جزوه تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها

بهروز آدینه

فهرست مطالب

فصل ۱

آشنایی با سیگنال‌ها و سیستم‌ها

۱-۱ مقدمه

در همه علوم، سیگنال بیانگر یک پدیده فیزیکی است که تابعی از یک متغیر مستقل می‌باشد و سیستم مجموعه منظمی است که ممکن است دارای یک یا چندین سیگنال ورودی و یک یا چند سیگنال خروجی باشد. می‌توان سیگنال‌های ورودی به سیستم را به عنوان محرک‌ها یا اثر محیط خارج بر سیستم و سیگنال‌های خروجی را بعنوان واکنش یا رفتار سیستم نسبت به آن محرک‌ها در نظر گرفت [۱].

مهندسین و محققین تلاش می‌کنند تا نحوه کار سیستم‌های مختلف را درک کنند تا بتوانند حداقل به یکی از اهداف زیر دست یابند [۱]؛

۱. بتوانند سیستم مورد نظر را برروی کامپیوتر شبیه‌سازی کرده و با اعمال سیگنال‌های ورودی متفاوت سیگنال‌های خروجی سیستم را بدست آورند و به عبارت بهتر بتوانند سیستم را به نحو دقیق‌تری تجزیه و تحلیل کرده و عملکرد آن را بررسی کنند.

۲. بتوانند سیستمی را مشابه سیستم اصلی طراحی و آن را تولید کنند.

۳. بتوانند با طراحی سیستم جدید و با اعمال این سیستم به سیستم اصلی، باعث بهبود و یا تغییر رفتار سیستم اصلی شوند.

۴. بتوانند با داشتن سیگنال خروجی برای مدتی معلوم، به پیش‌بینی سیگنال خروجی در آینده بپردازند.

۱-۲ تعریف سیگنال

سیگنال تابعی از یک متغیر مستقل است و حاوی اطلاعاتی در مورد حالت یا رفتار فیزیکی یک پدیده یا سیستم می‌باشد. به عبارت دیگر سیگنال نوعی خبر است که اطلاعاتی در مورد پدیده فیزیکی مورد نظر به مخاطب ارائه می‌دهد. سیگنال‌ها از نظر ریاضی به صورت توابعی چند متغیره نمایش داده می‌شوند. سیگنال‌ها ممکن است جهت توصیف طیف وسیعی از پدیده‌های مادی و فیزیکی بکار برده شوند [۱].

روش ایجاد سیگنال بستگی به ماهیت آن دارد. به عنوان مثال، سیستم صوتی انسان می‌تواند نوعی اغتشاش کنترل شده در هوای اطراف دهان ایجاد نماید که آن را صوت می‌نامند. به عبارت بهتر، دهان و حنجره، با همکاری یکدیگر، می‌توانند باعث تغییر فشار هوا و ایجاد سیگنال صوتی شوند. این سیگنال مکانیکی نامیده می‌شود. البته سیگنال‌های مختلف با ماهیت‌های متفاوت، قابل تبدیل به یکدیگر هستند. به عنوان مثال سیگنال صوتی مکانیکی به سادگی قابل تبدیل به سیگنال الکتریکی است و این عمل تبدیل توسط حسگرها[۱] انجام می‌شود. انواع مختلفی از حسگرها نیز جهت تبدیل سایر پارامترهای مکانیکی، از قبیل فشار و دما به سیگنال الکتریکی طراحی شده‌اند. یک سیگنال الکتریکی می‌تواند ولتاژ یا جریان باشد [۱].

در تمامی مثال‌های فوق سیگنال مطرح شده یک تابع یک بعدی از زمان است. اما سیگنال می‌تواند تابعی از دو متغیر مستقل باشد. به عنوان مثال نمودار روشنایی هر نقطه در یک تصویر، بیانگر یک سیگنال دو بعدی است. به این سیگنال، سیگنال تصویری می‌گویند. برای توصیف سیگنال دو بعدی، سه بعد مورد نیاز است. به ماهیت‌های متفاوت سیگنال صوتی و سیگنال تصویری توجه کنید که در اولی متغیر مستقل زمان و در دومی متغیرهای مستقل، دو بعد از مکان هستند. از طرف دیگر، متغیر تابع در سیگنال صوتی، به میزان فشار هوا در محیط مربوط است ولی در سیگنال تصویری، متغیر تابع میزان روشنایی یک مکان از تصویر می‌باشد. بنابراین، سیگنال‌ها بسیار متنوع بوده و دارای ابعاد (دیمانسیون‌های) مختلف هستند [۱].

۱-۳ انواع سیگنال‌ها

می‌توان سیگنال‌ها را با توجه به خواص متفاوتشان دسته‌بندی کرد. به عنوان مثال یک سیگنال می‌تواند تصادفی[۲] یا معین[۳] باشد. یک سیگنال معین بوسیله یک رابطه ریاضی یا نمودار و یا به وسیله یک جدول مقادیر بیان می‌شود. به عنوان مثال، رابطه بین سیگنال f، نیروی وارده بر یک جسم صُلب با جرم m و شتاب

[1] Sensors
[2] Random
[3] Deterministic

a را می‌توان با رابطه ریاضی $f = ma$ نمایش داد. همچنین ممکن است سیگنال نیروی مذکور بصورت یک منحنی برحسب دو متغیر جرم و شتاب در یک دستگاه مختصات سه بعدی نمایش داده شده و یا مقدار نیرو بر حسب دو متغیر دیگر بصورت یک جدول ارائه می‌گردد. در حالی که برای بیان سیگنال‌های نصادفی از مدل‌های احتمال و روش‌های آماری استفاده می‌شود. به عنوان مثال نویز در سیستم‌های مخابراتی یک سیگنال تصادفی است که نمی‌توان برای آن رابطه ریاضی مشخصی برحسب زمان ارائه کرد. بیان نویز به صورت یک منحنی مشخص و یا جدول مقادیر بر حسب زمان ممکن نیست. به همین دلیل، یک سیگنال تصادفی معمولا با کمک یک تابع توزیع یا تابع چگالی احتمال و یا روش‌های مبتنی بر آمار و احتمالات مهندسی بیان می‌شود. به عنوان مثال، نویز حرارتی که یکی از پرکاربردترین نویزها است با تابع چگالی احتمال گوسی[۱] که دارای دو پارامتر مقدار متوسط و واریانس است بیان می‌شود و رفتار آن با کمک تئوری احتمالات مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این جزوه فقط با سیگنال‌های معین سر و کار خواهیم داشت. به طور کلی می‌توان سیگنال‌ها را به سه دسته، سیگنال پیوسته زمانی[۲]، سیگنال گسسته زمانی[۳] و سیگنال دیجیتال[۴] تقسیم کرد [۱].

۱-۳-۱ سیگنال پیوسته زمانی

سیگنال پیوسته زمانی سیگنالی است که متغیر مستقل آن، که معمولا زمان است، مقادیر پیوسته‌ای را اتخاذ می‌کند. نمونه‌ای از این سیگنال‌ها در شکل ۱-۱ رسم شده است. سیگنال پیوسته زمانی را به صورت $x(t)$ نمایش می‌دهیم. متغیر مستقل گاهی می‌تواند مکان یا پارامتر فیزیکی دیگری باشد.

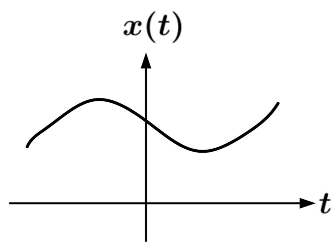


fig1

شکل ۱-۱: نمونه سیگنال پیوسته زمانی

سیگنال صوتی به صورت تابعی از زمان و سیگنال فشار اتمسفر به صورت تابعی از ارتفاع، نمونه‌هایی از سیگنال پیوسته زمانی هستند. سیگنال‌های مخابراتی مورد استفاده در سیستم‌های سخن پراکنی، اکثرا به

[1] Gauusain Probability Density Function
[2] Continous Time Signal
[3] Discrete Time Signal
[4] Digital Signal

صورت پیوسته زمانی می‌باشد. پدیده‌های فیزیکی که به صورت سیگنال قابل بیان هستند، اکثرا پیوسته زمانی هستند. البته شاید استفاده از لفظ پیوسته زمانی کمی غلط‌انداز باشد. چون لازم نیست در بیان سیگنال، متغیر مستقل (محور افقی) حتما زمان باشد. مثلا در مورد سیگنالی که بیانگر تغییرات فشار بر حسب ارتفاع است. متغیر مستقل دارای بعد طول است. به هر حال، همانگونه که اشاره شد، در بیان سیگنال به ابعاد علاقه‌ای نشان نخواهیم داد. لذا اگر فقط محور افقی در نمایش سیگنال به ازاء مقادیر پیوسته تعریف شده باشد، اصطلاحا آن سیگنال را سیگنال پیوسته زمانی می‌نامند (بدون توجه به اینکه محور افقی واقعا زمان باشد یا نه) [۱].

۱-۳-۲ سیگنال گسسته زمانی

سیگنال گسسته زمانی سیگنالی است که متغیر مستقل آن مقادیر گسسته‌ای را اتخاذ می‌کند و دامنه آن می‌تواند مقادیر پیوسته و یا گسسته‌ای را اتخاذ نماید. یک نمونه از این سیگنال‌ها در شکل ۱-۲ رسم شده است. سیگنال گسسته زمانی را به صورت $x[n]$ نمایش می‌دهیم [۱].

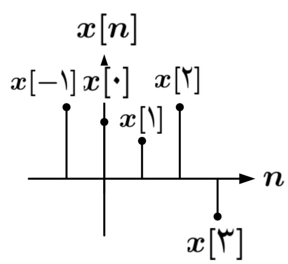


fig2 شکل ۱-۲: نمونه سیگنال گسسته زمانی

قابل توجه است که سیگنال گسسته زمانی تنها در لحظات گسسته از متغیر مستقل که معمولا زمان می‌باشد تعریف شده است و در سایر لحظات مقدار آن تعریف نشده است و نباید اشتباها مقدار آن را صفر در نظر گرفت [۱].

نمودار درآمد یک قهوه‌خانه سنتی طی سال‌های مختلف می‌تواند بصورت یک سیگنال گسسته زمانی بیان گردد، در این صورت هر واحد از متغیر مستقل، مدت زمانی برابر یک سال را نشان می‌دهد [۱].

۱-۳-۳ سیگنال دیجیتال

سیگنال دیجیتال سیگنالی است که نه تنها متغیر آن، که دامنه آن نیز مقادیر گسسته را اتخاذ می‌نماید. نمونه‌ای از این سیگنال‌ها در شکل ۱-۳ رسم شده است [۱].

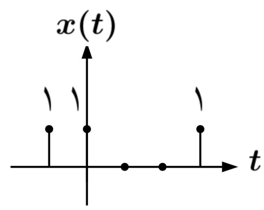


fig3 شکل ۱-۳: نمونه سیگنال دیجیتال که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اتخاذ می‌کند.

این سیگنال‌ها، اکثرا در کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مورد این نوع سیگنال‌ها هیچ محدودیتی در مورد تعداد و مقدار سطوح دامنه‌های معتبر روی محور عمومی وجود ندارد، فقط کافی است تعداد این سطوح محدود باشند. به عنوان مثال، این تعداد می‌توانند ۲، ۳ و یا در حالت کلی M باشد. به سیگنال دیجیتال با دو و سه سطح دامنه معتبر به ترتیب سیگنال دوتایی[1] و سه‌تایی[2] گفته می‌شود. در حالت کلی سیگنالی با M سطح معتبر را یک سیگنال Mتایی [3] می‌گویند.

یک روش تولید این نوع سیگنال‌ها در شکل ۱-۴ نشان داده شده است.

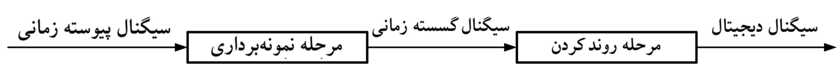


fig4 شکل ۱-۴: روش ساخت سیگنال دیجیتال از روی سیگنال پیوسته زمانی

مرحله گرد یا روند کردن شامل تبدیل سطح هر نمونه به نزدیک‌ترین سطح معتبر در سیگنال دیجیتال است. سیستم‌هایی که عملیات روند کردن را انجام می‌دهند به سیستم روند ساز معروف هستند. بدلیل اینکه این سیگنال‌ها در حقیقت یک زیر مجموعه از مجموعه سیگنال‌های گسسته زمانی هستند، از لحاظ تجزیه و تحلیل، تفاوتی با سیگنال‌های گسسته زمانی ندارند. آنچه باعث مزیت و برتری تحلیل سیگنال‌های گسسته زمانی بر پیوسته زمانی شده است، سادگی تحلیل سیگنال‌های دیجیتال می‌باشد [۱].

[1] Binary
[2] Temary
[3] M-ary

۱-۴ چند سیگنال پیوسته زمانی مهم

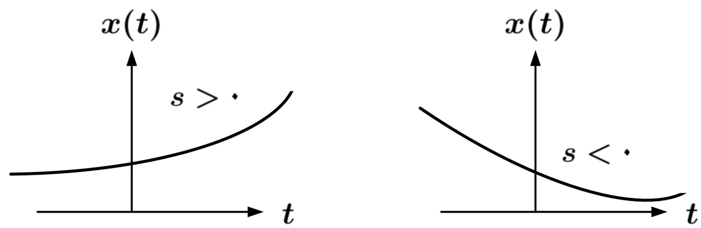
۱-۴-۱ سیگنال نمایی مختلط

sec1

سیگنال نمایی مختلط [۱] به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x(t) = ce^{st} \qquad (۱-۱)$$

که در آن c عدد ثابت حقیقی و s در حالت کلی یک عدد مختلط است. اگر s یک عدد حقیقی باشد، سیگنال فوق یک سیگنال نمایی حقیقی بوده و به دو صورت نمایی افزاینده اگر $s > ۰$ و نمایی کاهنده اگر $s < ۰$ باشد، بیان می‌گردد [۱].



شکل ۱-۵: سیگنال نمایی حقیقی کاهنده و افزاینده

fig5

یک نوع مهم از سیگنال‌های پیوسته زمانی وقتی بدست می‌آید که s یک عدد موهومی باشد. به عنوان مثال اگر $s = j\omega_۰$ باشد (به طوری که $\omega_۰ = \frac{۲\pi}{T_۰}$) یک سیگنال نمایی بصورت $x(t) = e^{j\omega_۰ t}$ حاصل می‌شود که دارای خاصیت تناوبی است. چون همانگونه که بعدا اشاره خواهد شد، $e^{j\omega_۰ t} = e^{j\omega_۰ (t+T_۰)}$ و از طرف دیگر داریم: $e^{j\omega_۰ T_۰} = ۱$. پس $T_۰$ دوره تناوب اصلی این سیگنال است. دوره تناوب اصلی همیشه به صورت عددی مثبت بیان می‌شود. بنابراین، دوره تناوب اصلی این سیگنال وقتی $\omega_۰ > ۰$ یا $\omega_۰ < ۰$ است، یکسان است و برابر است با $T_۰ = \frac{۲\pi}{|\omega_۰|}$ می‌باشد.

نمایی‌های مختلط متناوب نقش مهمی در قسمت عمده نحوه برخورد ما با سیگنال‌ها و سیستم‌ها ایفا می‌کنند، که تا حدودی به خاطر این است که این نمایی‌ها به عنوان قطعات سازنده فوق‌العاده مفیدی برای بسیاری از سیگنال‌های دیگر به کار می‌روند. اغلب، در نظر گرفتن مجموعه‌هایی از نمایی‌های مختلط با رابطه هارمونیکی- یعنی، مجموعه‌هایی از نمایی‌هایی که همه آن‌ها با دوره تناوب مشترک $T_۰$ متناوب هستند- مفید

[1] Complex Exponential signal

خواهد بود. بویژه، یک شرط لازم برای اینکه نمایی مختلط $e^{j\omega t}$ با دوره تناوب T_0 متناوب باشد آن است که: $e^{j\omega T_0} = 1$. که این مستلزم آن است که ωT_0 مضربی از 2π باشد؛ یعنی:

$$\omega T_0 = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{۱-۲}$$

eq2

بنابراین اگر تعریف کنیم:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{۱-۳}$$

ملاحظه می‌کنیم که برای برقراری معادله (۱-۲)، ω باید مضرب صحیحی از ω_0 باشد. یعنی مجموعه از نمایی‌های مختلط با رابطه هارمونیکی، مجموعه‌ای است از نمایی‌های متناوب با فرکانس‌های اصلی‌ای که همه آن‌ها مضاربی از یک فرکانس مثبت ω_0 هستند:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{۱-۴}$$

به ازا $k = 0$، $\phi_k(t)$ یک ثابت است، در حالی که برای هر مقدار دیگر k، $\phi_k(t)$ با فرکانس اصلی $|k|\omega_0$ و دوره تناوب اصلی

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|} \tag{۱-۵}$$

متناوب است. هارمونیک kام، $\phi_k(t)$ با دوره تناوب T_0 نیز متناوب می‌باشد، به طوری که هر بازه زمانی از آن به طول T_0 دقیقا حاوی $|k|$ تا دوره تناوب اصلی است [۱].

۱-۴-۲ سیگنال سینوسی

سیگنال سینوسی[1] به صورت کلی زیر است [۱]:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{۱-۶}$$

که در آن A، ω_0 و θ اعداد حقیقی بوده و به ترتیب دامنه (اندازه[2])، فرکانس زاویه‌ای و فاز سیگنال نامیده می‌شوند. این سیگنال متناوب بوده و دوره تناوب اصلی آن برابر $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشد. شکل کلی این سیگنال به صورت زیر است [۱]:

---
[1] Sinusoidal Signal
[2] Amplitude

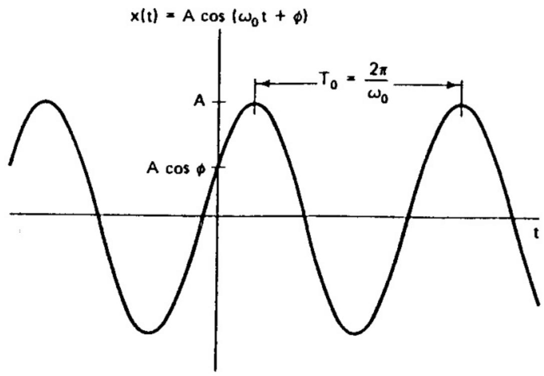


fig6

شکل ۱-۶: سیگنال سینوسی

طبق رابطه اویلر داریم:

$$e^{j\omega_\circ t} = \cos\omega_\circ t + j\sin\omega_\circ t \qquad (۱\text{-}۷)$$

مرور ریاضیات ۱-۱ [اعداد مختلط] عدد مختلط z را می‌توان به چند طریق بیان کرد. شکل کارتزین یا مستطیلی برای z به صورت زیر است:

$$z = x + jy$$

که در آن $j = \sqrt{-۱}$ بوده و x و y اعداد حقیقی هستند که آن‌ها را به ترتیب جز حقیقی و جز موهومی z می‌نامند. اغلب از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \mathrm{Re}\{z\}, \quad y = \mathrm{Im}\{z\}$$

عدد مختلط z را همچنین می‌توان به صورت زیر به شکل قطبی بیان کرد: $z = re^{j\theta}$ که در آن $r > ۰$ اندازه z و θ زاویه یا فاز z می‌باشند. این کمیت‌ها اغلب به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$r = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}, \quad \theta = \angle z = \measuredangle z$$

رابطه بین این دو نمایش اعداد مختلط را می‌توان با استفاده از رابطه اویلر،

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

و یا با ترسیم z در صفحه مختلط چنان که در شکل ۱-۷ نشان داده شده است و در آن محورهای مختصات $\mathrm{Re}\{z\}$ در امتداد محور افقی و $\mathrm{Im}\{z\}$ در امتداد محور عمودی هستند، تعیین کرد. در این نمایش ترسیمی، x و y مختصات کارتزین z بوده و r و θ مختصات قطبی آن می‌باشند.

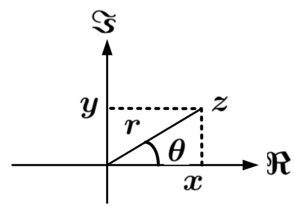


fig11

شکل ۱-۷: ترسیم عدد مختلط در صفحه مختلط

بنابراین می‌توان $\cos\omega.t$ و $\sin\omega.t$ را برحسب $e^{j\omega.t}$ به صورت زیر نوشت [۱]:

$$A\cos\omega.t = \frac{A}{۲}[e^{j\omega.t} + e^{-j\omega.t}] \tag{۱-۸}$$

$$A\sin\omega.t = \frac{A}{۲}[e^{j\omega.t} - e^{-j\omega.t}] \tag{۱-۹}$$

در حالت کلی‌تر داریم:

$$A\cos(\omega.t+\phi) = \frac{A}{۲}[e^{j\phi}e^{j\omega.t} + e^{-j\phi}e^{-j\omega.t}] \tag{۱-۱۰}$$

و یا

$$A\cos(\omega.t+\phi) = A\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega.t+\phi)}] \tag{۱-۱۱}$$

که در آن عملگر $\mathrm{Re}[]$ بیانگر قسمت حقیقی سیگنال داخل براکت است [۱]. توجه کنید که دو نمایی در معادله بالا دامنه‌های مختلط دارند [۱].

کلیه روابط فوق در مورد تابع sin نیز قابل تعمیم است. فقط کافی است توجه کنیم

$$A\sin(\omega.t+\phi) = A\cos\Big(\omega.t+\phi-\frac{\pi}{۲}\Big) = A\,\mathrm{Im}[e^{j(\omega.t+\phi)}] \tag{۱-۱۲}$$

در سیگنال فوق، هر قدر $T.$ یا دوره تناوب اصلی بیشتر شود، فرکانس زاویه‌ای سیگنال کاهش می‌یابد. چند نمونه از سیگنال سینوسی به ازا دوره تناوب‌های مختلف در شکل ۱-۸ رسم شده‌اند [۱]. در این شکل‌ها رابطه زیر برقرار است:

$$T_۱ < T_۲ < T_۳ \Rightarrow \omega_۱ > \omega_۲ > \omega_۳$$

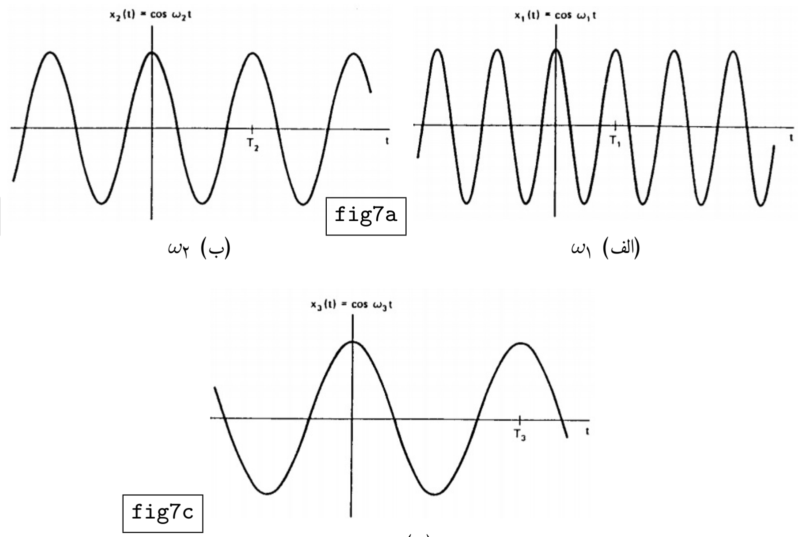


fig7a (الف) $\omega_۱$ fig7b (ب) $\omega_۲$

fig7c (ج) $\omega_۲$

شکل ۱-۸: سیگنال سینوسی به ازا فرکانس‌های مختلف fig7

۱-۴-۳ سیگنال نمایی سینوسی

سیگنال نمایی سینوسی مرکب از حاصل‌ضرب دو تابع سینوسی و نمایی بدست آمده و به صورت زیر می‌باشد [۱]:

$$x(t) = ce^{rt}\cos(\omega.t + \theta) \qquad (۱-۱۳)$$

این سیگنال به ازاء $r > ۰$ و $r < ۰$ به ترتیب سینوسی افزاینده و سینوسی کاهنده نامیده می‌شود [۱]. این سیگنال در شکل ۱-۹ رسم شده است.

