

بہ نام خدا

# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

سمینار دانتجویے

سہ تہذیب، ۸ اسفند ۱۳۹۱

دانتنگاہ یزد - دانتنگدہ ریاضے

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

آنچه در ادامه می بینید:

- یک بازی ساده
- یک نمونه بازی منصفانه (دلار نقره‌ای)
- تاریخچه و قوانین مسابقات بازی ریاضی
- نام‌نویسی برای برگزاری و شرکت در مسابقه
- چند نمونه تحلیل بازی
- استراتژی برد یا استراتژی نباختن؟
- گراف بازی

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

بازی شکستن شکلات:



- یک شکلات داریم که به شکل یک مستطیل  $m \times n$  است. دو نفر با این شکلات بازی می کنند. در ابتدا نفر اول شکلات را از روی یکی از خطهای افقی یا عمودی آن می شکند، سپس نفر دوم یکی از دو قسمت شکلات را از روی یکی از خطهای آن می شکند و ....

هر کس نتواند در نوبتش حرکتی انجام دهد بازنده است.

# اولیہ دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

یک اجرای بازی:

- فرض کنید شکلات ما ۳ در ۳ باشد. آیا می‌توانید طوری بازی کنید که نفر اول ببرد؟

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

■ حدس می‌زنیم که برنده‌ی بازی مستقل از حرکت‌ها تعیین می‌شود!

یعنی هر قدر خوب یا بد بازی کنید و به هر شکلی بازی کنید، باز هم برنده از پیش تعیین شده است.

■ آیا می‌توانیم این حدس را اثبات کنیم؟

# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

- ہر قدر سعی کر دیم نتوانستیم کاری کنیم کہ نفر اول برندهی بازی با شکلات ۳ در ۳ باشد.
- بار دیگر نگاہی بہ بازی‌هایی کہ روی شکلات ۳ در ۳ انجام دادیم بیندازید. تا قبل از پایان بازی چند بار شکلات را شکستیم؟

# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

- حال ثابت می کنیم که اگر شکلات ما  $m \times n$  باشد، مسابقه دقیقاً  $mn - 1$  مرحله خواهد داشت.
- اثباتش کاری ندارد! اول کار شکلات یک تکه است، با هر بار شکستن تعداد تکه های شکلات یکی زیاد می شود، در آخر تعداد تکه ها  $mn$  تاست، پس تعداد شکستن ها  $mn - 1$  تاست.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

- این یک مثال از تحلیل یک بازی ساده بود. این تحلیل‌ها بیش از آن که پیش‌زمینه‌ی ریاضی لازم داشته باشد، به هوش و ابتکار نیاز دارد!
- اما قرار نیست ما یک چنین بازی را در مسابقه به شما بدهیم. زیرا در این بازی هر طور بازی کنید، برنده از قبل تعیین شده است و این باعث می‌شود بازی جالب نشود.



# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

- پس به دنبال چه بازی‌هایی هستیم؟

- ما بازی‌هایی را انجام می‌دهیم که هم جذاب باشند و هم برنده شدن در آنها نیاز به فکر داشته باشد.

- اکثر بازی‌های ما استراتژی برد دارند، یعنی اگر بتوانید تحلیل درستی از بازی ارائه دهید، هرگز در مسابقه‌ی ما بازنده نمی‌شوید.

- اما برای برنده شدن لازم نیست بهترین استراتژی را بیابید، کافی است استراتژی شما از تیم حریف (مسابقه تیمیه!) بهتر باشد.

# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

- یک مثال واقعی‌تر از بازی‌هایی که با آنها مواجه خواهید شد:

## بازی دلار نقره‌ای

- یک سطر داریم که تعدادی خانه دارد. در بعضی از این خانه‌ها تعدادی سکه قرار گرفته است، اما فقط یکی از این سکه‌ها بسیار با ارزش است (مثلاً سکه‌ی بهار آزادی است) و بقیه ارزش چندانی ندارند. (۲۵ تومانی هستند)
- هدف ما در بازی به دست آوردن سکه‌ی با ارزش (دلار نقره‌ای) است.

# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

- دو نفر بازی می کنند. هر کس در نوبت خودش می تواند یکی از این حرکتها را انجام دهد:
- یک سکه را چند خانه به جلو ببرد، به شرط آن که سکه از روی سکهی دیگری رد نشده و دو سکه نیز در یک خانه قرار نگیرند.
- سکه ای را که در خانهی آخر قرار دارد برای خودش بردارد.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

■ یک مثال:

فرض کنید سطر ما به شکل زیر است:



پول‌های سیاه یک پول سیاه می‌ارزند و سکه‌ی زرد طلایی است.

■ بگذارید ببینیم بازی چه گونه پیش می‌رود.



# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

■ نفر دوم برنده شد. اما آیا نفر اول می‌توانست بهتر بازی کند؟  
پاسخ مثبت است.

در ادامه یک نحوه‌ی بازی بهینه برای نفر اول را نشان می‌دهیم  
که منجر به برد هم می‌شود.



# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

- دیدیم کہ نفر اول توانست راہی پیدا کند کہ هموارہ برندہی بازی باشد، حتی اگر نفر دوم بینہایت عالی بازی کند.
- چنین راہہایی را «استراتژی برد» می نامیم.



# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

- بازی‌های ما عمدتاً (ولی نه همگی) به گروهی از بازی‌ها تعلق دارند که آن‌ها را بازی‌های ترکیبیاتی استاندارد می‌نامند. یعنی:
  - دو نفره (دو تیم) هستند و حرکت کردن در آن‌ها به نوبت است.
  - شانس در بازی تأثیری ندارد و امکان بلوف‌زدن نیز وجود ندارد.
  - پایان‌پذیرند. یعنی بازی حتماً تمام می‌شود (:
  - هیچ‌وقت به تساوی کشیده نمی‌شوند.
- علاوه بر این، بازی‌های ما مثل شکستن شکلات دارای نتیجه‌ی از پیش تعیین شده نیستند و قوانین مسابقه به شکلی است که بازی‌ها را صد در صد منصفانه شکل می‌دهد. (البته مثل دلار نقره‌ای، معروف هم نیستند.)

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## تاریخچه مسابقات بازی ریاضی

- اولین مسابقه‌ی بازی ریاضی در سال ۱۳۸۳، در دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه فردوسی، به پیشنهاد خانم دکتر میرابراهیمی (دانش‌جوی کارشناسی ارشد آن زمان) برگزار شد.
- از آن سال تا کنون ۱۱ دوره مسابقات بازی ریاضی در دانشگاه‌های فردوسی و آزاد مشهد برگزار شده است. با اهمیت‌یافتن روز افزون نظریه‌ی بازی‌های ترکیبیاتی، مسابقات مشابهی در دانشگاه‌های دیگر نیز شکل گرفته است.
- امسال برای اولین بار، مسابقات بازی ریاضی یزد، در ۲ سطح دانش‌آموزی و دانش‌جویی برگزار خواهد شد.

# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

## قوانین مسابقه

- قوانین کامل مسابقه در وبلاگ ما به آدرس [Mathgame.blog.ir](http://Mathgame.blog.ir) منتشر شده است.
- آنچه در ادامه می آید خلاصه‌ای از قوانین است.

# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

## قوانین مسابقه

- مسابقه در قالب تیم‌های دقیقاً دو نفره صورت می‌گیرد.
- ثبت‌نام مسابقه از امروز به صورت آنلاین طبق توضیحی که در وبلاگ مسابقه ([Mathgame.blog.ir](http://Mathgame.blog.ir)) آمده است و به صورت حضوری در ورودی همین سالن آغاز شده و تا پایان روز چهارشنبه ۱۶ اسفند ادامه خواهد داشت.
- دانشجویان دانشکده‌ی ریاضی باید به صورت حضوری و با مراجعه به آقای دکتر علیخانی ثبت‌نام کنند.
- مسابقات روز پنج‌شنبه ۱۷ اسفند از ساعت ۱۰ تا ۱۶ به صورت حذفی در دانشکده‌ی ریاضی دانشگاه یزد برگزار خواهد شد.

# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

## جذب داوطلب

- داوری:

- به ۶ داور در بخش دانش جویی و ۴ داور در بخش دانش آموزی نیازمندیم. وظایف داور در دستور اجرای مسابقه آمده است.

- چک کردن روند بازی‌ها:

- به ۲ نفر نیازمندیم که برگه‌های روند بازی را چک کرده و از درستی برگزاری مسابقه اطمینان حاصل کنند.

# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

## جذب داوطلب

- فیلم و عکس برداری:
- به ۲ نفر جهت فیلم برداری و عکس برداری از مسابقات نیازمندیم. (یک نفر برای مسابقات دانش آموزی و یک نفر برای مسابقات دانش جویی)
- مدیریت اتاق سرگرمی:
- وقتی تیمی در حال مسابقه دادن نیست، می تواند در اتاق سرگرمی بازی های ریاضی کامپیوتری انجام دهد. به ۲ نفر (یک نفر در هر بخش) برای مدیریت این اتاق نیازمندیم.

# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

## جذب داوطلب

- برگزاری مسابقه:
- به تعدادی داوطلب (در هر دو بخش)، جهت اجرای مسابقه { توزیع بادکنک، پرسش‌ها، تقسیم‌بندی کلاس‌ها و ... } نیازمندیم.
- اگر مایلید در هر یک از موارد بالا به کمک ما بیایید، یک ایمیل به [yazdmathgame\[at\]gmail\[dot\]com](mailto:yazdmathgame[at]gmail[dot]com) به همراه مشخصات خود بفرستید یا به همکاران ما در ورودی سالن مراجعه نمایید.

# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

## چند نمونه تحلیل بازی

- در این بخش چند بازی ساده‌ی دیگر را تحلیل می‌کنیم و تعریف دقیق‌تری از مفهوم «منصفانه» بودن یک بازی ارائه می‌کنیم.



# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## بازی DivSub

- بازی با یک عدد طبیعی مثبت  $x$  آغاز می شود.
- هر بازی کن در نوبت خود می تواند یکی از مقسوم علیه های  $x$  مانند  $d$  را انتخاب کرده و به جای  $x$ ، عدد  $x-d$  را بنویسد.
- بازی وقتی تمام می شود که عدد صفر نوشته شود.
- کسی که عدد صفر را بنویسد بازنده است.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## استراتژی

- یک استراتژی برد، روشی برای بازی کردن است که اگر یکی از بازیکنان طبق آن عمل کند، حتماً برنده می شود.
- یک استراتژی نباختن، روشی برای بازی است که اگر یکی از بازیکنان طبق آن عمل کند، به هیچ وجه بازنده نمی شود.
- واضح است که تفاوت استراتژی برد و استراتژی نباختن در بازی های پایان ناپذیر یا تساوی پذیر به وجود می آید.
- هر استراتژی برد، به وضوح استراتژی نباختن هم هست.
- اگر یک بازیکن استراتژی نباختن داشته باشد، بازیکن دیگر نمی تواند استراتژی برد داشته باشد و بر عکس.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## تحلیل بازی DivSub

- فرض کنیم عدد  $X$  زوج باشد. در این صورت نفر اول در حرکت اول خود عدد  $X-1$  را که عددی فرد است به جای  $X$  می نویسد.
- حال نفر دوم با عددی فرد سر و کار دارد که طبعاً همگی مقسوم علیه های آن نیز فرد هستند، پس عددی که بعد از حرکتش به جای می گذارد زوج است.
- نفر اول می تواند همین استراتژی را ادامه دهد. چون اعداد مرتباً در حال کوچک شدن هستند، پس بازی پایان می یابد و چون نفر اول همواره عددی فرد می نویسد، هرگز مجبور به نوشتن صفر نخواهد شد.
- اگر  $X$  فرد باشد، استراتژی برد مشابهی برای نفر دوم وجود دارد.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## تحلیل بازی DivSub

- فرض کنیم عدد  $X$  زوج باشد. در این صورت نفر اول در حرکت اول خود عدد  $X-1$  را که عددی فرد است به جای  $X$  می نویسد.
- حال نفر دوم با عددی فرد سر و کار دارد که طبعاً همگی مقسوم علیه های آن نیز فرد هستند، پس عددی که بعد از حرکتش به جای می گذارد زوج است.
- نفر اول می تواند همین استراتژی را ادامه دهد. چون اعداد مرتباً در حال کوچک شدن هستند، پس بازی پایان می یابد و چون نفر اول همواره عددی فرد می نویسد، هرگز مجبور به نوشتن صفر نخواهد شد.
- اگر  $X$  فرد باشد، استراتژی برد مشابهی برای نفر دوم وجود دارد.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## یک بازی تقارنی (بازی نیم دو کپه‌ای)

- بازی با دو عدد صحیح مثبت  $x$  و  $y$  آغاز می‌شود.  
هر یک از بازی‌کنان در نوبت خود می‌تواند:
  - یکی از دو عدد را هر قدر خواست کوچک کند. (به شرط آن که عدد صحیح نامنفی باقی بماند.)
- بازی وقتی تمام می‌شود که هر دو عدد صفر شوند. برنده کسی است که آخرین حرکت را کرده است.

# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

یک بازی تقارنی (بازی نیم دو کپہای)

■ یک اجرای بازی:

۲۲      ۳۴

۲۲      ۲۲

۱۰      ۲۲

۱۰      ۱۰

۵      ۱۰

۵      ۵

۰      ۵

۰      ۰

# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

## تحلیل نیم دو کپه‌ای

- بگذارید اول یک حالت خاص را تحلیل کنیم. اگر دو عدد اولیه برابر باشند چه کسی استراتژی برد دارد؟
- در این حالت نفر دوم می‌تواند با تقلید از حرکات نفر اول برنده شود. یعنی هر حرکتی که نفر اول روی یکی از اعداد انجام دهد، نفر دوم همان حرکت را روی عدد دیگر انجام می‌دهد. با این حساب نفر دوم همواره می‌تواند حرکت کند، پس وقتی بازی به دو عدد صفر می‌رسد، نوبت نفر اول است و لذا نفر دوم برنده شده است. (تکنیک بازی متقارن)
- در حالت کلی اگر دو عدد اولیه برابر نباشند، نفر اول در حرکت اولش دو عدد را برابر می‌کند (از عدد بزرگ‌تر کم می‌کند تا به عدد کوچک‌تر برسد) و استراتژی قبلی را پیش می‌گیرد. (این تکنیکی است که تحت نام سرقت استراتژی شناخته می‌شود)

# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

## آیا حریف استراتژی برد دارد؟

- گاهی بسیار مفید است کہ ہر چند حرکت یک بار چک کنیم کہ آیا حریف استراتژی برد دارد یا نہ.
- در این موارد استدلال با استفاده از «سرقۃ استراتژی» بسیار کارساز است. خوب است یک مثال ببینیم.



# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## بازی شطرنج دوتایی

- شطرنج دوتایی دقیقاً مانند شطرنج معمولی است با این تفاوت که هر نفر در نوبت خود می‌تواند به جای یک حرکت، دو حرکت (استاندارد شطرنج) انجام دهد.
- فرض کنید در یک مسابقه‌ی شطرنج دوتایی شرکت کرده‌اید و نفر اول (بازی‌کن سفید) هستید.
- آیا در آغاز بازی، حریف شما استراتژی برد دارد؟

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## بازی شطرنج دوتایی

- پاسخ منفی است. می‌توانیم این را با برهان خلف ثابت کنیم!  
فرض کنید نفر دوم یک استراتژی برد داشته باشد، در این صورت نفر اول در حرکت اول خودش یک اسب را جلو آورده و سپس به جای اولیه بر می‌گردد.  
با این حرکت دوباره به حالت اولیه‌ی بازی می‌رسیم ولی جای دو نفر عوض شده است.  
پس یک استراتژی برد برای نفر اول یافتیم که تناقض است. زیرا ممکن نیست که هم نفر اول استراتژی برد داشته باشد هم نفر دوم.
- سؤال: آیا استراتژی برد نداشتن نفر دوم به معنای وجود استراتژی نباختن برای نفر اول است؟

# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

## آیا چیزی که می‌خواهیم ممکن است؟

- اکثر اوقات یافتن استراتژی‌های بازی‌ها چندان ساده نیست. مثلاً هیچ استراتژی شناخته‌شده‌ای برای بازی قدیمی شطرنج وجود ندارد.
- در این حالت، چیزی که برای ما مهم می‌شود آن است که آیا هدف ما (در راستای طرز بازی انتخاب شده) دسترس‌پذیر است؟
- مثلاً شاید مایل باشیم که بدانیم در یک وضعیت خاص شطرنج، ممکن است که حریف ما طی ۲ حرکت مات شود یا نه.
- در ادامه ۲ تکنیک بسیار مفید یعنی تکنیک‌های «برگشت‌پذیری» و «ناوردایی» را معرفی می‌کنیم.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## بازی انعکاس مهره

