0i \\ \omega = \frac{1}{\tau} \rightarrow G(i\omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \omega = \infty \rightarrow G(i\omega) = 0 - 0i \end{array} \right\}$$

اکنون مختصات سه نقطه فوق در صفحه مختصات موهومی ترسیم می‌شود. مکان هندسی که از به هم وصل کردن این نقاط حاصل می‌شود، دیاگرام نایکویست سیستم درجه اول نامیده می‌شود.



مثال: دیاگرام نایکویست سیستم درجه 2 را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\omega\tau s + 1}$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{(1 - \tau^2 \omega^2) + 2\xi\omega\tau i}$$

۷۵ | پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست مؤسسه آموزش عالی ازاد پارسه

با ضرب کردن در مزدوج مخرج داریم:

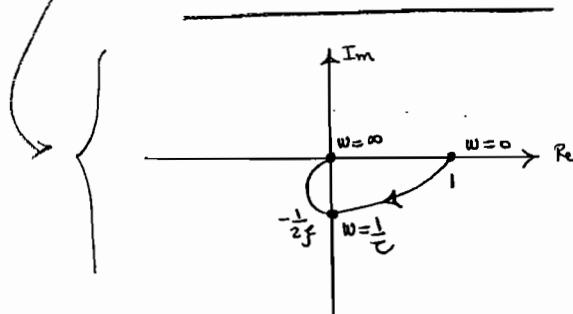
$$G(i\omega) = \frac{1 - \tau^2 \omega^2}{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi\omega\tau)^2} - \frac{2\xi\omega\tau}{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi\omega\tau)^2} i$$

$$\omega = 0 \rightarrow G(i\omega) = 1 - 0i$$

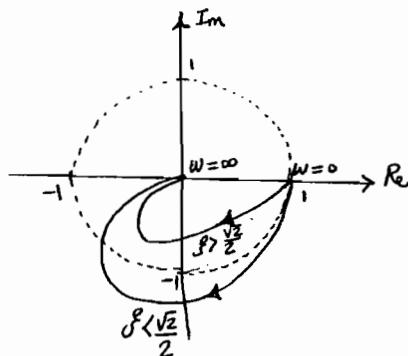
$$\omega = \frac{1}{\tau} \rightarrow G(i\omega) = 0 - \frac{1}{2\xi} i$$

$$\omega = \infty \rightarrow G(i\omega) = 0 - 0i$$

در نمودار زیر سه نقطه فوق به هم متصل شده و دیاگرام نایکویست سیستم درجه 2 به صورت کیفی نشان داده است.



در شکل زیر اثر ζ بر دیاگرام نایکویست سیستم درجه 2 نشان داده شده است.



چنان‌که ملاحظه می‌شود هنگامی که $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، شعاع نایکویست (که همان AR است) بزرگ‌تر از یک می‌شود.

مثال: دیاگرام نایکویست $e^{-\tau_d s}$ را رسم کنید.

$$G(i\omega) = e^{-\tau_d \omega i} = \cos \omega \tau_d - i \sin \omega \tau_d$$

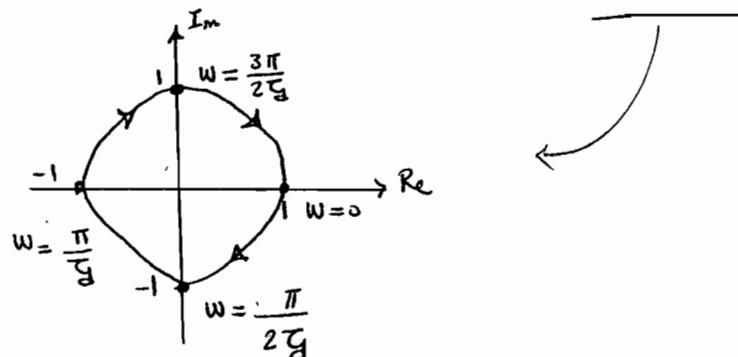
$$\omega = 0 \rightarrow G(i\omega) = 1 - 0i$$

$$\omega = \frac{\pi}{2\tau_d} \rightarrow G(i\omega) = 0 - i$$

$$\omega = \frac{\pi}{\tau_d} \rightarrow G(i\omega) = 1 - 0i$$

$$\omega = \frac{3\pi}{2\tau_d} \rightarrow G(i\omega) = 0 + i$$

در شکل زیر دیاگرام نایکویست ترم تاخیر زمانی رسم شده است.



چنان‌که ملاحظه می‌شود دیاگرام نایکویست دایره‌ای به شعاع یک می‌باشد.

مثال: دیاگرام نایکویست $\frac{1}{S^n}$ را رسم کنید.

$$G(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^n}$$

برای حالت $n=1$

$$G(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = -\frac{1}{\omega}i$$

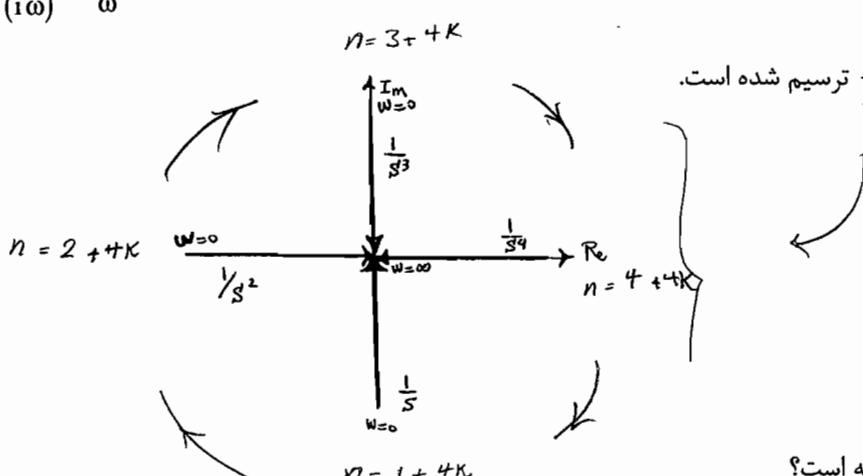
برای حالت $n=2$

$$G(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2}$$

برای حالت $n=3$

$$G(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^3} = \frac{1}{\omega^3}i$$

در شکل زیر دیاگرام نایکویست $\frac{1}{S^n}$ ترسیم شده است.



مثال: دیاگرام نایکویست S^n چگونه است؟

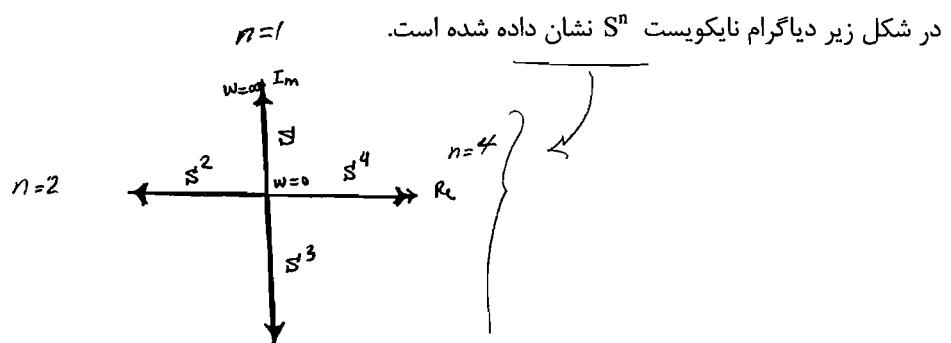
$$G(i\omega) = (i\omega)^n$$

$$n=1 \rightarrow G(i\omega) = i\omega$$

$$n=2 \rightarrow G(i\omega) = -\omega^2$$

$$n=3 \rightarrow G(i\omega) = (i\omega)^3 = -\omega^3 i$$

$$n=4 \rightarrow G(i\omega) = (i\omega)^4 = \omega^4$$



مثال: دیاگرام نایکویست $\frac{e^{-\tau_d s}}{\tau s + 1}$ را رسم کنید.

$$G(i\omega) = \frac{e^{-\tau_d \omega i}}{\tau \omega i + 1}$$

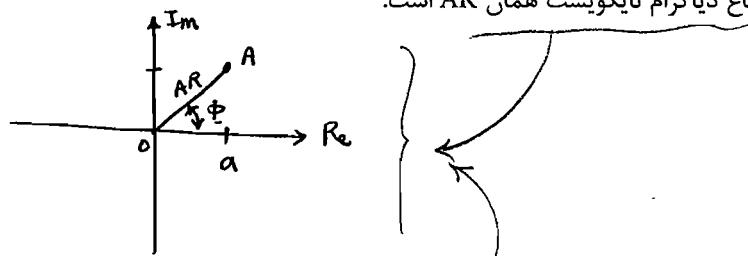
قبل از توضیح نحوه ترسیم دیاگرام نایکویست این سیستم به توضیح دو نکته می‌پردازیم:

۱- شعاع دیاگرام نایکویست همان AR است.

$$G(i\omega) = a + bi$$

$$AR = |G(i\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

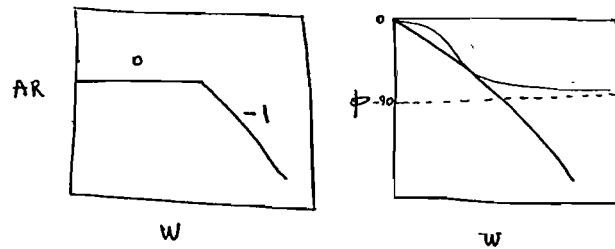
$$\phi = \arg G(i\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$



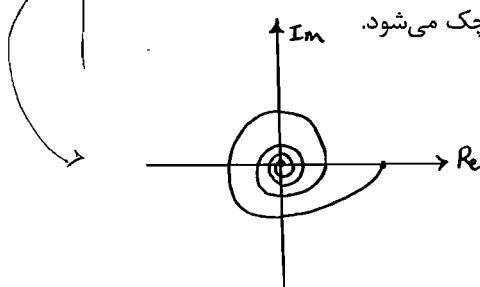
۲- زاویه شعاع واصل به دیاگرام نایکویست و محور حقیقی همان Φ (زاویه فاز) است. بنابراین دیاگرام نایکویست چیزی جز دیاگرام بد در مختصات قطبی نیست، پس ابتدا دیاگرام بد این سیستم را رسم می‌کنیم.

$$AR = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} e^{-\tau \omega} \text{ اثری بر منحنی AR ندارد}$$

$$\phi = -\omega \tau_d - \tan^{-1}(\omega \tau_d)$$



همان‌طور که ملاحظه می‌شود زاویه فاز به عدد مشخصی میل نمی‌کند و معنای $\phi = \infty$ وقتی $\omega \rightarrow \infty$ می‌کند چیزی جز دور خوردن مبدأ به دفعات بی‌شمار توسط دیاگرام نایکویست نیست. با نگاه کردن به منحنی AR می‌توان فهمید که AR با ازدیاد ω کم می‌شود. یعنی شعاع نایکویست با ازدیاد ω کم می‌شود و منحنی ϕ نشان دهنده آن است که نایکویست به دفعات زیاد مبدأ را دور می‌زند، در نتیجه می‌توان گفت که دیاگرام نایکویست دایره‌ای است که به تدریج شعاع آن کوچک می‌شود.



۶-۶- بررسی پایداری به کمک دیاگرام نایکویست

برای بررسی پایداری یک سیستم به کمک دیاگرام نایکویست به صورت زیر عمل می‌شود:

۱) قرینه آینه‌ای دیاگرام نایکویست نسبت به محور حقیقی رسم می‌شود (رسم مکان در ناحیه $\omega = 0$ تا $\omega = \infty$) تا یک دیاگرام بسته حاصل شود.

۲) در جهت افزایش ω از $-\infty$ تا ∞ تعداد دور خوردن‌های نقطه $(-1, 0)$ در صفحه مختصات موهومی شمارش می‌شود. منظور از دور خوردن آن است که منحنی یک دور کامل (360°) حول نقطه $(-1, 0)$ بچرخد.

۳) تعداد قطب‌های مدار باز که در سمت راست محور موهومی هستند شمارش می‌شود. چنان‌چه در صورت سؤال در مورد تعداد قطب‌های مدار باز صحبتی نشده باشد. وتابع ترانسفر هم داده نشده باشد. تعداد آن‌ها صفر منظور می‌شود.

۴) تعداد ریشه‌های نایکویست سیستمی که در معادله مقابله حاصل می‌شود:

$$N + P = \text{تعداد ریشه‌های نایکویست سیستمی}$$

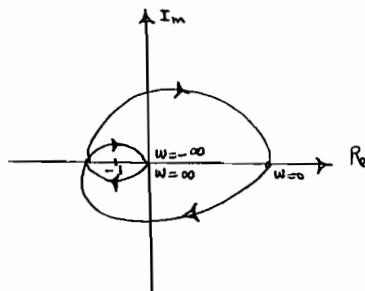
که در معادله فوق

N : تعداد دور خوردن‌های نقطه $(-1, 0)$ در جهت ساعت‌گرد است.

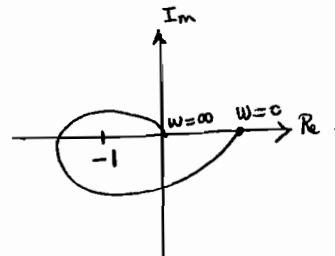
P : تعداد قطب‌های مدار باز که در سمت راست محور موهومی هستند.

مثال: دیاگرام نایکویست سیستمی که تابع مدار باز آن هیچ قطبی در سمت راست موهومی ندارد مطابق شکل زیر است. در مورد پایداری آن بحث کنید. (شکل الف)

ابتدا قرینه آینه‌ای دیاگرام نایکویست را رسم می‌کنیم تا یک منحنی بسته تشکیل شود. (شکل ب)



شکل «ب»



شکل «الف»

اگر ناظری در نقطه $(-1, 0)$ ایستاده باشد هنگامی که ω از $-\infty$ تا ∞ تغییر می‌کند. دوبار به دور خود در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد.

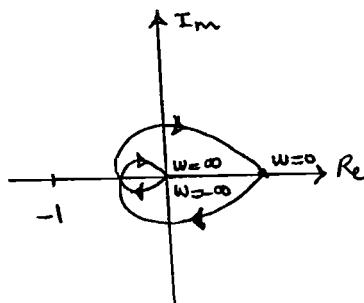
$$N=2$$

$$P=0 \quad (\text{در صورت سؤال ذکر نشده است})$$

$$2 + 0 = 2 \quad \text{تعداد ریشه‌های نایکویست سیستمی}$$

۷۹ | پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست

در این مثال اگر بهره سیستم کاهش یابد شعاع نایکویست (AR) کم می‌شود و در نتیجه ممکن است نقطه $(-1,0)$ خارج از مکان نایکویست قرار گیرد. در این حالت دیاگرام نایکویست و قرینه آن به فرم زیر است:



در این حالت همان‌طور که ملاحظه می‌شود اگر ناظری، در نقطه $(-1,0)$ باشد هنگامی که ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، به دور خود نمی‌چرخد:

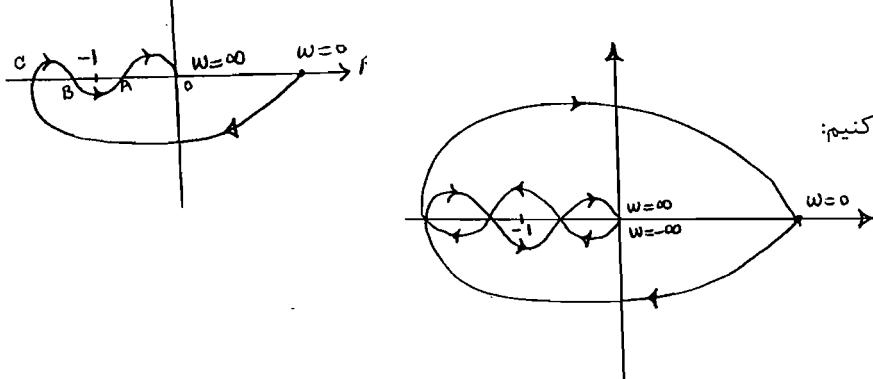
$$N=0$$

$$P=0$$

$$=0+0=0$$

یعنی سیستم پایدار است. بنابراین می‌توان گفت این سیستم در بهره‌های کم (هنگامی که شعاع نایکویست کم است و ۱ - خارج مکان است) این سیستم پایدار است و در بهره‌های بالا (هنگامی که ۱ - داخل مکان است) دو ریشه ناپایدار کننده دارد.

مثال: دیاگرام نایکویستی مطابق شکل روبرو است در مورد پایداری آن بحث کنید.



ابتدا با رسم دیاگرام نایکویست را کامل می‌کنیم:

اگر ناظری روی نقطه $(-1,0)$ ایستاده باشد، هنگامی که ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند مکان یکبار در جهت عقربه‌های ساعت یکبار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور می‌زند، بنابراین تعداد دور زدن‌ها خالص صفر است.

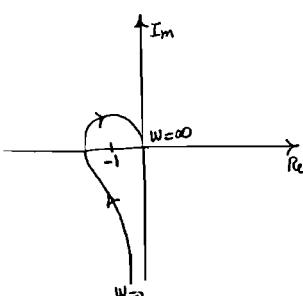
$$N=0$$

$$P=0$$

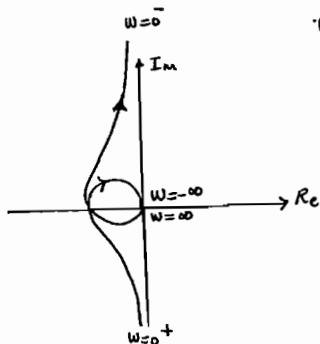
$$=0$$

بنابراین سیستم پایدار است. بررسی شود زمانی که $(-1,0)$ در ناحیه OA یا BC است دارای دو ریشه ناپایدار کننده است. (اثبات به عهده خواننده)

مثال: دیاگرام نایکویست سیستمی به صورت روبرو است. در مورد پایداری آن بحث کنید.



ابتدا مکان را با رسم قرینه تکمیل می‌کنیم.

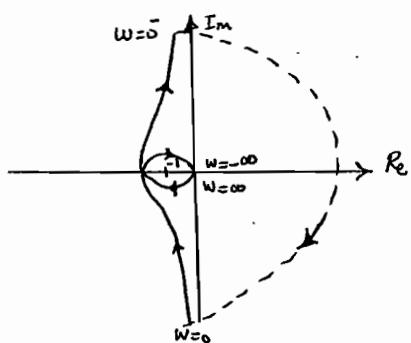


ملاحظه می‌شود که مکان به یک منحنی بسته تبدیل نشد. در این حالات از یک نیم دایره فرضی استفاده می‌کنیم که دارای دو ویژگی

است:

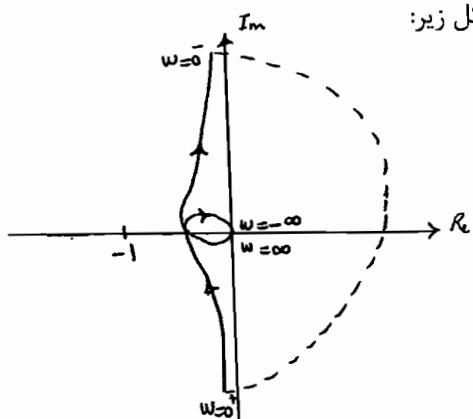
۱- ساعت‌گرد است.