این سیگنال‌ها در پاسخ مدارات RLC گاهی مشاهده می‌شوند. نوع دیگری از این سیگنال‌ها فقط به ازاء $t > ۰$ تعریف می‌شوند [۱]:

$$z(t) = ce^{rt}\cos(\omega.t + \theta)u(t) \qquad (۱-۱۴)$$

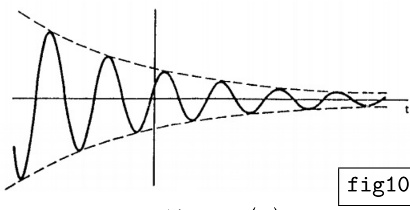


fig10b

(ب) سینوسی کاهنده

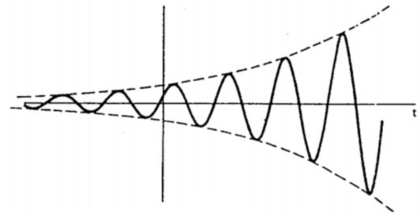


fig10a

(الف) سینوسی افزاینده

fig10

شکل ۱-۹: سیگنال نمایی سینوسی

۱-۴-۴ سیگنال پله واحد

رابطه ریاضی سیگنال پله واحد[1] بصورت زیر است:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{۱-۱۵}$$

از این به بعد سیگنال پله واحد را با تابع $u(t)$ نمایش می‌دهیم و شکل آن به صورت شکل ۱-۱۰ است. توجه کنید که پله واحد در $t = 0$ ناپیوسته است.

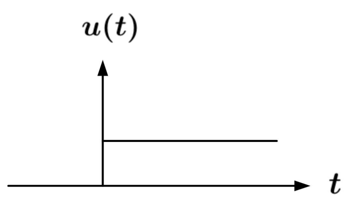


fig8

شکل ۱-۱۰: سیگنال پله واحد

۱-۴-۵ سیگنال ضربه واحد

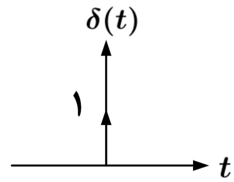
سیگنال ضربه واحد[2] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{۱-۱۶}$$

و به صورت شکل ۱-۱۱ نمایش داده می‌شود.

---

[1]Unit Step Signal
[2]Unit Impulse Signal



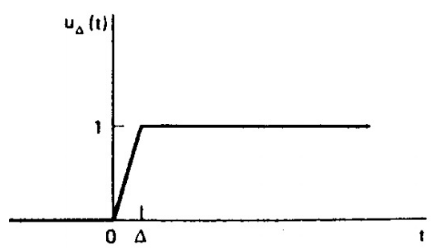
شکل ۱-۱۱: سیگنال ضربه واحد

fig9

در خصوص این معادله به عنوان یک نمایش تابع ضربه واحد، یک مشکل رسمی وجود دارد زیرا $u(t)$ در $t = ۰$ ناپیوسته است و در نتیجه به طور رسمی مشتق‌پذیر نیست. اما معادله بالا را می‌توان با در نظر گرفتن تقریبی از پله واحد به صورت $u_\Delta(t)$ که، همانطور که در شکل ۱-۱۲ به تصویر در آمده است، در بازه زمانی کوتاهی به طول Δ از مقدار صفر به مقدار یک افزایش می‌یابد، تعیین کرد. البته پله واحد به طور لحظه‌ای تغییر مقدار می‌دهد و بنابراین می‌توان آن را به صورت یک ایده‌آل‌سازی از $u_\Delta(t)$ برای Δیی آنچنان کوتاه که طول آن برای هر منظور عملی بی‌اهمیت باشد، تصور کرد. به طور رسمی، $u(t)$ حد $u_\Delta(t)$ است وقتی که $\Delta \longrightarrow ۰$ میل می‌کند. اکنون مشتق زیر را در نظر بگیرید:

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt} \qquad (۱-۱۷)$$

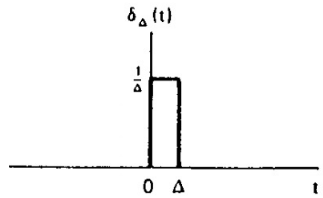
که در شکل ۱-۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۲: تقریب پیوسته از پله واحد

fig12

توجه کنید که $\delta_\Delta(t)$ یک پالس کوتاه به طول Δ و با مساحت واحد به ازای هر مقدار Δ است. وقتی $\Delta \longrightarrow ۰$ میل کند، $\delta_\Delta(t)$ با حفظ مساحت واحد، باریکتر و بلندتر می‌شود. آنگاه در حالت حدی



شکل ۱-۱۳: مشتق $u_\Delta(t)$

fig13

می‌توان

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \longrightarrow 0} \delta_\Delta(t) \qquad (۱-۱۸)$$

eq18

را به عنوان یک ایده‌آل‌سازی پالس $\delta_\Delta(t)$ وقتی طول Δ ناچیز می‌شود، تصور کرد. بدین ترتیب، چون $\delta(t)$ استمراری نداشته اما مساحت واحد دارد، نماد ترسیمی آن را مطابق شکل ۱-۱۱ اختیار می‌کنیم که در آن پیکان در $t = 0$ نشان‌دهنده این است که مساحت پالس در $t = 0$ متمرکز شده و ارتفاع پیکان و ۱ نزدیک به آن برای نمایش مساحت ضربه استفاده شده است.

با توجه به تعریف فوق می‌توان نوشت:

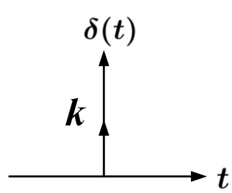
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau = 1 \qquad (۱-۱۹)$$

eq19

در حالت کلی‌تر، ضربه تغییر مقیاس یافته $k\delta(t)$ دارای مساحت k است و بنابراین:

$$k\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = ku(t) \qquad (۱-۲۰)$$

ضربه تغییر مقیاس یافته با مساحت k در شکل ۱-۱۴ نشان داده شده است که در آن ارتفاع پیکانی که برای نشان دادن ضربه تغییر مقیاس یافته استفاده شده، متناسب با مساحت ضربه انتخاب شده است.



شکل ۱-۱۴: ضربه تغییر مقیاس یافته

fig14

می‌توان یک تعبیر ترسیمی ساده از انتگرال جاری در معادله (۱-۱۹) ارائه کرد که این موضوع در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است. چون مساحت ضربه واحد زمان پیوسته $\delta(\tau)$ در $\tau = ۰$ متمرکز شده ملاحظه می‌شود که انتگرال جاری برای $t < ۰$ برابر صفر و برای $t > ۰$ برابر یک است. همچنین توجه کنید که رابطه بین پله واحد و ضربه واحد زمان پیوسته در معادله (۱-۱۹) را می‌توان با تغییر متغیر انتگرال‌گیری از τ به $\sigma = t - \tau$ به صورت متفاوتی بازنویسی کرد:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{\infty}^{۰} \delta(t-\sigma)(-d\sigma) = \int_{۰}^{\infty} \delta(t-\sigma)d\sigma \qquad (۱-۲۱)$$ eq20

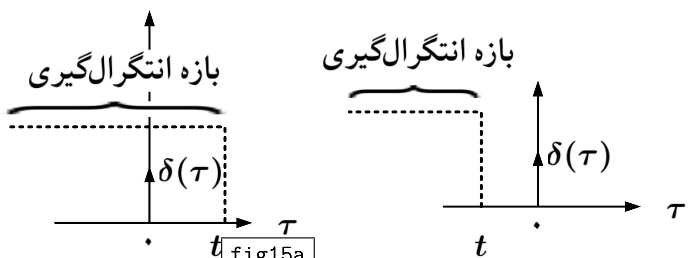


fig15b fig15a

(ب) $t > ۰$ (الف) $t < ۰$

شکل ۱-۱۵: انتگرال جاری داده شده در معادله (۱-۱۹) fig15

تعبیر ترسیمی این صورت از رابطه بین $u(t)$ و $\delta(t)$ در شکل ۱-۱۶ داده شده است. چون در این حالت مساحت $\delta(t-\sigma)$ در نقطه $\sigma = t$ متمرکز شده است، بار دیگر می‌بینیم که انتگرال در معادله (۱-۲۱) برای $t < ۰$ برابر صفر و برای $t > ۰$ برابر یک است.

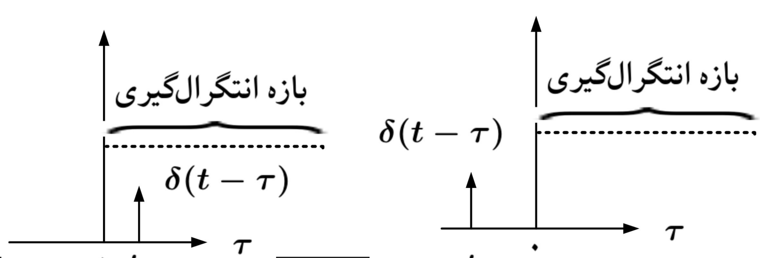


fig16b fig16a

(ب) $t > ۰$ (الف) $t < ۰$

شکل ۱-۱۶: انتگرال جاری داده شده در معادله (۱-۲۱) fig16

ضربه زمان پیوسته دارای خاصیت بسیار مهم نمونه‌برداری است. به خصوص به دلایل متعددی، در نظر

گرفتن حاصل‌ضرب یک ضربه و توابع زمان پیوسته خوش رفتارتر $x(t)$، اهمیت دارد. تعبیر این کمیت با استفاده از تعریف $\delta(t)$ طبق معادله (۱-۱۸) به سادگی بدست می‌آید.

مشخصا رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{۱}(t) = x(t)\delta_{\Delta}(t)$$

در شکل ۱-۱۷(الف) دو تابع زمانی $x(t)$ و $\delta_{\Delta}(t)$ را نشان داده‌ایم و در شکل ۱-۱۷(ب) نمای بزرگ شده‌ای از قسمت غیرصفر حاصل‌ضرب آن‌ها را ملاحظه می‌کنیم. بنا به ساختار، $x_{۱}(t)$ در خارج از بازه $۰ \leqslant t \leqslant \Delta$ برابر صفر است. برای Δیی چنان کوچک که $x(t)$ در این بازه تقریبا ثابت باشد، داریم:

$$x(t)\delta_{\Delta}(t) = x(۰)\delta_{\Delta}(t)$$

چون $\delta(t)$ حد δ_{Δ} است وقتی $\Delta \longrightarrow ۰$ میل کند، نتیجه می‌شود:

$$x(t)\delta(t) = x(۰)\delta(t) \qquad (۱-۲۲)$$

بنا به همین استدلال، برای یک ضربه متمرکز شده در یک نقطه دلخواه، مثلا $t.$، عبارت مشابهی داریم یعنی:

$$x(t)\delta(t-t.) = x(t)\delta(t-t۰) \qquad (۱-۲۳)$$

۱-۵ برخی سیگنال‌های گسسته زمانی مهم

۱-۵-۱ سیگنال نمایی مختلط و سینوسی زمان گسسته

همانند زمان پیوسته، یگ سیگنال مهم در زمان گسسته، سیگنال نمایی یا دنباله نمایی مختلط است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x[n] = C\alpha^{n} \qquad (۱-۲۴)$$ eq29

که در آن C و α در حالت کلی اعدادی مختلط‌اند. این رابطه را به شیوه‌ای دیگر می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$x[n] = Ce^{\beta n} \qquad (۱-۲۵)$$ eq30

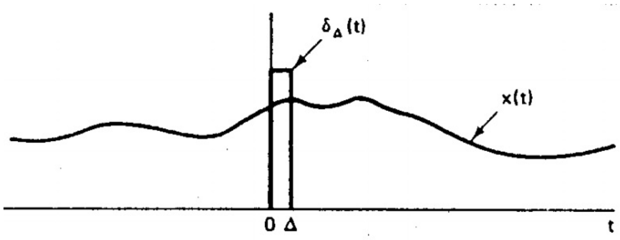


fig17a

(الف) $t < ۰$

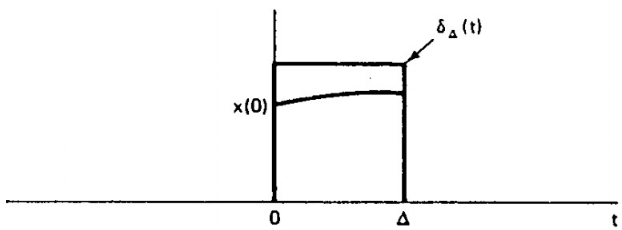


fig17b

(ب) $t > ۰$

fig17

شکل ۱-۱۷: انتگرال جاری داده شده در معادله (۱-۲۱)

که در آن

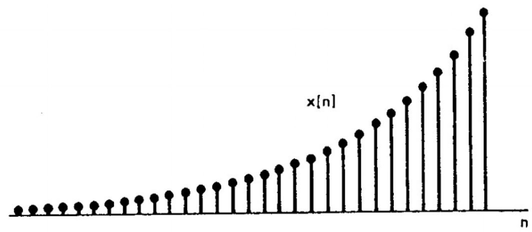
$$\alpha = e^{\beta}$$

گرچه صورت ظاهر دنباله نمایی مختلط زمان گسسته به شکل داده شده در معادله (۱-۲۵)، به صورت نمایی زمان پیوسته بسیار شبیه است، اغلب مناسب‌تر است که دنباله نمایی مختلط زمان گسسته را به شکل معادله (۱-۲۴) بیان کنیم.

۱-۵-۱-۱ سیگنال نمایی حقیقی

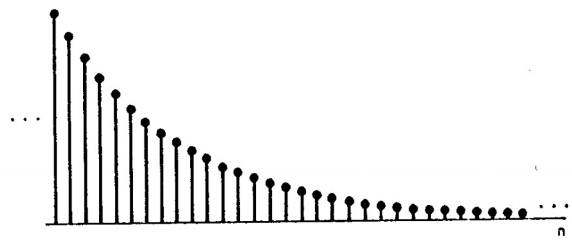
اگر C و α حقیقی باشند، همانطور که در شکل ۱-۱۸ به تصویر کشیده شده است، یکی از چند نوع رفتار را می‌توانیم داشته باشیم. اگر $|\alpha| > ۱$ باشد، اندازه سیگنال به طور نمایی با n افزایش می‌یابد، در حالی که اگر $|\alpha| < ۱$ باشد، یک نمایی کاهشی داریم. علاوه‌براین، اگر α مثبت باشد، تمامی مقادیر $C\alpha^n$ هم علامت‌اند، اما اگر α منفی باشد، علامت $x[n]$ یک در میان عوض می‌شود. همچنین توجه کنید که اگر $\alpha = ۱$ باشد، $x[n]$ برابر یک ثابت است و اگر $\alpha = -۱$ باشد، مقدار $x[n]$ به صورت یک در میان بین $+C$ و $-C$ تغییر می‌کند. نمای‌های زمان گسسته با مقدار حقیقی اغلب برای توصیف رشد جمعیت به صورت تابعی از تولید نسل، کل سود سرمایه‌گذاری به صورت تابعی از روز، ماه یا فصل استفاده می‌شوند [۱].

fig22a



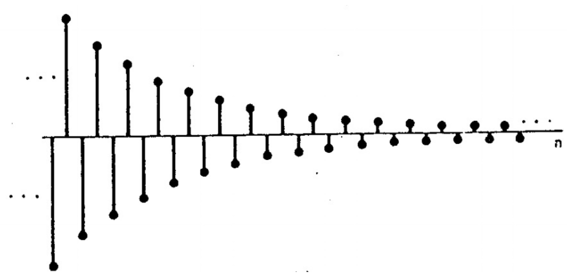
(الف) $\alpha > 1$

fig22b



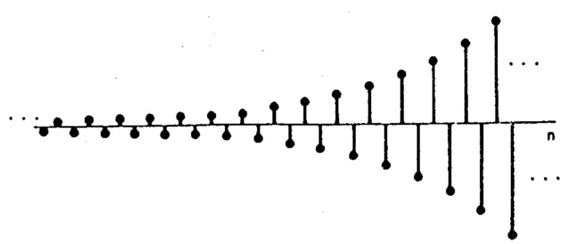
(ب) $0 < \alpha < 1$

fig22c



(ج) $-1 < \alpha < 0$

fig22d



(د) $\alpha < -1$

fig22

شکل ۱-۱۸: سیگنال نمایی حقیقی $x[n] = C\alpha^n$

۱-۵-۱-۲ سیگنال سینوسی

نمایی مختلط مهم دیگر با استفاده از صورت داده شده در معادله (۱-۲۵) و با محدود کردن β به صورت موهومی خالص (به طوری که $|\alpha| = ۱$ باشد) بدست می‌آید. بویژه سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x[n] = e^{j\omega.n} \qquad (۱\text{-}۲۶)$$

eq31

همانند حالت زمان پیوسته، این سیگنال ارتباط نزدیکی با سیگنال سینوسی دارد:

$$x[n] = Acos(\omega.n + \phi) \qquad (۱\text{-}۲۷)$$

eq32

اگر n را بدون دیمانسیون (بعد) بگیریم، آنگاه $\omega.$ و ϕ هردو برحسب رادیان هستند. سه مثال از دنباله‌های سینوسی در شکل ۱-۱۹ نشان داده شده است.

همانند قبل، رابطه اویلر به ما امکان می‌دهد که نمایی‌های مختلط و سینوسی‌ها را به هم مرتبط سازیم:

$$e^{j\omega.n} = \cos\omega.n + j\sin\omega.n \qquad (۱\text{-}۲۸)$$

eq33

و

$$A\cos(\omega.n + \phi) = \frac{A}{۲}e^{j\phi}e^{j\omega.n} + \frac{A}{۲}e^{-j\phi}e^{-j\omega.n} \qquad (۱\text{-}۲۹)$$

eq34

سیگنال‌های معادلات (۱-۲۶) و (۱-۲۷) مثال‌هایی از سیگنال‌های با انرژی کل نامحدود اما با توان متوسط محدود هستند. برای مثال، چون $|e^{j\omega.n}|^۲ = ۱$ است، هر نمونه سیگنال در معادله (۱-۲۶) به اندازه ۱ در انرژی سیگنال سهیم است. بنابراین، کل انرژی برای $-\infty < n < \infty$ نامحدود است، در حالی که واضح است که توان متوسط به ازای هر نقطه زمانی مساوی ۱ است.

۱-۵-۱-۳ سیگنال‌های نمایی مختلط کلی

نمایی مختلط زمان گسسته کلی را می‌توان برحسب سیگنال‌های نمایی حقیقی و سینوسی نوشت و تعبیر کرد. بویژه، اگر C و α را به صورت قطبی بنویسیم، یعنی:

$$C = |C|e^{j\theta}$$

و

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega.}$$

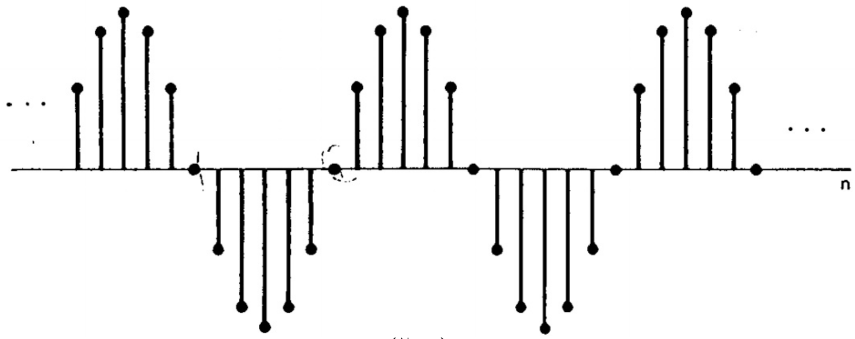


fig23a

(الف) $\cos\left(\frac{۲\pi n}{۱۲}\right)$

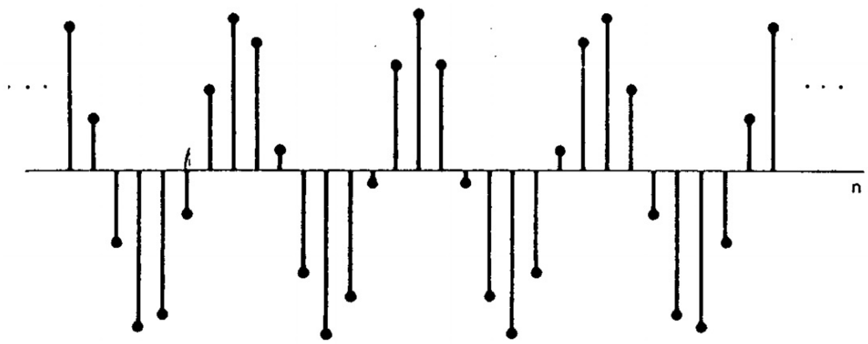


fig23b

(ب) $\cos\left(\frac{۸\pi n}{۳۱}\right)$

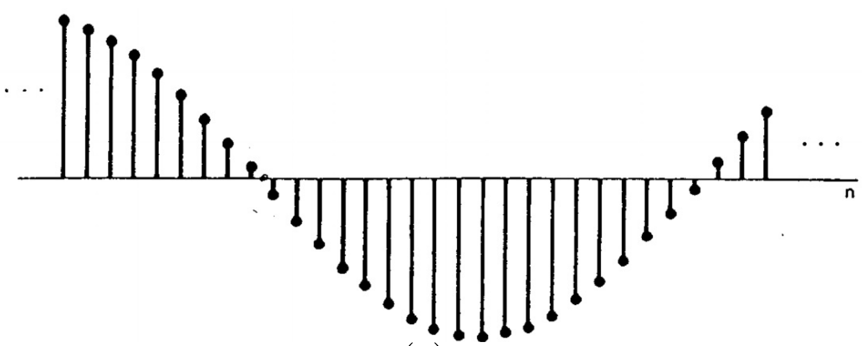


fig23c

(ج) $\cos\left(\frac{n}{۶}\right)$

fig23

شکل ۱-۱۹: سیگنال سینوسی زمان گسسته

آنگاه:

$$C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(\omega.n+\theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega.n+\theta) \qquad (۳۰-۱)$$

بنابراین، به ازای $|\alpha| = ۱$، جزهای حقیقی و موهومی یک دنباله نمایی مختلط، سینوسی هستند. برای $|\alpha| < ۱$، این دو جز متناظرند با دنباله‌های سینوسی‌ای که در نمایی کاهشی ضرب شده‌اند، در حالی که برای $|\alpha| > ۱$، با دنباله‌های سینوسی‌ای که در نمایی افزایشی ضرب شده‌اند، متناظرند. مثال‌هایی از این سیگنال‌ها در شکل ۱-۲۰ نشان داده شده است.

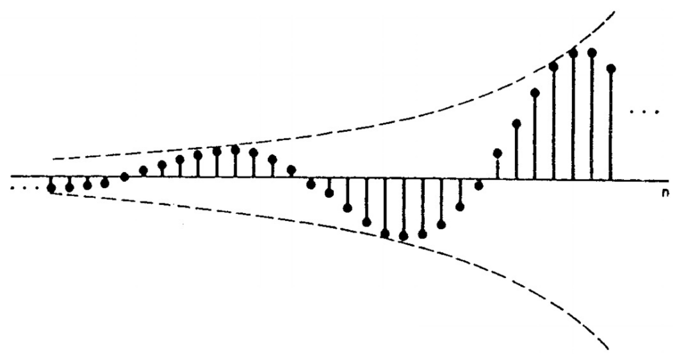


fig24a

(الف) سیگنال سینوسی زمان گسسته افزایشی

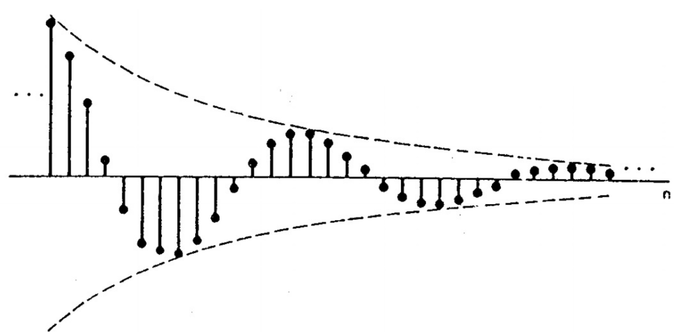


fig24b

(ب) سیگنال سینوسی زمان گسسته کاهشی

fig24

شکل ۱-۲۰: سیگنال سینوسی زمان گسسته کاهشی و افزایشی

۱-۵-۲ خواص تناوب نمایی‌های مختلط زمان گسسته

در حالی که تشابهات زیادی بین سیگنال‌های زمان پیوسته و زمان گسسته وجود دارد، تعدادی تفاوت مهم نیز بین آن‌ها وجود دارد. یکی از این تفاوت‌ها به سیگنال نمایی زمان گسسته $e^{j\omega.n}$ مربوط می‌شود. در بخش ۱-۴-۱ دو خاصیت از همتای زمان پیوسته آن $e^{j\omega.t}$ را معرفی کردیم:

۱. هر چه مقدار $\omega.$ بزرگتر باشد، نرخ نوسان سیگنال بالاتر است؛

۲. $e^{j\omega_0 t}$ به ازای هر مقدار ω_0 متناوب است.