- یک صفحه با مختصات دکارتی داریم. در چهار گوشه‌ی یک مربع واحد آن که رأس‌هایش نقاط شبکیه (نقطه‌هایی که هم طول و هم عرضشان صحیح است) هستند، چهار مهره قرار داده‌ایم.
- در هر حرکت می‌توانیم یکی از مهره‌ها را نسبت به مهره‌ی دیگری انعکاس دهیم. آیا ممکن است بعد از تعدادی حرکت مهره‌های ما در چهار رأس یک مربع  $2 \times 2$  قرار گیرند؟
- ضمناً مجازیم که هر تعداد مهره را که خواستیم در یک نقطه قرار دهیم.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## تحلیل بازی انعکاس مهره

- سعی کردیم که چنین کاری انجام دهیم و نشد! حال می‌خواهیم ببینیم اثباتی برای غیرممکن بودن این کار وجود دارد یا نه.
- بیاید اطلاعات خود در مورد بازی را کمی گسترش دهیم.
- اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که انعکاس یک نقطه‌ی شبکه‌ی نسبت به نقطه‌ی شبکه‌ی دیگر، خود یک نقطه‌ی شبکه‌ی است. (اثباتش بسیار سرراست و بدیهی است.)
- دومین کشف نسبتاً مهم آن است که حرکتهای ما برگشت‌پذیرند، یعنی پس از هر تعداد حرکت می‌توانیم به حالت اولیه بازگردیم. (وقتی یک مهره را نسبت به یک مهره‌ی دیگر انعکاس می‌دهیم، کافی است این انعکاس را تکرار کنیم تا به حالت اولیه برگردیم.)

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## تحلیل بازی انعکاس مهره

■ حال از این دو کشف چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

نتیجه:

- فرض کنید دنباله‌ای از حرکات وجود داشته باشد که ما را از یک مربع واحد به یک مربع با طول ضلع ۲ برساند پس طبق کشف دوم دنباله‌ای از حرکات هم وجود دارد که ما را از یک مربع به طول ضلع ۲ به یک مربع واحد برساند (طول ضلع را نصف کند).
- اگر این دنباله‌ی اخیر را روی یک مربع واحد اعمال کنیم باید به یک مربع با طول ضلع  $5/0$  برسیم که با کشف اول ما در تناقض است!
- پس چنین کاری ممکن نیست و حتی اثبات شد که اگر در طول این بازی به مربعی برسیم، طول ضلع آن قطعاً یک است. (چرا؟)

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## تحلیل بازی انعکاس مهره

- کشف اول ما چیزی بود که به نام «یافتن ناوردا» شناخته می شود. ایده ی این تکنیک به صورت خلاصه چنین بیان می شود:  
هر گاه تغییری می بینید، به دنبال چیزی باشید که ثابت می ماند.
- کشف دوم ما ایده ی برگشت پذیر بودن حرکاتها بود.  
همیشه در بازی ها چک کنید که امکان خنثی کردن حرکت حریف (برگشت دادن بازی) وجود دارد یا نه.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## بازی‌های منصفانه

- تعریف: یک بازی ترکیبیاتی را منصفانه می‌نامیم هر گاه امکانات بازی برای هر دو بازیکن مساوی باشد.

یعنی چه؟

- یعنی بازی با مهره‌هایی با دو رنگ انجام نشود. (مثل شطرنج نباشد)

- یعنی اگر بازی‌کن اول در نوبتش می‌تواند حرکتی را انجام دهد، در صورتی که در همان حالت بازی نوبت بازی‌کن دوم باشد، بازی‌کن دوم هم بتواند همان حرکت را انجام دهد و شرایط برد و باخت نیز یکسان باشد.

- به بیان ساده‌تر یعنی:

اگر شما به عنوان یک تماشاچی، دو حالت متوالی از بازی را دیدید، نتوانید از روی حالت بازی بفهمید که کدام بازی‌کن حرکت کرده است.



