

به نام خدا

تبارشناسی سؤال:

مربوط به ریاضیات تکمیلی پایه هشتم استعدادهای درخشان

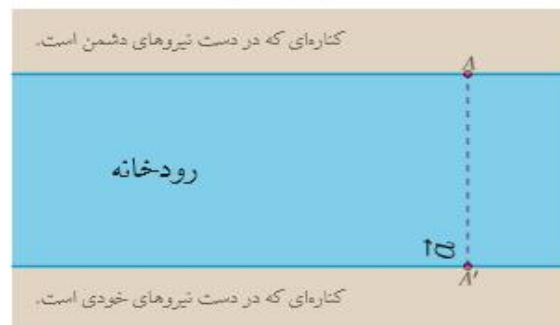
فصل بردار و مختصات

بردار، رودخانه و غواص

مسائل این بخش یادبودی از شهدای غواص جنگ هشت ساله ایران است که در آن به کاربردی از بردارها می‌پردازد. در جنگ گاهی نیاز بود که غواص‌های خط‌شکن در تاریکی شب و سکوت، با شنا کردن در عرض رودخانه‌ای خروشان، خود را به نقاط معینی از کناره رودی که در تصرف دشمن است، برسانند.

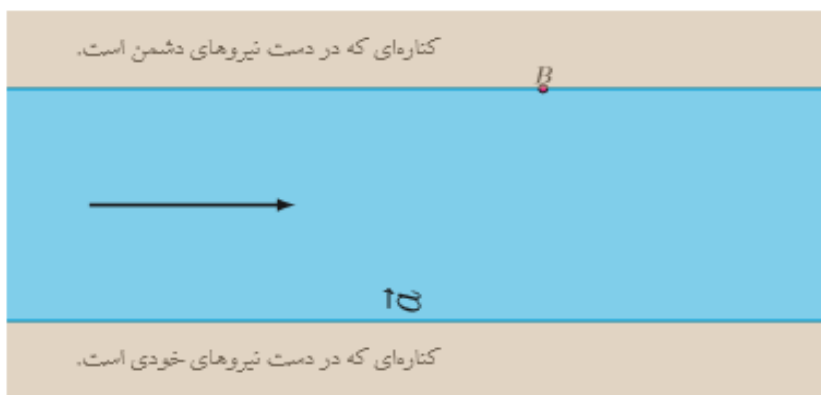


فرض کنید که یک غواص بتواند با نیروی ثابتی که با بردار \vec{u} نشان داده شده است، عرض رودخانه را شنا کند. اگر آب رودخانه راکد باشد (!) و غواص بخواهد به نقطه A برسد، واضح است که باید از نقطه A' شروع به حرکت کند.

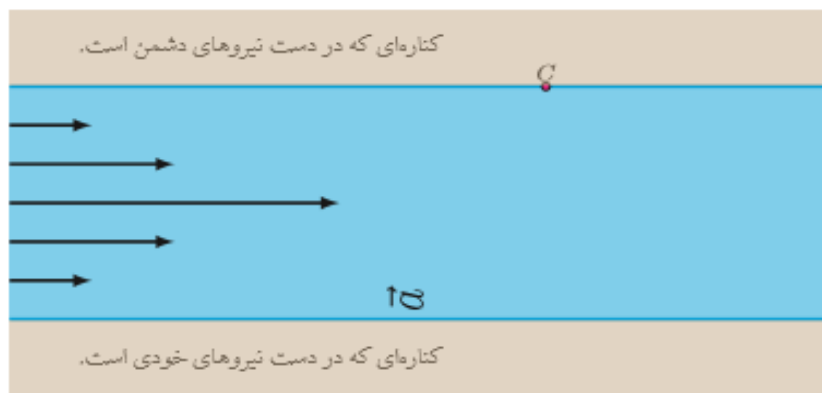


با وجود حل این مسئله، حلّ چنین مسائلی در زندگی واقعی بی‌ارزش است (!) زیرا آب رودخانه همیشه در جریان است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که رودخانه نیرویی مثل \vec{b} (که در شکل با جهت افقی نشان داده شده است) را به غواص وارد می‌کند.