در این بخش، صورت‌های زمان گسسته هر دوی این خاصیت‌ها را تشریح می‌کنیم و همان‌طور که خواهیم دید تفاوت‌های صریحی بین هر دوی این‌ها با همتاهای زمان پیوسته آن‌ها وجود دارد.

این واقعیت که خاصیت نخست در زمان گسسته متفاوت است، نتیجه مستقیمی از یک تمایز بسیار مهم دیگر بین نمایی‌های مختلط زمان گسسته و زمان پیوسته است. بویژه نمایی مختلط زمان گسسته با فرکانس $\omega_0 + 2\pi$ را در نظر بگیرید:

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \qquad (۱-۳۱)$$

eq35

از معادله (۱-۳۱)، ملاحظه می‌کنیم که نمایی با فرکانس $\omega_0 + 2\pi$ همان نمایی با فرکانس ω_0 است. بنابراین، وضعیتی بسیار متفاوت با حالت زمان پیوسته داریم که در آن سیگنال‌های $e^{j\omega_0 t}$ همگی به ازای مقادیر متمایز ω_0، متفاوت هستند. در زمان گسسته این سیگنال‌ها متمایز نیستند، به طوری که سیگنال با فرکانس ω_0 با سیگنال‌های با فرکانس‌های $\omega_0 \pm 2\pi$، $\omega_0 \pm 4\pi$ و غیره یکسان است. بنابراین، در بررسی نمای‌های مختلط زمان گسسته، برای انتخاب ω_0 فقط لازم است که یک بازه فرکانسی به طول 2π را در نظر بگیریم. گرچه، طبق معادله (۱-۳۱)، هر بازه‌ای به طول 2π را می‌توان اختیار کرد، در اکثر اوقات از بازه $0 \leqslant \omega_0 < 2\pi$ یا بازه $-\pi \leqslant \omega_0 < \pi$ استفاده خواهیم کرد [۱].

به خاطر متناوب بودن که معادله (۱-۳۱) دلالت بر آن دارد، سیگنال $e^{j\omega_0 n}$ دارای نرخ نوسانی که به طور پیوسته با افزایش مقدار ω_0 افزایش یابد، نیست. در عوض، همانطور که در شکل ۱-۲۱ نشان داده شده است، با افزایش ω_0 از صفر، تا وقتی که به $\omega_0 = \pi$ برسیم، سیگنال‌هایی بدست می‌آوریم که با سرعت بیشتر و بیشتری نوسان می‌کنند. با ادامه افزایش ω_0 نرخ نوسان کاهش می‌یابد تا وقتی که به $\omega_0 = 2\pi$ برسیم که همان دنباله ثابت مشابه $\omega_0 = 0$ را ایجاد می‌کند. بنابراین، نمایی‌های زمان گسسته فرکانس پایین (یعنی با تغییرات آهسته) دارای مقدار ω_0 بین 0 و 2π و هر مضرب زوج دیگری از π هستند، در حالی که فرکانس‌های بالا (متناظر با تغییرات سریع) در نزدیکی $\omega_0 = \pm\pi$ و هر مضرب فرد دیگری از π واقع شده‌اند. بویژه توجه کنید که به ازای $\omega_0 = \pi$ یا هر مضرب فرد دیگری از π داریم:

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n \qquad (۱-۳۲)$$

به طوری که سیگنال با تغییر علامت دادن در هر نقطه از زمان، نوسان سریعی دارد (چنانکه در شکل ۱-۲۱(ه) به تصویر در آمده است).

دومین خاصیتی که می‌خواهیم در نظر بگیریم، به متناوب بودن نمایی زمان گسسته مربوط می‌شود. برای آن که سیگنال $e^{j\omega_\circ n}$ متناوب با دوره تناوب $N > \circ$ باشد، باید داشته باشیم:

$$e^{j\omega_\circ(n+N)} = e^{j\omega_\circ n} \quad (۱-۳۳)$$

یا به طور معادل

$$e^{j\omega_\circ N} = ۱ \quad (۱-۳۴)$$

eq36

برای برقراری معادله (۱-۳۴)، $\omega_\circ N$ باید مضربی از ۲π باشد. یعنی باید عدد صحیح m موجود باشد چنان که:

$$\omega_\circ N = ۲\pi m \quad (۱-۳۵)$$

یا به طور معادل:

$$\frac{\omega_\circ}{۲\pi} = \frac{m}{N} \quad (۱-۳۶)$$

eq37

برطبق معادله (۱-۳۶) سیگنال $e^{j\omega_\circ n}$ متناوب است اگر $\frac{\omega_\circ}{۲\pi}$ یک عدد گویا باشد و در غیر این صورت متناوب نیست. برای سینوسی‌های زمان گسسته نیز همین ملاحظات برقرار است. به عنوان مثال، سیگنال‌های نشان داده شده در شکل‌های ۱-۱۹(الف) و ۱-۱۹(ب) متناوب هستند، در حالی که سیگنال شکل ۱-۱۹(ج) متناوب نیست.

با استفاده از محاسباتی که هم اکنون انجام دادیم، دوره تناوب و فرکانس اصلی نمایی‌های مختلط زمان گسسته را نیز می‌توان تعیین کرد، که فرکانس اصلی سیگنال متناوب زمان گسسته را همانند آنچه که در حالت زمان پیوسته صورت گرفت، تعریف می‌کنیم. یعنی، اگر $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N متناوب باشد، فرکانس اصلی آن $\frac{۲\pi}{N}$ است. اکنون نمایی مختلط متناوب $x[n] = e^{j\omega_\circ n}$ با $\omega_\circ \neq \circ$ را در نظر بگیرید. چنانچه که هم اکنون ملاحظه کردیم، $\omega_\circ$ باید به ازای یک زوج عدد صحیح m و N، با $N > \circ$، در معادله (۱-۳۶) صدق کند. نشان داده می‌شود که اگر $\omega_\circ \neq \circ$ بوده و m و N عامل مشترکی نداشته باشند، آنگاه دوره تناوب اصلی $x[n]$ برابر N است. با استفاده از این واقعیت به همراه معادله (۱-۳۶) در می‌یابیم که فرکانس اصلی سیگنال متناوب $e^{j\omega_\circ n}$ برابر است با:

$$\frac{۲\pi}{N} = \frac{\omega_\circ}{m} \quad (۱-۳۷)$$

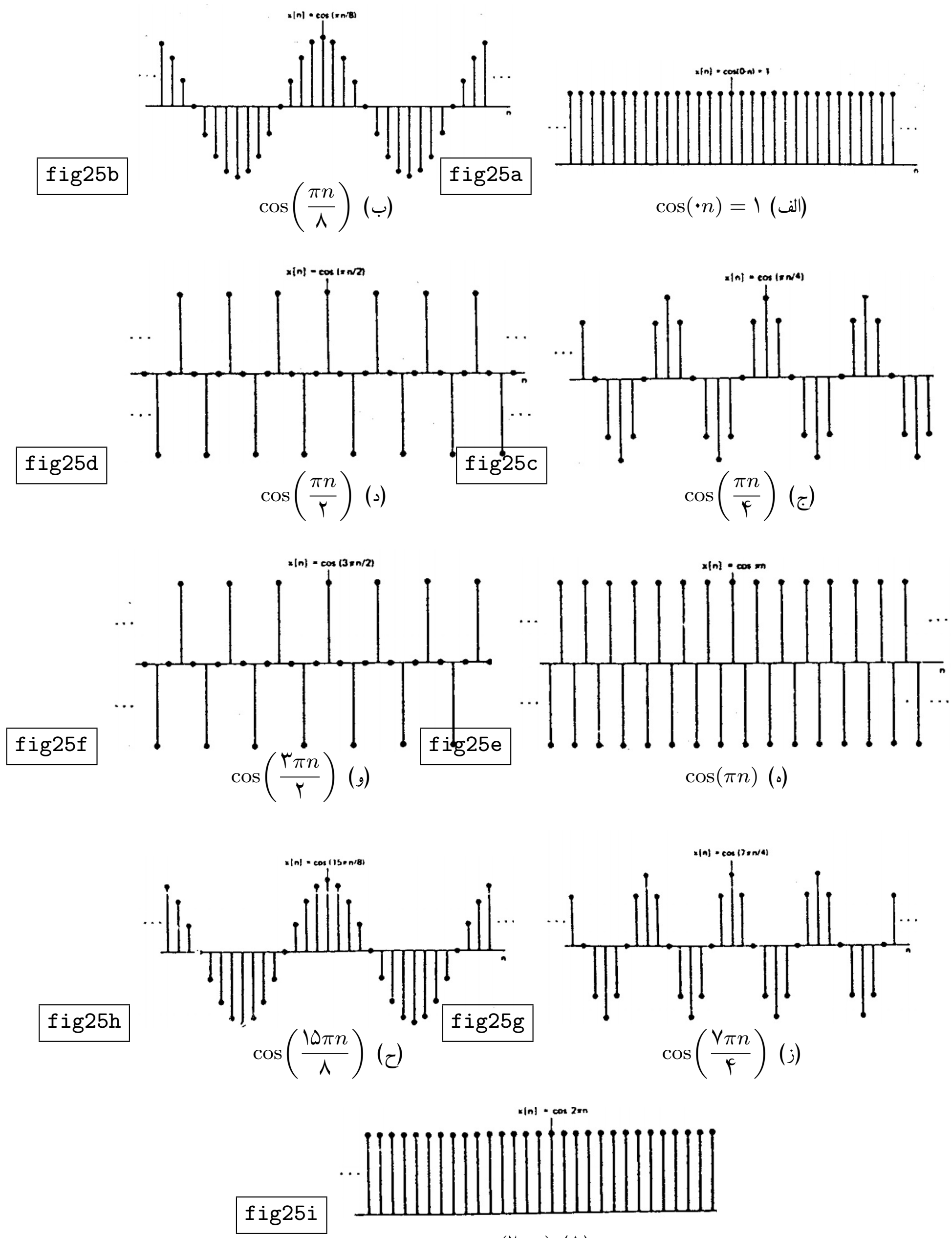


fig25b fig25a

$\cos\left(\frac{\pi n}{۸}\right)$ (ب) $\cos(۰ n) = ۱$ (الف)

fig25d fig25c

$\cos\left(\frac{\pi n}{۲}\right)$ (د) $\cos\left(\frac{\pi n}{۴}\right)$ (ج)

fig25f fig25e

$\cos\left(\frac{۳\pi n}{۲}\right)$ (و) $\cos(\pi n)$ (ه)

fig25h fig25g

$\cos\left(\frac{۱۵\pi n}{۸}\right)$ (ح) $\cos\left(\frac{۷\pi n}{۴}\right)$ (ز)

fig25i

$\cos(۲\pi n)$ (ط)

fig25

شکل ۱-۲۱: دنباله‌های زمان گسسته سینوسی برای چندین فرکانس مختلف

توجه کنید که دوره تناوب اصلی را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$N = m\left(\frac{۲\pi}{\omega_۰}\right) \tag{۱-۳۸}$$

eq39

بار دیگر، این دو عبارت اخیر با همتاهای زمان پیوسته خود متفاوت هستند. برخی از تفاوت‌های بین سیگنال زمان پیوسته و $e^{j\omega_۰ t}$ و سیگنال زمان گسسته $e^{j\omega_۰ n}$ را در جدول

جدول ۱-۱: مقایسه سیگنال‌های $e^{j\omega_۰ n}$ و $e^{j\omega_۰ t}$

t1

$e^{j\omega_۰ t}$	$e^{j\omega_۰ n}$
سیگنال‌های متمایز برای مقادیر متمایز $\omega_۰$	سیگنال‌های یکسان برای مقادیر $\omega_۰$ به فواصل مضاربی از ۲π
متناوب به ازای هر انتخاب $\omega_۰$	متناوب فقط به ازای $\omega_۰ = \frac{۲\pi m}{N}$ برای مقادیر صحیح $N > ۰$ و m
فرکانس اصلی $\omega_۰$	فرکانس اصلی $\frac{\omega_۰}{m}$ (با فرض این که m و N هیچ عامل مشترکی نداشته باشند.)
دوره تناوب اصلی، $\omega_۰ = ۰$: تعریف نشده، $\omega_۰ \neq ۰ : \frac{۲\pi}{\omega_۰}$	دوره تناوب اصلی (با فرض این که m و N هیچ عامل مشترکی نداشته باشند.)، $\omega_۰ = ۰$: تعریف نشده، $\omega_۰ \neq ۰ : m\left(\frac{۲\pi}{\omega_۰}\right)$

اکنون برای بدست آوردن شناخت بیشتری نسبت به این خواص، بار دیگر سیگنال‌های نشان داده شده در شکل ۱-۱۹ را بررسی می‌کنیم. ابتدا دنباله $x[n] = \cos\left(\frac{۲\pi n}{۱۲}\right)$ نشان داده شده در شکل ۱-۱۹(الف) را در نظر بگیرید که می‌توان آن را به صورت مجموعه نمونه‌هایی از سینوسی زمان پیوسته $x(t) = \cos\left(\frac{۲\pi t}{۱۲}\right)$ در نقاط زمانی صحیح تصور کرد. در این حالت $x(t)$ با دوره تناوب اصلی ۱۲ متناوب است و $x[n]$ نیز با دوره تناوب اصلی ۱۲ متناوب است. یعنی مقادیر $x[n]$ بعد از هر ۱۲ نقطه دقیقا هم گام با دوره تناوب اصلی $x(t)$ تکرار می‌شوند.

در مقابل سیگنال $x[n] = \cos\left(\frac{۸\pi n}{۳۱}\right)$ نشان داده شده در شکل ۱-۱۹(ب) را در نظر بگیرید که می‌توان آن را به صورت مجموعه نمونه‌هایی از $x(t) = \cos\left(\frac{۸\pi t}{۳۱}\right)$ در نقاط زمانی صحیح تلقی کرد. در این حالت $x(t)$ با دوره تناوب اصلی $\frac{۳۱}{۴}$ متناوب است. از سوی دیگر، $x[n]$ با دوره تناوب اصلی ۳۱ متناوب است. علت این تفاوت آن است که سیگنال زمان گسسته فقط برای مقادیر صحیح متغیر مستقل تعریف می‌شود. بنابراین، در لحظه $t = \frac{۳۱}{۴}$، یعنی وقتی که $x(t)$ یک دوره تناوب خود را کامل می‌کند (با شروع از $t = ۰$)، نمونه‌ای وجود ندارد. به طور مشابه در لحظات $t = ۲ \times \frac{۳۱}{۴}$ یا $t = ۳ \times \frac{۳۱}{۴}$، یعنی وقتی که $x(t)$ دو یا سه دوره تناوب خود را کامل کرده است، نیز نمونه‌ای وجود ندارد. اما در لحظه $t = ۴ \times \frac{۳۱}{۴}$، یعنی وقتی $x(t)$ چهار دوره تناوب را کامل کرده است، نمونه‌ای وجود دارد. این مطلب را می‌توان در شکل ۱-۱۹(ب) دید که

در آن الگوی مقادیر $x[n]$ پس از هر سیکل از مقادیر مثبت و منفی تکرار نمی‌شود. در عوض الگو بعد از چهار تا از این سیکل‌ها یعنی بعد از هر ۳۱ نقطه تکرار می‌شود.

به طور مشابه، سیگنال $x[n] = cos(\frac{n}{۶})$ را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از نمونه‌های سیگنال $x(t) = cos(\frac{t}{۶})$ در نقاط زمانی صحیح در نظر گرفت. در این حالت، مقادیر $x(t)$ در نقاط نمونه‌برداری صحیح، هرگز تکرار نمی‌شود، چرا که این نقاط نمونه‌برداری هرگز یک بازه زمانی به طول دقیقا مضربی از دوره تناوب $x(t)$، ۱۲π، را در برنمی‌گیرند. بنابراین، $x[n]$ متناوب نیست اگر چه چشم به طور بصری بین نقاط نمونه را درون‌یابی کرده و به نظر می‌رسد که پوش $x(t)$ متناوب است.

مثال ۱-۱ فرض کنید می‌خواهیم دوره تناوب اصلی سیگنال زمان گسسته زیر را تعیین کنیم [۱]:

$$x[n] = e^{j\frac{۲\pi}{۳}n} + e^{j\frac{۳\pi}{۴}n} \quad (۳۹-۱)$$

eq38

حل: نمایی نخست در سمت راست معادله (۳۹-۱) دارای دوره تناوب اصلی ۳ است. در حالی که درستی این امر را می‌توان از معادله (۴۷-۱) تحقیق کرد، راه ساده‌تری برای به دست آوردن جواب وجود دارد. به خصوص توجه کنید که زاویه $(\frac{۲\pi}{۳})n$ در جمله نخست باید به اندازه مضربی از ۲π افزایش یابد تا مقادیر این نمایی شروع به تکرار کنند. پس بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که اگر n به اندازه ۳ افزایش یابد، به زاویه به اندازه یک مضرب از ۲π افزوده می‌شود. در جمله دوم می‌بینیم که برای افزایش زاویه $(\frac{۳\pi}{۴})n$ به اندازه ۲π، لازم است که n به اندازه $\frac{۸}{۳}$ افزایش یابد که امری ناممکن است، چرا که n باید لزوما عددی صحیح باشد. به طور مشابه افزایش زاویه به اندازه ۴π نیز نیاز به یک افزایش غیر صحیح n به اندازه $\frac{۱۶}{۳}$ دارد. اما افزایش زاویه به اندازه ۶π نیاز به افزایش n به اندازه ۸ دارد و بنابراین دوره تناوب اصلی جمله دوم برابر ۸ است.

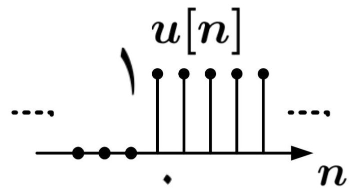
اکنون برای آن که کل سیگنال $x[n]$ تکرار شود، هر یک از جملات معادله (۳۹-۱) باید تعداد صحیحی از دوره تناوب اصلی خود را طی کند. کوچکترین افزایش n که به ازای آن، این امر تحقیق یابد، برابر ۲۴ است. یعنی، در طی بازه‌ای به طول ۲۴ نقطه، جمله نخست در سمت راست معادله (۳۹-۱) هشت دوره تناوب اصلی خود را سپری می‌کند، جمله دوم به اندازه سه دوره تناوب اصلی خود و کل سیگنال $x[n]$ دقیقا به اندازه یک دوره تناوب اصلی خود را سپری می‌کند.

۱-۵-۳ دنباله پله واحد

اولین سیگنال زمان گسسته اساسی، پله واحد زمان گسسته است، که با $u[n]$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u[n] = \begin{cases} ۰ & n < ۰ \\ ۱ & n \geqslant ۰ \end{cases} \qquad (۱-۴۰)$$

دنباله پله واحد در شکل ۱-۲۲ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲۲: پله واحد زمان گسسته

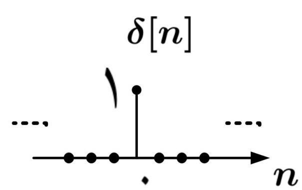
fig18

۱-۵-۴ دنباله ضربه واحد

یکی از ساده‌ترین سیگنال‌های زمان گسسته، ضربه واحد (یا نمونه واحد) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} ۰ & n \neq ۰ \\ ۱ & n = ۰ \end{cases} \qquad (۱-۴۱)$$

این دنباله در شکل ۱-۲۳ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲۳: ضربه واحد زمان گسسته

fig19

رابطه نزدیکی بین ضربه واحد و پله واحد زمان گسسته وجود دارد. بخصوص، ضربه واحد زمان گسسته تفاضل اول پله زمان گسسته است [۱]:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - ۱] \qquad (۱-۴۲)$$

برعکس، پله واحد زمان گسسته مجموعه جاری نمونه واحد است، یعنی [۱]:

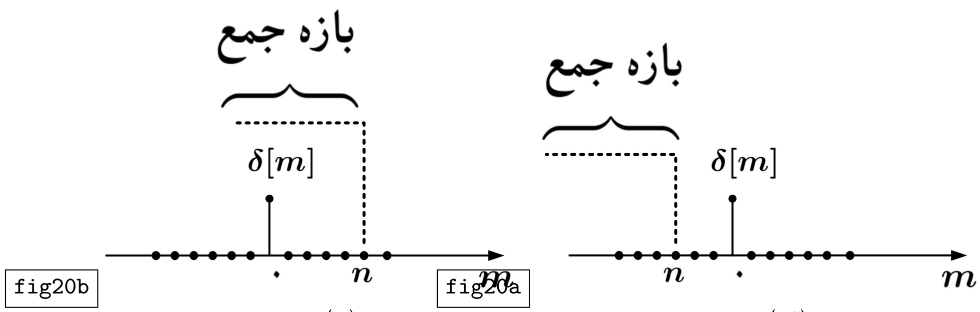
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \qquad (۱-۴۳)$$ eq27

معادله (۱-۴۳) در شکل ۱-۲۴ به طور ترسیمی نشان داده شده است. چون تنها مقدار غیر صفر نمونه واحد در نقطه‌ای است که آرگومان آن صفر است، از روی شکل می‌بینیم که مجموعه جاری شده در معادله (۱-۴۳) برای $n < ۰$، برابر صفر و برای $n \geqslant ۰$، برابر یک است. علاوه بر این، با تغییر متغیر مجموع از m به $k = n - m$ در معادله (۱-۴۳)، در می‌یابیم که پله واحد زمان گسسته را همچنین می‌توان به صورت زیر برحسب نمونه واحد نوشت [۱]:

$$u[n] = \sum_{k=\infty}^{۰} \delta[n-k]$$

یا به طور معادل:

$$u[n] = \sum_{k=۰}^{\infty} \delta[n-k] \qquad (۱-۴۴)$$ eq28

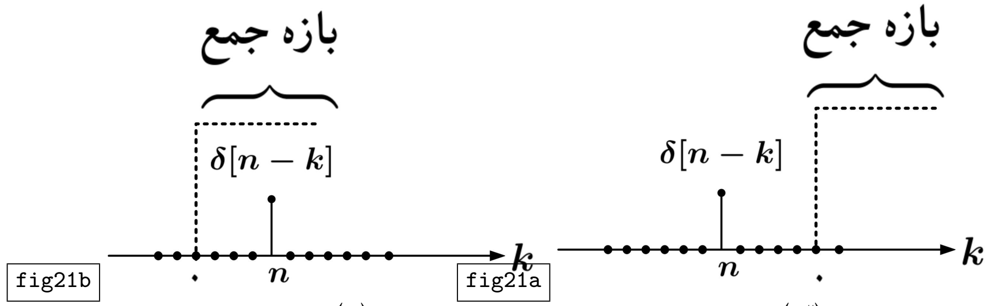


(ب) $n > ۰$ (الف) $n < ۰$

شکل ۱-۲۴: مجموع جاری در معادله (۱-۴۳) fig20

معادله (۱-۴۴) در شکل ۱-۲۵ نشان داده شده است. در این حالت مقدار غیر صفر $\delta[n-k]$ در مقدار k مساوی n قرار دارد، به طوری که بار دیگر ملاحظه می‌کنیم که مجموع در معادله (۱-۴۴) برای $n < ۰$ برابر صفر و برای $n > ۰$ برابر یک است [۱].