۲- در جهت افزایش ω است. (از صفر منفی -0^+ به صفر مثبت 0^+ وصل می‌شود)



اگر ناظر در نقطه $(-1, 0)$ باشد، ملاحظه می‌کند که مکان نایکویست ۲ بار این نقطه را دور می‌زند بنابراین تعداد ریشه‌های ناپایدار کننده

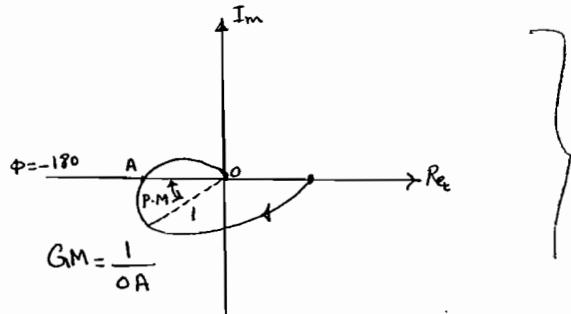
در مثال فوق اگر $(-1, 0)$ خارج از مکان باشد (یعنی در بهره‌های کم) مطابق شکل زیر:



در این حالت ملاحظه می‌شود اگر ناظری روی نقطه $(-1, 0)$ باشد مکان ناکوئیست نقطه $(-1, 0)$ را دور نمی‌زند.

حاشیه بهره و حاشیه فاز در دیاگرام نایکویست

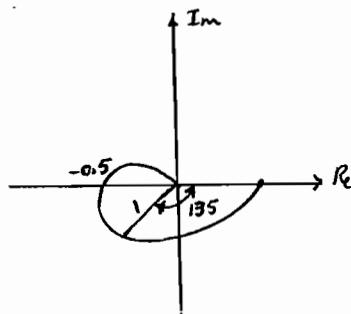
در شکل رویه را حاشیه بهره و حاشیه فاز به صورت شماتیک نشان داده است.



مثال: در شکل زیر مقادیر حاشیه بهره و حاشیه فاز را محاسبه کنید.

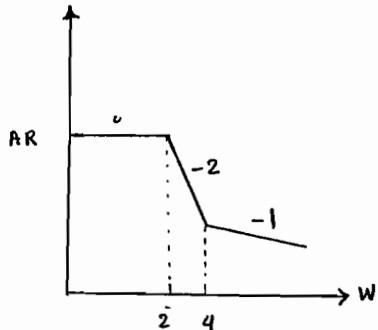
$$\phi = -180 \rightarrow AR = 0.5 \rightarrow GM = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$AR = 1 \rightarrow \phi_g = -135 \rightarrow P.M = -135 - (-180) = 45^\circ$$



۶-۷- تست‌های فصل ششم

۱ - دیاگرام مجانب‌های بد سیستمی به صورت روبرو است تابع تبدیل این سیستم برابر است با



$$\frac{K(S+15)}{(S+2)(S+4)} \quad (2)$$

$$\frac{K}{(S+2)(S+4)} \quad (1)$$

$$\frac{K(S+4)}{(S+2)^2} \quad (4)$$

$$\frac{K(0.25S+1)}{(0.5S+1)} \quad (3)$$

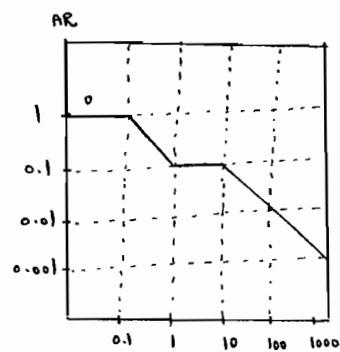
۲ - تابع تبدیل فرآیندی به صورت $\frac{y(S)}{x(S)} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi s}{4}}}{S+1}$ است. اگر $x(t) = \sin t$ باشد پاسخ ماندگار خروجی برابر است با

$$-\sqrt{2} \cos t \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \sin t \quad (3)$$

$$\sin t \quad (2)$$

$$-\cos t \quad (1)$$



۳ - دیاگرام مجانب‌های بد سیستمی مطابق شکل است تابع تبدیل این سیستم کدام است؟

$$\frac{0.1S+1}{(S+1)(10S+1)} \quad (2)$$

$$\frac{10S+1}{(0.1S+1)(S+1)} \quad (1)$$

$$\frac{S+1}{(0.1S+1)(10S+1)^2} \quad (4)$$

$$\frac{S+1}{(0.1S+1)(10S+1)} \quad (3)$$

۴ - تابع تبدیل سیستمی به صورت $\frac{y(S)}{x(S)} = \frac{e^{-\tau_1 S}}{S(\tau_2 S+1)}$ است. اگر $x(t) = 2 \sin t$ باشد خروجی به صورت $y(t) = \sqrt{2} \sin(t-180)$ است. مقادیر τ_1 و τ_2 عبارتند از

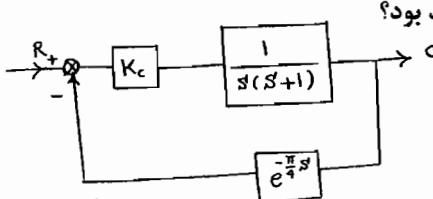
$$\tau_2 = 2, \tau_1 = 2 \quad (4)$$

$$\tau_2 = 1, \tau_1 = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\tau_2 = \frac{\pi}{4}, \tau_1 = 2 \quad (2)$$

$$\tau_2 = 2, \tau_1 = 1 \quad (1)$$

۵ - در مدار زیر برای این که Gain Margin برابر $\sqrt{2}$ باشد مقدار K_c برابر چند خواهد بود؟



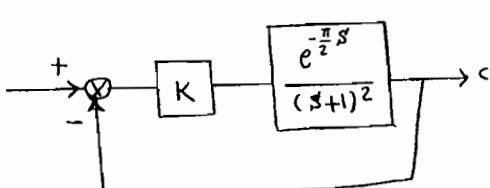
$$K_c = 2 \quad (2)$$

$$K_c = 1 \quad (1)$$

$$K_c = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$K_c = \sqrt{2} \quad (3)$$

۶ - در سیستم مدار بسته روبرو برای آن که حاشیه بهره برابر 2 باشد مقدار K_c باید برابر چند باشد؟



$$K = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$k=1 \quad (1)$$

$$K = 2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$K = \sqrt{2} \quad (3)$$

۶- پاسخ تست‌های فصل ششم

۱ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\omega_1 = 2 \rightarrow \tau_1 = \frac{1}{2} \rightarrow (0.5S+1)^2 \text{ است } \rightarrow \text{در مخرج}$$

$$\omega_2 = 4 \rightarrow \tau_2 = \frac{1}{4} \rightarrow (0.25S+1) \text{ تغییر کرده } \rightarrow \text{در صورت}$$

$$G(S) = \frac{K(0.25S+1)}{(0.5S+1)^2} = \frac{K(S+4)}{(S+2)^2}$$

۲ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega) = \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{i\omega + 1}$$

$$AR = \frac{\sqrt{2} \times 1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}} = 1$$

$$\phi = -\frac{\pi}{4} \omega - \tan^{-1} \omega = -\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$$

۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\omega_1 = 0.1 \rightarrow \tau_1 = \frac{1}{0.1} = 10 \rightarrow (10S+1) \text{ است } \rightarrow \text{چون شیب ۱}$$

$$\omega_2 = 1 \rightarrow \tau_2 = 1 \rightarrow (S+1) \text{ به صفر تبدیل شده}$$

$$\omega_3 = 10 \rightarrow \tau_3 = 0.1 \rightarrow (0.1S+1) \text{ به ۱ تبدیل شده}$$

$$G(S) = \frac{K(S+1)}{(10S+1)(0.1S+1)}$$

۴ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega) = \frac{e^{-\tau_1 \omega i}}{(i\omega)(\tau_2 \omega i + 1)} \quad \omega = 1$$

$$AR = \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2 \tau_2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2^2 + 1}} = \frac{\text{دامنه پاسخ}}{\text{دامنه ورودی}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau_2 = 1$$

$$\phi = -\tau_1 \omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega \tau_2) = -180$$

$$-\tau_1 \times 1 - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1 \times 1) = -180$$

$$\tau_1 = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۵ - گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$G(S) = \frac{K_c e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+1)}$$

$$G(i\omega) = \frac{K_c e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{(i\omega)(i\omega+1)}$$

$$1) \phi = -\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega = -180$$

$$2) \omega = 1$$

$$3) AR = \frac{K_c \times 1}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}} = \frac{K_c}{\sqrt{2}}$$

$$4) q.M = \frac{1}{AR} = \frac{\sqrt{2}}{K_c} = \sqrt{2}$$

$$K_c = 1$$

۶ - گزینه ۱ صحیح است.

$$G(S) = \frac{K e^{-\frac{\pi}{2}S}}{(S+1)^2}$$

$$G(i\omega) = \frac{K e^{-\frac{\pi}{2}\omega i}}{(i\omega+1)^2}$$

$$1) \phi = -180 = -\frac{\pi}{2}\omega - 2\tan^{-1}\omega$$

$$2) \omega = 1$$

$$3) AR = \frac{K \times 1}{(\sqrt{\omega^2 + 1})^2} = \frac{K}{(\sqrt{2})^2} = \frac{K}{2}$$

$$4) g.M = \frac{1}{AR} = \frac{2}{K} = 2$$

$$K = 1$$

فصل هفتم

نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد

۷-۱- سؤالات آزمون سراسری سال ۸۳

۱- برای سه مخزن سطح مایع سری یکسان بدون تأثیر متقابل چنان‌چه $R=1$ و $A=1$ باشد به ازای یک تغییر ضربه‌ای به اندازه سه $(3\delta(t))$ در جریان ورودی به تانک اول،تابع تغییرات ارتفاع $H_2(t)$ عبارت است از:

$$\frac{3}{2}e^{-t}t^2u(t-1) \quad (1) \quad 1 - \left(2e^{-t} - e^{-2t} \right) \quad (2) \quad \frac{3}{2}t^2e^{-t} \quad (3) \quad 1 - 2e^{-1} \quad (4)$$

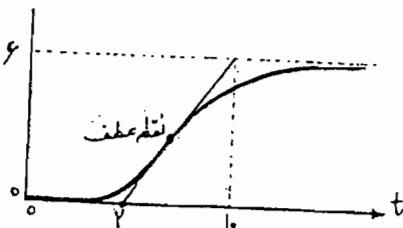
۲- حداقل پاسخ یک سیستم درجه اول با ثابت زمانی τ به یک ورودی ضربه‌ای واحد $(\delta(t))$ برابر ۲ واحد می‌باشد. زمان وقوع مقدار حداقل پاسخ این سیستم به یک ورودی ضربه‌ای به اندازه ۲ واحد برابر است با:

$$(1) \text{ صفر و ۹ واحد} \quad (2) \text{ } 5\tau \text{ و ۹ واحد} \quad (3) \text{ } \tau \text{ و ۳ واحد} \quad (4) \text{ } 5\tau \text{ و ۱ واحد}$$

۳- جهت تخمین تابع انتقال یک سیستم یک ورودی ضربه‌ای واحد به آن داده شده و خروجی سیستم به دقت اندازه‌گیری شده است. این خروجی را می‌توان به صورت تابع $y(t) = te^{-t}$ نشان داد. پاسخ این سیستم نسبت به یک ورودی پله‌ای عبارت است از:

$$y(t) = 1 - e^{-t}(1+t) \quad (1) \quad y(t) = e^{-t}(1-t) \quad (2) \quad y(t) = te^{-t} \quad (3) \quad y(t) = 1 - e^{-t} \quad (4)$$

۴- برای سیستمی با تابع انتقال $\frac{Ke^{-t}ds}{\tau s+1}$ به ازای ورودی پله‌ای با دامنه ۲ پاسخ زیر حاصل شده است. تابع انتقال سیستم کدام گزینه است؟



$\frac{10e^{-2s}}{8s+1} \quad (1)$	$\frac{8e^{-2s}}{2s+1} \quad (2)$
$\frac{6e^{-2s}}{10s+1} \quad (3)$	$\frac{3e^{-2s}}{8s+1} \quad (4)$

۵ - وقتی یک ترموموپل را با یک لایه محافظ بپوشانیم پاسخ آن:

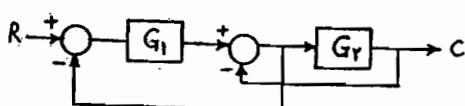
- ۲) تندتر و نوسانی است.
- ۴) تندتر ولی غیرنوسانی می‌باشد.
- ۱) کندتر و نوسانی است
- ۳) کندتر و غیرنوسانی است.

۶ - کدام جمله در مورد تابع انتقال یک سیستم غیر تداخلی مت Shank از دو سیستم درجه اول متوالی (با ثابت زمانی

$\tau_1 \neq \tau_2, \tau_2, \tau_2, \tau_1$) صحیح است؟

- ۱) تابع انتقال سیستم کم میرا خواهد بود ($\zeta < 1$)
- ۲) تابع انتقال سیستم میرای بحرانی خواهد بود. ($\zeta = 1$)
- ۳) تابع انتقال سیستم همواره پرمیرا خواهد بود. ($\zeta > 1$)
- ۴) بسته به مقدار τ_1, τ_2 ممکن است سیستم پرمیرا، کم میرا یا میرای بحرانی باشد.

۷ - در نمودار جعبه‌ای شکل زیر تابع انتقال $\frac{C}{R}$ کدام است؟



$$\frac{G_1 G_2}{1+G_1+G_2} \quad (2)$$

$$\frac{G_1+G_2}{1+G_1+G_2} \quad (1)$$

$$\frac{G_1+G_2}{1+G_1 G_2} \quad (4)$$

$$\frac{G_1 G_2}{1+G_1 G_2} \quad (3)$$

۸ - اگر بخواهیم فرآیند درجه اولی $\left(\frac{K}{s+1} \right)$ را توسط سیستم کنترل پس خور منفی کنترل نماییم، برای آن که رفتار مدار بسته

سیستم، از نوع درجه دوم باشد چه کننده‌هایی می‌تواند استفاده شود؟

- ۱) تناسبی (P) و تناسبی انتگرالی مشتقی (PID) و تناسبی (P)
- ۲) تناسبی (P) و تناسبی انتگرالی مشتقی (PID) و تناسبی (P)
- ۳) تناسبی انتگرالی (PI) و تناسبی مشتقی (PD)
- ۴) تناسبی انتگرالی (PI) و تناسبی مشتقی (PD)

۹ - برای کنترل دمای یک راکتور پلیمریزاسیون که در جداره آن بخار جریان دارد، کدام کنترل کننده را پیشنهاد می‌کنید؟

(۱) PID با بهره بالا (۲) PD با بهره بالا (۳) PI با بهره پایین (۴) P با بهره پایین

۱۰ - در سیستم کنترل یک مبدل حرارتی گرمکن، چنان‌چه ثابت زمانی فرآیند τ_p باشد، شیر کنترل بادی که بر روی خط بخار (با فشار بالا) استفاده می‌شود بایستی:

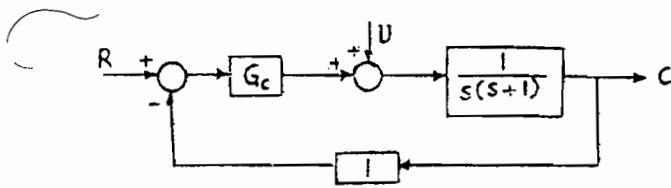
(۱) شیر کنترل از نوع Air to open با بهره $0.1\tau_p$

(۲) شیر کنترل از نوع Air to close با بهره $0.1\tau_p$

(۳) شیر کنترل از نوع Air to open با بهره $0.01\tau_p$

(۴) شیر کنترل از نوع Air to close با بهره $0.01\tau_p$

۱۱ - مقدار افت کنترل (offset) برای سیستم کنترلی شکل زیر با کنترل کننده تناسبی (P) برای یک تغییر پله‌ای به اندازه ۳ واحد در مقدار مقرر (Set Point) برابر است با:



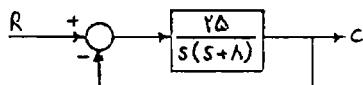
(۱) صفر

(۲)

| offset | < 2 (۳)

| offset | > 0 (۴)

۱۲ - مدار زیر را در نظر بگیرید:



اگر R یک تغییر پله‌ای واحد کند ضریب میرایی (ζ) برابر است با:

$$\zeta = 0.8 \quad (4)$$

$$\zeta = 0.5 \quad (3)$$

$$\zeta = 0.6 \quad (2)$$

$$\zeta = 0.4 \quad (1)$$

۱۳ - در یک سیستم کنترل مدار بسته، تابع انتقال فرآیند $\frac{1}{2s} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ باشد. اگر تابع انتقال کنترل کننده باشد، آن‌گاه بر اثر تغییر پله در مقدار مقرر پاسخ متغیر تحت کنترل به چه صورت خواهد بود؟

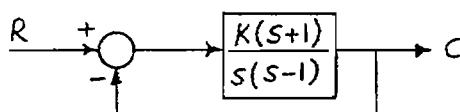
(۱) پاسخ کم میرا (Under damped)

(۲) پاسخ پر میرا (Over damped)

(۳) میرایی بحرانی (Critically damped)

(۴) پاسخ نوسانی میرا (Undamped)

۱۴ - مدار زیر را در نظر بگیرید. کدام عبارت صحیح است؟



(۱) سیستم همواره پایدار است.

(۲) پاسخ همواره ناپایدار است.

(۳) سیستم در بهره‌های پایین پایدار و در بهره‌های بالا ناپایدار است.

(۴) سیستم در بهره‌های پایین ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار است.

۱۵ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2}$ است. نقطه جدایی مکان هندسی ریشه‌ها برابر است با:

$$s = -1 \quad (4)$$

$$s = -2.5 \quad (3)$$

$$s = -2 \quad (2)$$

$$s = -3 \quad (1)$$

۱۶ - معادله مشخصه سیستمی به صورت $s^4 + s^3 + s^2 + 4s + 6 = 0$ است. کدام عبارت در مورد پایداری سیستم فوق صحیح است؟

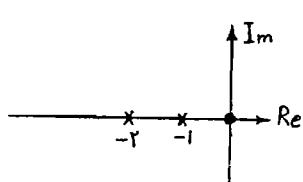
(۱) سیستم همواره پایدار است.

(۲) سیستم دارای سه ریشه ناپایدار کننده است.

(۳) سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

(۴) سیستم دارای یک ریشه ناپایدار کننده است.