# اولین دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

## قضیہ (Sprague-Grundy)

■ ہمہی بازی های ترکیبیاتی (پایان پذیر) منصفانه استراتژی برد داشته و قابل تبدیل به یک بازی خاص به نام نیم (حالت کلی بازی نیم دو کپهای، وقتی تعداد اعداد دلخواه است) هستند.

■ از اثبات این قضیہ می گذریم. (:

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## حالت برد / حالت باخت

- یکی از مفاهیم مهم نظریه بازی‌های منصفانه، مفهوم حالت‌های برد و باخت است.
- می‌گوییم یک بازی کن در حالت برد قرار دارد، هر گاه نوبتش باشد و بتواند طبق قوانین بازی طوری بازی کند که حتماً برود. (استراتژی برد داشته باشد.)
- می‌گوییم یک بازی کن در حالت باخت قرار دارد، هر گاه نوبتش باشد و حریفش استراتژی برد داشته باشد.
- طبق قضیه Sprague-Grundy، بازی‌کنی که نوبتش است همواره یا در حالت برد است یا در حالت باخت و این که یک حالت از بازی حالت برد باشد یا باخت، فقط به شرایط بازی بستگی دارد نه به این که نوبت چه کسی است. (زیرا بازی منصفانه است.)

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## تعیین حالت‌های برد و باخت

- حال می‌خواهیم برای هر حالت از یک بازی خاص تعیین کنیم که آن حالت، حالت برد است یا حالت باخت. به این روش عمل می‌کنیم:
- در مورد حالت‌های پایانی بازی، اطلاعات کاملی داریم. (قوانین بازی تعیین کرده‌اند که این حالت‌ها حالت برد هستند یا حالت باخت.)
- سایر حالت‌ها را این‌گونه تعیین وضعیت می‌کنیم:
- اگر بتوان حالتی از بازی را با یک حرکت به یک حالت باخت تبدیل کرد، آن حالت حالت برد است.
- اگر همه‌ی حرکات از حالتی، به حالت برد منجر شوند، آن حالت حالت باخت است.

# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## یک مثال (بازی سکه‌ی ناخواسته)

- یک سطر با تعدادی خانه داریم که در خانه‌ی اول آن یک سکه قرار گرفته است. دو نفر با این سکه بازی می‌کنند.  
هر کس در نوبت خود مجاز است:
  - سکه را یک یا دو خانه به جلو ببرد.
  - اگر سکه در خانه‌ی آخر بود، آن را بردارد.کسی که سکه را بازنده است.

W	W	L	W	W	L	W	W	L
---	---	---	---	---	---	---	---	---

# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

## گراف بازی

- گاهی اوقات برای تعیین حالت برد و باخت بازی، به هر حالت از بازی یک رأس نسبت می‌دهند و بین دو رأس یالی جهت دار می‌گذارند اگر و تنها اگر امکان انتقال بازی از حالت متناظر با رأس اول به حالت متناظر با رأس دوم با تنها یک حرکت وجود داشته باشد.
- به این شکل گراف بازی می‌گویند. تعیین حالت برد و باخت از روی گراف بازی بسیار آسان است. (برای افراد الگوریتمی‌تر: Topological Sort)