یک تعبیر برای معادله (۱-۴۴) عبارت است از مجموعی از ضربه‌های تاخیر یافته؛ یعنی می‌توان معادله را به صورت مجموعی از یک ضربه واحد $\delta[n]$ واقع در $n = ۰$، یک ضربه واحد $\delta[n-۱]$ واقع در $n = ۱$، یکی دیگر، $\delta[n-۲]$ واقع در $n = ۲$ و غیره در نظر گرفت [۱].



(ب) $n>0$ (الف) $n<0$

fig21

شکل ۱-۲۵: مجموع جاری در معادله (۱-۴۴)

از دنباله ضربه واحد می‌توان برای نمونه‌گیری از مقدار یک سیگنال در $n=0$ استفاده کرد. بخصوص، چون $\delta[n]$ فقط به ازای $n=0$ غیر صفر (و مساوی ۱) است، نتیجه می‌شود که [۱]:

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n] \qquad (۱\text{-}۴۵)$$

به طور کلی‌تر، اگر ضربه واحد $\delta[n-n_0]$، واقع در $n=n_0$ را در نظر بگیریم، آنگاه داریم [۱]:

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0] \qquad (۱\text{-}۴۶)$$

۱-۶ تبدیل متغیر مستقل

۱-۶-۱ مقیاس‌بندی

مقیاس‌بندی[1] یا تغییر مقیاس زمانی برای سیگنال اینگونه تعریف می‌شود که اگر $x(t)$ به صورت شکل ۱-۲۶(الف) باشد، در آنصورت $x(2t)$ و $x(\frac{t}{2})$ بصورت نمایش داده شده منقبض و منبسط می‌گردد. درواقع، اگر مثال $x(t)$ به عنوان یک نوار ضبط شده را در نظر بگیریم، آنگاه $x(2t)$ همان نوار است وقتی که با دو برابر سرعت پخش شود و $x(\frac{t}{2})$ همان نوار است وقتی که با نصف سرعت پخش شود.

البته این امر که در حالت کلی $x(at)$ نسبت به $x(t)$ منقبض می‌شود اگر $|a|>1$ و منبسط می‌شود اگر $|a|<1$، فقط برای سیگنال‌های پیوسته زمانی صحیح است. در مورد یک دنباله ممکن است بطور کلی شکل دنباله تغییر کند و اصولا نیز محدودیت‌هایی برای مقیاس‌بندی یک دنباله وجود دارد. به عنوان مثال، یک دنباله به صورت $x[\sqrt{2}n]$ هرگز قابل تعریف نیست، در حالیکه $x(\sqrt{2}t)$ قابل تعریف است. بنابراین برای

[1] Scaling

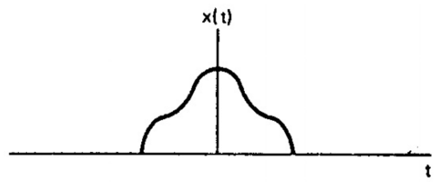


fig26a

$x(t)$ (الف)

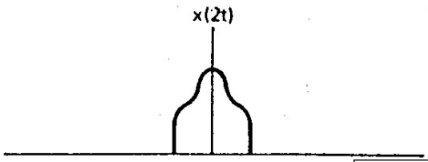


fig26b

$x(۲t)$ (ب)

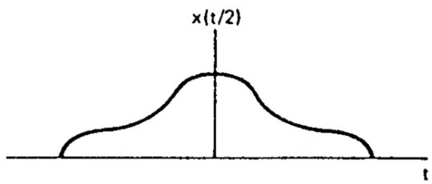


fig26c

$x(\frac{t}{۲})$ (ج)

fig26

شکل ۱-۲۶: سیگنال $x(t)$ و تغییر مقیاس زمانی

مقیاس‌بندی دنباله‌های گسسته زمانی باید توجه کرد که $x[an]$ وقتی قابل تعریف است که $\frac{۱}{a}$ یک عدد صحیح باشد.

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

ex2 **مثال ۱-۲** مطلوبست $x[۲n]$ و $x[\frac{۱}{۲}n]$، اگر $x[n]$ به صورت شکل ۱-۲۷ باشد.

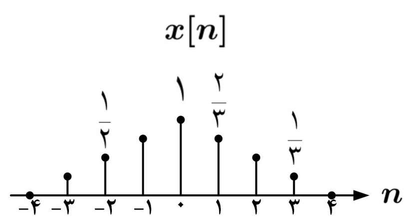


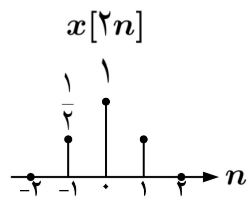
fig27

شکل ۱-۲۷: سیگنال $x[n]$ برای مثال ۱-۲

حل: تعریف می‌کنیم: $y[n]=x[۲n]$ در این صورت داریم:

$$y[-۲]=x[-۴]=۰ \quad y[-۱]=x[-۲]=\frac{۱}{۲} \quad y[۰]=x[۰]=۱$$
$$y[۱]=x[۲]=\frac{۱}{۲} \qquad y[۲]=x[۴]=۰$$

بنابراین دنباله $y[n]=x[۲n]$ بصورت شکل ۱-۲۸ است (مقادیر موجود در nهای فرد حذف شده‌اند).



شکل ۱-۲۸: سیگنال $x[۲n]$ برای مثال ۱-۲

fig28

برای قسمت بعد تعریف می‌کنیم: $y[n]=x[\frac{۱}{۲}n]$ بنابراین، مشاهده می‌شود که به ازای nهای فرد $y[n]$ تعریف نشده است و به ازا nهای زوج داریم:

$$y[-۸]=x[-۴]=۰ \quad y[-۶]=x[-۳]=\frac{۱}{۳} \quad y[-۴]=x[-۲]=\frac{۱}{۲}$$
$$y[-۲]=x[-۱]=\frac{۲}{۳} \quad y[۰]=x[۰]=۱ \qquad y[۲]=x[۱]=\frac{۲}{۳}$$
$$y[۴]=x[۲]=\frac{۱}{۲} \qquad y[۶]=x[۳]=\frac{۱}{۳} \qquad y[۸]=x[۴]=۰$$

بنابراین شکل این دنباله مشابه شکل ۱-۲۹ خواهد شد با این تفاوت که مقادیر n باید هر یک دو برابر شوند و در نقاطی که در آنجا n فرد است دنباله تعریف نشده است.

دیده می‌شود که در اینجا دنباله $y[n]$ در برخی نقاط تعریف ندارد و این ممکن است مشکلاتی را در بر داشته باشد. این ابهام در حالت کلی برای تعریف هر دنباله به صورت $y[n]=x[\frac{n}{k}]$ که k عدد صحیح است، ظاهر می‌شود. برای رفع این ابهام مناسب است که تعریف زیر را انجام دهیم:

$$y[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \text{اگر k مضرب صحیح از n باشد} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

با این تعریف می‌توان دنباله $x[\frac{۱}{۲}n]$ را به صورت شکل ۱-۳۰ ترسیم نمود.

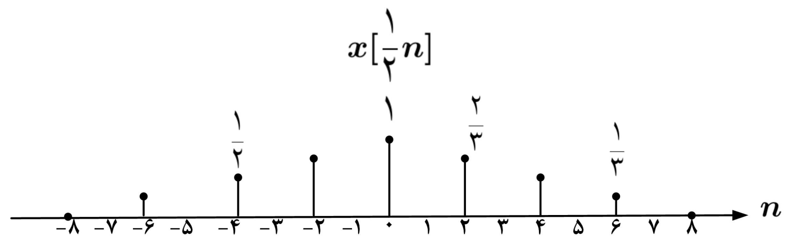


fig29

شکل ۱-۲۹: سیگنال $x[\frac{1}{2}n]$ برای مثال ۱-۲

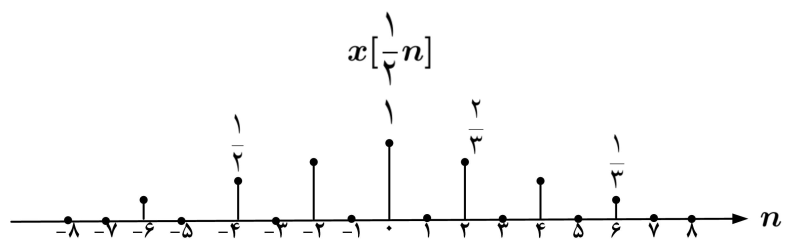


fig30

شکل ۱-۳۰: سیگنال $x[\frac{1}{2}n]$ تغییر یافته برای مثال ۱-۲

۱-۶-۲ انعکاس حول مبدا

تبدیل اساسی بعدی وارون‌سازی زمانی یا انعکاس حول مبدا[1] است. چنانچه در شکل ۱-۳۱ نشان داده شده است، سیگنال $x[-n]$ و $x(-t)$ به ترتیب از روی سیگنال $x[n]$ و $x(t)$ با منعکس کردن نسبت به $n = 0$ و $t = 0$ (یعنی برگرداندن سیگنال) بدست می‌آیند. بنابراین، اگر $x(t)$ نشان‌دهنده صدای ضبط شده روی نوار باشد، آنگاه $x(-t)$ همان نوار ضبط شده است وقتی که به طور معکوس خوانده شود.

۱-۶-۳ انتقال

مثالی ساده و بسیار مهم از تبدیل متغیر مستقل سیگنال، انتقال[2] زمانی است. در شکل ۱-۳۲ یک نمونه انتقال زمانی در زمان گسسته نشان داده شده است، که در آن دو سیگنال $x[n]$ و $x[n - n_0]$ داریم که دارای شکل یکسانی هستند، اما نسبت به هم جابه‌جا شده یا انتقال یافته‌اند. در این شکل، $x[n - n_0]$ یک نسخه تاخیر یافته از $x[n]$ می‌باشد (یعنی هر نقطه در $x[n]$ بعدا در $x[n - n_0]$ ظاهر می‌شود) [۱].

---

[1] Reflection
[2] Shift

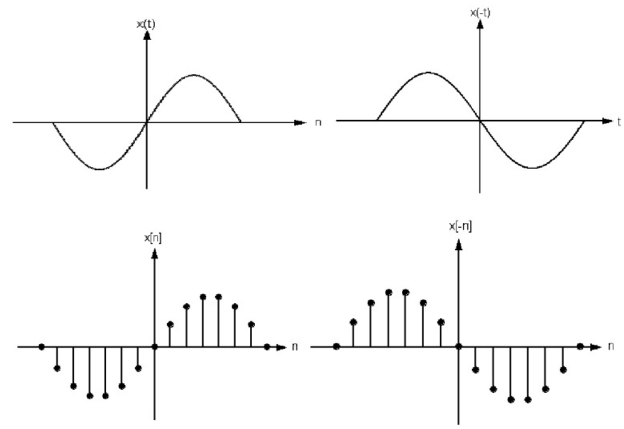


fig31

شکل ۱-۳۱: انعکاس در حوزه پیوسته و گسسته

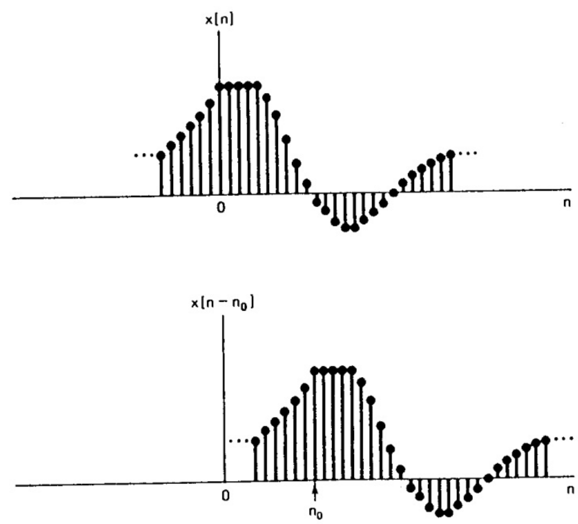


fig32

شکل ۱-۳۲: انتقال زمانی سیگنال گسسته که $n_0 > 0$

با انتقال‌های زمانی در زمان پیوسته نیز مواجه می‌شویم، چنانچه در شکل ۱-۳۳ نشان داده شده است و در آن $x(t-t_0)$ نشان‌دهنده نسخه تاخیر یافته (اگر t_0 مثبت باشد) یا جلو افتاده (اگر t_0 منفی باشد) از $x(t)$ است. در شکل ۱-۳۳ $x(t-t_0)$ یک نسخه جلو افتاده از $x(t)$ است (یعنی، هر نقطه در $x(t)$، قدری زودتر در $x(t-t_0)$ ظاهر می‌شود) [۱].

سیگنال‌هایی که به این شیوه به هم مربوطند، در کاربردهایی نظیر پردازش سیگنال رادار، سونار و لرزه‌نگاری

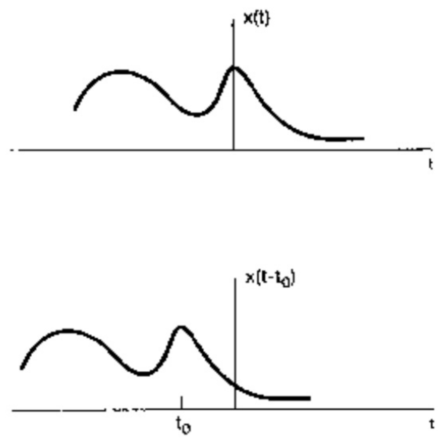


fig33 شکل ۱-۳۳: انتقال زمانی سیگنال پیوسته که $t_0 < 0$.

پدیدار می‌شوند که در آن‌ها چندین گیرنده در جاهای مختلف سیگنالی را که از طریق یک واسطه (آب، سنگ، هوا و غیره) ارسال می‌شود، دریافت می‌کنند. در این حالت اختلاف بین زمان انتشار از نقطه مبدا سیگنال ارسالی به هر دو گیرنده، منجر به یک انتقال زمانی میان سیگنال‌ها در دو گیرنده می‌شود [۱].

۱-۶-۴ تبدیل متغیر مستقل در حالت کلی

فرض کنید می‌خواهیم اثر تبدیل متغیر مستقل یک سیگنال مفروض، $x(t)$، را تعیین کنیم تا سیگنالی به صورت $x(at+b)$ بدست آوریم، که در آن a و b اعداد مشخصی هستند. یک روش منظم برای انجام این کار، آن است که نخست $x(t)$ را مطابق مقدار b تاخیر داده یا جلو ببریم و سپس تغییر مقیاس در زمان و یا وارون‌سازی در زمان را روی سیگنال حاصل، مطابق مقدار a انجام دهیم. سیگنال تاخیر یافته یا جلو افتاده، اگر $|a| < 1$ باشد، به طور خطی کشیده می‌شود، اگر $|a| > 1$ باشد به طور خطی فشرده می‌شود و اگر $a < 0$ باشد در زمان وارون می‌شود.

ex3 **مثال ۱-۳** با توجه به سیگنال $x(t)$ نشان داده شده در شکل ۱-۳۴، سیگنال $x(t+1)$، همانطور که در شکل ۱-۳۵ نشان داده شده است، متناظر با یک جلوافتادگی (انتقال به چپ) به اندازه یک واحد در امتداد محور t است. بویژه متذکر می‌شویم که مقدار $x(t)$ در $t = t_0$، برای $x(t+1)$ در $t = t_0 - 1$ ظاهر می‌شود. به عنوان مثال، مقدار $x(t)$ در $t = 1$، برای $x(t+1)$ در $t = 1 - 1 = 0$ یافت می‌شود. همچنین، چون $x(t)$ برای $t < 0$ صفر است، $x(t+1)$ برای $t < -1$ صفر است. به طور مشابه چون $x(t)$ برای $t > 2$ صفر است، $x(t+1)$ برای $t > 1$ صفر است [۱].

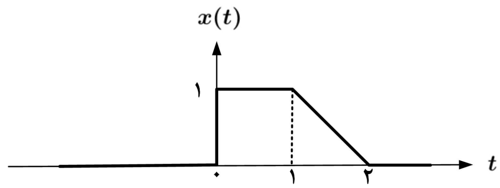


fig34

شکل ۱-۳۴: سیگنال $x(t)$ برای مثال ۱-۳

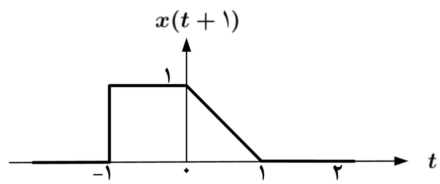


fig35

شکل ۱-۳۵: سیگنال $x(t+۱)$ برای مثال ۱-۳

ex4 **مثال ۱-۴** اکنون سیگنال $x(-t+۱)$ را در نظر بگیرید، که می‌توان آن را با قرار دادن $-t$ به جای t در $x(t+۱)$ بدست آورد. یعنی $x(-t+۱)$ نسخه وارون‌شده زمانی $x(t+۱)$ است. بنابراین، همانطور که در شکل ۱-۳۶ نشان داده شده است، $x(-t+۱)$ را می‌توان به طور ترسیمی با منعکس کردن $x(t+۱)$ نسبت به محور $t=۰$ بدست آورد.

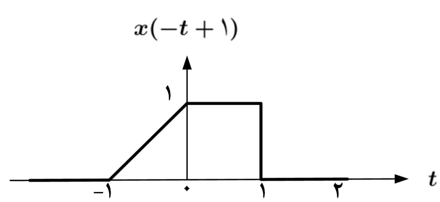
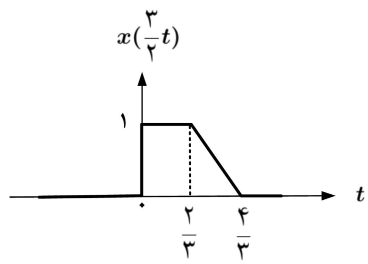


fig36

شکل ۱-۳۶: سیگنال $x(-t+۱)$ برای مثال ۱-۴

ex5 **مثال ۱-۵** با توجه به سیگنال $x(t)$ نشان داده شده در شکل ۱-۳۴، سیگنال $x(\frac{۳}{۲}t)$، همانطور که در شکل ۱-۳۷ نشان داده شده است، متناظر با فشردگی خطی $x(t)$ با ضریب $\frac{۲}{۳}$ است. بویژه متذکر می‌شویم که مقدار

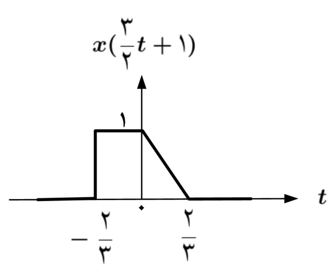
در $x(t)$ در $t = t.$، برای $x(\frac{۳}{۲}t)$ در $t = \frac{۲}{۳}t.$ ظاهر می‌شود. به عنوان مثال، مقدار $x(t)$ در $t = ۱$ برای $x(\frac{۳}{۲}t)$ در $t = \frac{۲}{۳}(۱) = \frac{۲}{۳}$ واقع می‌شود. همچنین، چون $x(t)$ برای $t < ۰$ صفر است، $x(\frac{۳}{۲}t)$ نیز برای $t < ۰$ صفر خواهد بود. به طور مشابه، چون $x(t)$ برای $t > ۲$ صفر است، $x(\frac{۳}{۲}t)$ نیز برای $t > \frac{۴}{۳}$ صفر است [۱].



شکل ۱-۳۷: سیگنال $x(\frac{۳}{۲}t)$ برای مثال ۱-۵

fig37

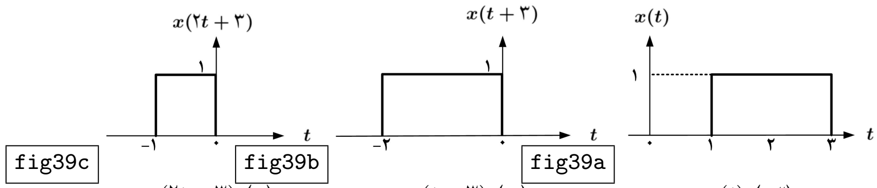
ex6 **مثال ۱-۶** نشان دهید که چگونه می‌توان $x(\frac{۳}{۲}t + ۱)$ را برای سیگنال $x(t)$، نشان داده شده در شکل ۱-۳۴، تعیین کرد. چون $b = ۱$ است، نخست $x(t)$ را، همانطور که در شکل ۱-۳۵ نشان داده شده است، به اندازه ۱ جلو می‌بریم (انتقال به چپ). چون $|a| = \frac{۳}{۲}$ است، سیگنال انتقال یافته شکل ۱-۳۵ را می‌توان به طور خطی با ضریب $\frac{۲}{۳}$ فشرده کرد تا سیگنال نشان داده شده در شکل ۱-۳۸ بدست آید [۱].



شکل ۱-۳۸: سیگنال $x(\frac{۳}{۲}t + ۱)$ برای مثال ۱-۶

fig38

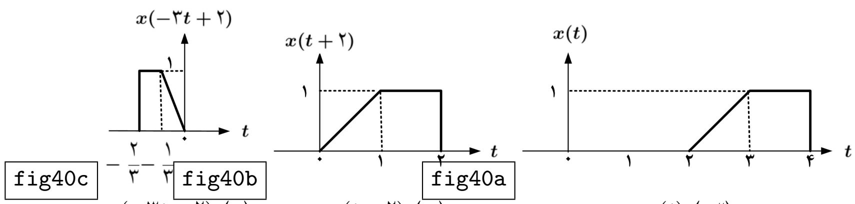
ex7 **مثال ۱-۷** از روی سیگنال $x(t)$ در شکل ۱-۳۹(الف) سیگنال $x(۲t + ۳)$ را رسم کنید.



$x(۲t+۳)$ (ج) $x(t+۳)$ (ب) $x(t)$ (الف)

fig39 شکل ۱-۳۹: سیگنال مثال ۱-۷

ex8 **مثال ۱-۸** از روی سیگنال $x(t)$ در شکل ۱-۴۰(الف) سیگنال $x(-۳t+۲)$ را رسم کنید.



$x(-۳t+۲)$ (ج) $x(t+۲)$ (ب) $x(t)$ (الف)

fig40 شکل ۱-۴۰: سیگنال مثال ۱-۸

۱-۷ چند خاصیت (تعریف) در مورد سیگنال‌ها

تعاریفی که در این قسمت ارائه می‌شود برای سیگنال‌های پیوسته و گسسته زمان صادق می‌باشد.

۱-۷-۱ سیگنال زوج و فرد

یکی از خواص مفید سیگنال‌ها به تقارن آن‌ها تحت وارون‌سازی زمانی مربوط می‌شود. سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$ را یک سیگنال زوج[1] می‌نامیم اگر با همتای وارون‌شده زمانی‌اش، یعنی با انعکاس آن نسبت به محور $t=۰$، یکسان باشد. در زمان پیوسته، یک سیگنال زوج است اگر:

$$x(-t)=x(t) \qquad (۱-۴۷)$$ eq39

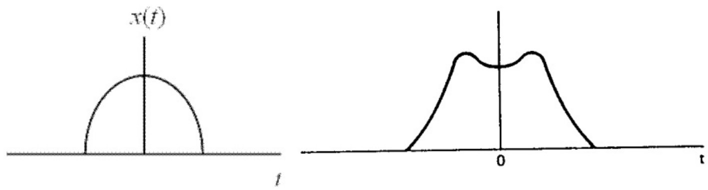
[1]Even

و یک سیگنال زمان گسسته زوج است اگر:

$$x[-n] = x[n] \tag{۱-۴۸}$$

eq40

در شکل ۱-۴۱ دو نمونه سیگنال زوج رسم شده است.