۱۷ - در نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستمی، محل صفر و قطب‌ها مطابق شکل است. نقطه جدایی مکان (Break Away Point) کدام است؟



$$-\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$-\sqrt{2} \quad (1)$$

(۴) نقطه جدایی ندارد

$$-3 \quad (3)$$

۱۸ - سیستمی دارای تابع انتقال $G(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s+1}$ است. اگر ورودی سیستم به صورت یک تابع سینوسی $X(t) = \sin t$ تغییر

نماید پاسخ سیستم برابر خواهد بود با:

$$\frac{1}{2} \sin\left(t - \frac{5\pi}{4}\right) \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \sin(t - 2\pi) \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{5\pi}{4}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t - 2\pi) \quad (1)$$

۱۹ - برای تابع انتقال مدار باز $\frac{e^{-s}}{s(s+1)}$ ، روابط AR و ϕ در پاسخ فرکانسی کدام است؟

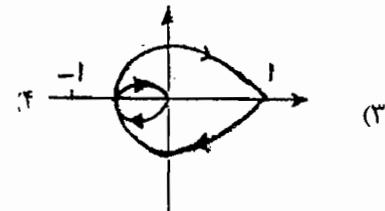
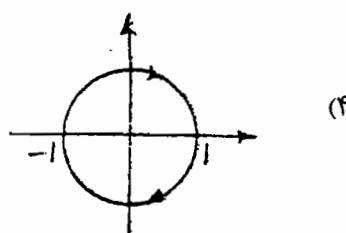
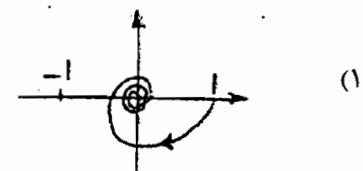
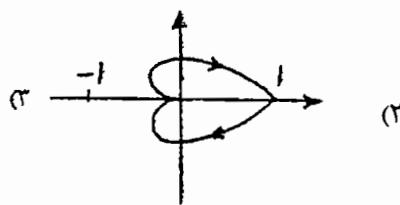
$$\phi = -90 - \tan^{-1} \omega - 57.2\omega, AR = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} \quad (2) \quad (\text{درجه})$$

$$\phi = -90 - \tan^{-1} \omega - 57.2\omega, AR = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad (1) \quad (\text{درجه})$$

$$\phi = -90 - \tan^{-1} \omega - 57.3\omega, AR = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega} \quad (4) \quad (\text{درجه})$$

$$\phi = 90 - \tan^{-1} \omega + 57.3\omega, AR = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} \quad (3) \quad (\text{درجه})$$

۲۰ - نمودار نایکویست برای تابع انتقال مدار باز مقابله عبارت است از:



۷-۲- پاسخ سوالات کنکور آزمون سراسری ۸۳

۱ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{H_3(s)}{Q_i} = \frac{R_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

چون $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$ بنابراین

$$\frac{H_3(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$Q_i(t) = 3\delta(t) \rightarrow Q_i(s) = 3$$

در نتیجه .

$$H_3(s) = \frac{3}{(s+1)^3} \rightarrow H_3(t) = L^{-1} H_3(s)$$

$$H_3(t) = \frac{3}{2} t^2 e^{-t}$$

۲ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی به اندازه A واحد

$$y(t) = \frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

حالت اول: $\frac{A}{\tau} = 3$ ، $A=1$ (حداکثر پاسخ در لحظه صفر اتفاق می‌افتد)

$$\frac{1}{\tau} = 3 \rightarrow \tau = \frac{1}{3}$$

حالت دوم: $A=3$

زمان وقوع حداکثر پاسخ همان لحظه صفر است. و مقدار حداکثر پاسخ برابر است با:

$$\text{حداکثر پاسخ} = \frac{A}{\tau} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

۳ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

نکته: پاسخ سیستم به یک ورودی ضربانی مشتق پاسخ سیستم به ورودی پله‌ای برابر انتگرال پاسخ سیستم به ورودی ضربانی است.

$$y_2(t) = \int y_1(t) dt = \int_0^t t e^{-t} dt = -(1+t)e^{-t} + C \Rightarrow y_2(0) = 0 \Rightarrow C = +1 \Rightarrow y_2(t) = 1 - e^{-t}(1+t)$$

۴ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$= 2K = 6 \Rightarrow k = 3$$

$$\tau_d = 2 \text{ میزان تأخیر زمانی}$$

$$= 10 - 2 = 8 \text{ ثابت زمانی سیستم}$$

دقت شود که ثابت زمانی طبق تعریف زمانی است که سیستم به ۶۳.۲ درصد مقدار نهایی اش برسد، یا این که اگر با همان شب اولیه به صورت خطی ادامه یابد سیستم پس از یک ثابت زمانی به جواب می‌رسد.

۵ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از دیاد ضخامت موجب از دیاد مقاومت حرارتی و در نتیجه افزایش ثابت زمانی می‌شود، بنابراین پاسخ کندر می‌شود. و چون دما نسج سیستم درجه اول است پس پاسخ آن غیرنوسانی است.

۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

چنان‌که در متن درس هم گفته شد در سیستم‌های متوالی (چه تداخلی و چه غیرتداخلی) همواره $g > 1$ است بنابراین پاسخ همواره غیرنوسانی است.

۷ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left[\left\{ R - \frac{C}{G_2} \right\} G_1 - C \right] G_2 = C$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2}$$

۸ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۹ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۰ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در سیستم‌های Air to open وقتی که دبی هوای ابزار دقیق کم شد، جریان خروجی از شیر کم می‌شود.

۱۱ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته: وجود عامل انتگرال $\left(\frac{1}{S} \right)$ موجب حذف offset می‌شود البته این امر برای تغییر در بار (Load) همواره صادق است. ولی برای

تغییر در مقدار مقرر (Set Point) فقط زمانی صادق است که تابع ترانسفر مسیر برگشت واحد باشد که البته در این تست تابع مسیر برگشت واحد است.

۱۲ - گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{25}{S(S+8)}}{1 + \frac{25}{S(S+8)}} = \frac{25}{S^2 + 8S + 25} = \frac{1}{\frac{1}{25}S^2 + \frac{8}{25}S + 1}$$

$$\tau^2 = \frac{1}{25} \rightarrow \tau = \frac{1}{5}$$

$$2\zeta\tau = \frac{8}{25} \rightarrow \zeta = \frac{4}{5} = 0.8$$

۹۱ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۱۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{1}{\tau + S} \cdot \frac{1}{2S}}{1 + \frac{1}{\tau_I S} \cdot \frac{1}{2S}} = \frac{1}{2\tau_I S^2 + 1}$$

پاسخ نوسانی و نامیرا است. $\zeta = 0 \Rightarrow$

۱۴ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$= 1 + GH = S(S-1) + K(S+1) = S^2 + (K-1)S + K$$

با تشکیل جدول آزمون روث داریم:

$$k-1 > 0 \rightarrow k > 1$$

$$k > 0$$

		K
1		K-1
	K	

بنابراین سیستم در بهره‌های پایین ($k < 1$) ناپایدار و بهره‌های بالا ($k > 1$) پایدار است.

۱۵ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای محاسبه نقطه جدایی از معادله زیر استفاده می‌شود:

$$\sum \frac{1}{S-P_i} = \sum \frac{1}{S-Z_i}$$

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S} = \frac{1}{S+1} \rightarrow \frac{2}{S} = \frac{1}{S+1} = \frac{1}{S+1} \rightarrow 2S+2=S$$

$$S=-2$$

۱۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با تشکیل آزمون روث داریم:

	1	1	6
1		4	
-3		6	
6			
6			

این سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

۱۷ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

این سیستم نقطه جدایی ندارد، چون سیستم زمانی دارای نقطه جدایی است که فاصله بین دو قطب مجاور جزو مکان هندسی باشد اما در این مسئله چنین نیست.

۱۸ - گزینه ۲ صحیح میباشد.

$$G(i\omega) = \frac{e^{-\pi\omega i}}{i\omega + 1}$$

$$AR = |G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi = \arg G(i\omega) = -\pi - \tan^{-1}(\omega) = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{5\pi}{4}\right)$$

۱۹ - گزینه ۲ صحیح میباشد.

$$G(i\omega) = \frac{e^{-i\omega}}{(i\omega)(i\omega + 1)}$$

$$AR = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\phi = -\omega \times 57.3 - 90 - \tan^{-1}(\omega)$$

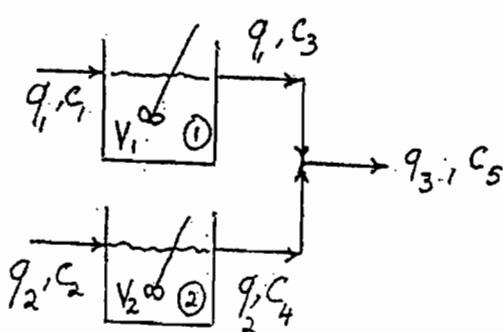
۲۰ - گزینه ۱ صحیح میباشد.

۷-۳- سؤالات کنترل آزمون سال ۸۴

- ۱ - دو تانک متواالی با اثر متقابل که سطوح آنها A_1, A_2 و مقاومت شیرهای آنها R_1, R_2 است در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی پاسخ ارتفاع تانک دوم به تغییر پله‌ای در دبی ورودی به تانک اول نوسانی نمی‌شود؟
- (۱) اگر $R_1 = R_2$ ، $A_1 = A_2$ باشد.
 - (۲) اگر $R_1 > R_2$ ، $A_1 > A_2$
 - (۳) اگر $R_1 < R_2$ ، $A_1 < A_2$.
- ۴) تحت هیچ شرایطی نوسانی نمی‌شود.

- ۲ - چنان‌چه جریان‌های ورودی به دو تانک اختلاط ۱ و ۲ ثابت باشد و جریان‌های خروجی با هم مخلوط شوند (شکل زیر) تابع

$$\tau_1 = \frac{v_1}{q_1}, \quad \tau_2 = \frac{v_2}{q_2} \quad \text{انتقالی کلی سیستم عبارت است از:}$$



$$c_1 = \frac{q_1}{\tau_1 s + 1} c_1(s) + \frac{q_2}{\tau_2 s + 1} c_2(s) \quad (1)$$

$$c_5 = \frac{q_1}{\tau_1 s + 1} c_1(s) + \frac{q_2}{\tau_2 s + 1} c_2(s) \quad (2)$$

$$c_5 = \frac{q_1}{\tau_1 s + 1} c_1(s) + \frac{1}{\tau_2 s + 1} c_2(s) \quad (3)$$

$$c_5 = \frac{q_1}{\tau_1 s + 1} c_1(s) + \frac{q_2}{\tau_2 s + 1} c_2(s) \quad (4)$$

- ۳ - تابع انتقال یک سیستم به صورت زیر داده شده است، در چه شرایطی مقدار اولیه پاسخ پله بزرگ‌تر از مقدار نهایی پاسخ

$$G(s) = k \frac{\zeta s + 1}{\tau s + 1} \quad \text{می‌شود؟}$$

$$\frac{k\zeta}{\tau} << 1 \quad (4)$$

$$\zeta > \tau \quad (3)$$

$$\zeta = k\tau \quad (2)$$

$$\zeta < \tau \quad (1)$$

- ۴ - در سیستم کنترل زیر یک ورودی پله‌ای وارد می‌شود مقدار a جهت داشتن یک پاسخ غیرنوسانی با حداقل سرعت عبارت

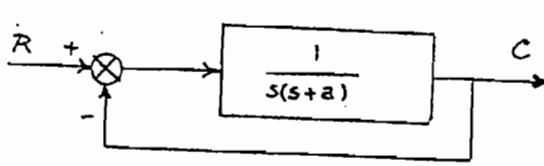
است از:

$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1- \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (4)$$



- ۵ - پاسخ پله‌ای واحد یک سیستم درجه دوم میرای بحرانی $y(t) = 3[1 - (1+2t)e^{-2t}]$ است پاسخ آن سیستم به ازای ورودی ضربان ایده‌آل با بزرگی $4\delta(t)$ کدام است؟

$$48t(1-e^{-2t}) \quad (4)$$

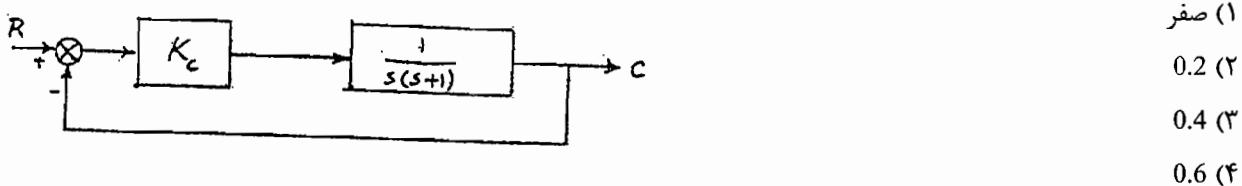
$$48te^{-2t} \quad (3)$$

$$48(1-e^{-2t}) \quad (2)$$

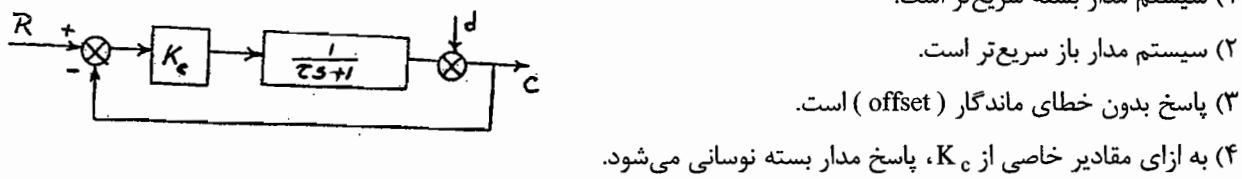
$$48e^{-2t} \quad (1)$$

- ۶ - در یک کنترل کننده PI اگر فشار یکنواخت $P_s = 5 \text{ psig}$ باشد به ازای ورودی خطای پله‌ای واحد $e(t) = u(t)$ میزان فشار خروجی از آن پس از دو دقیقه چقدر است؟ $\tau_1 = 0.5$
- (۱) ۶ psig (۲) ۹ psig (۳) ۱0 psig (۴) ۱1 psig

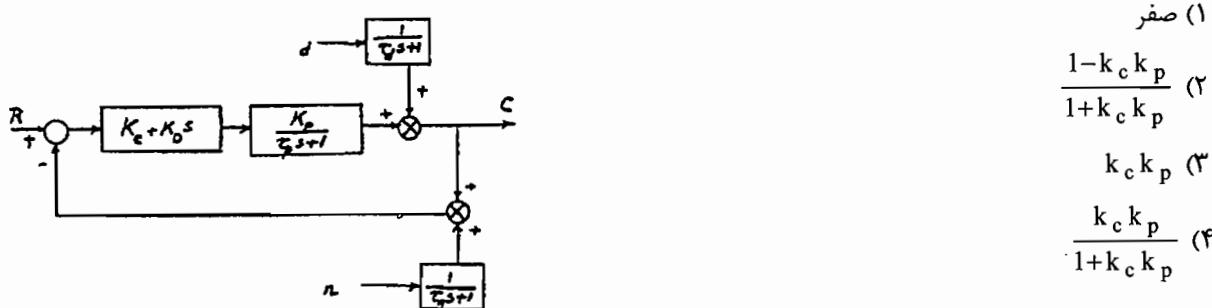
- ۷ - مدار کنترل زیر را در نظر بگیرید. اگر R یک تغییر پله‌ای واحد کند مقدار افت کنترل (offset) چقدر است؟



- ۸ - در سیستم مقابل که در آن c مثبت است، برای پاسخ خروجی به تغییر پله واحد در اغتشاش (d) کدام عبارت صحیح است؟



- ۹ - افت کنترل (offset) سیستم مقابل به ازای یک تغییر پله‌ای واحد در اغتشاش (d) و به طور همزمان ارنویز (n) برابر است با:



- ۱۰ -تابع تبدیل مدار باز سیستمی به این صورت است: $G(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+5)}$ محل تلاقي مکان هندسی ریشه‌های

معادله مشخصه با محور موهومی و شرط پایداری کدام است؟

$$\begin{array}{ll} k < 70, \quad s = \pm 4j & (۲) \\ k < 70, \quad s = \pm \sqrt{10}j & (۴) \\ k < 80, \quad s = \pm \sqrt{10}j & (۱) \\ k < 70, \quad s = \pm 3j & (۳) \end{array}$$

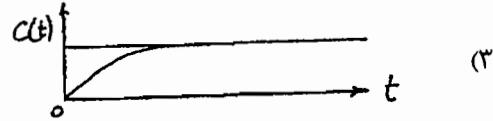
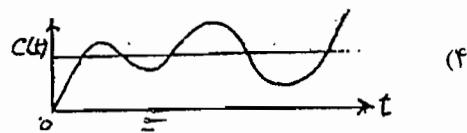
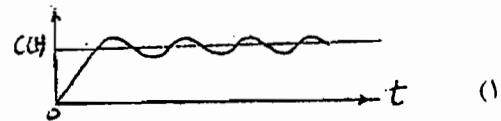
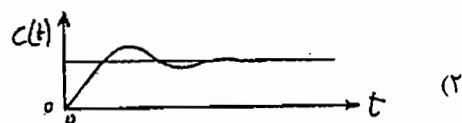
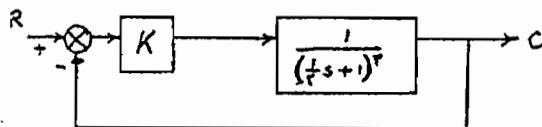
- ۱۱ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به این صورت است: $G(s) = \frac{k}{s(s+3)(s^2+s+1)}$ به ازا چه مقدار از k پاسخ سیستم به

ورودی پله نوسانی دائمی می‌شود؟

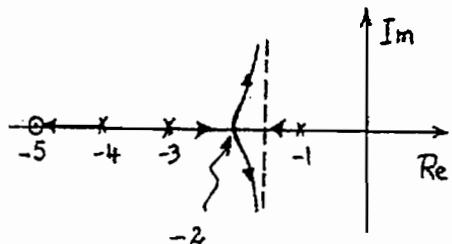
$$\begin{array}{ll} k = \frac{39}{16} & (۴) \\ k = \frac{36}{19} & (۳) \\ k = \frac{9}{36} & (۲) \\ k = \frac{16}{39} & (۱) \end{array}$$

۹۵ مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | نمونه سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۱۲ - پاسخ سیستم ارائه شده به ازای $k=3$ در قبال یک افزایش پله‌ای واحد در R کدام گزینه است؟
۱۶



۱۳ - با استفاده از مکان هندسی ریشه‌های سیستم مدار بسته (در شکل مقابل)، بگویید برای آن که پاسخ پله سیستم، غیرنوسانی باشد حداقل مقدار k چقدر است؟



$$k = \frac{2}{5} \quad (2) \qquad k = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$k = \frac{3}{4} \quad (4) \qquad k = \frac{2}{3} \quad (3)$$

۱۴ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$ است. محل تلاقی مجانب‌ها و زاویه آن‌ها برابر است با:

$$\gamma = -1, \quad \alpha = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{cases} \quad (2)$$

$$\gamma = -2, \quad \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\gamma = -1, \quad \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases} \quad (4)$$

$$\gamma = 0, \quad \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases} \quad (3)$$

۱۵ - اگر تابع انتقال مدار باز یک سیستم به صورت $G(s) = \frac{4(s+2)}{(s+1)(s^2+4s+4)}$ باشد، در فرکانس $4\frac{\text{rad}}{\text{min}}$ ، شیب (مجانب)

دیاگرام Bode کدام است؟

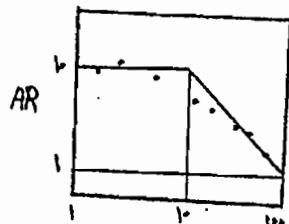
-1 (۴)

-2 (۳)

-3 (۲)

(۱) صفر

۱۶ - با توجه به نمودار Bode ارائه شده، اطلاعات کدام گزینه در موارد ثابت زمانی (τ_d) و تاخیر زمانی (τ_d) به طور کامل درست است؟