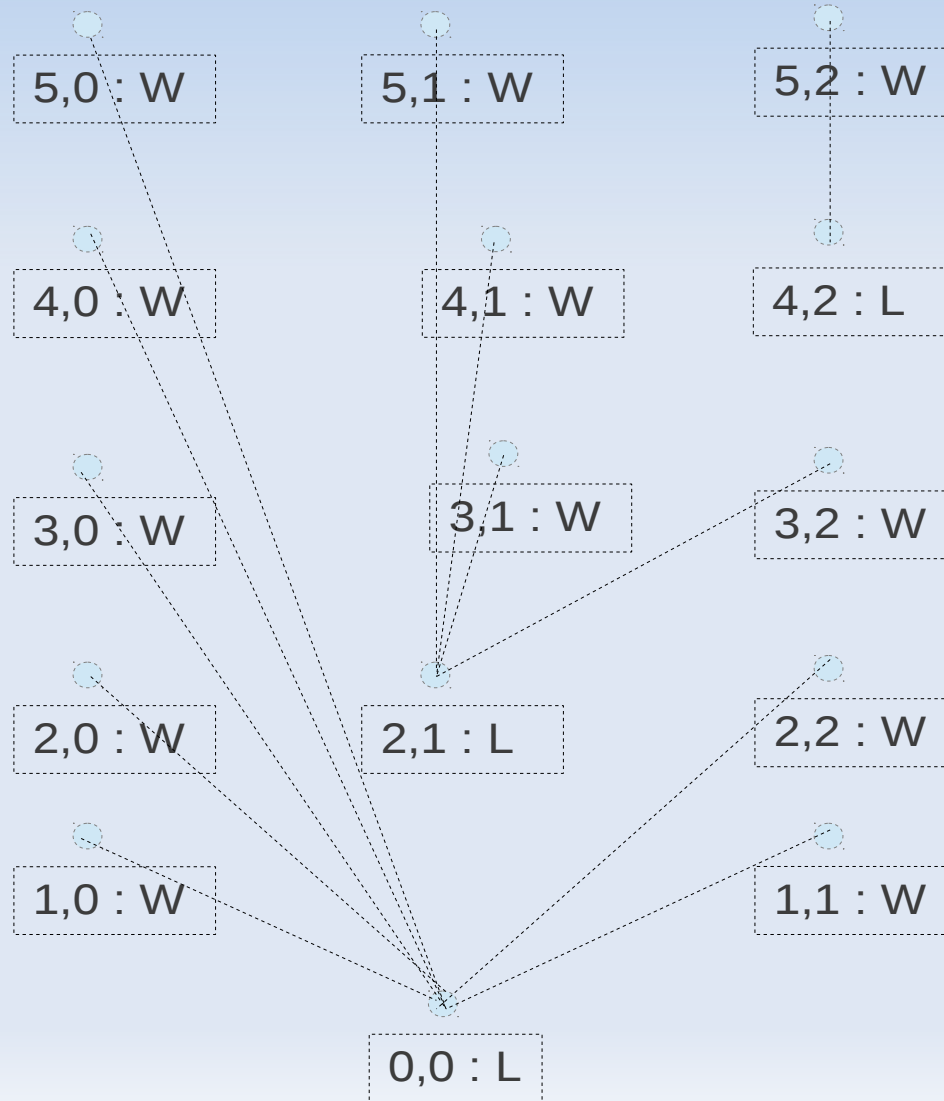
# اولین دوره مسابقات بازی ریاضی یزد

## یک مثال (بازی ویتہف)

- بازی ویتہف شبیه همان بازی «نیم دو کپہای» است. با این تفاوت کہ هر بازی کن در نوبت خود این حرکت اضافی را نیز دارد:
- می‌تواند از هر دو عدد، مقدار یکسانی را کم کند.

# اولیہ دورہ مسابقات باز ریاضے یزد

گراف یک نمونه از بازی ویتہف با شروع از ۲ و ۵



# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

## تحلیل بازی ویتھف

- مشاهده ۱: ترتیب اعداد مهم نیست، پس می‌توانیم فرض کنیم عدد اول همیشه کوچک‌تر از عدد دوم یا مساوی با آن است. از این پس حالت بازی را با  $X, X+Y$  نشان می‌دهیم، یعنی عدد اول  $X$  و عدد دوم  $X+Y$  است.
- مشاهده ۲: اگر  $X, X+Y$  یک حالت باخت باشد، به ازای هر  $Z > X$ ، حالت  $Z, Z+Y$  یک حالت برد است. (یعنی مثلاً چون  $۲, ۴$  یک حالت باخت است پس  $۳, ۵$  و  $۴, ۶$  و ... همگی حالت برد هستند.)
- مشاهده ۳: برای هر اختلاف مانند  $Y$ ، فقط یک  $X$  وجود دارد که  $X, X+Y$  حالت باخت است.
- حال کافی است این  $X$  را بیابیم. این کار را با حدس زدن و استقرا انجام دهید:)



# اولین دوره مسابقات باز ریاضی یزد

حرف آخر: ساده فکر کنید!

- امروز چند نمونه از روش‌های کار با بازی‌ها را مشاهده کردیم. اما به یاد داشته باشید که اولین اصل ما در برخورد با یک بازی یا هر چیز ترکیبیاتی دیگر، ساده فکر کردن است،

اما ....

بعضی‌ها عادت دارند سفت فکر کنند ...