شکل ۱-۴۱: دو نمونه سیگنال زوج

fig41

یک سیگنال را فرد[1] گوییم اگر:

$$x(-t) = -x(t) \tag{۱-۴۹}$$

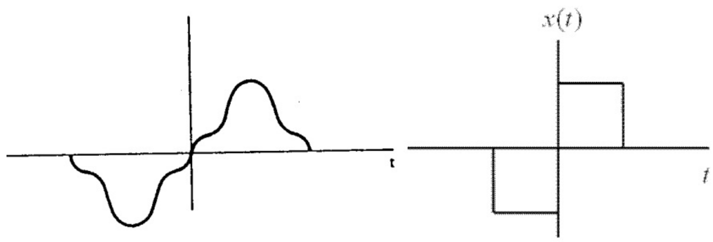
eq41

$$x[-n] = -x[n] \tag{۱-۵۰}$$

eq42

در شکل ۱-۴۲ دو نمونه سیگنال زوج رسم شده است.

یک سیگنال فرد باید در $t = ۰$ یا $n = ۰$ لزوما صفر باشد، زیرا معادلات ۱-۴۹ و ۱-۵۰ لازم می‌دارند $x(۰) = -x(۰)$ و $x[۰] = -x[۰]$ باشند.



شکل ۱-۴۲: دو نمونه سیگنال فرد

fig42

یک واقعیت مهم این است که هر سیگنال را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال که یکی از آن‌ها فرد و دیگری زوج باشد، تجزیه کرد. برای پی بردن به این امر، سیگنال

$$Ev\{x(t)\} = x_e(t) = \frac{۱}{۲}[x(t) + x(-t)] \tag{۱-۵۱}$$

eq43

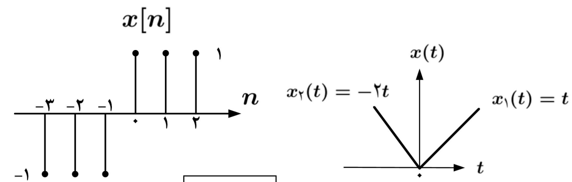
[1] Odd

را در نظر بگیرید که جز زوج $x(t)$ نامیده می‌شود. به طور مشابه، جز فرد $x(t)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$Od\{x(t)\} = x_o(t) = \frac{۱}{۲}[x(t) - x(-t)] \qquad (۱-۵۲) \quad \boxed{\texttt{eq44}}$$

بررسی این که جز زوج درواقع زوج است و جز فرد فرد است و این که $x(t)$ مجموع این دو است، تمرینی ساده است.

`ex9` **مثال ۱-۹** قسمت‌های زوج و فرد سیگنال‌های شکل ۱-۴۳ را پیدا کنید.



`fig43b` (ب) xn `fig43a` (الف) $x(t)$

شکل ۱-۴۳: سیگنال مثال ۱-۹ `fig43`

حل:

الف) گفتیم که هر تابع را می‌توان به صورت مجموع دو تابع زوج و فرد تقسیم کرد. داریم:

$$x(t) = -۲tu(-t) + tu(t) \qquad x(-t) = ۲tu(t) - tu(-t)$$

با توجه به روابط ۱-۵۱ و ۱-۵۲ داریم:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{۱}{۲}[-۲tu(-t) + tu(t) + ۲tu(t) - tu(-t)] = \frac{۱}{۲}[-۳u(-t) + ۳tu(t)] \\ &= \frac{۳}{۲}t[u(t) - u(-t)] \end{aligned}$$

و اما برای قسمت فرد داریم:

$$x_o(t) = \frac{۱}{۲}[-tu(t) - tu(t)] = -\frac{t}{۲}[u(t) + u(-t)] = -\frac{t}{۲}$$

چون $u(t) + u(-t) = ۱$ شکل هر دو قسمت زوج و فرد در شکل ۱-۴۴ رسم شده است.

ب) برای $x[n]$ داریم:

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-۱] + \delta[n-۲] - \{\delta[n+۱] + \delta[n+۲] + \delta[n+۳]\}$$

بنابراین

$$x[-n] = \delta[-n] + \delta[-n-۱] + \delta[-n-۲] - \{\delta[-n+۱] + \delta[-n+۲] + \delta[-n+۳]\}$$

یا

$$x[-n] = \delta[n] + \delta[n+۱] + \delta[n+۲] - \{\delta[n-۱] + \delta[n-۲] + \delta[n-۳]\}$$

برای قسمت زوج داریم:

$$x_e[n] = -\frac{۱}{۲}\delta[n-۳] - \frac{۱}{۲}\delta[n+۳] + \delta[n]$$

و برای قسمت فرد داریم:

$$x_o[n] = \delta[n-۱] + \delta[n-۲] + \frac{۱}{۲}\delta[n-۳] - \delta[n+۱] - \delta[n+۲] - \frac{۱}{۲}\delta[n+۳]$$

شکل هر دو قسمت زوج و فرد در شکل ۱-۴۵ رسم شده است.

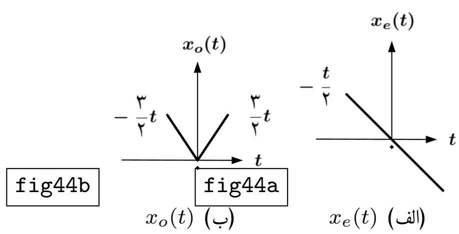


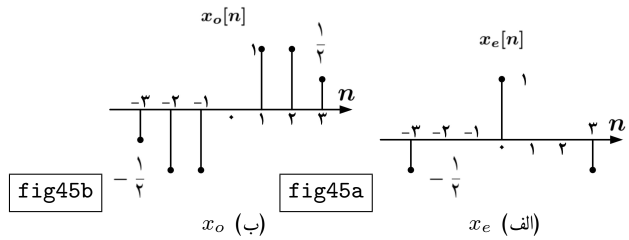
fig44 شکل ۱-۴۴: بخش‌های زوج و فرد سیگنال $x(t)$

۱-۷-۲ سیگنال‌های متناوب

دسته مهمی از سیگنال‌ها که به دفعات با آن مواجه خواهیم شد، دسته سیگنال‌های متناوب است. سیگنال زمان پیوسته متناوب $x(t)$ دارای این خاصیت است که برای آن یک مقدار مثبت T وجود دارد به طوری که برای تمام مقادیر t داریم:

$$x(t) = x(t+T) \qquad (۱-۵۳)$$

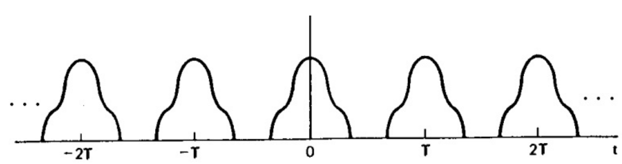
eq45



شکل ۱-۴۵: بخش‌های زوج و فرد سیگنال $x[n]$
fig45

به عبارت دیگر، سیگنال متناوب این ویژگی را دارد که با انتقال زمانی به مقدار T، بدون تغییر می‌ماند. در این حالت گوییم که $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T است.

مثالی از یک سیگنال زمان پیوسته در شکل ۱-۴۶ نشان داده شده است. از روی شکل یا از معادله (۱-۵۳)، می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه برای همه tها و برای هر عدد صحیح m، $x(t) = x(t+mT)$ خواهد بود. بنابراین، $x(t)$ با دوره‌های تناوب $۲T$، $۳T$، $۴T$ و ... نیز متناوب است. دوره تناوب اصلی T، برای $x(t)$، کوچکترین عدد مثبت T است که به ازای آن معادله (۱-۵۳) برقرار است. این تعریف دوره تناوب اصلی، به جز در حالتی که $x(t)$ یک مقدار ثابت است، کارآیی دارد. در این حالت خاص، دوره تناوب اصلی تعریف نشده است، زیرا $x(t)$ به ازای هر انتخاب T متناوب است (در نتیجه کوچکترین مقدار مثبت وجود ندارد). سیگنال $x(t)$ای را که متناوب نباشد، سیگنال نامتناوب می‌نامیم [۱].



شکل ۱-۴۶: یک سیگنال زمان پیوسته متناوب
fig46

سیگنال‌های متناوب در زمان گسسته، به طور مشابهی تعریف می‌شوند. بویژه، یک سیگنال زمان گسسته متناوب با دوره تناوب N است که که N یک عدد صحیح مثبت می‌باشد، اگر که سیگنال با انتقال زمانی به اندازه N بدون تغییر بماند. یعنی اگر برای تمام مقادیر n،

$$x[n] = x[n+N] \qquad (۱\text{-}۵۴)$$
eq46

باشد. اگر معادله (۱-۵۴) برقرار باشد، آنگاه $x[n]$ با دوره‌های تناوب N، $۲N$، $۳N$ و ... نیز متناوب است.

دوره تناوب اصلی $N_\circ$ کوچکترین مقدار مثبت N است که به ازای آن معادله (۱-۵۴) برقرار است. مثالی از یک سیگنال زمان گسسته متناوب با دوره تناوب اصلی $N_\circ = ۳$، در شکل ۱-۴۷ نشان داده شده است [۱].

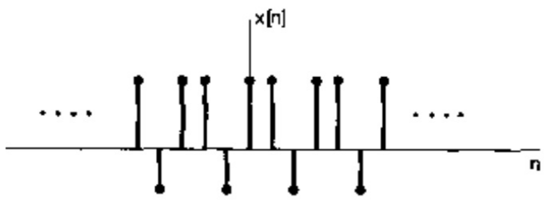


fig47 شکل ۱-۴۷: یک سیگنال زمان گسسته متناوب

ex10 **مثال ۱-۱۰** بررسی کنید که آیا سیگنال زیر متناوب است یا خیر [۱]؟

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{اگر } t < ۰ \\ \sin(t) & \text{اگر } t \geqslant ۰ \end{cases}$$

حل: از مثلثات می‌دانیم که $\cos(t + ۲\pi) = \cos(t)$ و $\sin(t + ۲\pi) = \sin(t)$ است. بنابراین با در نظر گرفتن $t < ۰$ و $t > ۰$ به طور جداگانه، می‌بینیم که $x(t)$ روی هر بازه‌ای به طول ۲π خودش را تکرار می‌کند. اما همانطور که در شکل ۱-۴۸ به تصور در آمده است، $x(t)$ یک ناپیوستگی نیز در مبدا زمان دارد که در هیچ زمان دیگری تکرار نمی‌شود. چون هر ویژگی در شکل یک سیگنال متناوب باید متناوبا تکرار شود، نتیجه می‌گیریم که سیگنال $x(t)$ متناوب نیست.

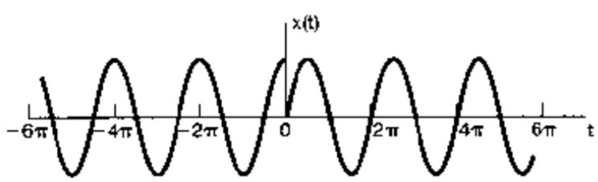


fig48 شکل ۱-۴۸: سیگنال مثال ۱-۱۱

۱-۸ انرژی و توان سیگنال

به عنوان مثال، اگر $v(t)$ و $i(t)$، به ترتیب، ولتاژ دوسر و جریان یک مقاومت الکتریکی با مقاومت R باشند، آنگاه توان لحظه‌ای برابر است با [۱]:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{۱}{R}v^{۲}(t) \tag{۱-۵۵}$$ eq47

انرژی کلی که در بازه زمانی $t_۱ \leqslant t \leqslant t_۲$ مصرف می‌شود برابر است با [۱]:

$$\int_{t_۱}^{t_۲} p(t)dt = \int_{t_۱}^{t_۲} \frac{۱}{R}v^{۲}(t)dt \tag{۱-۵۶}$$ eq48

و توان متوسط در این بازه زمانی برابر است با [۱]:

$$\frac{۱}{t_۲ - t_۱}\int_{t_۱}^{t_۲} p(t)dt = \frac{۱}{t_۲ - t_۱}\int_{t_۱}^{t_۲} \frac{۱}{R}v^{۲}(t)dt \tag{۱-۵۷}$$ eq49

با چنین مثال‌های ساده‌ای به عنوان انگیزه اولیه، یک قاعده معمول و مفید این است که از روابط مشابهی برای توان و انرژی هر سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ یا هر سیگنال زمان گسسته $x[n]$ استفاده کنیم. علاوه بر این، چنان که به زودی خواهیم دید، به دفعات در می‌یابیم که در نظر گرفتن سیگنال‌هایی که مقادیر مختلط به خود می‌گیرند، مناسب است. در این حالت، انرژی کل در بازه زمانی $t_۱ \leqslant t \leqslant t_۲$ در سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$E = \int_{t_۱}^{t_۲} |x(t)|^{۲}dt \tag{۱-۵۸}$$ eq50

که در آن $|x|$ نشان‌دهنده اندازه عدد (احتمالا مختلط) x است. توان متوسط‌گیری شده در زمان از تقسیم معادله (۱-۵۸) به طول بازه زمانی، $t_۱ \leqslant t \leqslant t_۲$، به صورت زیر بدست می‌آید.

$$P = \frac{۱}{t_۲ - t_۱}\int_{t_۱}^{t_۲} |x(t)|^{۲}dt \tag{۱-۵۹}$$ eq51

به طور مشابه، انرژی کل سیگنال زمان گسسته $x[n]$ در بازه زمانی $n_۱ \leqslant n \leqslant n_۲$، به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$E = \sum_{n=n_۱}^{n_۲} |x[n]|^{۲} \tag{۱-۶۰}$$ eq52

که با تقسیم به تعداد نقاط در این بازه، $n_۲ - n_۱ + ۱$، توان متوسط در این بازه به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$P = \frac{۱}{n_۲ - n_۱ + ۱}\sum_{n=n_۱}^{n_۲} |x[n]|^{۲} \tag{۱-۶۱}$$ eq53

به خاطر سپردن این نکته مهم است که اصطلاحات توان و انرژی در اینجا مستقل از این که آیا کمیت‌های معادلات (۱-۶۰) و (۱-۶۱) واقعا به انرژی فیزیکی ربط دارند یا نه، استفاده شده‌اند. با وجود این، در خواهیم یافت که استفاده از این اصطلاحات به طور کلی مناسب است [۱].

علاوه بر این، در بسیاری سیستم‌ها تمایل داریم که توان و انرژی سیگنال‌ها را در یک بازه زمانی نامحدود، یعنی برای $-\infty < t < +\infty$ یا برای $-\infty < n < +\infty$ بررسی کنیم. در این حالت‌ها انرژی کل را به صورت حد معادلات (۱-۶۰) و (۱-۶۱) وقتی که بازه زمانی به طور نامحدود افزایش می‌یابد، تعریف می‌کنیم. یعنی در زمان پیوسته [۱]،

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\longrightarrow\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad (۱-۶۲)$$ eq54

و در زمان گسسته [۱]،

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \qquad (۱-۶۳)$$ eq55

توجه کنید که برای بعضی سیگنال‌ها، انتگرال در معادله (۱-۶۲) یا مجموع در معادله (۱-۶۳) ممکن است همگرا نشوند- مثلا، اگر $x(t)$ یا $x[n]$ مساوی یک مقدار ثابت غیرصفر برای تمام زمان‌ها باشد. چنین سیگنال‌هایی انرژی بی‌نهایت دارند، در حالی که سیگنال‌های با $E_\infty < \infty$ انرژی محدودی دارند [۱].

به روش مشابه، توان متوسط‌گیری شده زمانی در یک بازه نامحدود را می‌توان به صورت زیر به ترتیب برای زمان پیوسته و زمان گسسته تعریف نمود [۱]:

$$P_\infty \triangleq \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \qquad (۱-۶۴)$$ eq56

$$P_\infty \triangleq \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 \qquad (۱-۶۵)$$ eq57

با این تعاریف، سه دسته مهم از سیگنال‌ها را می‌توانیم شناسایی کنیم. اولین این‌ها، دسته سیگنال‌های با انرژی کل محدود است، یعنی سیگنال‌هایی که برای آن‌ها $E_\infty < \infty$ است. چنین سیگنالی باید توان متوسط صفر داشته باشد زیرا، به عنوان مثال، در حالت زمان پیوسته از معادله (۱-۶۴) می‌بینیم که [۱]:

$$P_\infty = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0 \qquad (۱-۶۶)$$ eq58

مثالی از یک سیگنال با انرژی محدود سیگنالی است که برای $0 \leqslant t \leqslant 1$ مقدار آن برابر ۱ و در بقیه جاها صفر است. در این حالت $E_\infty = 1$ و $P_\infty = 0$ است [۱].

دسته دوم از سیگنال‌ها، آن‌هایی هستند که توان متوسط P_∞ محدود دارند. بنابه‌آنچه که هم اکنون دیدیم، اگر $P_\infty > ۰$ باشد، آنگاه لزوما $E_\infty = \infty$ است. البته این منطقی است، زیرا اگر در هر واحد زمان، انرژی متوسط غیرصفری موجود باشد (یعنی، توان غیرصفر)، آنگاه انتگرال‌گیری یا جمع زدن آن در بازه زمانی نامحدود، منجر به مقدار انرژی نامحدود می‌شود. به عنوان مثال، سیگنال ثابت $x[n] = ۴$ دارای انرژی نامحدود بوده، اما توان متوسط آن $P_\infty = ۱۶$ است. همچنین سیگنال‌هایی نیز هستند که برای آن‌ها نه P_∞ محدود است و نه E_∞. یک مثال ساده، سیگنال $x(t) = t$ است [۱].

برطبق معادلات (۱-۶۲) و (۱-۶۴) سیگنال‌ها را می‌توان به صورت زیر تقسیم کرد [۲]:

۱- $x(t)$ یک سیگنال انرژی است، اگر و فقط اگر $۰ < E_\infty < \infty$ بنابراین $P_\infty = ۰$. (برای سیگنال‌های انرژی محدود($E_\infty < \infty$) داریم: $P_\infty = ۰$ [۳].)

۲- $x(t)$ یک سیگنال توان است، اگر و فقط اگر $۰ < P_\infty < \infty$ بنابراین $E_\infty = \infty$. (برای سیگنال‌های با توان بزرگتر از صفر($P_\infty > ۰$) داریم: $E_\infty = \infty$- این جمله عکس نقیض جمله بالا است [۳].)

۳- سیگنال‌هایی که جزو دو دسته اول نیستند، نه سیگنال انرژی هستند و نه سیگنال توان. (سیگنال ممکن است هم انرژی بی‌نهایت داشته باشد و هم توان بی‌نهایت، مثلا $x(t) = t$ [۳].)

ex10 **مثال ۱-۱۱** سیگنال زیر را در نظر بگیرید: $x_۱(t) = Ae^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > ۰$

که در آن A و α ثابت هستند. توان و انرژی آن را محاسبه کنید.

حل: با توجه به معادله (۱-۶۲) و (۱-۶۴) داریم:

$$E_\infty = \int_۰^{+\infty} |Ae^{-\alpha t}u(t)|^۲ dt = A^۲ \int_۰^{+\infty} e^{-۲\alpha t} dt = \frac{A^۲}{-۲\alpha}[۰ - ۱] = \frac{A^۲}{۲\alpha}$$
$$P_\infty = ۰$$

مثال ۱-۱۲ اگر در مثال ۱-۱۱ $\alpha \to ۰$، داریم: $x_۲(t) = Au(t)$. توان و انرژی آن را محاسبه کنید [۲].

حل:

$$P_\infty = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{۱}{۲T} \int_۰^T |Au(t)|^۲ dt = \frac{A^۲}{۲T} \int_۰^T ۱ dt = \frac{A^۲}{۲T}[T] = \frac{A^۲}{۲}$$
$$E_\infty = \infty$$

مثال ۱-۱۳ سیگنال سینوسی پریودیک زیر را در نظر بگیرید: $x(t) = A\cos(\omega_۰ t + \theta)$

توان و انرژی آن را محاسبه کنید [۲].

حل:

$$P_\infty = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{۱}{۲T}\int_{-T}^{T} |A\cos(\omega.t+\theta)|^۲ dt = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{A^۲}{۲T}\int_{-T}^{T} [\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲(\omega.t+\theta)]dt$$
$$= \frac{A^۲}{۲}$$
$$E_\infty = \infty$$

یادآوری: $\cos^۲ x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}$

۱-۹ چند مثال از سیگنال‌های مطالعه شده

ex14 **مثال ۱-۱۴** مطلوبست رسم سیگنال $x(t) = u(t+۲) + u(t-۲)$.

حل:

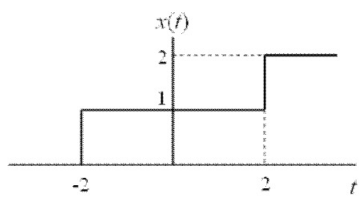


fig49 شکل ۱-۴۹: سیگنال مثال ۱-۱۴

ex15 **مثال ۱-۱۵** مطلوبست ضابطه سیگنال رسم شده در شکل ۱-۵۰.

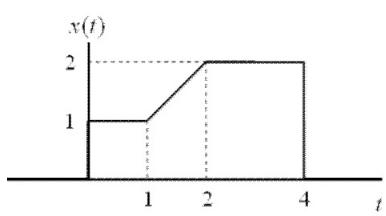


fig50 شکل ۱-۵۰: سیگنال مثال ۱-۱۵

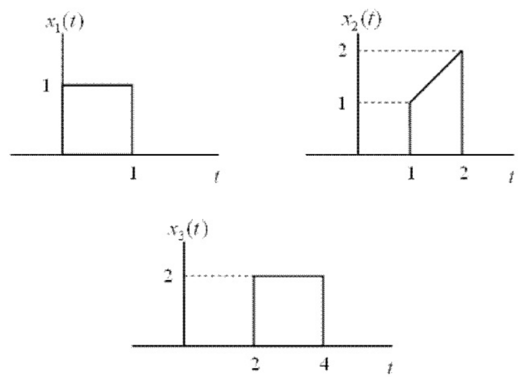


fig51 شکل ۱-۵۱: سیگنال مثال ۱-۱۵

حل: این سیگنال را به سه جز تقسیم می‌کنیم.

بنابراین:

$$x(t) = x_۱(t) + x_۲(t) + x_۳(t)$$

$$x_۱(t) = u(t) - u(t - ۱)$$

$$x_۲(t) = t[u(t - ۱) - u(t - ۲)]$$

$$x_۳(t) = ۲[u(t - ۲) - u(t - ۴)]$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x(t) = u(t) - u(t - ۱) + t[u(t - ۱) - u(t - ۲)] + ۲[u(t - ۲) - u(t - ۴)]$$

ex16 **مثال ۱-۱۶** ضابطه ریاضی سیگنال شکل زیر را بیابید.

حل: با استفاده از تعریف تابع پله ضابطه سیگنال فوق را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$x(t) = u(t) + u(t - ۱) + u(t - ۲) - ۳u(t - ۳)$$

ex171- **مثال ۱-۱۷** شکل دنباله زیر را رسم کنید. $x[n] = n\{u[n] - u[n - ۵]\}$

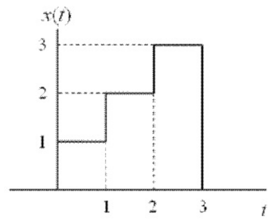


fig52 شکل ۱-۵۲: سیگنال مثال ۱-۱۶

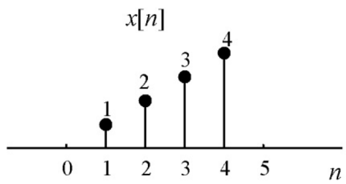


fig53 شکل ۱-۵۳: سیگنال مثال ۱-۱۷

حل: این دنباله از $n = ۰$ شروع می‌شود، ولی به علت ضرب شدن در n، این دنباله مقدارش در مبدا صفر است و تا $n = ۴$ ادامه پیدا می‌کند.

ex17 **مثال ۱-۱۸** ضابطه نشان داده شده در شکل زیر را بیابید.

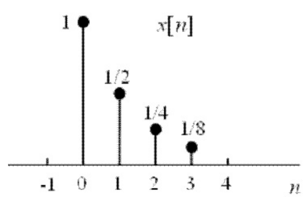


fig54 شکل ۱-۵۴: سیگنال مثال ۱-۱۸

حل: مشاهده می‌شود که در فاصله $n = ۰$ تا $n = ۳$ هر مقدار دنباله، نصف مقدار دنباله در لحظه قبلی است.

$$x[n] = (\frac{۱}{۲})^n\{u[n] - u[n-۴]\}$$

ex18 **مثال ۱-۱۹** مطلوبست رسم $u(t^۲ + ۱)$.