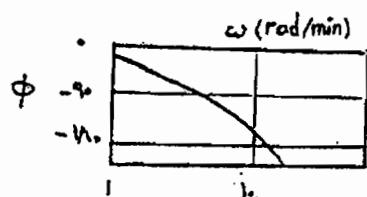
(۱) ثانیه $\tau_d > 0$ ، $\tau=6$

(۲) ثانیه $\tau_d = 0$ ، $\tau=6$

(۳) دقیقه $\tau_d > 0$ ، $\tau=10$

(۴) دقیقه $\tau_d = 0$ ، $\tau=10$

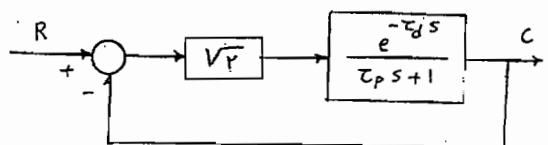
۱۷ - تابع انتقال یک فرآیند به صورت $\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{9e^{-\frac{\pi s}{2}}}{4s+3}$ می‌باشد، اگر ورودی فرآیند به صورت $x(t) = \sin\left(\frac{3t}{4}\right)$ باشد، پاسخ ماندگار خروجی عبارت است از:



$$-\sin\left(\frac{3t}{4}\right) \quad (۲) \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{3t}{4}\right) \quad (۱)$$

$$\frac{3}{2} \sin\left(\frac{3t}{4}\right) \quad (۴) \quad \frac{3}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{3t}{4}\right) \quad (۳)$$

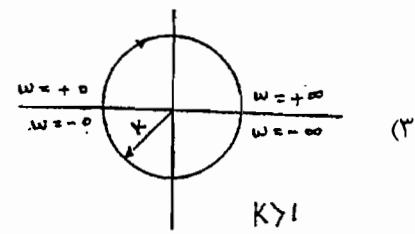
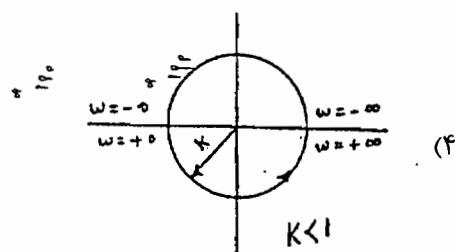
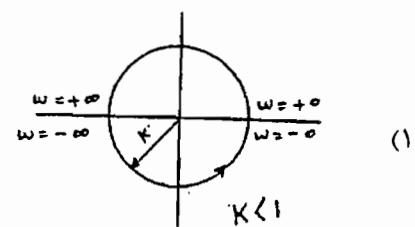
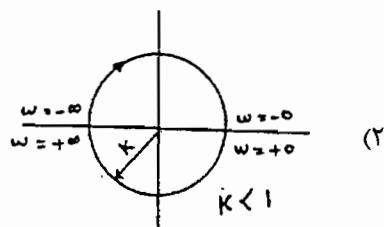
۱۸ - در مدار روبرو، حد پایداری مدار بسته به ازاچه مقداری از $\frac{\tau_d}{\tau_p}$ حاصل می‌شود؟



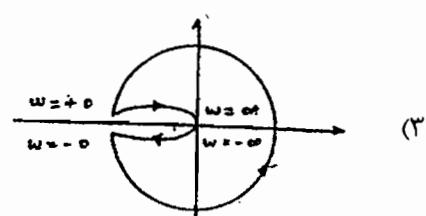
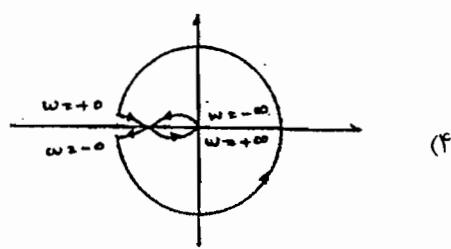
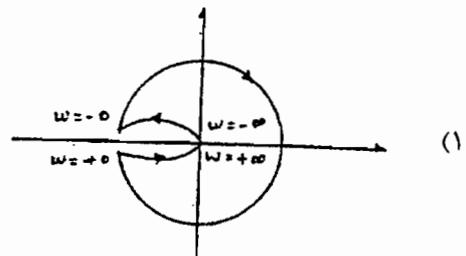
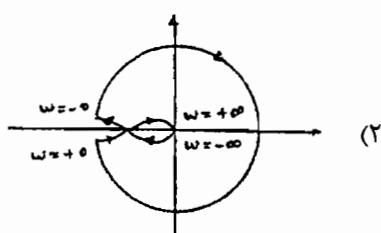
$$\frac{\pi}{2} \quad (۲) \quad \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۴) \quad \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \quad (۳)$$

۱۹ - منحنی نایکویست و شرط پایداری برای سیستم کنترل با تابع انتقال مدار باز $G(s) = \frac{k(1-s)}{s+1}$ کدام گزینه است؟



۲۰ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(0.1s+1)}$ است. نمودار نایکویست آن کدام است؟



۷-۴- پاسخ سؤالات کنترل آزمون ۸۴

۱ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همچنان که گفته شد در سیستم‌های متوالی تحت هیچ شرایطی پاسخ نوسانی نخواهد شد و همواره $\zeta > 1$ است.

۲ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$q_1 C_3 + q_2 C_4 = q_3 C_5$$

$$C_5 = \frac{q_1}{q_3} C_3 + \frac{q_2}{q_3} C_4$$

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{1}{\tau_1 S + 1}, \quad \frac{C_4}{C_2} = \frac{1}{\tau_2 S + 1}$$

در نتیجه:

$$C_5 = \frac{\frac{q_1}{q_3}}{\tau_1 S + 1} C_1 + \frac{\frac{q_2}{q_3}}{\tau_2 S + 1} C_2$$

۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{مقدار اولیه} = \lim_{S \rightarrow \infty} G(s) \times \frac{1}{S} = \frac{K(\zeta S + 1)}{\tau S + 1} = \frac{K\zeta}{\tau}$$

$$\text{مقدار نهایی} = \lim_{S \rightarrow 0} G(s) \times \frac{1}{S} \times S = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{K(\zeta S + 1)}{\tau S + 1} = K$$

برای آن که مقدار اولیه بزرگ‌تر از مقدار نهایی باشد:

$$\frac{K\zeta}{\tau} > K \rightarrow \zeta > \tau$$

۴ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

نکته: حداقل سرعت حداقل نوسان معادل $\zeta = 1$ است.

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{1}{S(S+a)}}{1 + \frac{1}{S(S+a)}} = \frac{1}{S^2 + aS + 1}$$

$$\tau^2 = 1 \rightarrow \tau = 1$$

$$2\zeta\tau = a \rightarrow 2 \times 1 \times 1 = a \rightarrow a = 2$$

۵ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

نکته: پاسخ ضربه برابر مشتق تابع پله است.

$$y_2(t) = 4t \frac{dy_1}{dt} = 4 \times [3(1+2t)(2)e^{-2t} - 3(2)e^{-2t}] = 48te^{-2t}$$

۹۹ مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد

۶ - گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$P(t) = P_s + K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I} t \right) \rightarrow P(t) = 5 + 1 \left(1 + \frac{1}{0.5} t \right)$$

$$P(2) = 5 + \left(1 + \frac{2}{0.5} \right) = 10 \text{ psig}$$

۷ - گزینه ۱ صحیح می باشد.

به علت وجود ترم $\frac{1}{S}$ در بلاک دیاگرام offset = 0 است.

۸ - گزینه ۱ صحیح می باشد.

۹ - گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\text{offset} = SR(s) - SC(s) \quad \text{همواره} \\ S \rightarrow 0 \quad S \rightarrow 0$$

$$R(S) = 0$$

$$\text{offset} = -SC(s) = -S \left[\frac{c}{d} \times d + \frac{c}{n} \times n \right] \\ S \rightarrow 0$$

$$\text{offset} = -S \times \left[\frac{1}{1+K_c K_p} - \frac{K_c K_p}{1+K_c K_p} \right] \times \frac{1}{S} = -\frac{1-K_c K_p}{1+K_c K_p}$$

پاسخ صحیح گزینه ۲ است اما یک علامت منفی کم دارد.

۱۰ - گزینه ۴ صحیح می باشد.

جدول روث را تشکیل می دهیم.

$$1+GH=S(S+2)(S+5)+K$$

$$1+GH=S^3+7S^2+10S+K$$

	1	10
	7	K
	$\frac{70-K}{7}$	
	K	

شرط پایداری:

$$70-K \geq 0 \rightarrow K \leq 70$$

محل تلاقی با محور مراهمی:

$$\text{خط ام} \leftarrow \text{خط ۱} \leftarrow 7S^2 + 70 = 0 \Rightarrow S = \pm i\sqrt{10}$$

۱۱ - گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$1+GH=S(S+3)(S^2+S+1)+K=S^4+4S^3+4S^2+3S+K$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 4 & K \\
 & 4 & 3 & \\
 \hline
 & \frac{13}{4} & K & \\
 & \frac{39-16K}{13} & & \\
 \hline
 & K & &
 \end{array}$$

نوسان دائم زمانی است که ریشه‌ها موهومی با جز حقیقی صفر باشند یعنی همان محل تلاقی مکان با محور موهومی:
 $n=0 \rightarrow 39-16k=0$

$$K = \frac{39}{16}$$

۱۲ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.
 تابع سیستم مدار بسته برابر است با:

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{\left(\frac{1}{2}s+1\right)^2 + K} = \frac{3}{\frac{1}{4}s^2 + s + 4} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}s^2 + \frac{1}{4}s + 1}$$

$$\tau^2 = \frac{1}{16} \rightarrow \tau = \frac{1}{4}$$

$$2\zeta\tau = \frac{1}{4} \rightarrow \zeta = \frac{1}{2} \rightarrow$$

پاسخ سیستم نوسانی با دامنه کاهنده با زمان است.

۱۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
 تا نقطه $s=-2$ روی محور موهومی پاسخ غیرنوسانی است.

$$1+GH=1+\frac{K(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$(s+1)(s+3)(s+4) + K(s+5) = 0$$

$$(-2+1)(-2+3)(-2+4) + K(-2+5) = 0$$

$$K = \frac{2}{3}$$

۱۴ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\gamma = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m} = \frac{[0-2-1+i-1-i]-[-1]}{4-1}$$

$$\gamma = -1$$

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)}{4-1} = \frac{(2k+1)}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

۱۵ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
 با محاسبه فرکانس‌های گوشه $\omega=1, 2, 3$ و رسم دیاگرام Bode می‌توان فهمید در $\omega=4$ شب مجذب برابر ۲ است.

۱۰۱ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۱۶ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\omega = \frac{1}{\tau} = 10 \rightarrow \tau = \frac{1}{10} \text{ min} = 6 \text{ sec}$$

$$\text{if } -90 < \phi < 0 \rightarrow \tau_d = 0$$

$$\text{if } \phi < -90 \rightarrow \tau_d > 0$$

۱۷ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega) = \frac{9e^{-\frac{\pi i \omega}{3}}}{4\omega i + 3}$$

$$AR = \frac{9 \times 1}{\sqrt{16W^2 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{16 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 9}} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi = -\frac{\pi\omega}{3} - \tan^{-1}\left(\frac{40}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\right)$$

$$y(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{3t}{4}\right)$$

۱۸ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

از روش gain margin استفاده می‌کنیم:

$$\phi = -180 = -\pi$$

$$-\tau_d \omega - \tan^{-1} \omega \tau_p = -\pi$$

$$\omega \tau_d + \tan^{-1} \omega \tau_p = \pi \quad (1)$$

$$AR = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}} \rightarrow g.M = \frac{1}{AR} = \frac{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{در حد پایداری} \rightarrow gM = 1 \rightarrow \sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\tau_p^2 \omega^2 + 1 = 2 \rightarrow \tau_p \omega = 1 \quad (2)$$

جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱) نتیجه می‌دهد:

$$\omega \tau_d + \tan^{-1} 1 = \pi \rightarrow \omega \tau_d + \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$\omega \tau_d = \frac{3\pi}{4} \quad (3)$$

از تقسیم معادله (۳) بر معادله (۲) داریم:

$$\frac{\tau_d}{\tau_p} = \frac{3\pi}{4}$$

۱۹ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$AR = \frac{K\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2}} = K \rightarrow \text{بنابراین دیاگرام نایکوپست دایره‌ای به شعاع } K \text{ است.}$$

$$\phi = \tan^{-1}(-\omega) - \tan^{-1}\omega \rightarrow \begin{cases} \omega=0 & \rightarrow \phi=0 \\ \omega=\infty & \rightarrow \phi=-\pi \end{cases}$$

$GM > 1$, $AR < 1 \rightarrow K < 2$: شرط پایداری

۲۰ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

وجود S^n در مخرج موجب ایجاد $(-180)^n$ اختلاف زاویه بین $\omega=0^-$, $\omega=0^+$ می‌شود:

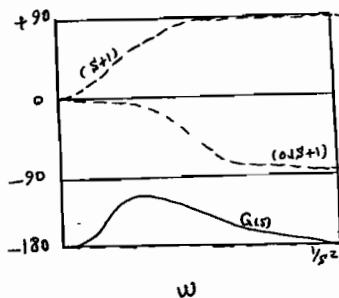
$$n=2 \rightarrow \text{اختلاف زاویه} = 2(-180) = -360$$

$$\phi = \tan^{-1}(\omega) - \pi - \tan^{-1}(0.1\omega) \rightarrow \begin{cases} \omega=0 & \rightarrow \phi=-\pi \\ \omega=\infty & \rightarrow \phi=-\pi \end{cases}$$

$$AR = \frac{K\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2\sqrt{(0.1\omega)^2+1}} \rightarrow \begin{cases} \omega=0 & \rightarrow AR=\infty \\ \omega=\infty & \rightarrow AR=0 \end{cases}$$

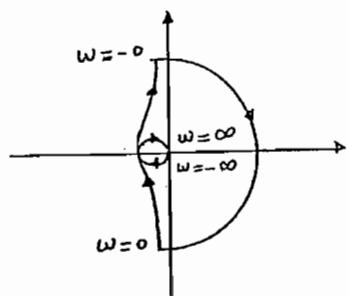
اما در مورد روند زاویه باید دیاگرام Bode, ϕ رسم شود:

مالحظه می‌شود که ϕ از -180° شروع شده و به 90° ختم می‌شود اما روند تغییرات زاویه مطابق شکل زیر است.



۷-۵- سؤالات آزمون سال ۸۵

۱ - نمودار نایکوییست سیستمی به صورت زیر است تابع تبدیل مدار باز آن برابر است با:



$$G(s) = \frac{k}{s^2(\tau s + 1)} \quad (1)$$

$$G(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1)}{s(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \quad (2)$$

$$G(s) = \frac{k}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (3)$$

$$G(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \quad (4)$$

۲ - مقدار حاشیه فاز (Phase Margin) سیستم کنترلی با تابع انتقال مدار باز $GH(s) = \frac{2e^{-\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi s}}{s+1}$ بر حسب درجه برابر است با:

60 (۴)

45 (۳)

40 (۲)

30 (۱)

۳ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $GH(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$ است. حاشیه بیهوده سیستم برابر است با:

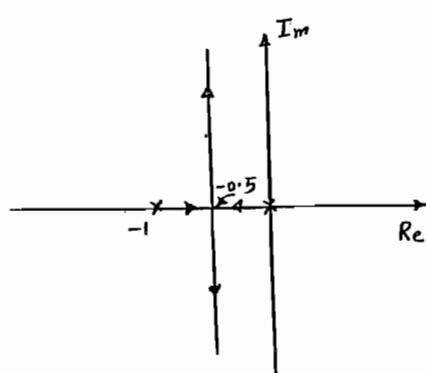
2 (۴)

1.5 (۳)

1 (۲)

0.5 (۱)

۴ - مکان هندسی ریشه‌های سیستم با مدار باز $GH(s) = \frac{2k_c}{s(s+1)}$ مطابق شکل زیر است. k_c مربوطه، جهت داشتن کدام است؟



0.25 (۱)

0.5 (۲)

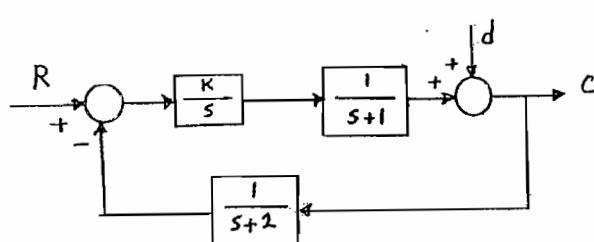
1 (۳)

1.25 (۴)

۵ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $GH(s) = \frac{k(s+1)(s+3)}{s(s-1)(s+2)}$ است. کدام عبارت صحیح است؟

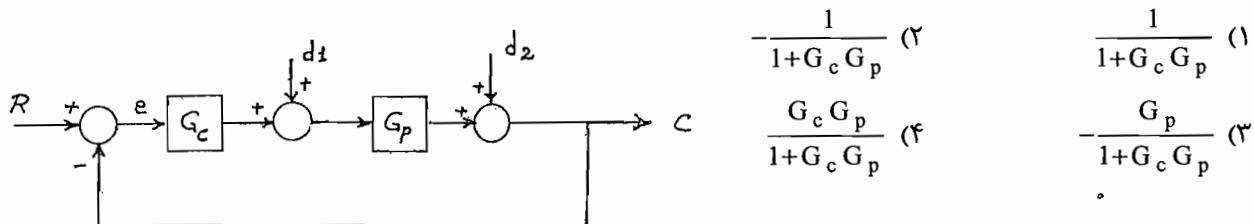
- (۱) سیستم همواره پایدار است.
- (۲) سیستم همواره ناپایدار است.
- (۳) سیستم در برهه‌های کم ناپایدار و در برهه‌های بالا پایدار است.
- (۴) سیستم در برهه‌های کم پایدار و در برهه‌های بالا ناپایدار است.