حل: چون $t^۲ + ۱$ همواره مثبت است پس $u(t^۲ + ۱) = ۱$ است.

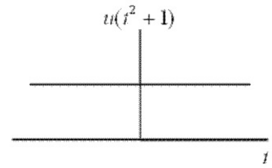


fig55 شکل ۱-۵۵: سیگنال مثال ۱-۱۹

ex19 **مثال ۱-۲۰** مطلوبست رسم $x(t)=|t-۲|u(t^۲-۱)$.

حل: ابتدا می‌بینیم $u(t^۲-۱)$ در فاصله $|t|<۱=-۱<t<۱$ مساوی صفر است، چون آرگومانش منفی می‌شود. ولی در سایر فواصل مثبت است و مساوی واحد است. بنابراین شکل آن به صورت شکل ۱-۵۶ خواهد بود.

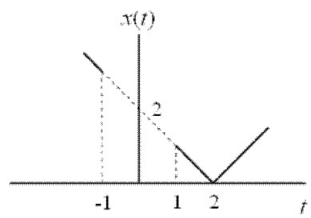


fig56 شکل ۱-۵۶: سیگنال مثال ۱-۲۰

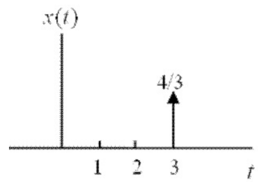
ex20 **مثال ۱-۲۱** مطلوبست رسم سیگنال $x(t)=۴\delta(۳t-۹)$.

حل: با توجه به خواص تابع ضربه داریم: $\delta(at)=\frac{۱}{|a|}\delta(t)$ بنابراین

$$x(t)=۴\delta(۳(t-۳))=\frac{۴}{۳}\delta(t-۳)$$

ex21 **مثال ۱-۲۲** رابطه‌ای برای انرژی سیگنال برحسب انرژی‌های قسمت زوج و فرد آن بیابید. توجه کنید که تعریف انرژی سیگنال به صورت انتگرال زیر است (اگر این انتگرال وجود داشته باشد):

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}x^۲(t)dt,\quad x(t)=x_e(t)+x_o(t)$$



شکل ۱-۵۷: سیگنال مثال ۱-۲۱ fig57

حل: داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{۲}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^{۲}(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^{۲}(t)dt + ۲\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt$$

اما می‌دانیم که انتگرال سوم از طرف راست رابطه فوق مساوی صفر است و دلیل آن هم این است که تابع تحت انتگرال که حاصل‌ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد است، نهایتا یک تابع فرد خواهد بود و سطح زیر منحنی یک تابع فرد صفر است، پس:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{۲}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^{۲}(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^{۲}(t)dt \Rightarrow E_x = E_{xe} + E_{xo}$$

ex22 **مثال ۱-۲۳** انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

۱- $I = \int_{-\infty}^{\infty} (t^{۲} + ۳t - ۱)\delta(t+۱)dt$

۲- $II = \int_{-۲}^{۲} t^{۲}[\delta(t) + ۲\delta(t+۱) + \delta(t-۴)]dt$

حل:

۱- بدلیل خاصیت نمونه‌برداری تابع ضربه، باید تابع زیر انتگرال را به ازای $t = ۱$ حساب نمود. پس داریم:

$$I = -۳\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+۱)dt = -۳$$

۲- ابتدا با استفاده از تفکیک انتگرال مجموع به مجموع انتگرال‌ها و سپس با استفاده از خاصیت نمونه‌برداری تابع ضربه داریم:

$$II = \int_{-۲}^{۲} t^{۲}\delta(t)dt + ۲\int_{-۲}^{۲} t^{۲}\delta(t+۱)dt + \int_{-۲}^{۲} t^{۲}\delta(t-۴)dt$$
$$= ۰ + ۲(-۱)^{۲}\int_{-۲}^{۲} \delta(t+۱)dt + ۴^{۲}\int_{-۲}^{۲} t^{۲}\delta(t-۴)dt$$

اما آخرین انتگرال صفر است، چون تابع ضربه در محدوده انتگرال قرار نمی‌گیرد، پس می‌توان نوشت:

$$II = ۰ + ۲(-۱)^{۲} + ۰ = ۲$$

۱-۱۰ سیستم‌های زمان پیوسته و زمان گسسته

۱-۱۰-۱ تعریف سیستم

سیستم‌های فیزیکی در کلی‌ترین صورت، بهم‌پیوستنی از قطعات، دستگاه‌ها یا زیرسیستم‌ها هستند. در زمینه‌های مختلف، از پردازش سیگنال و مخابرات گرفته تا موتورهای الکترومکانیکی، وسائل نقلیه خودکار و دستگاه‌های فرآیند شیمیایی، یک سیستم را می‌توان به صورت فرآیندی نگریست که در آن سیگنال‌های ورودی به وسیله سیستم تبدیل می‌شوند یا موجب می‌شوند که سیستم به طریقی پاسخ بدهد که حاصل، سیگنال‌های دیگری به عنوان خروجی‌ها است [۱].

معمولا در کتاب‌ها دو تعریف زیر را، به طور موازی و گاهی به صورت هم‌ارز یکدیگر، برای سیستم بیان می‌کنند:

۱- فرآیندی را که سیگنال خروجی‌اش با انجام تغییر و تحولی در سیگنال ورودی حاصل می‌شود، سیستم می‌گویند.

۲- به مجموعه‌ای منظم از اجزایی که به کمک یکدیگر هدف مشخصی را برآورده می‌سازند، سیستم می‌گویند.

سیستم مجموعه‌ای سازمان‌یافته از واحدهای مختلف (زیرسیستم‌ها) می‌باشد که با اثر متقابل و برای دست‌یابی به اهدافی خاص طراحی می‌شود [۴].

۱-۱۰-۲ انواع سیستم

سیستم‌ها در اولین تقسیم‌بندی به دو نوع سیستم زمان پیوسته و سیستم زمان گسسته تقسیم می‌شوند. یک سیستم زمان پیوسته، سیستمی است که در آن سیگنال‌های ورودی زمان پیوسته اعمال شده و سیگنال‌های خروجی زمان پیوسته نتیجه می‌شوند. چنین سیستمی به صورت ترسیمی همانند شکل ۱-۵۸(الف) نمایش داده می‌شود، که در آن $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی است. به شیوه دیگر، اغلب رابطه ورودی خروجی یک سیستم زمان پیوسته با نماد زیر نمایش داده می‌شود [۱]:

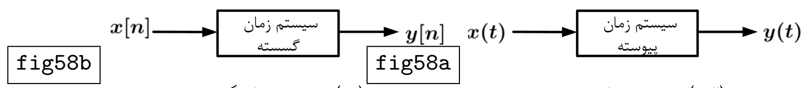
$$x(t) \to y(t) \qquad (۱-۶۷)$$

بطور مشابه، یک سیستم زمان گسسته، یعنی سیستمی که ورودی‌های زمان گسسته را به خروجی‌های زمان گسسته تبدیل می‌کند. به صورت شکل ۱-۵۸(ب) نشان داده می‌شود و گاهی به طور نمادین به صورت زیر

نمایش داده خواهد شد [۱]:

$$x[n] \rightarrow y[n] \qquad (۶۸-۱)$$

تقسیم‌بندی سیستم‌ها به دو نوع ذکر شده محدود نمی‌شود و در برخی سیستم‌های پیچیده‌تر ممکن است ورودی



(الف) سیستم زمان پیوسته (ب) سیستم زمان گسسته

fig58

شکل ۱-۵۸: انواع سیستم

یا خروجی پیوسته در زمان و دیگری گسسته در زمان باشد. در ادامه و در مبحث نمونه‌برداری، این دسته از سیستم‌ها نیز بررسی می‌گردند [۴].

۱-۱۰-۳ بهم‌پیوستن (اتصال) سیستم‌ها

در حالی که می‌توان بهم‌پیوستن‌های متنوع سیستمی بنا کرد، چند بهم‌پیوستن اساسی وجود دارد که به دفعات با آن‌ها مواجه می‌شویم.

الف- اتصال سری[1]: اتصال سری یا متوالی، به آن اتصال زنجیره‌ای[2] نیزگفته می‌شود، در شکل ۱-۵۹(الف) نشان داده شده است. دیاگرام‌های نظیر این را دیاگرام بلوکی می‌نامند. در اینجا خروجی سیستم ۱، ورودی سیستم ۲ است و کل سیستم، یک ورودی را با پردازش، ابتدا بوسیله سیستم ۱و بعد بوسیله سیستم ۲ تبدیل می‌کند. مثالی از بهم‌پیوستن سری، یک گیرنده رادیویی و به دنبال آن یک تقویت‌کننده است. به طور مشابه، می‌توان اتصال سری مرکب از سه سیستم یا بیشتر را تعریف کرد [۱].

در این اتصال، ورودی به یکی از سیستم‌ها اعمال شده و خروجی از سیستم دوم گرفته می‌شود. خروجی سیستم اول نیز به ورودی سیستم دوم متصل می‌گردد [۴].

ب- اتصال موازی[3]: بهم‌پیوستن موازی دو سیستم در شکل ۱-۵۹(ب) نشان داده شده است. در اینجا، ورودی یکسانی به هر دو سیستم ۱ و ۲ اعمال می‌شود. نماد $\oplus$ در شکل نشان‌دهنده عمل جمع است، چنان‌که خروجی اتصال موازی برابر با مجموع خروجی‌های سیستم‌های ۱ و ۲ است. مثالی از بهم‌پیوستن موازی

[1] Series
[2] Cascade
[3] Parallel

عبارت است از یک سیستم صوتی ساده با چند میکروفن که یک سیستم تقویت‌کننده و بلندگو را تغذیه می‌کنند [۱].

ج- اتصال سری-موازی (مرکب): از ترکیب اتصالات سری و موازی بدست می‌آید. مثالی از این نوع سیستم‌ها در شکل ۱-۵۹(ج) نشان داده شده است.

د- اتصال فیدبک (پس‌خور)[1]: مثالی از آن در شکل ۱-۵۹(د) نشان داده شده است. در اینجا خروجی سیستم ۱ ورودی به سیستم ۲ است، در حالی که خروجی سیستم ۲ پس‌خور شده و به ورودی بیرونی افزوده می‌شود تا ورودی واقعی سیستم ۱ را بوجود آورد. سیستم‌های پس‌خور در گستره وسیعی از کاربردها پدیدار می‌شوند. به عنوان مثال، یک سیستم کنترل حرکت روی اتومبیل، سرعت وسیله نقلیه را حس کرده و به منظور نگه‌داشتن سرعت در سطح مطلوب، جریان سوخت را تنظیم می‌کند. به طور مشابه، یک هواپیما با کنترل دیجیتال را طبیعتا می‌توان به صورت یک سیستم پس‌خور تصور کرد که در آن اختلال‌های بین سرعت، جهت یا ارتفاع واقعی و مطلوب به منظور تصحیح این تفاوت‌ها از طریق خلبان خودکار پس‌خور می‌شود. همچنین مداری الکتریکی را غالبا می‌توان به صورت مفیدی که حاوی اتصالات پس‌خور باشند، در نظر گرفت. به عنوان مثال، مدار نشان داده شده در شکل ۱-۶۰(الف) را در نظر بگیرید. همانطور که در شکل ۱-۶۰(ب) نشان داده شده است، این سیستم را می‌توان به صورت اتصال پس‌خور دو عنصر مدار در نظر گرفت [۱].

در این اتصال، خروجی سیستم اول که خروجی کلی نیز می‌باشد، توسط سیستم دوم تغییر داده شده و پس از کم شدن یا جمع شدن با ورودی (فیدبک منفی یا مثبت) به ورودی سیستم اول داده می‌شود [۴].

۱-۱۱ خواص اساسی سیستم‌ها

در این بخش تعدادی از خواص اساسی سیستم‌های زمان پیوسته و زمان گسسته را معرفی کرده و مورد بحث قرار می‌دهیم. این خواص دارای تعبیرهای فیزیکی مهم بوده و با بهره‌گیری از زبان سیگنال‌ها و سیستم‌ها که شروع به پی‌ریزی آن کرده‌ایم، دارای توصیف ریاضی نسبتا ساده‌ای هستند.

[1] Feedback

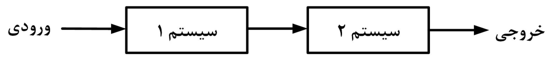


fig59a

(الف) اتصال سری

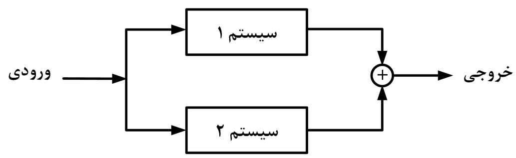


fig59b

(ب) اتصال موازی

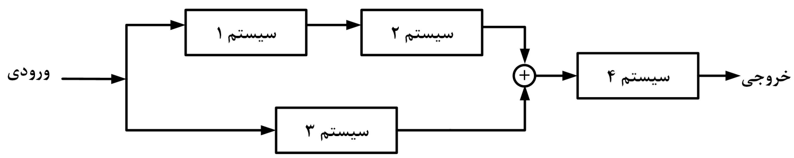


fig59c

(ج) اتصال سری-موازی

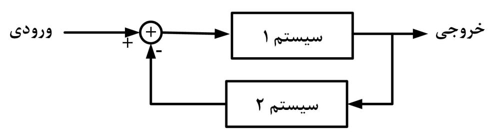


fig59d

(د) پس‌خور (فیدبک)

fig59

شکل ۱-۵۹: انواع اتصالات سیستم‌ها

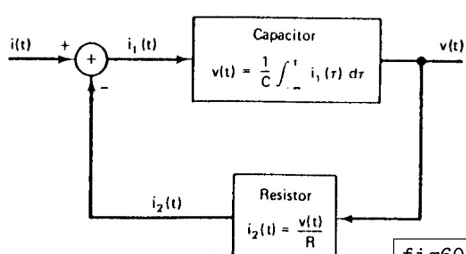


fig60b

(ب) بلوک دیاگرام مدار الکتریکی

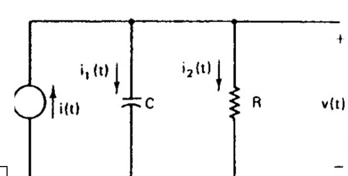


fig60a

(الف) مدار الکتریکی ساده

fig60

شکل ۱-۶۰: مثالی از فیدبک در مدارات الکتریکی

۱-۱۱-۱ سیستم با حافظه و بدون حافظه

سیستم را بی‌حافظه[1] گویند اگر خروجی آن به ازای هر مقدار از متغیر مستقل در یک زمان مفروض، فقط به ورودی در همان زمان بستگی داشته باشد [۱]. سیستمی را بدون حافظه گویند که خروجی آن در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد (نه قبل و نه بعد). به عبارت دیگر در سیستم بدون حافظه خروجی به آینده یا گذشته ورودی بستگی ندارد. در غیر این صورت سیستم را حافظه‌دار می‌گویند [۴].

به عنوان مثال، سیستم مشخص شده با رابطه زیر [۱]:

$$y[n] = (۲x[n] - x^۲[n])^۲$$

بی‌حافظه است، زیرا مقدار $y[n]$ در هر لحظه خاص n، فقط به مقدار $x[n]$ در همان لحظه بستگی دارد. به طور مشابه، مقاومت یک سیستم بی‌حافظه است؛ با در نظر گرفتن جریان به عنوان ورودی $x(t)$ و ولتاژ به عنوان خروجی $y(t)$، رابطه ورودی خروجی یک مقاومت به صورت زیر است:

$$y(t) = Rx(t) \tag{۱-۶۹}$$

که در آن R مقدار مقاومت می‌باشد [۱].

یک سیستم بدون حافظه فوق‌العاده ساده، سیستم همانی است، که خروجی آن با ورودی آن یکسان است. یعنی رابطه ورودی و خروجی برای سیستم همانی زمان پیوسته به صورت زیر است [۱]:

$$y(t) = x(t) \tag{۱-۷۰}$$

و رابطه متناظر در زمان گسسته به صورت زیر است [۱]:

$$y[n] = x[n] \tag{۱-۷۱}$$

مثالی از سیستم زمان گسسته با حافظه، جمع‌کننده است [۱]:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{۱-۷۲}$$

eq72

و مثال دوم تاخیر است [۱]:

$$y[n] = x[n - ۱] \tag{۱-۷۳}$$

eq73

[1] Memoryless

خازن مثالی از یک سیستم زمان پیوسته با حافظه است. زیرا اگر ورودی را جریان گرفته و خروجی ولتاژ باشد، آنگاه داریم [۱]:

$$y(t) = \frac{۱}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \tag{۷۴-۱}$$

eq74

که در آن C ظرفیت خازن می‌باشد [۱].

صرف‌نظر از جزییات، مفهوم حافظه در یک سیستم، متناظر با وجود مکانیزمی در سیستم است که اطلاعاتی را درباره مقادیر ورودی در زمان‌هایی به جز لحظه جاری، نگه‌داشته یا ذخیره می‌کند [۱].

در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی حافظه مستقیما به ذخیره انرژی مربوط می‌شود. به عنوان مثال، خازن با انباشتن بار الکتریکی که به صورت انتگرال جریان نمایش داده می‌شود، انرژی ذخیره می‌کند. بنابراین، مدار RC ساده دارای حافظه است که به طور فیزیکی در خازن نمود یافته است. به طور مشابه، اتومبیل دارای حافظه‌ای است که در انرژی جنبشی آن نمود دارد. در سیستم‌های زمان گسسته‌ای که با کامپیوترها یا ریزپردازنده‌های دیجیتال پیاده‌سازی می‌شوند، حافظه عموما به طور مستقیم به ثبات‌های ذخیره‌کننده‌ای که مقادیر را بین پالس‌های ساعت نگه می‌دارند، مربوط می‌شود [۱].

سیستم با ضابطه

$$y(t) = x(t+۱) \tag{۷۵-۱}$$

نیز یک سیستم با حافظه است. اگرچه خروجی در هر لحظه به ورودی در لحظات قبل بستگی ندارد، بلکه خروجی در هر لحظه به ورودی در یک لحظه بعد بستگی دارد و این نوعی سیستم پیش‌بینی است و ارتباطی به حافظه ندارد، اما همین که خروجی در یک لحظه خاص به ورودی در لحظات دیگر حالا چه بعد و چه قبل بستگی داشته باشد، کافی است تا سیستم را طبق تعریف با حافظه بنامند [۱]. سلف نیز یک المان حافظه‌دار است [۴].

یکی از سیستم‌های معروف حافظه‌دار انسان است، که تقریبا اکثر افعال و حرکات وی متاثر از برخوردهای گذشته او با کلیه جهان خارج (به عنوان ورودی) می‌باشد. البته اگر چه انسان یک سیستم بسیار پیچیده و بزرگ است، اما می‌توان به خاصیت حافظه‌دار بودن او به عنوان یکی از موهبت‌های الهی که باعث پیشرفت و عبرت گرفتن و ایجاد قدرت استنتاج در وی شده است، نام برد.

مثال ۱-۲۴ کدامیک از سیستم‌های زیر با حافظه و کدامیک بی‌حافظه هستند.

الف- $y(t) = ۱۰x^{۲}(t)$

ب-

$$y[n] = \frac{۱}{۲M+۱}\sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]$$

ج-

$$y(t) = \begin{cases} t & t \leqslant ۲ \\ x^(t) & t > ۲ \end{cases}$$

د-

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) > ۰ \\ ۲x(t-۱) & x(t) \leqslant ۰ \end{cases}$$

ه-

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & x[n-۱] \geqslant ۰ \\ n^{۲}x[n] & x[n-۱] < ۰ \end{cases}$$

و- $y(t) = x^{۲}(\frac{t}{۲})$

ز- $y(t) = x(t)\cos^{۲}(t-۱)$

ح- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

حل:

الف- سیستم پیوسته در زمان بدون حافظه است [۴].

ب- سیستم گسسته در زمان، که یک سیستم میانگین‌گیر است، با حافظه است [۴].

ج- سیستم پیوسته در زمان بدون حافظه است. زیرا اثری از وابستگی به گذشته یا آینده ورودی در ضابطه‌ها و شروط این سیستم ملاحظه نمی‌شود [۴].

د- به دلیل حافظه‌دار بودن $۲x(t-۱)$ سیستم پیوسته در زمان حافظه‌دار است [۴].

ه- به دلیل حافظه‌دار بودن شروط رابطه، سیستم زمان گسسته حافظه‌دار است [۴].

و- در این سیستم مثلا داریم: $y(۱) = x^(\frac{۱}{۲})$، پس خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی ندارد. سیستم پیوسته در زمان حافظه‌دار است.

ز- در این سیستم، ارتباط ورودی و خروجی اگر چه توسط ضریب $\cos^{۲}(t-۱)$ تعیین می‌شود. ولی این ضریب مستقل از ورودی است. آنچه که مهم است ارتباط ورودی و خروجی است. بنابراین، سیستم بی‌حافظه است.

ح- در این سیستم اگر بنویسیم:

$$y(t) = \lim_{\Delta \longrightarrow ۰} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$$

مشاهده می‌شود که سیستم با حافظه است.

۱-۱۱-۲ معکوس‌پذیری و سیستم‌های معکوس

سیستمی را معکوس[1] گویند اگر در آن ورودی‌های متمایز به خروجی‌های متمایز منجر شوند [۱]. سیستم عکس‌پذیر، سیستمی است که به ازا هر ورودی خاص و مجزا، پاسخ خاص و مجزا بدهد.

$$\text{if}\, x_{۱}(t) = x_{۲}(t) \Rightarrow y_{۱}(t) = y_{۲}(t) \qquad (۷۶-۱)$$

در این صورت، می‌توان سیستمی به نام سیستم معکوس (یا وارون) را آنگونه طراحی کرد که اگر ورودی آن سیستم معکوس به خروجی سیستم اصلی متصل شود، در آن صورت خروجی سیستم معکوس همان ورودی سیستم اصلی شود.

همان‌طور که در شکل ۱-۶۱(الف) برای حالت زمان گسسته نشان داده شده است، اگر سیستمی معکوس‌پذیر باشد، آنگاه سیستم معکوسی وجود دارد که وقتی با سیستم اولیه به صورت متوالی قرار بگیرد، خروجی $w[n]$ را بدست می‌دهد که مساوی ورودی $x[n]$ به سیستم اول است. بنابراین، اتصال سری در شکل ۱-۶۱(الف) دارای رابطه ورودی خروجی کلی است که با سیستم همانی یکسان است [۱].

مثالی از یک سیستم زمان پیوسته معکوس‌پذیر به صورت زیر است:

$$y(t) = ۲x(t) \qquad (۷۷-۱)$$

که برای آن سیستم معکوس به صورت زیر می‌باشد:

$$w(t) = \frac{۱}{۲} y(t) \qquad (۷۸-۱)$$

[1] Inverse

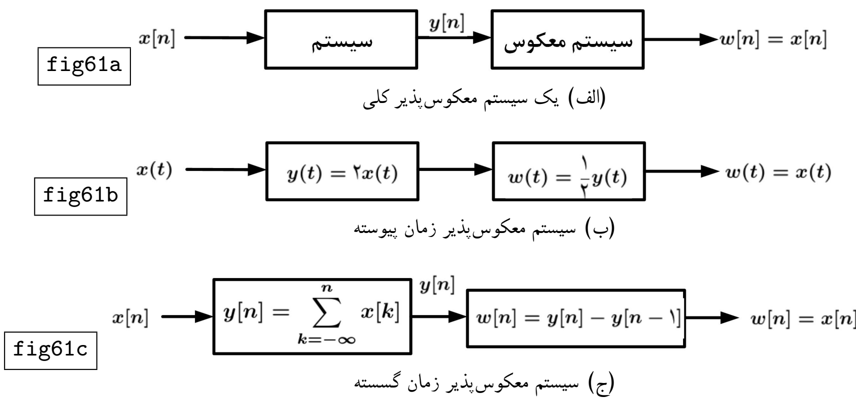


fig61 شکل ۱-۶۱: مفهوم یک سیستم معکوس

این مثال در شکل ۱-۶۱(ب) به تصویر درآمده است. مثالی دیگر از یک سیستم معکوس‌پذیر، جمع‌کننده در معادله (۱-۷۲) است. برای این سیستم، تفاضل بین دو مقدار متوالی خروجی، دقیقا همان آخرین مقدار ورودی است. بنابراین، در این حالت سیستم معکوس به صورت زیر است:

$$w[n] = y[n] - y[n-1] \qquad (۱-۷۹)$$

که این در شکل ۱-۶۱(ج) نشان داده شده است. مثال‌هایی از سیستم‌های معکوس‌ناپذیر عبارتند از:

$$y[n] = 0 \qquad (۱-۸۰)$$

یعنی، سیستمی که برای هر دنباله ورودی، دنباله خروجی صفر تولید می‌کند و :

$$y(t) = x^2(t) \qquad (۱-۸۱)$$

که در این مورد نمی‌توان از روی اطلاعات خروجی، علامت ورودی را تعیین کرد [۱].