۶ - سیستم مدار بسته زیر را در نظر بگیرید. به ازای چه مقداری از k ، وقتی اغتشاش (d) تغییر پیدا کند، خروجی در آستانه (c) ناپایدار قرار می‌گیرد؟



$$\begin{array}{ll} k=2 & (2) \\ k=6 & (4) \\ k=3 & (3) \end{array}$$

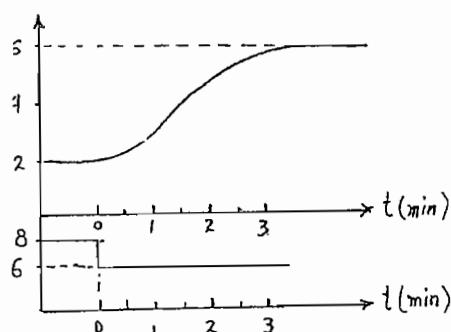
۷ - در نمودار جعبه‌ای زیر، تابع تبدیل مدار بسته بین بار d_2 و خطا $\left(\frac{e(s)}{d_2(s)} \right)$ عبارت است از:



$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{1+G_c G_p} & (2) \\ \frac{G_c G_p}{1+G_c G_p} & (4) \\ -\frac{G_p}{1+G_c G_p} & (3) \end{array}$$

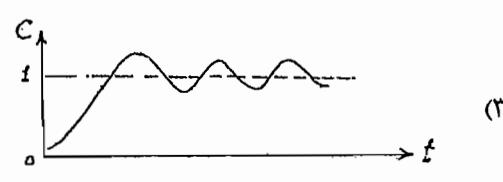
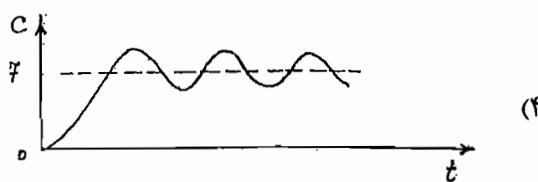
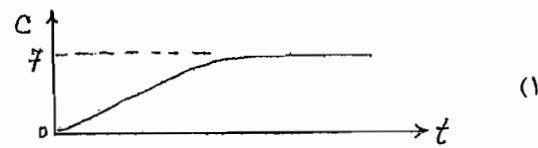
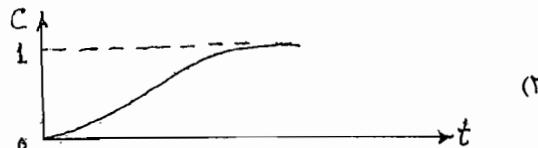
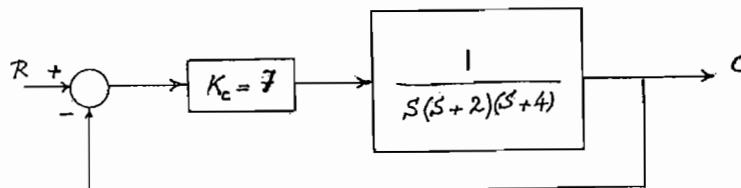
۸ - پاسخ مدار باز یک فرآیند به یک ورودی پله‌ای مانند شکل زیر است. با در نظر گرفتن یک مدل درجه اول به صورت $\frac{K_p \tau_d s}{\tau_p s + 1}$

برای این فرآیند مقادیر τ_d , k_p و τ_p عبارت است از:

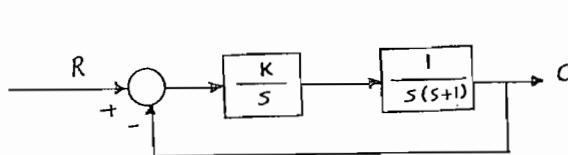


$$\begin{array}{ll} \tau_p = 3, \tau_d = 0, k_p = -1 & (1) \\ \tau_p = 2.5, \tau_d = 0.5, k_p = 2 & (2) \\ \tau_p = 2.5, \tau_d = 0, k_p = 3 & (3) \\ \tau_p = 2, \tau_d = 0.5, k_p = -2 & (4) \end{array}$$

۹ - پاسخ پله‌ای واحد سیستم کنترلی زیر عبارت است از:



۱۰ - در مدار زیر اگر $R(t)$ یک تغییر خطی به صورت $R(t) = t$ کند مقدار افت کنترل (Offset) چقدر است؟



- ۱) صفر (۲)
 $\frac{1}{k}$ (۴)
 $\frac{1}{1+k}$ (۳)
 $\frac{2}{k}$ (۵)

۱۱ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $GH(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ است. این سیستم را با یک سیستم درجه دو که بهره حالت یکنواخت آن با سیستم فوق برابر است تقریب می‌زنیم. تابع تبدیل سیستم تقریب زده برابر است با:

$$G(s) = \frac{20}{(s+2)(s+10)} \quad (۲)$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (۱)$$

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} \quad (۴)$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad (۳)$$

۱۲ - واکنش زنجیره‌ای کاتالیستی مرتبه اول $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ در یک راکتور ناپیوسته همدماهی ایده‌آل با حجم واحد انجام می‌شود. چنان‌چه محلول اولیه تنها شامل A با غلظت C_{A0} باشد تابع انتقال راکتور عبارت است از:

$$C_A(s) = \frac{C_{A0}}{s + k_2} \quad (۲)$$

$$C_A(s) = \frac{C_{A0}}{s + k_1} \quad (۱)$$

$$C_A(s) = \frac{k_1 C_{A0}}{(s + k_1)(s + k_2)} \quad (۴)$$

$$C_A(s) = \frac{k_2 C_{A0}}{(s + k_1)(s + k_2)} \quad (۳)$$

۱۳ - یک مخزن اختلاط، با حجم 200 lit با شدت حجمی ورودی ثابت $50 \frac{\text{lit}}{\text{min}}$ عمل می‌نماید. اگر غلظت ورودی از مقدار ثابت

۵۰ به طور ناگهانی $100 \frac{\text{gr}}{\text{lit}}$ گردد، غلظت داخل مخزن بعد از 4 دقیقه چقدر خواهد بود؟

$$81.5 \frac{\text{gr}}{\text{lit}} \quad (4)$$

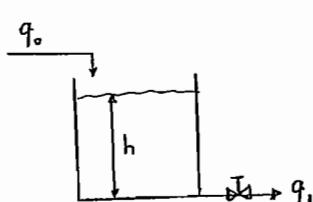
$$68.5 \frac{\text{gr}}{\text{lit}} \quad (3)$$

$$31.5 \frac{\text{gr}}{\text{lit}} \quad (2)$$

$$18.5 \frac{\text{gr}}{\text{lit}} \quad (1)$$

۱۴ - در سیستم سطح مایع زیر مقادیر یکنواخت $h_s = q_{0s} = 10$ می‌باشد. اگر در لحظه $t=0^+$ ، شدت جریان ورودی را سریعاً نصف کنیم و در همان حال نگهداشیم، آن‌گاه نحوه تغییر ارتفاع به چه صورت است؟ مقادیر مقاومت شیر و سطح مقطع در

$$R = 0.2, A = 10, q_1 = \frac{h}{R}$$



$$e^{-\frac{t}{2}} \quad (2) \quad -e^{-t} \quad (1)$$

$$1 - e^{-\frac{t}{2}} \quad (4) \quad 1 - e^{-t} \quad (3)$$

۱۵ - در یک کنترلر PID، خروجی از کنترلر به ازای خطای ورودی $E(t) = t$ برابر است با: $C(t) = 2 + t + t^2$. پارامترهای کنترلر

(k_c, τ_1, τ_D) کدام است؟

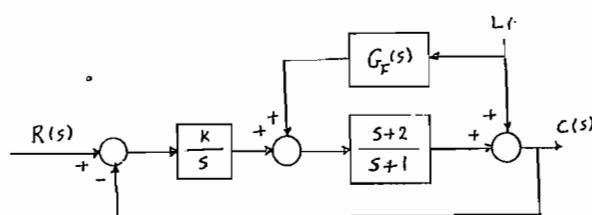
$$(2, 0.5, 1) \quad (4)$$

$$(1, 0.5, 2) \quad (3)$$

$$(1, 2, 0.5) \quad (2)$$

$$(0.5, 1, 2) \quad (1)$$

۱۶ - در سیستم نشان داده شده در شکل زیر برای آن‌که اثر بار $L(s)$ بر خروجی $C(s)$ حذف شود، تابع $G_F(s)$ باید برابر باشد با:



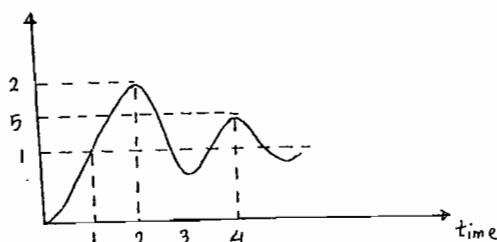
$$G_F(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad (2)$$

$$G_F(s) = -\frac{k}{s+1} \quad (1)$$

$$G_F(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad (4)$$

$$G_F(s) = -\frac{s+1}{s+2} \quad (3)$$

۱۷ - پاسخ پله‌ای واحد یک سیستم درجه دوم به صورت زیر رسم شده است، به ترتیب زمان تأخیر (Rise Time)، زمان پیک (Peak Time) نسبت فرا رفت (Over shoot) و نسبت میرایی (Decay Ratio) کدام است؟



$$3, 2, 1, 0.5 \quad (2)$$

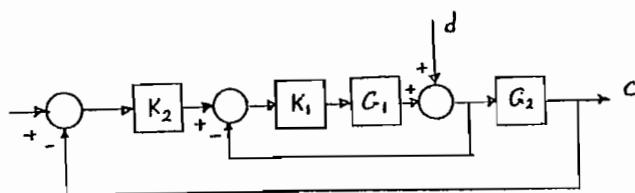
$$0.5, 1, 2, 1 \quad (1)$$

$$1.5, 2, 4, 1 \quad (4)$$

$$1, 2, 0.5, 1 \quad (3)$$

۱۰۷ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۱۸ - برای سیستم کنترلی زیر پاسخ خروجی c به تغییر پله و واحد در اغتشاش d ، عبارت است از:



$$\frac{G_2}{s(1+K_1G_1+K_1K_2G_1G_2)} \quad (1)$$

$$\frac{G_1G_2}{s(1+K_1G_1+K_2G)} \quad (2)$$

$$\frac{G_1}{s(1+K_1K_2G_1G_2+K_2G_2)} \quad (3)$$

$$\frac{G_1G_2}{s(1+K_1K_2G_1G_2)} \quad (4)$$

۱۹ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $GH(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)^2}$ است. نقطه جدایی مکان ریشه‌های معادله مشخصه برابر است با:

$$S=-4 \quad (4)$$

$$S=-3.5 \quad (3)$$

$$S=-3 \quad (2)$$

$$S=-2.5 \quad (1)$$

۲۰ - معادله مشخصه سیستمی به صورت زیر است، کدام عبارت صحیح است؟ $s^4+s^2+s+6=0$

(۱) سیستم همواره پایدار است.

(۲) سیستم فقط یک ریشه ناپایدار کننده دارد.

(۳) سیستم دارای سه ریشه ناپایدار کننده است.

۷- ۶- پاسخ سؤالات آزمون ۸۵

۱ - گزینه ۳ صحیح می باشد.

$\omega=0$ مطابق شکل $\phi=-90$

$\omega=\infty$ مطابق شکل $\phi=-270$

۲ - گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$AR = 1 = \frac{2 \times 1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \rightarrow \omega = \sqrt{3}$$

$$\phi = \left\{ -\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi \times \sqrt{3} \right\} - \left\{ \tan^{-1}\sqrt{3} \right\} = -\frac{12\pi}{27} - \tan^{-1}\sqrt{3} = -80 - 60 = -140$$

$$\text{Phase Margin} = \phi - (-180) = -140 + 180 = 40$$

۳ - گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\phi = -180 = -90 - 2 \tan^{-1} \omega \rightarrow \omega = 1$$

$$AR = \frac{1}{1 \times (\sqrt{1+1})^2} = \frac{1}{2}$$

$$GM = \frac{1}{AR} = 2$$

۴ - گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$S(S+1) + 2K_c = S^2 + S + 2K_c = \frac{1}{2K_c}S^2 + \frac{1}{2K_c}S + 1$$

با مقایسه با فرم استاندارد سیستم درجه دوم داریم:

$$\tau^2 = \frac{1}{2K_c}, \quad 2\xi\tau = \frac{1}{2K_c}$$

در نتیجه:

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{2K_c}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow K_c = \frac{1}{4}$$

۵ - گزینه ۴ صحیح می باشد.

با تشکیل $1 + GH = 0$ و استفاده از آزمون روث داریم:

$$S(S-1)(S+2) + K(S+1)(S+3) = 0$$

$$S^3 + (K+1)S^2 + (4K-2)S + 3K = 0$$

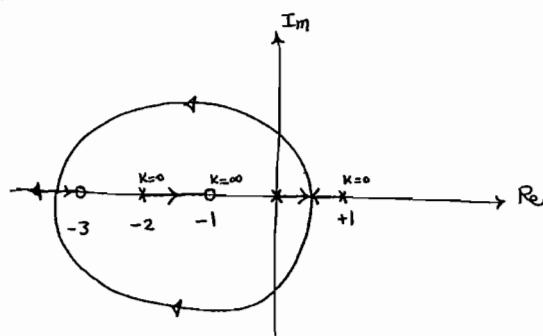
۱۰۹ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد

$$\begin{array}{cc} 1 & 4K-2 \\ K+1 & 3K \\ \frac{4K^2-K-2}{K+1} & \longrightarrow \\ 3K & \end{array}$$

که در $K < \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ عدد منفی است، بنابراین در بهره‌های کم ناپایدار و در بهره‌های زیاد پایدار است.

راه حل دوم:

اگر در رسم مکان هندسی دارای تسلط و سرعت عمل کافی باشیم می‌توانیم به کمک مکان این کار را انجام دهیم:



که ملاحظه می‌شود در بهره‌های کم سیستم ناپایدار است ولی در بهره‌های زیاد پایدار است.

۶ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با تشکیل $1+GH=0$ و آزمون روث داریم:

$$1 + \frac{K}{S(S+1)(S+2)} = 0 \Rightarrow (S+1)(S+2) + K = 0$$

$$S^3 + 3S^2 + 2S + K = 0$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & K \\ \frac{6-K}{3} & \longrightarrow \\ 6-K=0 & \rightarrow K=6 \end{array}$$

۷ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$R - C = e$$

چون R تغییر نمی‌کند پس $R=0$ است در نتیجه:

$$-C = e \rightarrow \frac{e}{d_2} = -\frac{c}{d_2}$$

$$\frac{c}{d_2} = \frac{1}{1+G_c G_p} \rightarrow \frac{e}{d_2} = -\frac{1}{1+G_c G_p}$$

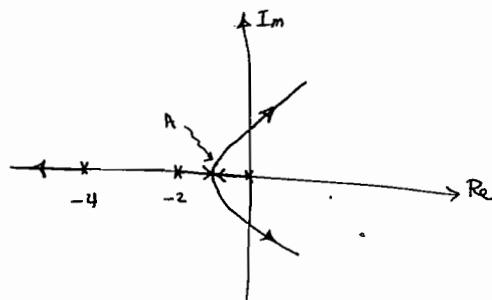
۸ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\left. \begin{array}{l} AK_p = 6 - 2 = 4 \\ \text{مقدار نهایی تابع} \\ A = 6 - 8 = -2 \\ \text{مقدار تغییر در ورودی} \end{array} \right\} \rightarrow K_p = -2$$

۹ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$= SC(s) = S \times R(s) \times \frac{C}{R} = S \times \frac{1}{S} \times \frac{\frac{7}{8S}}{1 + \frac{7}{8S}} = 1$$

اما نوسانی یا غیر نوسانی بودن پاسخ بستگی به موهومی یا غیر موهومی بودن ریشه‌های تابع مدار بسته دارد با رسم مکان داریم:



نقطه A همان مرز نوسانی شده است که S_A از حل معادله زیر بدست می‌آید.

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S+2} + \frac{1}{S+4} = 0 \rightarrow S_A = -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

با قرار دادن S_A در معادله مشخصه سیستم مقدار K_c مرز نوسان بدست می‌آید.

$$S(S+2)(S+4) + K_c = 0 \rightarrow K_c = 2.66$$

چون K_c داده شده $(K_c = 7)$ بزرگ‌تر از 2.66 است پس ریشه‌های مدار بسته موهومی است. پس پاسخ نوسانی است.

۱۰ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{offset} = SR(s) \left[1 - \frac{C}{R} \right] = S \times \frac{1}{S^2} \left[1 - \frac{\frac{K}{S^2}}{1 + \frac{K}{S^2}} \right] = \frac{1}{S} \left[1 - \frac{K}{S^2 + K} \right] = \frac{1}{S} \cdot \frac{S^2}{S^2 + K} = \frac{S}{S^2 + K} = 0$$

۱۱ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

جمله $(S+10)e^{-10t}$ می‌کند که به سرعت با زمان از بین می‌رود. K هم باید برابر یک باشد.

۱۲ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$in - out + gen = acc$$

$$0 - 0 - V(K_1 C_A) = V \frac{dC_A}{dt}$$

۱۱۱ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

$$-K_1 C_A = \frac{dC_A}{dt}$$

با لاپلاس گیری از معادله فوق و با توجه به این که $C_A(0) = C_{A0}$ لذا:

$$-K_1 C_A(s) = S C_A(s) - C_{A0}$$

$$C_A(s) = \frac{C_{A0}}{S + K_1}$$

۱۳ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{C_A(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad \tau = \frac{V}{q} = \frac{200}{50} = 4 \text{ min}$$

$$C_{Ai}(t) = (100 - 50)u(t) \rightarrow C_{Ai}(s) = \frac{50}{s}$$

$$C_A(s) = \frac{50}{s} \cdot \frac{1}{4s+1} \rightarrow C_A(t) = 50 \left[1 - e^{-\frac{t}{4}} \right]$$

$$C_A(4) = 50 \left[1 - e^{-1} \right] = 31.5 \frac{\text{gr}}{\text{lit}}$$

غلظت فوق یک متغیر انحرافی است، لذا مقدار واقعی غلظت برابر است با:

$$C_A(4) = 31.5 + 50 = 81.5 \frac{\text{gr}}{\text{lit}}$$

۱۴ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{H(s)}{Q_0(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} = \frac{0.2}{0.2 \times 10 s + 1} = \frac{0.2}{2s + 1}$$

$$Q_0(s) = -\frac{5}{s} \rightarrow H(s) = -\frac{5 \times 0.2}{s(2s + 1)}$$

$$H(t) = -\left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \right] \rightarrow H(t) = h_s - \left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \right]$$

$$h(t) = e^{-\frac{t}{2}}$$

۱۵ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\frac{P(s)}{E(s)} = K_c \left[1 + \tau_D s + \frac{1}{\tau_I s} \right]$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow P(s) = K_c \left[\frac{1}{s^2} + \frac{\tau_D}{s} + \frac{1}{\tau_I s^3} \right]$$

$$P(t) = K_c \left[t + \tau_D + \frac{t^2}{2\tau_I} \right] = K_c \tau_D + K_c t + \frac{K_c}{2\tau_I} t^2$$

با مقایسه با جواب $(2 + t + t^2)$ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} K_c \tau_D = 2 \\ K_c = 1 \\ \frac{K_c}{2\tau_I} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow K_c = 1, \tau_I = \frac{1}{2}, \tau_D = 2$$

۱۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$LG_F \times \frac{S+2}{S+1} + L = 0 \rightarrow G_F(s) = -\frac{S+1}{S+2}$$

۱۷ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

Rise Time = 1

Peak Time = 2

$$\text{Over shoot} = \frac{2-1}{1} = 1$$

$$\text{Decay Ratio} = \frac{1.5-1}{2-1} = 0.5$$

۱۸ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در این حالت چون $\frac{c}{d}$ را می‌خواهیم، لذا $R=0$ فرض می‌شود:

$$\left[\left\{ [0-C]K_2 - \frac{C}{G_2} \right\} K_1 G_1 + d \right] G_2 = C$$

با تقسیم طرفین بر d نسبت $\frac{c}{d}$ به دست می‌آید:

$$\frac{c}{d} = \frac{G_2}{1 + K_1 K_2 G_1 G_2 + K_1 G_1}, \quad d(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{G_2}{s(1 + K_1 G_1 + K_1 K_2 G_1 G_2)}$$

۱۹ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{1}{S+2} = \frac{1}{S+1} + \frac{1}{S+1} \rightarrow \frac{1}{S+2} = \frac{2}{S+1}$$

$$S+1 = 2S+4 \rightarrow S = -3$$

۲۰ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

جدول روث را تشکیل می‌دهیم ملاحظه می‌شود که دو ریشه ناپایدار کننده داریم، چون در ستون اول دوبار تغییر علامت داریم:

1	1	
1	6	
5		
6		

۷-۲- سوالات آزمون ۸۶

۱ - در چه شرایطی، مقدار اولیه پاسخ پله‌ای سیستم زیر مساوی مقدار نهایی آن می‌شود؟

$$G(s) = k \frac{(s+\alpha)(s+\beta)}{s^2 + 2s + 1}$$

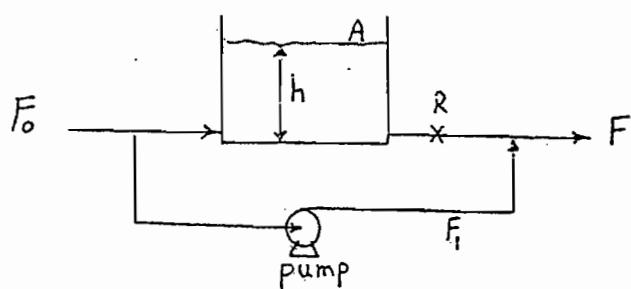
$\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (۴)

$\alpha + \beta = 1$ (۳)

$\frac{\alpha}{\beta} = 1$ (۲)

$\alpha\beta = 1$ (۱)

۲ - تابع انتقال سیستم زیر عبارت است از ($\tau = AR$ ، دبی F_1 ثابت است)



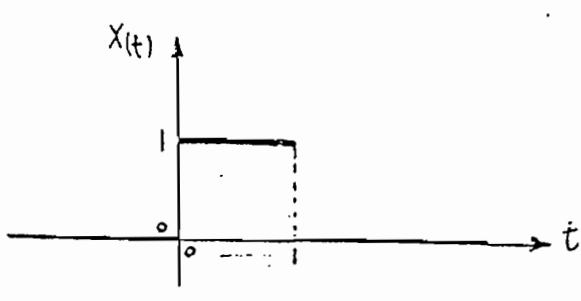
$$\frac{H(s)}{\bar{F}_0(s)} = \frac{R + \frac{F_1}{\tau}}{\tau s + 1} \quad (1)$$

$$\frac{\bar{F}(s) - F_1}{\bar{F}_0(s) - F_1} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2)$$

$$\frac{H(s)}{\bar{F}_0(s)} = \frac{R}{\tau s + R} \quad (3)$$

$$\frac{\bar{F}(s)}{\bar{F}_0(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (4)$$

۳ - اگر به یک سیستمی با تابع انتقال $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+1}$ ورودی زیر اعمال گردد، مقدار پاسخ سیستم در لحظه $t=2$ چند است؟



$\frac{2}{e}$ (۱)

$\frac{1}{e^2}$ (۲)

$\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$ (۳)

$\frac{2}{e} - \frac{2}{e^2}$ (۴)

$$GH(s) = \frac{K \left(\frac{1}{2}s + 1 \right)}{(s+1)^2 (0.1s+1)}$$

۴ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

شیب مجانب‌های نمودار Bode در $\omega = 5$ برابر کدام است؟

+1 (۴)

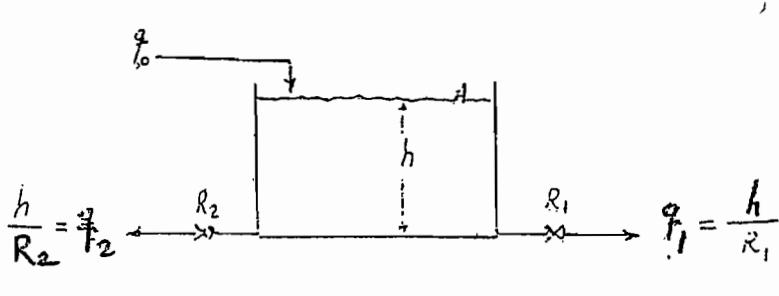
(۳) صفر

-1 (۲)

-2 (۱)

۵ - در تانک زیر که حاوی یک سیال تراکم ناپذیر می باشد، در صورت خطی بودن شیرهای موجود بر روی جریان های خروجی، ثابت

: $R_1, R_2 = q_0, q_1, q_2$ و مقاومت شیرها



$$\tau = \frac{AR_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1)$$

$$\tau = A(R_1 + R_2) \quad (2)$$

$$\tau = 2A(R_1 + R_2) \quad (3)$$

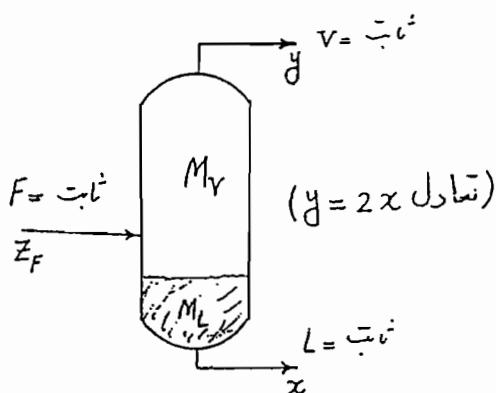
$$\tau = \frac{A(R_1 + R_2)}{2} \quad (4)$$

۶ - مخلوط دو جزئی A و B (A جزء فرارتر) در یک ظرف جدا سازی تعادلی به دو محصول بخار و مایع تقسیم می شود.تابع تبدیل

مربوط به تغییرات کسر مولی جزء فرارتر (X(s)) در محصول مایع نسبت به تغییرات کسر مولی جزء فرارتر در خوراک

(Z_F(s)) عبارت است از: (مول های گاز داخل ظرف) ناچیز = M_L، (مول های مایع داخل ظرف) ثابت = M_F، رابطه تعادلی:

$y = 2x$ و $L = V, F$: دبی مولی می باشند)



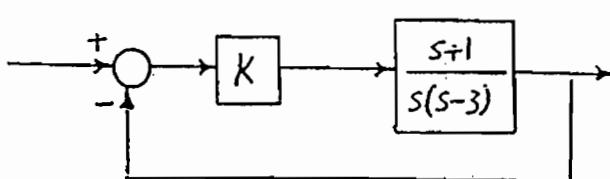
$$\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{F}{M_L s + L} \quad (1)$$

$$\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{F}{M_L s + 2V + L} \quad (2)$$

$$\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{2V}{M_L s + F} \quad (3)$$

$$\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{L + V}{M_L s + F} \quad (4)$$

۷ - در سیستم مدار باز ناپایدار زیر، جهت پایدارسازی سیستم، مقدار k چقدر باشد تا قطب های مدار بسته برابر ۲ و ۵ گردند؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۵ (۳)

۱۰ (۴)

$$GH(s) = \frac{k}{s^2(s+2)} \quad k > 0$$

۸ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است؟

اگر γ محل تلاقی مجذوب های مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه باشد کدام گزینه صحیح است؟

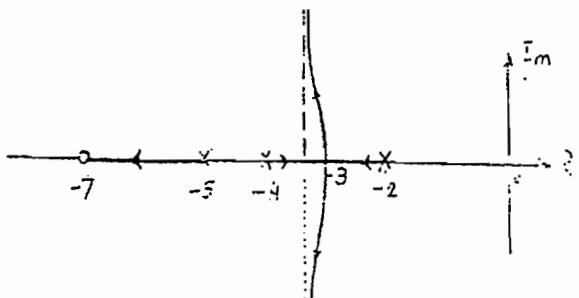
$$1) \gamma = -\frac{2}{3} \text{ و سیستم در بهره های کم پایدار است.}$$

$$2) \gamma = -\frac{1}{3} \text{ و سیستم همواره ناپایدار است.}$$

$$3) \gamma = -\frac{2}{3} \text{ و سیستم همواره پایدار است.}$$

۱۱۵ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۹ - مکان هندسی ریشه های یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است. برای آن که پاسخ پله سیستم، غیرنوسانی باشد، حداقل مقادیر k چقدر است؟



۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{1}{4}$

$$GH(s) = \frac{2(s+3)}{s(s-1)}$$

۱۰ -تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

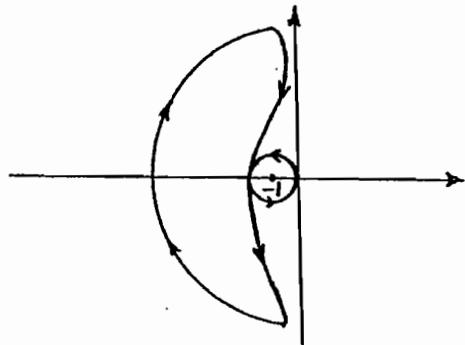
نمودار نایکوئیست (Nyquist) طبق شکل مقابل است. کدام عبارت صحیح است؟

۱) سیستم پایدار است.

۲) سیستم ناپایدار است و یک ریشه ناپایدار گشته دارد.

۳) سیستم ناپایدار است و دو ریشه ناپایدار گشته دارد.

۴) سیستم در مرز ناپایداری است.



$$GH(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$

۱۱ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

زاویه فاز (ϕ) و نسبت دامنه ها (AR) در پاسخ فرکانسی برابر است با:

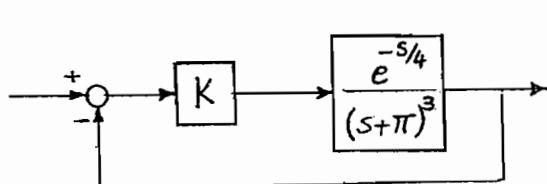
$$AR = \frac{K\sqrt{\omega^2 + 9}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{3} + \tan^{-1} \omega - \frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$AR = \frac{3K\sqrt{\omega^2 + 9}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{3} + \tan^{-1} \omega - \frac{3\pi}{2} \quad (۱)$$

$$AR = \frac{K\sqrt{\omega^2 + 9}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{3} + \tan^{-1} \omega - \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$AR = \frac{K\sqrt{\omega^2 + 9}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{3} + \tan^{-1} \omega - \frac{3\pi}{2} \quad (۳)$$

۱۲ - در سیستم مدار بسته زیر با $\omega_{c0} = \pi$ برای داشتن حاشیه بفرم (Gain Margin) برابر ۲ داریم:



$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ (۲)

2π (۴)

$\sqrt{2}\pi$ (۱)

π (۳)

۱۳ - پاسخ پله‌ای واحد یک سیستم کنترل به صورت $y(t) = 3 - 3e^{-t} + e^{-\frac{t}{3}}$ است. مقدار نهایی پاسخ این سیستم به یک ورودی ضربه ناگهانی (Impulse) به اندازه ۳ واحد برابر است با:

(۴) صفر

۲ $\frac{2}{3}$ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

۱۴ - معادله مشخصه سیستمی به صورت زیر است:

$$S^4 + S^3 + 2S^2 + 2S + 3 = 0$$

کدام عبارت صحیح است؟

۱) سیستم همواره پایدار است.

۱) سیستم دارای سه ریشه ناپایدار کننده است.

۴) سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

۳) سیستم دارای یک ریشه ناپایدار کننده است.

۱۵ - پاسخ یک PID به ازای ورودی خطای پله‌ای به بزرگی ۷، به صورت زیر درآمده است:

$$P(t) = 3 + 21(1+t)u(t) + 42\tau_D\delta(t)$$

پارامترهای کنترلر کدامند؟

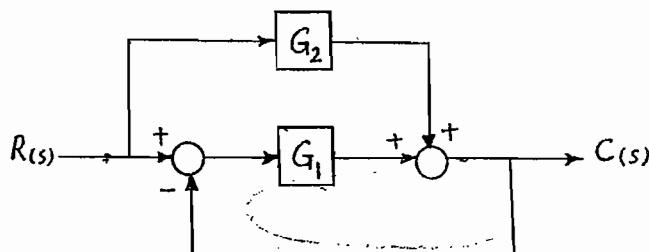
$$\tau_D = 6, \quad \tau_I = \frac{1}{3}, \quad K_c = 3 \quad (۱)$$

$$\tau_D = 2, \quad \tau_I = 1, \quad K_c = 3 \quad (۲)$$

$$\tau_D = 6, \quad \tau_I = \frac{1}{3}, \quad K_c = 21 \quad (۳)$$

$$\tau_D = 2, \quad \tau_I = 1, \quad K_c = 21 \quad (۴)$$

۱۶ - نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید:

تابع تبدیل بین $C(s)$ و $R(s)$ برابر است با:

$$G(s) = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1} \quad (۱)$$

$$G(s) = \frac{G_1 - G_2}{1 + G_1} \quad (۲)$$

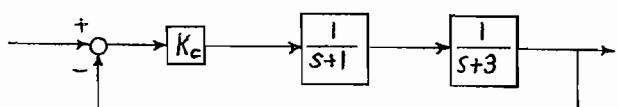
$$G(s) = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 G_2} \quad (۳)$$

$$G(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1} \quad (۴)$$

۱۷ - برای چه مقادیری از بهره کنترل کننده، پاسخ سیستم مدار بسته زیر غیرنوسانی است؟

$$K_c \leq 1 \quad (۱)$$

$$K_c \leq 3 \quad (۲)$$

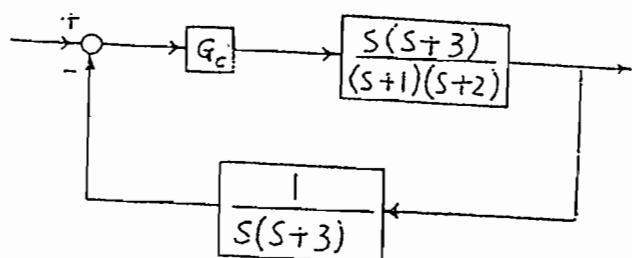


۳) همواره غیرنوسانی است چون دو سیستم تحت کنترل غیرتداخلی هستند.

۴) همواره نوسانی است چون دو سیستم تحت کنترل غیرتداخلی هستند.

۱۱۷ مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد

۱۸ - آفت کنترل (OFFSET) ناشی از پاسخ پله‌ای واحد سیستم کنترل زیر شامل یک کنترل کننده تناسبی (P) برابر است با:



(۱) بستگی به مقدار برداشت (GAIN) کنترل کننده دارد.

(۲) آفت کنترل کننده ندارد.

۱ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۴)

۱۹ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

$$GH(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3}$$

نقطه جدایی مکان هندسی برابر است با:

$$s = -3 - \sqrt{3} \quad (۴)$$

$$s = -2\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$s = -2 - \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$s = -1 - \sqrt{3} \quad (۱)$$

۲۰ - دمای سیالی تراکم‌ناپذیر پس از خروج از تانک و عبور از شیر کنترل در فاصله 10 متری توسط یک ترموموکوپل اندازه‌گیری

می‌شود. در صورتی که حداکثر دبی عبوری از شیر کنترل $0.01 \frac{\text{lit}}{\text{min}}$ و حداقل آن $1 \frac{\text{lit}}{\text{min}}$ باشد، حداقل و حداکثر ثابت زمانی ترم

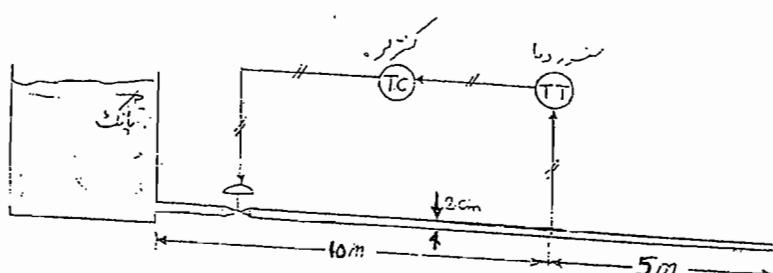
تا خیر انتقالی برابر است (جریان داخل لوله را قالبی plug flow در نظر بگیرید).

۱) ۰ تا 10 دقیقه

۲) 0.318 تا 0.003 دقیقه

۳) 314 تا 3.14 دقیقه

۴) 470 تا 4.7 دقیقه



۷-۸- پاسخ سوالات آزمون ۸۶

۱ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$x(s) = \frac{1}{s} \rightarrow y(s) = \frac{k(s+\alpha)(s+\beta)}{s(s^2 + 2s + 1)}$$

$$\text{حد } Sy(s) = \text{حد } Sy(s)$$

$$s \rightarrow 0 \quad s \rightarrow \infty$$

$$K\alpha\beta = K \rightarrow \alpha\beta = 1$$

۲ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

موازن جرم را برای مخزن می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (F_0 - F_1) - \frac{h}{R} = A \frac{dh}{dt} \\ (F_{0s} - F_{1s}) - \frac{h_s}{R} = 0 \end{cases}$$

با استفاده از متغیرهای انحرافی $\bar{F}_0 = F_0 - F_{0s}$ ، $H = h - h_s$ و با توجه به معادلات فوق داریم:

$$(F_0 - F_{0s}) - (F_1 - F_{1s}) - \frac{h - h_s}{R} = A \frac{d(h - h_s)}{dt}$$

استفاده از پمپ باعث ثابت ماندن دبی جریان F_1 می‌شود لذا $F_1 = F_s$ خواهد شد بنابراین:

$$\bar{F}_0 - \frac{H}{R} = A \frac{dH}{dt}$$

با مقایسه معادله دیفرانسیل فوق با سیستم استاندارد درجه اول یا به کمک تبدیلات لاپلاس داریم:

$$\frac{H(s)}{\bar{F}_0(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} , \quad \tau = RA$$

از طرفی چون $\bar{F}(s) = \frac{H(s)}{R}$ است لذا $F = \frac{h}{R} + F_1$ است (کماکان $F_1 = F_{1s}$ است):

$$\frac{\bar{F}(s)}{\bar{F}_0(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

نکته: چون جریان F_1 توسط پمپ انجام می‌شود لذا مقدار آن همواره ثابت بوده و در نوشتن موازن جرم در قالب متغیرهای انحرافی تاثیری ندارد لذا می‌توان از روابط سیستم درجه اول سطح مایع نیز استفاده نموده و به نتایج فوق دست یافت.

۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

(با توجه به شکل سوال)

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{s(s+1)} e^{-s}$$

۱۱۹ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

$$Y(t) = L^{-1} y(s) = \left[1 - e^{-t} \right] - \left[1 - e^{-(t-1)} \right]$$

$$Y(t) = e^{-(t-1)} - e^{-t}$$

$$Y(2) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$$

نکته: در هنگام گرفتن لایپلاس معکوس می‌توان از روابط پاسخ سیستم درجه اول به ورودی پله‌ای استفاده نمود.

۴ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

ابتدا فرکانس‌های شکست را یافته و صعودی مرتب می‌کنیم:

$$(S+1) \rightarrow \omega=1$$

$$\left(\frac{1}{2}S+1\right) \rightarrow \omega=2$$

$$(0.1S+1) \rightarrow \omega=10$$

لذا شیب مجانب Bode در فاصله $\omega=0$ تا $\omega=\infty$ به قرار زیر خواهد بود:

$$0 < \omega < 1 \rightarrow \text{شیب} = 0$$

$$1 < \omega < 2 \rightarrow \text{شیب} = -2$$

$$2 < \omega < 10 \rightarrow \text{شیب} = 0$$

$$10 < \omega < \infty \rightarrow \text{شیب} = -1$$

بنابراین در $\omega=5$ شیب برابر صفر خواهد بود.

۵ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با نوشتن بیلان برای مخزن داریم:

$$q_0 - \frac{h}{R_1} - \frac{h}{R_2} = A \frac{dh}{dt}$$

$$q_0 - \frac{h}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = A \frac{dh}{dt}$$

با مقایسه با فرم استاندارد سیستم درجه اول داریم:

$$\tau = A \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

۶ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با نوشتن موازنۀ جرم جزء فرار داریم:

$$FZ_F - Vy - Lx = M_L \frac{dx}{dt}$$

با جایگزینی رابطه تعادلی $y = 2x$ خواهیم داشت:

$$FZ_F - (L + 2V)x = M_L \frac{dx}{dt}$$

با مقایسه معادله فوق با فرم استاندارد سیستم درجه اول خواهیم داشت:

$$\tau = \frac{M_L}{L + 2V} \quad K = \frac{F}{L + 2V}$$

بنابراین:

$$\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{\frac{F}{L+2V}}{\frac{M_L}{L+2V}s+1} = \frac{F}{M_L s + L + 2V}$$

۷ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

قطب‌های سیستم مدار بسته همان ریشه‌های مخرج تابع انتقال سیستم مدار بسته هستند.