مفهوم معکوس‌پذیری[1] در زمینه‌های بسیاری دارای اهمیت است. یک مثال، در مورد سیستم‌هایی برای کد کردن مطرح می‌شود که در گستره متنوعی از کاربردهای مخابراتی استفاده می‌شوند. در چنین سیستمی، سیگنالی که می‌خواهیم ارسال کنیم ابتدا به عنوان ورودی به سیستمی موسوم به کدکننده اعمال می‌گردد. دلایل زیادی برای انجام این کار وجود دارد، از تمایل به رمز کردن پیام اصلی جهت مخابره امن یا محرمانه گرفته تا هدف تامین مقداری افزونگی در سیگنال (به عنوان مثال، با افزودن آنچه که به عنوان بیت‌های توازن شناخته

[1] Invertibility

می‌شود) تا اینکه بتوان هر خطایی را که در انتقال رخ می‌دهد، آشکار و احتمالا تصحیح کرد. برای کد کردن بی‌اتلاف، ورودی به کدکننده باید دقیقا از روی خروجی قابل بازیابی باشد، یعنی کدکننده باید معکوس‌پذیر باشد [۱].

ex25 **مثال ۱-۲۵** سیستم

$$y(t) = x(t - ۱)$$

را در نظر بگیرید. چون سیستم تاخیردهنده است، بنابراین سیستم جلوانداز، معکوس آن است. برای تحقیق این مطلب کافی است، این دو سیستم را بطور متوالی پست سر هم وصل کنیم و مشاهده کنیم که خروجی سیستم معکوس در همه حالات و به ازا هر ورودی مساوی ورودی سیستم اصلی است.

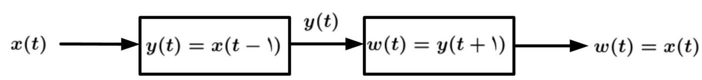


fig62 شکل ۱-۶۲: سیگنال مثال ۱-۲۵

مثال ۱-۲۶ سیستم پیوسته در زمان $y(t) = ۲x(t) + ۱$ وارون‌پذیر است و سیستم وارون آن از رابطه $w(t) = \dfrac{y(t) - ۱}{۲}$ ورودی را به طور یکتا تعیین می‌کند [۴].

در مواقعی که یک سیستم مقادیری از ورودی را به ازای برخی زمان‌ها صفر (یا حذف) می‌کند، سیستم وارون‌پذیر نیست. زیرا بدیهی است که نمی‌توان از روی خروجی، ورودی را به طور یکتا بدست آورد.

مثال ۱-۲۷ سیستم گسسته در زمان

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n < ۰ \\ x[n+۱] & n \geqslant ۰ \end{cases}$$

وارون‌ناپذیر است. زیرا این سیستم $x[۰]$ را حذف کرده و اثری از $x[۰]$ در خروجی وجود ندارد. لذا هنگام تعیین ورودی از روی خروجی نمی‌توان $x[۰]$ را بدست آورد [۴].

مثال ۱-۲۸ سیگنال $y(t) = x(۲t)$ را در نظر بگیرید. این سیگنال معکوس‌پذیر است و معکوس آن $w(t) = x(\frac{t}{۲})$ است [۳].

مثال ۱-۲۹ سیگنال $y[n] = x[۲n]$ را در نظر بگیرید. کار این سیستم این است که نمونه‌های زوج را نگه دارد و نمونه‌های فرد را حذف کند. بنابراین، از روی خروجی نمی‌توان ورودی را بدست آورد. پس، سیگنال معکوس‌ناپذیر است [۳].

۱-۱۱-۳ علیت

سیستمی را علی (سببی)[1] گویند اگر خروجی در هر لحظه فقط به مقادیر ورودی در لحظه کنونی و گذشته بستگی داشته باشد. چنین سیستمی را اغلب غیرپیشگو[2] می‌نامند، چرا که خروجی سیستم مقادیر آینده ورودی را پیش‌بینی نمی‌کند. در نتیجه، اگر دو ورودی به یک سیستم علی تا لحظه $t_۰$ یا $n_۰$ در زمان(یعنی به ازای $t < t_۰$ یا $n < n_۰$)، یکسان باشند، خروجی‌های متناظر نیز باید تا همان لحظه یکسان باشند. یعنی:

$$\begin{aligned} &\text{if} \quad x_۱(t) = x_۲(t) \quad t < t_۰ \Rightarrow y_۱(t) = y_۲(t) \quad t < t_۰ \\ &\text{if} \quad x_۱[n] = x_۲[n] \quad n < n_۰ \Rightarrow y_۱[n] = y_۲[n] \quad n < n_۰ \end{aligned} \tag{۱-۸۲}$$

مدار RC علی است، چون ولتاژ خازن فقط به مقادیر کنونی و گذشته منبع ولتاژ بستگی دارد. به طور مشابه حرکت یک اتومبیل علی است چرا که اعمال آینده راننده را نمی‌تواند پیشگویی کند. سیستم‌های توصیف شده در معادلات (۱-۷۲) تا (۱-۷۴) که در زیر دوباره آورده شده‌اند، علی هستند [۱].

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \\ y[n] &= x[n-۱] \\ y(t) &= \frac{۱}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \end{aligned}$$

اما سیستم‌های تعریف شده با معادلات

$$y[n] = x[n] - x[n+۱] \tag{۱-۸۳}$$

$$y(t) = x(t+۱) \tag{۱-۸۴}$$

علی نیستند [۱].

مثال ۱-۳۰ سیستم پیوسته در زمان $y(t) = x^۲(t) + x(t-۱)$ سیستم علی است. در صورتی که سیستم گسسته در زمان

$$y[n] = \frac{۱}{۲M+۱}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$$

یک سیستم غیرعلی است [۴].

هنگامی که رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد، هم ضابطه‌ها و هم شروط می‌توانند سیستم را غیرعلی نمایند [۴].

[1] Casual
[2] Nonanticipative

مثال ۱-۳۱ سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ورودی

$$y[n] = \begin{cases} x[n-۱] & x[n] \geqslant ۱ \\ (n+۲)^۲ & x[n] < ۱ \end{cases}$$

علی است، زیرا اثری از وابستگی به آینده ورودی در ضابطه‌ها و شروط این سیستم ملاحظه نمی‌شود. در صورتی که سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ورودی

$$y(t) = \begin{cases} x(t+۱) & x(t-۱) \geqslant ۰ \\ ۲x(t) & x(t-۱) < ۰ \end{cases}$$

به دلیل غیرعلی بودن ضابطه $x(t+۱)$ و سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ورودی

$$y[n] = \begin{cases} x^۲[n] & x[n+۱] \leqslant ۱ \\ x[n-۱] & x[n+۱] > ۱ \end{cases}$$

به دلیل غیرعلی بودن شروط رابطه، سیستم‌های غیرعلی می‌باشند [۴].

اگرچه سیستم‌های علی دارای اهمیت زیادی هستند اما به هیچ‌وجه تنها سیستم‌هایی نیستند که دارای اهمیت عملی هستند. به عنوان مثال، اغلب در کاربردهایی که در آن‌ها متغیر مستقل زمان نیست، نظیر پردازش تصویر، علیت یک محدودیت اساسی نیست. علاوه بر این، در پردازش داده‌هایی که قبلا ضبط شده‌اند، نظیر آنچه که اغلب به عنوان نمونه در مورد سیگنال‌های صحبت، ژئوفیزیکی یا هواشناختی پیش می‌آید، به هیچ‌وجه محدود به پردازش علی نیستیم. به عنوان مثالی دیگر، در بسیاری از کاربردها از جمله تحلیل تاریخچه بازار بورس اوراق بهادار و مطالعات جمعیت شناختی، ممکن است به تعیین روند تغییرات کند در داده‌هایی که شامل نوسانات فرکانس بالایی هم در حول آن روند هستند، علاقه‌مند باشیم. در این مورد، روشی که معمولا به کار می‌رود، عبارت از متوسط‌گیری داده‌ها در یک بازه است، به طوری که نوسانات را هموار ساخته و فقط آن روند کلی حفظ شود [۱].

بدیهی است که اگر یک سیستم، بدون حافظه باشد، علی نیز خواهد بود، اما عکس آن لزوما صادق نیست. همچنین اگر یک سیستم غیرعلی باشد، لزوما با حافظه می‌باشد. اما عکس آن لزوما صادق نیست [۴].

مثال ۱-۳۲ هنگام بررسی علیت یک سیستم، مهم است که با دقت به رابطه خروجی ورودی توجه کنیم. برای روشن ساختن برخی مسائلی که در انجام این امر پیش می‌آیند، علیت دو سیستم خاص را بررسی می‌کنیم [۱]. سیستم نخست با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$y[n] = x[-n] \tag{۸۵-۱}$$

توجه کنید که خروجی $y[n.]$ در یک زمان مثبت $n.$ فقط به مقدار سیگنال ورودی $x[-n]$ در زمان $-n.$، که منفی بوده و بنابراین قبل از $n.$ است، بستگی دارد. ممکن است وسوسه شده و همین‌جا نتیجه بگیریم که سیستم داده شده علی است. اما باید همیشه مواظب باشیم که رابطه خروجی ورودی را برای تمام زمان‌ها بررسی کنیم. به خصوص برای $n < ۰$، مثلا $n = -۴$، ملاحظه می‌کنیم که $y[-۴] = x[۴]$ است، چنانکه خروجی در این لحظه به یک مقدار آینده ورودی بستگی دارد. از این رو سیستم علی نیست.

همچنین مهم است که با دقت، اثرات ورودی را از اثرات توابع دیگری که در تعریف سیستم استفاده می‌شوند، تمییز دهیم. به عنوان مثال، سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$y(t) = x(t)\cos(t+۱) \qquad (۸۶-۱)$$

در این سیستم، خروجی در هر لحظه t مساوی است با ورودی در همان لحظه ضرب در عددی که با زمان تغییر می‌کند. مشخصا می‌توان معادله بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y(t) = x(t)g(t)$$

که در آن $g(t)$ یک تابع متغیر با زمان، یعنی $g(t) = \cos(t+۱)$، است. بنابراین، این فقط مقدار کنونی ورودی $x(t)$ است که برروی مقدار کنونی خروجی $y(t)$ تاثیر دارد و در نتیجه، این سیستم علی و در واقع بی‌حافظه است.

۱-۱۱-۴ پایداری

پایداری[۱] یک خاصیت مهم دیگر سیستم است. به بیان غیررسمی، سیستم پایدار سیستمی است که در آن ورودی‌های کوچک به پاسخ‌هایی منجر می‌شوند که واگرا نیستند. به عنوان مثال، پاندول شکل ۱-۶۳(الف) را در نظر بگیرید که در آن ورودی نیروی اعمالی $x(t)$ و خروجی انحراف زاویه‌ای $y(t)$ از خط قائم است. در این حالت جاذبه زمین نیروی برگرداننده‌ای اعمال می‌کند که تمایل به برگرداندن پاندول به وضعیت قائم داشته در حالی که تلفات اصطکاک ناشی از مقاومت هوا تمایل به کند کردن حرکت آن دارد. در نتیجه، اگر نیروی کوچک $x(t)$ اعمال شود، زاویه انحراف حاصل از خط قائم نیز کوچک خواهد بود. در مقابل، برای پاندول وارونه در شکل ۱-۶۳(ب)، اثر جاذبه زمین اعمال نیرویی است که تمایل به افزایش زاویه انحراف از خط قائم دارد. بنابراین، یک نیروی اعمالی کوچک منجر به انحراف بزرگی از خط قائم شده و سبب می‌شود که پاندول علی‌رغم هرگونه نیروهای بازدارنده ناشی از اصطکاک، واژگون شود [۱].

[1] Stability

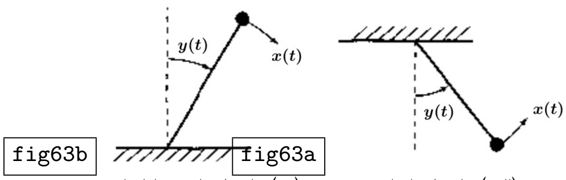


fig63

شکل ۱-۶۳: مثالی از پاندول پایدار و ناپایدار

سیستم شکل ۱-۶۳(الف) مثالی از یک سیستم پایدار است و حال آنکه سیستم شکل ۱-۶۳(ب) ناپایدار است. مدل‌هایی برای واکنش‌های زنجیره‌ای یا برای رشد جمعیت با ذخایر نامحدود موادغذایی و بدون شکارچی، مثال‌هایی از سیستم‌های ناپایدار هستند، چرا که پاسخ این سیستم‌ها به ازای ورودی‌های کوچک، بدون حد و مرز رشد می‌کند. مثال دیگری از سیستم ناپایدار، مدل تراز حساب بانکی در معادله زیر است:

$$y[n] = ۱/۰۱ y[n-۱] + x[n] \qquad (۱-۸۷)$$

eq87

و یا به طور معادل:

$$y[n] - ۱/۰۱ y[n-۱] = x[n] \qquad (۱-۸۸)$$

این معادلات، مثال ساده‌ای از سیستم زمان گسسته برای تراز ماهانه در یک حساب بانکی هستند. $y[n]$ را نماد تراز در پایان ماه nام بگیرید و فرض کنید که $y[n]$ به طور ماهانه طبق معادله (۱-۸۷) تغییر می‌کند. در این معادله، $x[n]$ نشان‌دهنده پرداخت خالص (یعنی پرداخت‌ها منهای دریافت‌ها) در طی ماه nام بوده و جمله $۱/۰۱y[n-۱]$ این واقعیت را مدل می‌کند که هر ماه ۱ درصد سود به سپرده تعلق می‌گیرد. این سیستم ناپایدار است، چرا که اگر سپرده اولیه‌ای به حساب واریز شود (یعنی، یک مقدار مثبت $= x[۰]$) و هیچگونه برداشت بعدی نیز وجود نداشته باشد، آنگاه به دلیل اثر مرکب پرداخت سود، آن سپرده هر ماه بدون حد و مرز افزایش خواهد یافت [۱].

همچنین مثال‌های فراوانی هم از سیستم‌های پایدار وجود دارد. پایداری سیستم‌های فیزیکی عموما نتیجه حضور مکانیزم‌هایی است که انرژی تلف می‌کنند. به عنوان مثال، با فرض مقادیر عناصر مثبت در مدار RC ساده، مقاومت انرژی تلف می‌کند و این مدار یک سیستم پایدار است [۱].

مثالی دیگر از سیستم‌های پایدار و ناپایدار در شکل ۱-۶۴ نشان داده شده است. در اینجا یک گوی داریم که برروی سطح قرار داده شده است. در شکل ۱-۶۴(الف) سطح به صورت یک تپه است که توپ در بالای

آن قرار گرفته است، اما در شکل ۱-۶۴(ب) سطح به صورت یک دره است، که توپ در داخل آن قرار دارد. اگر فرض کنیم سیستمی داریم که ورودی آن شتاب افقی اعمالی به توپ باشد و خروجی آن تغییر وضعیت عمودی گوی باشد، درنتیجه سیستم شکل ۱-۶۴(الف) ناپایدار است، زیرا یک تغییر کوچک در وضعیت افقی گوی موجب پایین آمدن آن می‌گردد. از طرف دیگر، سیستم شکل ۱-۶۴(ب) پایدار است، زیرا شتاب افقی کوچک موجب تغییر کوچکی در وضعیت عمودی گوی می‌گردد [۱].

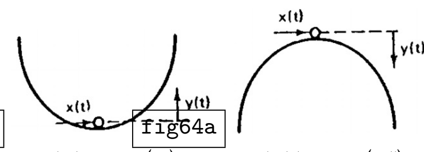


fig64b fig64a

(ب) سیستم پایدار (الف) سیستم ناپایدار

fig64 شکل ۱-۶۴: مثالی از سیستم پایدار و ناپایدار

به عنوان مثالی دیگر، سیستم زمان گسسته تعریف شده در معادله زیر را که یک سیستم میانگین‌گیری است در نظر بگیرید:

$$y[n] = \frac{۱}{۲M+۱}\sum_{k=-M}^{+M} x[n-k] \qquad (۱-۸۹)$$ eq89

فرض کنید که مقدار ورودی $x[n]$ برای تمام مقادیر n با عددی، مثلا B، محدود شده است. آنگاه بزرگترین مقدار ممکن برای $y[n]$ نیز B است، زیرا $y[n]$ مساوی میانگین مجموعه‌ای محدود از مقادیر ورودی است. بنابراین، $y[n]$ کراندار[1] بوده و سیستم پایدار است. از سویی دیگر، انباشتگر توصیف شده در معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \qquad (۱-۹۰)$$

برخلاف سیستم داده شده در معادله (۱-۸۹) این سیستم به جای مجموعه‌ای محدود از مقادیر، تمام مقادیر قبلی ورودی را با هم جمع می‌کند و در نتیجه سیستم ناپایدار است. چرا که حتی اگر $x[n]$ کراندار باشد، این مجموع می‌تواند به طور پیوسته افزایش یابد. به عنوان مثال اگر ورودی انباشتگر پله واحد $u[n]$ باشد، خروجی به صورت زیر خواهد بود:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = (n+۱)u[n]$$

[1] Bounded

یعنی، $y[0] = 1$، $y[1] = 2$، $y[2] = 3$ و الی آخر و $y[n]$ بدون حد افزایش می‌یابد [۱].

پایداری از جمله مفاهیمی است که با توجه به کاربرد مورد نظر در سیستم‌های مختلف تعاریف متفاوتی دارد. یکی از این معیارها که در این درس مورد استفاده قرار می‌گیرد، معیار ورودی محدود خروجی محدود (BIBO[1]) است. با این معیار سیستم پایدار سیستمی است که به ورودی با دامنه محدود، پاسخ با دامنه محدود دهد. از نظر ریاضی سیستم پایدار به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$\text{if} \quad |x(t)| \leqslant A < \infty \Rightarrow |y(t)| \leqslant B < \infty \tag{۱-۹۱}$$

این تعریف برای پایداری BIBO سیستم‌های گسسته در زمان به همین صورت است. سیستم ناپایدار سیستمی است که به ورودی با دامنه محدود خروجی با دامنه نامحدود بدهد [۴].

مثال ۱-۳۳ اگر حدس می‌زنیم که سیستمی ناپایدار است، آنگاه یک تدبیر مفید برای تحقیق این امر، جستجوی یک ورودی کراندار خاص است که به یک خروجی بیکران منجر شود. پیدا کردن چنین مثالی ما را قادر می‌سازد که نتیجه بگیریم سیستم داده شده ناپایدار است. اگر چنین مثالی وجود نداشت یا پیدا کردن آن مشکل بود، باید پایداری را با استفاده از روشی که از مثال‌های خاصی برای سیگنال ورودی استفاده نمی‌کند، بررسی کنیم. برای روشن ساختن این روش، اکنون پایداری دو سیستم را بررسی می‌کنیم:

$$S_1: \quad y(t) = tx(t) \tag{۱-۹۲}$$ eq90

و

$$S_2: \quad y(t) = e^{x(t)} \tag{۱-۹۳}$$ eq91

در جستجوی یک مثال نقض خاص برای اثبات ناپایداری، می‌توان ورودی‌های کراندار ساده‌ای نظیر مقدار ثابت یا پله واحد را آزمایش کرد. برای سیستم S_1 در معادله (۱-۹۲)، ورودی ثابت $x(t) = 1$ نتیجه می‌دهد $y(t) = t$، که بیکران است، زیرا هر مقدار ثابت محدودی را که در نظر بگیرید، $|y(t)|$ به ازای یک tای از آن مقدار ثابت بیشتر خواهد شد. نتیجه می‌گیریم که سیستم S_1 ناپایدار است.

برای سیستم S_2، که اتفاقا پایدار است، نخواهیم توانست یک ورودی کراندار بیابیم که به یک خروجی بیکران منجر شود. بنابراین، به تحقیق صحت این مطلب می‌پردازیم که تمام ورودی‌های کراندار به خروجی‌های کراندار منجر می‌شوند. مشخصا، فرض کنید B یک عدد مثبت دلخواهی باشد و فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال دلخواه محدود شده با کران B باشد؛ یعنی هیچ فرضی درباره $x(t)$ نمی‌کنیم بجز اینکه برای تمام tها داریم:

$$|x(t)| < B \tag{۱-۹۴}$$ eq92

[1] Bounded Input Bounded Output

یا:

$$-B < x(t) < B \tag{۱-۹۵}$$

آنگاه با استفاده از تعریف $S_۲$ در معادله (۱-۹۳)، ملاحظه می‌کنیم که اگر $x(t)$ در معادله (۱-۹۴) صدق کند، آنگاه $y(t)$ باید در رابطه زیر صدق کند:

$$e^{-B} < y(t) < e^{B} \tag{۱-۹۶}$$

نتیجه می‌گیریم که اگر هر ورودی به $S_۲$ با عدد مثبت دلخواه B محدود شود، آنگاه تضمین می‌گردد که خروجی متناظر نیز با e^B محدود می‌شود. بنابراین، $S_۲$ پایدار است [۱].

مثال ۱-۳۴ سیستم $y(t) = e^{x^۲(t)}$ را از لحاظ پایداری بررسی کنید.

در اینجا اگر ورودی $x(t) < B$ محدود باشد، در آن صورت خروجی نیز محدود است. چون بیشترین مقدار خروجی $e^{B^۲}$ می‌شود که محدود است، به عبارت دیگر $y(t) < e^{B^۲}$ و بنابراین، این سیستم پایدار است.

مثال ۱-۳۵ برای سیستم پیوسته در زمان با رابطه $y(t) = x^۲(t)$ و با فرض $|x(t)| \leqslant A < \infty$ داریم:

$$|y(t)| = |x(t)|^۲ = A^۲ < \infty$$

پس این سیستم پایدار است [۴].

مثال ۱-۳۶ برای سیستم پیوسته در زمان با رابطه زیر:

$$y(t) = \int_۰^t x(\tau)d\tau \tag{۱-۹۷}$$

و با فرض $|x(t)| \leqslant A < \infty$ داریم:

$$|y(t)| = \left| \int_۰^t x(\tau)d\tau \right| \leqslant \int_۰^t |x(\tau)|d\tau \leqslant \int_۰^t A d\tau = At \tag{۱-۹۸}$$

سیستم فوق ناپایدار است زیرا به ازای $t \to \infty$ دامنه خروجی به سمت بی‌نهایت می‌رود [۴].

۱-۱۱-۵ تغییرناپذیری با زمان

از نظر مفهومی، سیستم تغییرناپذیر با زمان[1] است اگر رفتار و مشخصه‌های سیستم در طی زمان ثابت باشند. به عنوان مثال، در مدار RC اگر مقادیر مقاومت و خازن در طی زمان ثابت باشند، تغییرناپذیر با زمان است؛ انتظار داریم نتایجی که امروز از انجام آزمایشی برروی این مدار به دست می‌آوریم، همان نتایجی باشند که با انجام آزمایش مشابه در فردا بدست می‌آوریم. از سوی دیگر، اگر مقادیر مقاومت و خازن در طی زمان تغییر داده شده یا نوسان داشته باشند، آنگاه انتظار داریم که نتایج آزمایش به زمانی بستگی داشته باشد که آن را انجام می‌دهیم [۱].

خاصیت تغییرناپذیری با زمان را می‌توان خیلی ساده با استفاده از زبان سیگنال‌ها و سیستم‌ها که تاکنون ارائه کرده‌ایم، توصیف کرد. مشخصا، سیستم تغییرناپذیر با زمان است اگر یک انتقال زمانی سیگنال ورودی به انتقال زمانی مشابهی در سیگنال خروجی منجر شود. یعنی، اگر $y[n]$ خروجی یک سیستم زمان گسسته تغییرناپذیر با زمان باشد وقتی که $x[n]$ ورودی است، آنگاه $y[n-n_۰]$ خروجی خواهد بود وقتی که $x[n-n_۰]$ ورودی باشد. در حالت زمان پیوسته با $y(t)$ به عنوان خروجی متناظر با ورودی $x(t)$، سیستم تغییرناپذیر با زمان دارای خروجی $y(t-t_۰)$ خواهد بود وقتی که $x(t-t_۰)$ ورودی باشد [۱].

مثال ۱-۳۷ سیستم زمان پیوسته تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$y(t) = \sin(x(t)) \qquad (۹۹-۱)$$ eq99

برای بررسی آن که آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است، باید تعیین کنیم که آیا خاصیت تغییرناپذیری با زمان برای هر ورودی و هر انتقال زمانی $t_۰$ برقرار است یا خیر. بنابراین، فرض کنید $x_۱(t)$ ورودی دلخواهی به این سیستم باشد و فرض کنید خروجی متناظر:

$$y_۱(t) = sin[x_۱(t)] \qquad (۱۰۰-۱)$$ eq100

باشد، آنگاه ورودی دومی را در نظر بگیرید که با انتقال $x_۱(t)$ در زمان بدست می‌آید:

$$x_۲(t) = x_۱(t-t_۰) \qquad (۱۰۱-۱)$$ eq101

خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_۲(t) = sin[x_۲(t)] = sin[x_۱(t-t_۰)] \qquad (۱۰۲-۱)$$ eq102

[1] Time Invariant

به طور مشابه از معادله (۱-۹۹) داریم:

$$y_1(t-t_0) = sin[x_1(t-t_0)] \quad (۱-۱۰۳)$$

eq103

با مقایسه معادلات (۱-۱۰۲) و (۱-۱۰۳) ملاحظه می‌کنیم که $y_2(t) = y_1(t-t_0)$ است و بنابراین این سیستم تغییرناپذیر با زمان است [۱].

مثال ۱-۳۸ بررسی کنید که آیا سیستم زمان پیوسته زیر تغییر پذیر با زمان است یا خیر؟

$$y(t) = tx(t)$$

حل:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t) = tx_1(t-t_0)$$
$$y_1(t-t_0) = (t-t_0)x_1(t-t_0) \neq y_2(t)$$

پس، سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

مثال ۱-۳۹ سیستم زمان گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] = nx[n] \quad (۱-۱۰۴)$$

این یک سیستم تغییرپذیر با زمان است و این واقعیت را می‌توان با استفاده از همان روش رسمی بکار رفته در مثال قبل تحقیق کرد. اما وقتی حدس زده می‌شود که سیستمی تغییرپذیر با زمان است، یک روش برای نشان دادن این امر که اغلب یسیار مفید واقع می‌گردد، جستجوی یک مثال نقض است- یعنی با استفاده از درک حسی خود برای یافتن یک سیگنال ورودی که به ازای آن شرط تغییرناپذیری با زمان نقض می‌شود. بخصوص، سیستم در این مثال عبارت از یک سیستم با بهره متغیر با زمان است. به عنوان مثال اگر بدانیم که مقدار کنونی ورودی یک است، نمی‌توان بدون دانستن لحظه کنونی، مقدار خروجی کنونی را تعیین کرد.

بنابراین، سیگنال ورودی $x_1[n] = \delta[n]$ را در نظر بگیرید، که به خروجی $y_1[n]$ متحد با صفر منجر می‌شود (چراکه $n\delta[n] = 0$ است). اما ورودی $x_2[n] = \delta[n-1]$، به خروجی $y_2[n] = n\delta[n-1] = \delta[n-1]$ منجر می‌شود. بنابراین با آنکه $x_2[n]$ یک نسخه انتقال یافته $x_1[n]$ است، اما $y_2[n]$ یک نسخه انتقال یافته $y_1[n]$ نیست [۱].

مثال ۱–۴۰ سیستم $y(t) = x^{۲}(t)$ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم سیگنال $z(t) = x(t - t_{.})$ را به عنوان ورودی اعمال کنیم. خواهیم داشت؛

$$y_{۲}(t) = z^{۲}(t) = x^{۲}(t - t_{.}) = y_{۱}(t - t_{.})$$

بنابراین سیستم فوق تغییرناپذیر با زمان است [۴].

مثال ۱–۴۱ سیستم پیوسته در زمان با رابطه $y(t) = x(-t)$ را در نظر بگیرید. این سیستم تغییرپذیر با زمان است. می‌توان تغییرپذیر بودن این سیستم را با مثال نقض نشان داد [۴]؛

$$x_{۱}(t) = \delta(t) \Rightarrow y_{۱}(t) = \delta(-t) = \delta(t)$$

$$x_{۲}(t) = \delta(t - ۱) \Rightarrow y_{۲}(t) = \delta(-t - ۱) = \delta(t + ۱) \neq y_{۱}(t - ۱)$$

مثال ۱–۴۲ سیستم‌های با روابط $y(t) = \sin^{۲}(x(t))$، $y[n] = ۲x[n - ۱] + ۲$، $y(t) = x^{۲}(t - ۱)$ و $y[n] = \dfrac{x[n + ۱]}{x[n - ۱]}$ همگی تغییرناپذیر با زمان هستند [۴].

مثال ۱–۴۳ سیستم‌های با روابط $y(t) = x(۲t + ۱)$، $y[n] = x[n^{۲}]$، $y(t) = x(sin(t))$ و $y[n] = x[-\dfrac{n}{۲} + ۱]$ همگی تغییرپذیر با زمان هستند [۴].

مثال ۱–۴۴ سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ورودی زیر؛

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \geqslant ۰ \\ tx(t) & x(t) < ۰ \end{cases}$$

تغییرپذیر با زمان است، زیرا ضابطه $tx(t)$ آن متغیر با زمان است [۴].

مثال ۱–۴۵ سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ورودی زیر

$$y[n] = \begin{cases} x^{۲}[n] & n \geqslant ۲ \\ x[n - ۱] & n < ۲ \end{cases}$$

تغییر پذیر با زمان است. زیرا شروط آن با زمان تغییر می‌کنند و در نتیجه پاسخ سیستم به $x[n - n_{.}]$ برابر $y[n - n_{.}]$ نمی‌شود [۴].

مثال ۱–۴۶ سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ورودی زیر

$$y(t) = \begin{cases} ۲x(t - ۱) & x(t) \geqslant ۱ \\ \sin(x(t)) & x(t) < ۱ \end{cases}$$

تغییرناپذیر با زمان است. زیرا شروط آن فقط تابعی از ورودی است و در نتیجه پاسخ سیستم به $x(t - t_{.})$ برابر $y(t - t_{.})$ می‌شود [۴].

۱-۱۱-۶ خطی بودن

سیستم خطی [1] زمان پیوسته یا زمان گسسته، سیستمی است که دارای خاصیت مهم جمع آثار است: اگر ورودی متشکل از مجموع وزن‌دهی شده‌ای از چندین سیگنال باشد، آنگاه خروجی برابر با جمع آثار-یعنی، مجموع وزن‌دهی شده- پاسخ‌های سیستم به هر یک از آن سیگنال‌ها است. به طور دقیق‌تر، گیریم $y_1(t)$ پاسخ یک سیستم زمان پیوسته به ورودی $x_1(t)$ باشد و فرض کنید $y_2(t)$ نیز خروجی متناظر با ورودی $x_2(t)$ باشد. آنگاه سیستم خطی است اگر:

۱- پاسخ به $x_1(t) + x_2(t)$ برابر $y_1(t) + y_2(t)$ باشد.

۲- پاسخ به $ax_1(t)$ برابر $ay_1(t)$ باشد که در آن a ثابت مختلط دلخواهی است.

خاصیت اول به عنوان خاصیت جمع‌پذیری [2] شناخته می‌شود و خاصیت دوم به عنوان خاصیت تغییرمقیاس [3] یا همگنی [4] شناخته می‌شود. اگرچه این توصیف را با استفاده از سیگنال‌های زمان پیوسته نوشته‌ایم، همین تعریف در زمان گسسته نیز برقرار است [۱].

[1] Linear
[2] Additivity property
[3] Scaling
[4] Homogeneity

معادلات زیر که تا اینجا بررسی شده‌اند، همگی خطی هستند [۱]:

$$y(t) = Rx(t)$$
$$y(t) = x(t)$$
$$y[n] = x[n]$$
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$
$$y[n] = x[n-1]$$
$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n]$$
$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$
$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$
$$y(t) = x(t+1)$$
$$y[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]$$
$$y[n] = nx[n]$$

همچنین، سیگنال‌های زیر همگی غیرخطی[1] هستند [۱]:

$$y(t) = x^2(t)$$
$$y(t) = \sin[x(t)]$$

دو خاصیت تعریف کننده یک سیستم خطی را می‌توان در یک عبارت با هم تلفیق کرد:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t) : \text{زمان پیوسته} \qquad (۱-۱۰۵)$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n] : \text{زمان گسسته} \qquad (۱-۱۰۶)$$

در اینجا a و b ثابت‌های مختلط دلخواه هستند. علاوه بر این، از تعریف خطی بودن به سادگی می‌توان نشان داد که اگر $x_k[n]$، $k = 1, 2, 3, \ldots$، مجموعه‌ای از ورودی‌ها به یک سیستم زمان گسسته خطی با خروجی‌های متناظر $y_k[n]$، $k = 1, 2, 3, \ldots$ باشد، آنگاه پاسخ به ترکیب خطی از ورودی‌ها به صورت

[1] Nonlinear

زیر:

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_۱ x_۱[n] + a_۲ x_۲[n] + a_۳ x_۳[n] + \ldots \qquad (۱۰۷-۱)$$

برابر است با:

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_۱ y_۱[n] + a_۲ y_۲[n] + a_۳ y_۳[n] + \ldots \qquad (۱۰۸-۱)$$ eq108

این خاصیت بسیار مهم به عنوان خاصیت جمع آثار[۱] شناخته می‌شود، که برای کلیه سیستم‌های خطی چه در زمان پیوسته و چه در زمان گسسته برقرار است [۱].

یک نتیجه مستقیم از خاصیت جمع آثار این است که برای سیستم‌های خطی، ورودی‌ای که برای تمام زمان‌ها صفر است، خروجی‌ای نتیجه می‌دهد که برای تمام زمان‌ها صفر است. به عنوان مثال، اگر $x[n] \to y[n]$، آنگاه خاصیت همگنی چنین بیان می‌دارد که:

$$۰ = ۰. \quad x[n] \to ۰. \quad y[n] = ۰ \qquad (۱۰۹-۱)$$

مثال ۱-۴۷ سیستم S را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن را با رابطه زیر به هم مربوطند:

$$y(t) = tx(t)$$

برای تعیین این که آیا S خطی هست یا نه، دو ورودی دلخواه $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$$x_۱(t) \to y_۱(t) = tx_۱(t)$$

$$x_۲(t) \to y_۲(t) = tx_۲(t)$$

فرض کنید $x_۳(t)$ ترکیبی خطی از $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ باشد، یعنی:

$$x_۳(t) = ax_۱(t) + bx_۲(t)$$

که در آن a و b اسکالرهای دلخواه هستند. اگر $x_۳(t)$ ورودی S باشد، آنگاه خروجی متناظر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} y_۳(t) &= tx_۳(t) \\ &= t(ax_۱(t) + bx_۲(t)) \\ &= atx_۱(t) + btx_۲(t) \\ &= ay_۱(t) + by_۲(t) \end{aligned}$$

[1] Superposition property

نتیجه می‌گیریم که سیستم S خطی است [۱].

مثال ۱-۴۸ سیستم S که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن با رابطه زیر به هم مربوطند را در نظر بگیرید:

$$y(t) = x^{2}(t)$$

با تعریف $x_1(t)$، $x_2(t)$ و $x_3(t)$ همانند مثال قبل، داریم:

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2^2(t)$$

و

$$\begin{aligned} x_3(t) \to y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + x_2(t))^2 \\ &= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ &= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

واضح است که می‌توان $x_1(t)$، a و b را چنان مشخص کرد که $y_3(t)$ مساوی $ay_1(t) + by_2(t)$ نباشد. به عنوان مثال، اگر $x_1(t) = 1$، $x_2(t) = 0$، $a = 2$ و $b = 0$ باشند، آنگاه $y_3(t) = (2x_1(t))^2 = 4$ است، اما $2y_1(t) = 2(x_1(t))^2 = 2$ است. نتیجه می‌گیریم که سیستم S خطی نیست [۱].

مثال ۱-۴۹ در بررسی خطی بودن سیستم، به خاطر سپردن این نکته مهم است که سیستم باید در هر دو خاصیت جمع‌پذیری و همگنی صدق کند و این که سیگنال‌ها و همچنین هر یک از ثابت‌های تغییر مقیاس، می‌توانند مختلط باشند. برای تاکید بر اهمیت این نکات، سیستم توصیف شده با رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] = \mathrm{Re}\{x[n]\} \qquad (۱-۱۱۰)$$

با تعریف $x_1(t)$، $x_2(t)$ و $x_3(t)$ همانند مثال قبل، داریم:

$$x_1[n] \to y_1[n] = \mathrm{Re}\{x_1[n]\}$$
$$x_2[n] \to y_2[n] = \mathrm{Re}\{x_2[n]\}$$

و ورودی سوم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \mathrm{Re}\{x_3[n]\} \\ &= \mathrm{Re}\{x_1[n] + x_2[n]\} \\ &= \mathrm{Re}\{x_1[n]\} + \mathrm{Re}\{x_2[n]\} \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم سیستم جمع‌پذیر است. اما چنانچه که هم‌اکنون نشان می‌دهیم، خاصیت همگنی را برآورده نمی‌کند. فرض کنید:

$$x_1[n] = r[n] + js[n]$$

ورودی مختلط دلخواهی با جزهای حقیقی و موهومی، به ترتیب برابر با $r[n]$ و $s[n]$ باشد، به طوری که خروجی متناظر برابر است با:

$$y_1[n] = r[n]$$

حال تغییر مقیاس $x_1[n]$ را با عددی مختلط، مثلا $a = j$، در نظر بگیرید. یعنی، ورودی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_2[n] &= jx_1[n] = j(r[n] + js[n]) \\ &= -s[n] + jr[n] \end{aligned}$$

خروجی متناظر با $x_2[n]$ برابر است با:

$$y_2[n] = \mathrm{Re}\{x_2[n]\} = -s[n]$$

که مساوی نسخه تغییر مقیاس یافته $y_1[n]$ نیست،

$$ay_1[n] = jr[n]$$

نتیجه می‌گیریم که سیستم خاصیت همگنی را نقض می‌کند و از این رو خطی نیست [۱].

مثال ۱-۵۰ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] = 2x[n] + 3 \qquad (1\text{-}111)$$

eq111

این سیستم خطی نیست و این مطلب را می‌توان به چند روش تحقیق کرد. به عنوان مثال، سیستم خاصیت جمع‌پذیری را نقض می‌کند: اگر $x_1[n] = 2$ و $x_2[n] = 3$ باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7 \\ x_2[n] &\rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9 \end{aligned}$$

اما پاسخ به $x_۳[n] = x_۱[n] + x_۲[n]$ برابر است با:

$$y_۳[n] = ۲\{x_۱[n] + x_۲[n]\} + ۳ = ۱۳$$

که مساوی $y_۱[n] + y_۲[n] = ۱۶$ نیست. به شیوه‌ای دیگر، چون به ازای $x[n] = ۰$، $y[n] = ۳$ است، ملاحظه می‌کنیم که سیستم خاصیت ورودی صفر/خروجی صفر سیستم‌های خطی را که در معادله (۱-۱۰۸) داده شده است، نقض می‌کند [۱].

این که سیستم در مثال فوق غیرخطی است، ممکن است تعجب‌آور به نظر برسد، زیرا معادله (۱-۱۱۱) یک معادله خطی است. از سویی دیگر، همان‌طور که در شکل ۱-۶۵ نشان داده شده است، خروجی این سیستم را می‌توان به صورت مجموع خروجی یک سیستم خطی و یک سیگنال دیگر برابر پاسخ ورودی-صفر سیستم در نظر گرفت. برای سیستم در معادله ۱-۶۵ سیستم خطی چنین است [۱]:

$$x[n] \rightarrow ۲x[n] \qquad (۱-۱۱۲)$$

و پاسخ ورودی صفر چنین است:

$$y_۰[n] = ۳ \qquad (۱-۱۱۳)$$

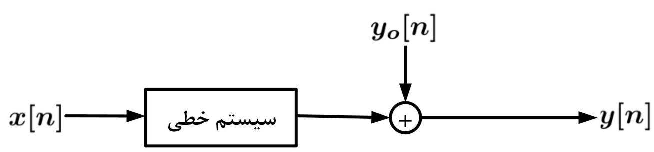


fig65 شکل ۱-۶۵: ساختار سیستم خطی نموی. در اینجا $y_۰[n]$ پاسخ ورودی-صفر است.

در واقع، دسته‌های بزرگی از سیستم‌ها هم در زمان پیوسته و هم در زمان گسسته وجود دارند که می‌توان آن‌ها را به صورت شکل ۱-۶۵ نمایش داد- یعنی، برای آن‌ها خروجی کل سیستم متشکل از جمع آثار پاسخ یک سیستم خطی و پاسخ ورودی صفر است. چنین سیستم‌هایی متناظر با دسته سیستم‌های خطی نموی (تکه‌ای)[۱] هستند-یعنی سیستم‌هایی در زمان پیوسته یا زمان گسسته که به تغییرات در ورودی به طور خطی پاسخ می‌دهند. به عبارت دیگر، تفاضل بین پاسخ‌های سیستم خطی نموی به هر دو ورودی دلخواه، تابعی خطی (یعنی، جمع‌پذیر و همگن) از تفاضل آن دو ورودی است. به عنوان مثال، اگر $x_۱[n]$ و $x_۲[n]$ دو ورودی

[1]Piecewise linear

به سیستم مشخص شده با معادله (۱-۱۱۱) باشند و اگر $y_1[n]$ و $y_2[n]$ خروجی‌های متناظر باشند، آنگاه داریم [۱]:

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - (2x_2[n] + 3) = 2(x_1[n] - x_2[n]) \qquad (۱-۱۱۴)$$

مثال ۱-۵۱ سیستم پیوسته در زمان $y(t) = \cos(2t)x(t)$ یک سیستم خطی است. برای اثبات اگر به این سیستم ورودی $x_3(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ اعمال می‌کنیم، داریم [۴]:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos(2t)x_3(t) = \cos(2t)(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) \\ &= a_1\cos(2t)x_1(t) + a_2\cos(2t)x_2(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \end{aligned}$$

تذکر: یکی از مواردی که باعث غیرخطی شدن یک سیستم می‌شود، وجود عدد ثابت یا یک سیگنال مشخص جمع شونده با ورودی است. وجود این عامل باعث می‌شود که پاسخ سیستم به ورودی صفر برابر صفر نشود و در نتیجه سیستم غیرخطی گردد [۴].

مثال ۱-۵۲ سیستم‌های $y[n] = x[n-1] + n$ و $y(t) = x(t) + \sin t$ همگی غیر خطی هستند [۴].

تذکر: اعمال یک تابع غیرخطی روی ورودی باعث غیرخطی شدن سیستم می‌گردد. در صورتی که اعمال تابع خطی روی متغیر مستقل باعث غیرخطی شدن سیستم نمی‌گردد [۴].

مثال ۱-۵۳ سیستم‌های $y(t) = sin(x(t))$، $y[n] = x^2[n] + x[n]$ و $y(t) = \dfrac{x(t-1)}{x(t)}$ همگی غیرخطی هستند. زیرا یک تابع غیرخطی روی ورودی اعمال شده است. در صورتی که سیستم‌های $y(t) = x(sin(t))$، $y[n] = x[n^2 - 1]$ و $y(t) = t^2x(t^2-1)$ به دلیل عدم اعمال تابع غیرخطی روی ورودی همگی سیستم‌های خطی می‌باشند [۴].

تذکر: اگر رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد، آنگاه اگر یکی از ضابطه‌ها غیرخطی باشد آنگاه سیستم غیرخطی می‌شود. اما اگر کلیه ضابطه‌ها خطی باشند، آنگاه در صورتی که شروط تابعی از ورودی باشند معمولا سیستم غیرخطی و اگر شروط فقط تابعی از زمان باشند، معمولا سیستم خطی می‌شود [۴].

مثال ۱-۵۴ سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ورودی زیر

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + 1 & n \geqslant 0 \\ x[n-1] & n < 0 \end{cases}$$

غیرخطی است. زیرا ضابطه $x[n] + 1$ غیرخطی است [۴].

مثال ۱-۵۵ سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ورودی زیر

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \geqslant ۱ \\ ۲x(t+۱) & x(t) < ۱ \end{cases} \qquad (۱-۱۱۵)$$

غیرخطی است. زیرا شروط آن تابعی از ورودی می‌باشند [۴].

مثال ۱-۵۶ سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ورودی زیر

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + x[n-۱] & n \geqslant -۱ \\ ۲x[n+۱] & n < -۱ \end{cases}$$

خطی است. زیرا کلیه ضابطه‌ها خطی و شروط نیز فقط به زمان بستگی دارند [۴].

مثال ۱-۵۷ سیستم‌های زیر را از لحاظ خواص خطی بودن، متغیر با زمان بودن، پایداری، حافظه‌دار بودن و علیت مورد بررسی قرار دهید.

الف- $y[n] = x[n]x[n-۱]$

ب- $y(t) = sin(۶t)x(t)$

حل:

الف- بررسی خطی بودن:

$$\begin{aligned} y[a_۱x_۱(t) + a_۲x_۲(t)] &= (a_۱x_۱[n] + a_۲x_۲[n])(a_۱x_۱[n-۱] + a_۲x_۲[n-۱]) \\ &= a_۱(x_۱[n]x_۱[n-۱]) + a_۲(x_۲[n]x_۲[n-۱]) + a_۱a_۲(x_۱[n]x_۲[n-۱]) \\ &+ a_۱a_۲(x_۲[n]x_۱[n-۱]) \end{aligned}$$

اما می‌دانیم که شرط خطی بودن عبارتست از اینکه عبارت فوق باید مساوی عبارت زیر باشد:

$$a_۱y_۱[n] + a_۲y_۲[n] = a_۱(x_۱[n]x_۱[n-۱]) + a_۲(x_۲[n]x_۲[n-۱])$$

پس این سیستم غیرخطی است.

بررسی نامتغیر با زمان بودن:

$$y_۲[n] = x[n-n.]x[n-n.-۱] = y_۱[n-n.]$$

پس سیستم نامتغیر با زمان است.

از لحاظ پایداری، از شکل ضابطه می‌فهمیم که تا هنگامی که ورودی محدود است، خروجی نمی‌تواند به طور نامحدود بزرگ شود، پس سیستم پایدار است.

سیستم دارای حافظه است. چون در هر لحظه حاوی اطلاعاتی از ورودی لحظه قبل است.

سیستم علی است، چون قبل از اعمال ورودی، خروجی نمی‌تواند ظاهر شود.

ب- بررسی خطی بودن سیستم

$$y(a_1x_1(t)+a_2x_2(t)) = \sin(6t)(a_1x_1(t)+a_2x_2(t)) = a_1\sin(6t)x_1(t)+a_2\sin(6t)x_2(t)$$
$$= a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$$

پس خطی است.

بررسی تغییرپذیری با زمان:

$$y(t-t_0) = \sin(6(t-t_0))x(t-t_0) \neq \sin(6t)x(t-t_0)$$

پس سیستم تغییرپذیر با زمان است.

سیستم دارای حافظه نیست و پایدار و علی می‌باشد.