$= 1 + GH$ مخرج تابع انتقال مدار بسته

$$= 1 + \frac{K(s+1)}{s(s-3)}$$

$$s(s-3) + K(s+1) = 0$$

با قرار دادن $s = -2$ یا $s = -5$ در معادله فوق $K = 10$ به دست می‌آید.

۸ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\gamma = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m} = \frac{(0+0+(-2))}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

پایداری این سیستم را به کمک آزمون روث می‌توان بررسی نمود:

$$1 + GH = s^2(s+2) + K$$

$$1 + GH = s^3 + 2s^2 + 0s + K$$

ملحوظه می‌شود به ازای جمیع مقادیر K یک عنصر منفی در ستون اول جدول روث داریم لذا این سیستم همواره ناپایدار است.

	1	0	
	2	k	
	$-\frac{K}{2}$		
	k		

۹ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

حداکثر مقدار K مربوط به نقطه $s = -3$ است. چرا که از این نقطه به بعد ریشه‌های مکان هندسی موهومی شده و لذا رفتار نوسانی خواهد داشت. بنابراین برای محاسبه K کافی است $s = -3$ در معادله مشخصه $1 + GH = 0$ قرار داده شود:

$$1 + \frac{K(s+7)}{(s+2)(s+4)(s+5)} = 0$$

$$(s+2)(s+4)(s+5) + K(s+7) = 0$$

$$(-3+2)(-3+4)(-3+5) + K(-3+7) = 0$$

$$K = \frac{1}{2}$$

۱۰ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$P = 1$ عدد قطب‌های مدار باز که در سمت راست محور موهومی قرار دارند.

$N = -1$ عدد دفعاتی که مکان نقطه $(-1, 0)$ را دور می‌زند (در جهت عقربه‌های ساعت)

۱۲۱ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

سیستم پایدار است $Z = N + P = -1 + 1 = 0 \rightarrow$ عدد ریشه‌های ناپایدار کننده

۱۱ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$GH(i\omega) = \frac{K(i\omega + 3)}{i\omega(i\omega - 1)}$$

$$\phi = \left\{ 0 + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) \right\} - \left\{ \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-1}\right) + \pi \right\}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) + \tan^{-1}\omega - \frac{3\pi}{2}$$

$$AR = \frac{K\sqrt{\omega^2 + 9}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

نکته: زاویه $S - 1$ برابر $\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-1}\right) + \pi$ است.

۱۲ - هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

$$\text{gain margin} = \frac{1}{AR \Big|_{\text{when } \phi = -\pi}}$$

$$AR = \frac{K \times 1}{\left(\sqrt{\omega^2 + \pi^2}\right)^3} = \frac{K}{\left(\pi\sqrt{2}\right)^3}$$

$$2 = \frac{1}{\frac{K}{\left(\pi\sqrt{2}\right)^3}} \rightarrow K = \frac{\left(\pi\sqrt{2}\right)^3}{2} = \sqrt{2} \pi^3$$

۱۳ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$y_2 \text{ پاسخ به ورودی ضربانی به اندازه ۳ واحد}$$

$$y_2(t) = 3 \times \left(0 + 3e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right)$$

$$y_2(\infty) = 0$$

۱۴ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

از آزمون روث استفاده می‌کنیم:

	1	2	3
1	2		
0	3		

چون در ستون اول سطر سوم صفر ظاهر شده برای آن که تشکیل جدول روث را بتوان ادامه داد بایستی صفر را با a (عدد بسیار کوچک مثبت) جایگزین کنیم.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & 2 & \\ \hline a & & 3 & \\ \hline 2a-3 & & & \\ \hline a & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

$\frac{2a-3}{a} = -\infty$
حد
 $a \rightarrow 0^+$

بنابراین در ستون اول جدول روث دوبار تغییر علامت داریم و لذا دو ریشه ناپایدار کننده خواهیم داشت.

۱۵ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در صورت این سوال یک اشتباه وجود دارد. τ_D درتابع $P(t)$ ظاهر شده در حالی که τ بایستی از حل این سوال به دست آید. برای حل سوال ابتدا فرم کلی تابع انتقال کنترلر PID را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{P(S)}{E(S)} = K_c \left(1 + \tau_D S + \frac{1}{\tau_I S} \right)$$

$$E(S) = \frac{7}{S}$$

$$P(S) = \frac{7K_c}{S} \left(1 + \tau_D S + \frac{1}{\tau_I S} \right)$$

با گرفتن لاپلاس معکوس از معادله فوق داریم:

$$P(t) = P_s + 7K_c u(t) + 7K_c \tau_D \delta(t) + \frac{7K_c}{\tau_I} t u(t)$$

$$P(t) = P_s + \left(1 + \frac{t}{\tau_I} \right) (7K_c) u(t) + 7K_c \tau_D \delta(t)$$

با مقایسه معادله فوق با معادله $P(t) = 3 + 21(1+t)u(t) + 42\delta(t)$ داریم:

$$P_s = 3$$

$$7K_c = 21 \rightarrow K_c = 3$$

$$\frac{1}{\tau_I} = 1 \rightarrow \tau_I = 1$$

$$7K_c \tau_D = 42 \rightarrow \tau_D = 2$$

که همان گزینه ۳ پاسخ صحیح خواهد بود. البته به شرطی که از صورت مسئله τ حذف شود.

۱۶ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$(R - C)G_1 + RG_2 = C$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1}$$

۱۷ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۲۳ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

$$1 + GH = 1 + \frac{K_c}{(S+1)(S+3)} = 0$$

$$(S+1)(S+3) + K_c = 0$$

$$S^2 + 4S + 3 + K_c = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(3 + K_c)$$

$$\Delta = 4(1 - K_c)$$

برای داشتن پاسخ غیرنوسانی بایستی ریشه‌ها حقیقی بوده و لذا $\Delta > 0$ باشد.

۱۸ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{offset} = SR(s) \left[1 - \frac{C}{R} \right]$$

$$S \rightarrow 0$$

$$= S \times \frac{1}{S} \left[1 - \frac{K_c \frac{S \times 3}{1 \times 2}}{1 + K_c \frac{S \times 3}{1 \times 2} \times \frac{1}{S \times 3}} \right] = 1$$

$$S \rightarrow 0$$

۱۹ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$GH = \frac{K(S+2)}{S^2 + 2S + 3}$$

$$1 + GH = 0 \rightarrow K = -\frac{S^2 + 2S + 3}{S + 2}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \rightarrow -\left[\frac{(2s+2)(s+2) - 1 \times (s^2 + 2s + 3)}{(s+2)^2} \right] = 0$$

$$s^2 + 4s + 1 = 0 \rightarrow s = -2 \pm i\sqrt{3}$$

۲۰ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\tau_d = \frac{V_{\text{pipe}}}{q} = \frac{\left(\frac{\pi D^2}{4} L \right)}{q}$$

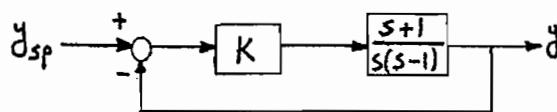
$$\tau_{d,\min} = \frac{\pi \times (0.02)^2 \times 10}{4 \times 1 \times 10^{-3}} = \pi = 3.14$$

$$\tau_{d,\max} = \frac{\pi \times (0.02)^2 \times 10}{4 \times 0.01 \times 10^{-3}} = 100\pi = 314$$

۸۷-۹-سوالات آزمون

۱ - یک فرآیند با تابع انتقال $\frac{S+1}{S(S-1)}$ در نظر بگیرید. برای کنترل آن از یک کنترلر تناسبی استفاده می‌کنیم. برای این‌که حتماً

یکی از قطب‌های مدار بسته (در آرایش پسخور منفی) در -3 قرار بگیرد، مقدار بهره کنترلر (K) چه باشد؟



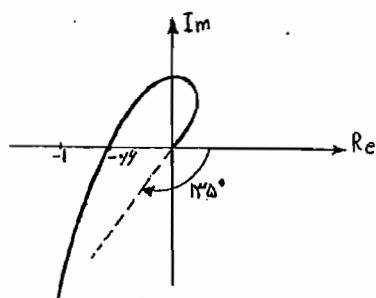
$$K = 2 \quad (2)$$

$$K = 1 \quad (1)$$

$$K = 6 \quad (4)$$

$$K = 3 \quad (3)$$

۲ - دیاگرام نایکوئیست برای یک سیستم کنترل مطابق شکل زیر می‌باشد، مقدار حاشیه فاز و حاشیه بهره به ترتیب عبارتند از:



$$\frac{5}{2}, 45^\circ \quad (2)$$

$$\frac{5}{3}, 45^\circ \quad (1)$$

$$\frac{5}{4}, 30^\circ \quad (4)$$

$$\frac{5}{3}, 30^\circ \quad (3)$$

۳ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s) = \frac{K(s+2)}{(s-1+j)(s-1-j)}$ است با استفاده از نمودار مکان هندسی ریشه‌ها، پاسخ

سیستم به ورودی پله‌ای چگونه است؟

(۱) در تمام بهره‌های نوسانی است.

(۲) در تمام بهره‌ها غیرنوسانی است.

(۳) در بهره‌های پایین غیرنوسانی و در بهره‌های بالا نوسانی است.

(۴) در بهره‌های پایین نوسانی و در بهره‌های بالا غیرنوسانی است.

۴ - پاسخ پله‌ای واحد سیستم درجه یک تاخیری با تابع انتقال $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{e^{-3s}}{s(s+4)}$ کدام است؟

$$0.25(1-e^{-4t+12})u(t-3) \quad (2)$$

$$\left(1-e^{\frac{-t-3}{4}}\right)u(t-3) \quad (1)$$

$$0.25(1-e^{-4t})u(t-3) \quad (4)$$

$$(1-e^{-0.25t})u(t-3) \quad (3)$$

۵ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $GH(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)}$ می‌باشد. با توجه به نمودار مکان هندسی ریشه‌ها کدام

عبارت صحیح است؟

(۲) به ازاء مقادیر بهره، سیستم پایدار است.

(۱) در بهره‌های بالا سیستم ناپایدار می‌گردد.

(۴) به ازاء تمام مقادیر بهره ریشه‌ها حقیقی می‌باشند.

(۳) به ازاء تمام مقادیر بهره، سیستم ناپایدار است.

۱۲۵ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۶ - معادله مشخصه سیستمی به صورت زیر است:

$$S^3 + 0.5S^2 + (3+K)s + K+1 = 0$$

برای آن که پاسخ ماندگار سیستم یک موج پریودیک با فرکانس $\omega = \frac{2\text{rad}}{s}$ باشد باید مقدار K برابر باشد با:

$$K = 2 \quad (۴)$$

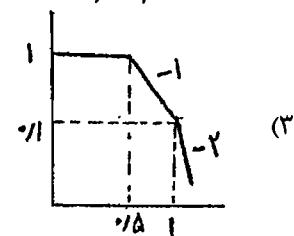
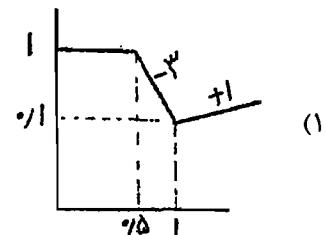
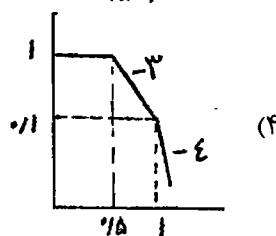
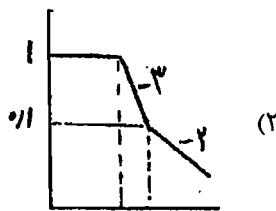
$$K = 1 \quad (۳)$$

$$K = \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$K = \frac{1}{4} \quad (۱)$$

۷ - تابع انتقال مدار باز یک سیستم کنترل به صورت زیر داده شده است. دیاگرام مجانب‌های Bode این سیستم کدام است؟

$$G(s) = \frac{(s-1)e^{-0.4s}}{(2s+1)^3}$$



۸ - در مورد سیستمی با معادله مشخصه $0 + GH = S^4 + 3S^3 + 3S + 6 = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که سیستم:

(۱) دارای یک ریشه ناپایدار کننده است.

(۲) دارای سه ریشه ناپایدار کننده است.

(۳) دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

(۴) پایدار است.

۹ - برای تابع انتقال $\frac{1-e^{-s}}{s}$ مقدار AR و ϕ کدام است؟

$$AR = \sqrt{\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\cos\omega - 1}{\sin\omega} \quad (۲)$$

$$AR = \sqrt{\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2(\cos\omega - 1)}{\sin\omega} \quad (۴)$$

$$AR = \sqrt{\frac{\omega^2}{2(1-\cos\omega)}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sin\omega}{\cos\omega - 1} \quad (۱)$$

$$AR = \sqrt{\frac{\omega}{2(1-\cos\omega)}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\cos\omega - 1}{2\sin\omega} \quad (۳)$$

۱۰ - تابع تبدیل مدار باز سیستمی برابر است با $G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$. اگر از یک کنترلر PI برای کنترل استفاده شود و تابع تبدیل

مسیر برگشت واحد باشد کدام عبارت صحیح است؟

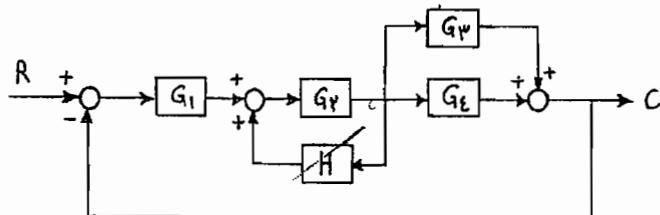
(۱) سیستم مدار بسته همواره ناپایدار است.

(۲) سیستم مدار بسته در بهره‌های کم ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار است.

(۳) سیستم مدار بسته در بهره‌های کم پایدار و در بهره‌های بالا ناپایدار است.

(۴) با انتخاب مناسب K و T می‌توان سیستم مدار بسته را پایدار کرد.

۱۱ - نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید:



تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ برابر است با:

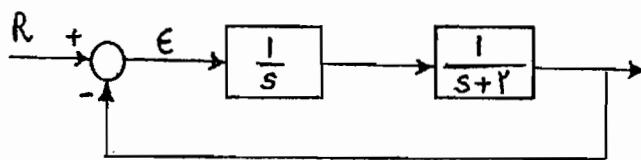
$$\frac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 - G_2 H + G_1 G_2 (G_3 + G_4)} \quad (1)$$

$$\frac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 + G_2 H + G_1 G_2 (G_3 + G_4)} \quad (2)$$

$$\frac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 - G_2 H - G_1 G_2 (G_3 + G_4)} \quad (3)$$

$$\frac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 + G_2 H - G_1 G_2 (G_3 + G_4)} \quad (4)$$

۱۲ - مدار کنترل زیر را در نظر بگیرید:



مطلوبست افت کنترل (off-set), اگر $R(t) = t$ باشد، کدام است؟

$$\text{off-set} = 2 \quad (1)$$

$$\text{off-set} = 1 \quad (2)$$

$$\text{off-set} = 0 \quad (3)$$

$$\text{off-set} = 0.5 \quad (4)$$

۱۳ - اگر توابع انتقال دو سیستم کنترل به صورت $G_1 = \frac{5}{5s^2 + 8s + 5}$ و $G_2 = \frac{10}{10s^2 + 8s + 10}$ باشد، کدام سیستم نسبت به ورودی پله، نوسانی‌تر است؟

(۱) هر دو به یک اندازه نوسانی هستند.

$$G_1 \quad (1)$$

(۴) هیچ کدام نوسانی نیستند.

$$G_2 \quad (3)$$

۱۴ - در چه شرایطی، مقدار اولیه پاسخ به سیستم زیر مساوی مقدار نهایی آن می‌شود؟

$$G(S) = K \frac{(S^2 + \alpha)(S + \beta)}{S^3 + 2S + 1}$$

$$\alpha + \beta = 1 \quad (1)$$

$$\alpha = \beta \quad (2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (3)$$

$$\alpha\beta = 1 \quad (4)$$

۱۵ - تغییرات دمای یک کوره نسبت به میزان سوخت ورودی به آن به صورت $\frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$ است. به ازای افزایش

پلهای در میزان سوخت به میزان $0.1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ دمای کوره از 80°C نهایتاً به 82°C می‌رسد، بهره سیستم چقدر است؟

$$K = 20 \quad (1)$$

$$K = 10 \quad (2)$$

$$K = 1 \quad (3)$$

$$K = 5 \quad (4)$$

۸۷- پاسخ سوالات آزمون

۱- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

قطب‌های مدار بسته همان ریشه‌های مخرج تابع مدار بسته هستند ($1+GH=0$)

$$1+GH=1+\frac{K(s+1)}{S(S-1)}=0$$

$$S(S-1)+K(S+1)=0$$

در معادله فوق قرار داده می‌شود تا K بدست آید.

$$-3(-3-1)+K(-3+1)=0$$

$$K=6$$

۲- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$GM = \frac{1}{AR} \left|_{\text{when } \phi=-180} \right. = \frac{1}{0.6} = \frac{5}{3}$$

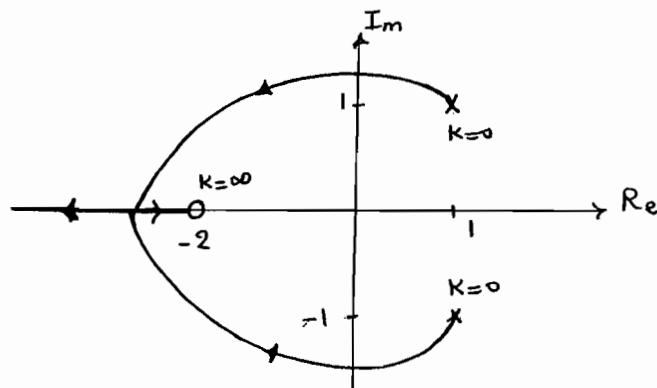
حاشیه بهره

$$PM = \phi_g \left|_{\text{when } AR=1} \right. = -(-180) = -135 - (-180) = 45^\circ$$

حاشیه فاز

۳- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مکان هندسی این سیستم در شکل زیر رسم شده است. با توجه به شکل معلوم است که بهره‌های کم سیستم نوسانی است (ریشه مختلط) و در بهره‌های زیاد غیرنوسانی است (ریشه حقیقی)



۴- هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$X(t)=u(t) \rightarrow X(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{e^{-3s}}{s^2(s+4)}=\left[\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+4}\right]e^{-3s}$$

$$Y(t)=\left[A(t-3)+B+Ce^{-4(t-3)}\right]u(t-3)$$

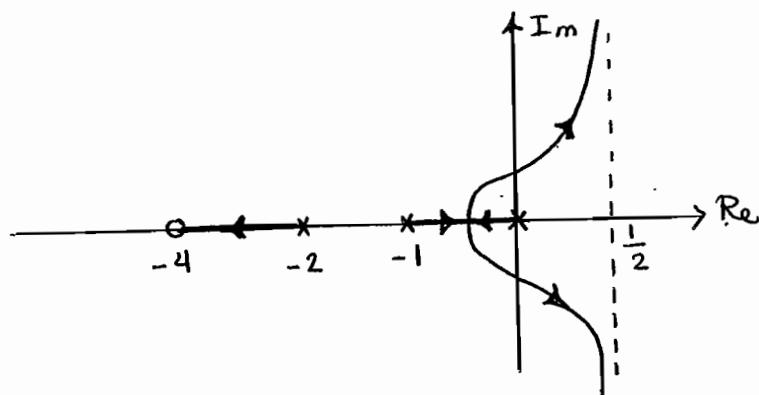
جمله $A(t-3)$ در هیچ کدام از گزینه‌ها وجود ندارد. اگر S از مخرج تابع انتقال در صورت مسئله حذف شود:

$$Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s(s+4)} \rightarrow Y(t) = 0.25 [1 - e^{-4t+12}] u(t-3)$$

که همان گزینه ۲ خواهد بود.

۵ - گزینه ۱ صحیح می باشد.

مکان هندسی این سیستم مطابق شکل زیر است:



$$\gamma = \frac{(0-1-2)-(-4)}{3-1} = \frac{1}{2}$$

با توجه به شکل ملاحظه می شود که در بھره های کم سیستم پایدار و در بھره های بالا ناپایدار است. البته به کمک آزمون روث هم این مسئله قابل حل بود:

$$1 + GH = S(S+1)(S+2) + K(S+4) = 0$$

$$S^3 + 3S^2 + 2S + K(S+4) = S^3 + 3S^2 + (2+K)S + 4K$$

$$\begin{array}{|c c|} \hline & \\ 1 & 2+K \\ 3 & 4K \\ 6-K & \\ \hline & \\ 3 & \\ 4K & \\ \hline \end{array}$$

شرط پایداری:

$$6-K > 0$$

$$4K > 0$$

در نتیجه:

$$0 < K < 6$$

۶ - گزینه ۳ صحیح می باشد.

$S = i\omega = 2i$ را در معادله مشخصه جایگزین می کنیم تا K بدست آید:

$$(2i)^3 + 0.5(2i)^2 + (3+K)(2i) + K + 1 = 0$$

$$(2K-2)i + (K-1) = 0 \rightarrow K = 1$$

۱۲۹ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۷ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

فرکانس‌های شکست به ترتیب زیر هستند:

$$2S+1 \rightarrow \omega = \frac{1}{2}$$

$$S-1 \rightarrow \omega = 1$$

شیب مجانب Bode در فاصله $\omega = 0$ تا $\omega = \infty$ به قرار زیر خواهد بود:

$$0 < \omega < \frac{1}{2} \rightarrow \text{شیب} = 0$$

$$\frac{1}{2} < \omega < 1 \rightarrow \text{شیب} = -3$$

$$1 < \omega < \infty \rightarrow \text{شیب} = -2$$

۸ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$1 + GH = S^4 + 3S^3 + 0S^2 + 3S + 6$$

$$\begin{array}{|r} \hline 1 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & \\ -1 & 6 & \\ 21 & & \\ 6 & & \\ \hline \end{array}$$

این سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است چون در ستون اول جدول روث دوبار تغییر علامت داریم.

۹ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} = \frac{1 - \cos \omega + i \sin \omega}{i\omega}$$

$$G(i\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega} - \frac{(1 - \cos \omega)}{\omega} i$$

$$AR = \sqrt{\left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos \omega}{\omega}\right)^2}$$

$$AR = \sqrt{\frac{2(1 - \cos \omega)}{\omega^2}}$$

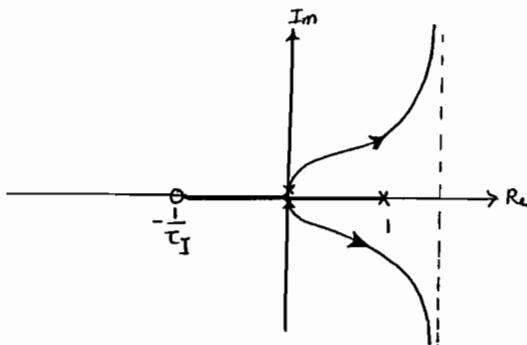
$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{-\left(\frac{1 - \cos \omega}{\omega}\right)}{\frac{\sin \omega}{\omega}} \right]$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\cos \omega - 1}{\sin \omega} \right]$$

۱۰ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$GH = \frac{K \left(1 + \frac{1}{\tau_1 S} \right)}{S(S-1)} = \frac{K(\tau_1 S + 1)}{\tau_1 S^2 (S-1)}$$

پایداری این سیستم هم به کمک مکان هندسی و هم به کمک آزمون روث قابل بررسی است. در شکل زیر مکان هندسی این سیستم رسم شده است:



$$\gamma = \frac{(0+0+1) - \left(\frac{-1}{\tau_1} \right)}{3-1} = \frac{1 + \frac{1}{\tau_1}}{2} > 0$$

ملاحظه می‌شود دو شاخه مکان که از قطب‌های $S=0$ شروع می‌شوند همواره در سمت راست محور موهومی هستند لذا سیستم مدار بسته همواره ناپایدار است.

۱۱ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

G_2 و H با هم یک حلقه فیدبک مثبت تشکیل داده‌اند لذا $G_2 H$ با علامت منفی در مخرج باید باشد. G_1 و G_3 هم با هم یک حلقه فیدبک منفی تشکیل داده‌اند لذا ترم $G_1 G_2 (G_3 + G_4)$ باید با علامت مثبت در معادله ظاهر شود. روش تشریحی:

$$\left[(R-C)G_1 + \frac{C}{G_3 + G_4} H \right] G_2 \times (G_3 + G_4) = 3$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 - G_2 H + G_1 G_2 (G_3 + G_4)}$$

۱۲ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{offset} = S \times \frac{1}{S^2} \left[1 - \frac{\frac{1}{S} \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{S} \times \frac{1}{2}} \right] = 2$$

$S \rightarrow 0$

مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | نمونه سؤالات کنکور

۱۳ - گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$G_2 \begin{cases} \tau_2 = 1 \\ \xi_2 = \frac{4}{10} \end{cases}$$

$$\xi_2 < \xi_1 \rightarrow G_2 \text{ نوسانی تر است.} \quad -\cos t \quad (1)$$

۱۴ - گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$(s) \rightarrow K\alpha\beta = K \rightarrow \alpha\beta = 1$$

$\rightarrow \infty$

$$AK = 82 - 80 \rightarrow AK = 2$$

$$: 0.1 \rightarrow K = 20$$

۱۵ - تابع تبدیل فرآیند

با:

۱۶ - برای سیستم کنترلی د

$$k_c = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$k_c = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$k_c = 1 \quad (3)$$

$$k_c = 2 \quad (4)$$

۱۷ - گزینه ۴ صحیح می باشد.

۱۸ - سیستم کنترلی د

می کند؟

$$k_c > 4 \quad (1)$$

۱۹ - مقدار نهایی پاس

$$\frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{15}{16} \quad (3)$$

۲۰ - کدام یک از سیس

$$G = \frac{1}{2s+1} \quad (1)$$

$$G = \frac{2}{3s+1} \quad (3)$$

۱۳۴ کنترل فرآیند | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۱۳۲ کنترل فرآیند |

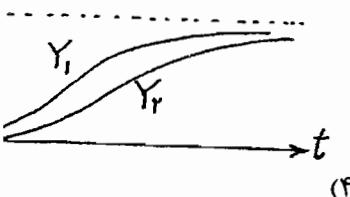
۱۱-۷ سؤالا

۱ - تابع تبدیل مدار

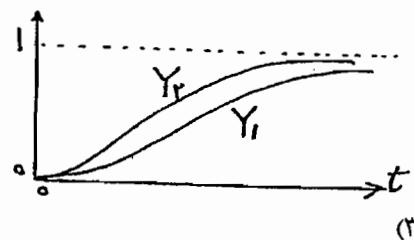
$$(1) \quad Y_1(s) = \frac{1}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad Y_2(s) = \frac{\tau_3 s + 1}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

فرآیند به ورودی پله‌ای واحد در یک مدار پس خور با کنترلر تناسبی باشد؟

(۲)



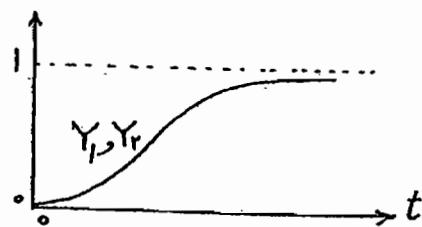
(۴)



(۱)

نمودار نیکوئیست (۱)

→ (۱)



(۳)

→ (۳)

۲ - معادله مشخصه

برای آنکه پاسخ ماند

k=3 (۱)

۱۱ - تابع انتقال مدار بسته یک سیستم پس خور واحد منفی بصورت $\frac{(s+2)^2}{1-(s+2)^2}$ می‌باشد. تابع انتقال مدار با

$$(4) \quad \frac{1-2(s+2)^2}{(s+2)^2}$$

$$(3) \quad \frac{(s+2)^2}{1-2(s+2)^2}$$

$$(2) \quad \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$(1) \quad (s+2)^2$$

۳ - به یک سیستم

$$y(t)|_{t=1} = 0 \quad (1)$$

$$y(t)|_{t=1} = 1 \quad (2)$$

$$|_{t=1} = e-1 \quad (3)$$

$$t=1 = 1-e^{-1} \quad (4)$$

۴ - تابع تبدیل مدار

با استفاده از مکان ه:

(۱) به ازاء تمام به

(۲) در بهره‌های پا

(۳) در بهره‌های پا

(۴) به ازاء تمام به

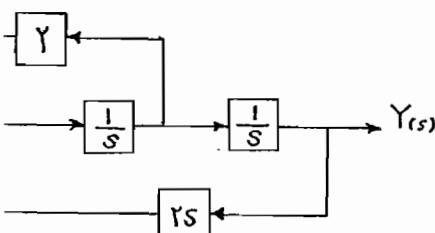
۱۳ - در نمودار جعبه‌ای نشان داده شده، تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{X(s)}$ عبارتست از:

$$\frac{1}{s^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{s} \quad (1)$$

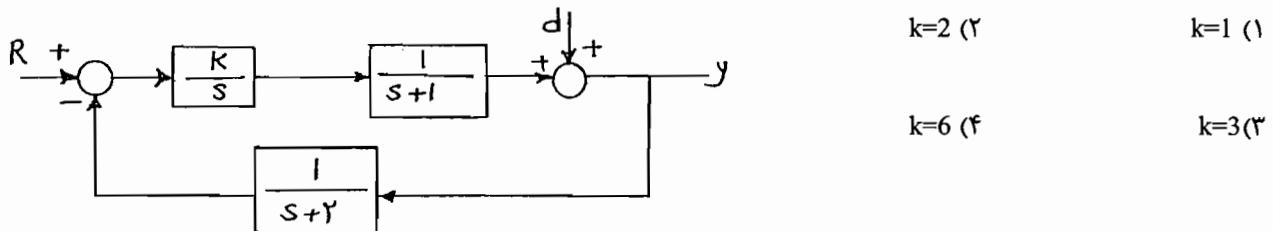
$$\frac{1}{s+1} \quad (4)$$

$$\frac{1}{s^3} \quad (3)$$



۱۳۵ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۱۴ - سیستم مدار بسته زیر را در نظر بگیرید. به ازای چه مقداری از k , وقتی اغتشاش (d) تغییر پله‌ای کند، خروجی (y) در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد؟



۱۵ -تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

$$G(s) = k \frac{(s+1)e^{-2s}}{s^2 + 1}$$

زاویه فاز این سیستم در پاسخ فرکانسی برای $\omega > 1$ برابر است با:

$$\phi = -\tan^{-1} \omega + 2\omega + \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\phi = \tan^{-1} \omega - 2\omega - \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\phi = \tan^{-1} \omega - 2\omega - \pi \quad (4)$$

$$\phi = \tan^{-1} \omega - 2\omega - \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

۷-۱۲- پاسخ سؤالات کنترل آزمون سراسری ۱۳۸۸

۱ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{w}{2}\right) - \left[\tan^{-1} w + \pi + \tan^{-1}\left(\frac{w}{-1}\right)\right]$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{w}{2}\right) - \pi$$

$$w = 0 \rightarrow \phi = -\pi$$

$$w = \infty \rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$$

ملاحظه می‌شود وقتی w از صفر تا ∞ تغییر می‌کند زاویه دیاگرام تایکویست از $-\pi$ تا $-\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند. لذا گزینه ۲ صحیح است.

۲ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در معادله مشخصه $s = 3i$ را قرار می‌دهیم:

$$(3i)^3 + (3i)^2 + k(3i) + k = 0$$

$$(-27 + 3k)i + (k - 9) = 0$$

$$k = 9$$

۳ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$X(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1)$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} e^{-2s} - \frac{1}{s^2(s+1)} e^{-3s}$$

$$Y(t) = [(t-2)-1+e^{-(t-2)}]u(t-2) - [(t-3)-1+e^{-(t-3)}]u(t-3)$$

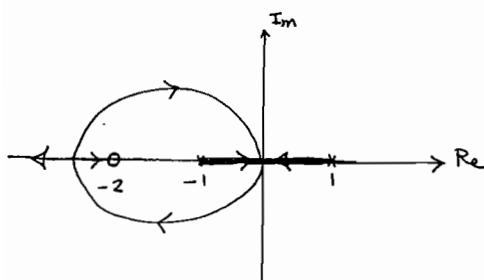
$$Y(1) = 0$$

روش ساده:

چون در تابع انتقال e^{-2s} داریم لذا پاسخ در $u(t-2)$ ضرب خواهد شد. مقدار $u(t-2)$ در لحظه $t=1$ (که کوچکتر از ۲ است) برابر صفر خواهد شد.

۴ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به شکل روی رو معلوم است که در بهره‌های پایین ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار است. البته از آزمون روش هم می‌توانستیم استفاده کنیم:

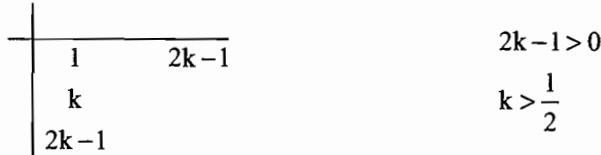


$$1 + GH = (S^2 - 1) + K(S + 2)$$

$$1 + GH = S^2 + KS + (2K - 1)$$

۱۳۷ | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

شرط پایداری:



لذا در بهره‌های بالا پایدار و در بهره‌های پایین ناپایدار است.

۵ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$AR = \frac{\sqrt{2} \times 1}{\sqrt{W^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}} = 1$$

$$\phi = \left\{ 0 - \frac{\pi}{4} W \right\} - \left\{ \tan^{-1} W \right\} = -\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = 1 \times \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$$

۶ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$PM = 45 = \phi_g - (-180) \rightarrow \phi_g = -135$$

$$-135 = \{0\} - \left\{ 3 \tan^{-1} w \right\} \rightarrow w = 1$$

$$AR = 1 = \frac{K}{(\sqrt{\omega^2 + 1})^3} \rightarrow \frac{K}{(\sqrt{2})^3} \rightarrow K = 2\sqrt{2}$$

۷ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

پاسخ زمانی نوسانی می‌شود که ریشه‌ها موهومی شوند لذا:

$$1 + GH = (S + 1)(S + 2) + K_c = 0$$

$$S^2 + 3S + 2 + K_c = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2 + K_c)$$

شرط ریشه موهومی $\Delta < 0$ است:

$$9 - 4(2 + K_c) < 0 \rightarrow K_c > 0.25$$

۸ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$C(t=\infty) = \text{حد } SC(s)$$

$$S \rightarrow 0$$

$$C(s) = R(S) \times \frac{C}{R} = \frac{1}{S} \times \frac{K_c \times \frac{3}{2}}{1 + K_c \times \frac{3}{2}}$$

$$K_c = 10$$

از معادلات فوق خواهیم داشت:

$$C(\infty) = \frac{15}{16}$$

لازم به ذکر است که در محاسبه تابع انتقال $\frac{C}{R}$ مقدار C برابر صفر قرار داده شده است که این امر برای کوتاه کردن مراحل محاسبات انجام شده است چون در نهایت باید $S=0$ قرار داده شود.

۹ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
هر کدام ۲ کوچکتر و K بزرگتر داشته باشند.

$$\tau_1 = 2, \quad K_1 = 1$$

$$\tau_2 = 3, \quad K_2 = 1$$

$$\tau_3 = 3, \quad K_3 = 2$$

$$\tau_4 = 2, \quad K_4 = 2$$

۱۰ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون درجه نسبی سیستم Y₂ کوچکتر از سیستم Y₁ است لذا پاسخ آن سریعتر است.

درجه صورت - درجه مخرج = درجه نسبی یک سیستم

$$Y_1 = 3-0=3$$

$$Y_2 = 3-1=2$$

منظور از درجه سیستم توان S در معادله مربوط به آن سیستم است.

۱۱ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\frac{C}{R} = \frac{GH}{1-GH} = \frac{(S+2)^2}{1-(S+2)^2}$$

$$\text{مدار باز} = GH = (S+2)^2$$

۱۲ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

حداکثر سرعت و حداقل نوسان یعنی $\zeta = 1$ (میرایی بحرانی)

$$\text{مخرج مدار بسته} = S(S+a)+1$$

$$= S^2 + as + 1$$

$$\tau = 1, \quad 2\zeta\tau = a \rightarrow 2 \times 1 \times 1 = a \rightarrow a = 2$$

۱۳ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left[X + 2 \frac{Y}{S} - 2SY \right] \frac{1}{S} \frac{1}{S} = Y$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{S^2}$$

۱۴ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

از آزمون روث استفاده می‌کنیم:

$$1 + GH = 1 + \frac{K}{S(S+1)(S+2)}$$

$$1 + GH = S(S+1)(S+2) + K$$

$$1 + GH = S^3 + 3S^2 + 2S + K$$

۱۳۹ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد

$$\begin{array}{|c c|} \hline & 2 \\ 1 & & \\ & 3 & k \\ \hline \frac{6-k}{3} & \\ \hline k & \\ \hline \end{array}$$

شرط پایداری:

$$6 - k > 0$$

$$k < 6$$

مرز پایداری:

$$6 - k = 0$$

$$k = 6$$

۱۵ - گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$G = \frac{k(S+1)e^{-2S}}{(S+i)(S-i)}$$

$$\phi = \left\{ 0 + \tan^{-1}(w) - 2w \right\} - \left\{ \tan^{-1}(w) + \Pi + \tan^{-1}\left(\frac{w}{-1}\right) \right\}$$

$$\phi = \tan^{-1}(w) - 2w - \pi$$

نکته : زاویه $\tau S - 1$ برابر $\pi + \tan^{-1}\left(\frac{w\tau}{-1}\right)$ است.

یادداشت

کنترل مختصات (Set point) که مقدار مورد نظر است را مشخص می کند. این مقدار معمولاً ثابت است و در معمول های داده شده ممکن است تغییر کردد. مقدار مورد نظر کنترل (Set point) مانع از تغییر مانیپولیت (Manipulated input) می شود. این مقدار معمولاً تغییر نمی کند و معمولاً تغییرات خارجی (Disturbance) را مقابله می کند. مقدار مانیپولیت (Manipulated input) معمولاً تغییر می کند و معمولاً تغییرات خارجی (Disturbance) را مقابله می کند.

یادداشت

يادداشت

يادداشت

یادداشت