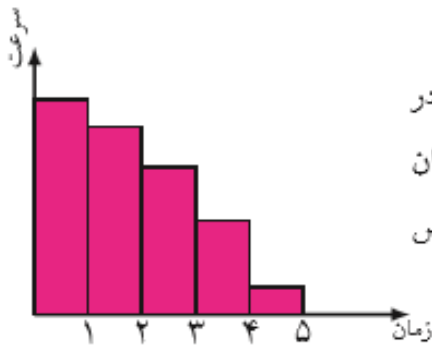
۱. در این حالت تعیین کنید که برای رسیدن به نقطه B غواص باید از کدام نقطه کناره مقابل رودخانه شروع به شنا کردن کند؟



حتی مسئله اخیر هم کمی غیر واقعی است، زیرا در رودخانه‌ها هر چه از کناره‌ها به وسط رودخانه نزدیک شویم سرعت حرکت آب بیشتر می‌شود؛ بنابراین مثلاً می‌توان فرض کرد که بردارهای نیروی وارد بر غواص در امتداد عرض رودخانه به صورت زیر باشند.



۲. در این حالت برای رسیدن به نقطه C ، غواص شای خود را باید از کدام نقطه آغاز کند؟



در واقع در دنیای واقعی، قدرت بدنی غواص در طول مسیر رفته رفته کم می شود. بنابراین می توان فرض کرد مثلاً نمودار مقدار سرعت غواص به صورت رویه رو است.

۳. اکنون برای رسیدن به نقطه C ، غواص باید چه مکانی را برای شروع شنا انتخاب کند؟

۴. پروژه. با مقایسه جواب چهار مسئله اخیر مشاهده می کنید که چقدر استفاده از داده های دنیای واقعی و به کار بستن دانش ریاضی می تواند خطرناک باشد. به نظر شما چگونه می توان این مسئله را در دنیای واقعی بهتر مدل کرد؟

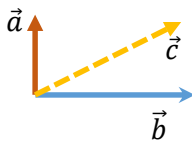
پاسخ سؤال اول.

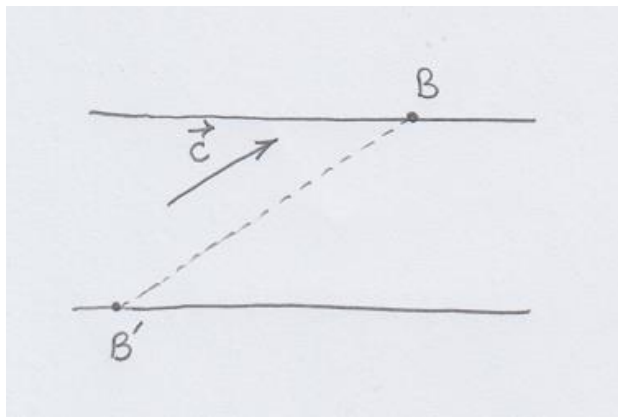
دو نیرو به غواص وارد می شود:

نیروی خود (غواص) که آن را با \vec{a} نشان داده ایم،

و نیروی (جریان) رودخانه که آن را با \vec{b} نشان داده ایم.

جمع این دو نیرو را با \vec{c} نشان می دهیم.





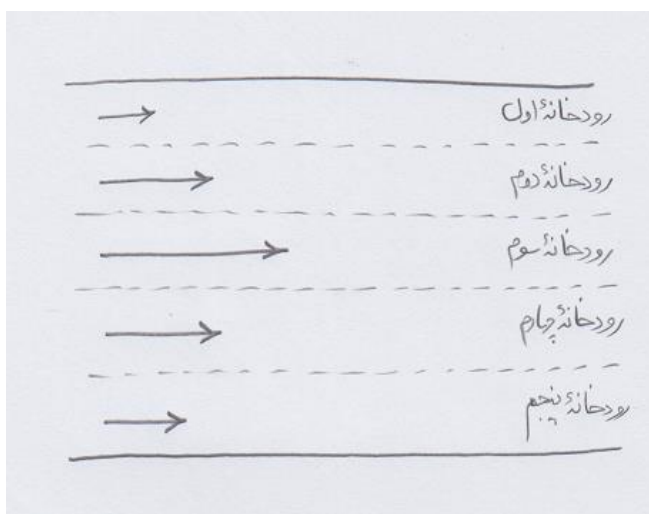
بنابراین غواص می تواند در جهت بردار C به جلو حرکت کند. برای اینکه غواص بتواند در نقطه B به ساحل دشمن برسد، باید خط موازی جهت بردار C را در نقطه B رسم کنیم و ببینیم که ساحل خودی را در چه نقطه ای قطع می کند.

آن نقطه (یعنی B')، نقطه ای است که اگر غواص از آن شروع به شنا کردن کند، با توجه به نیروی خود و نیروی رودخانه، می تواند پس از مدتی در نقطه B در ساحل دشمن سر درآورد.

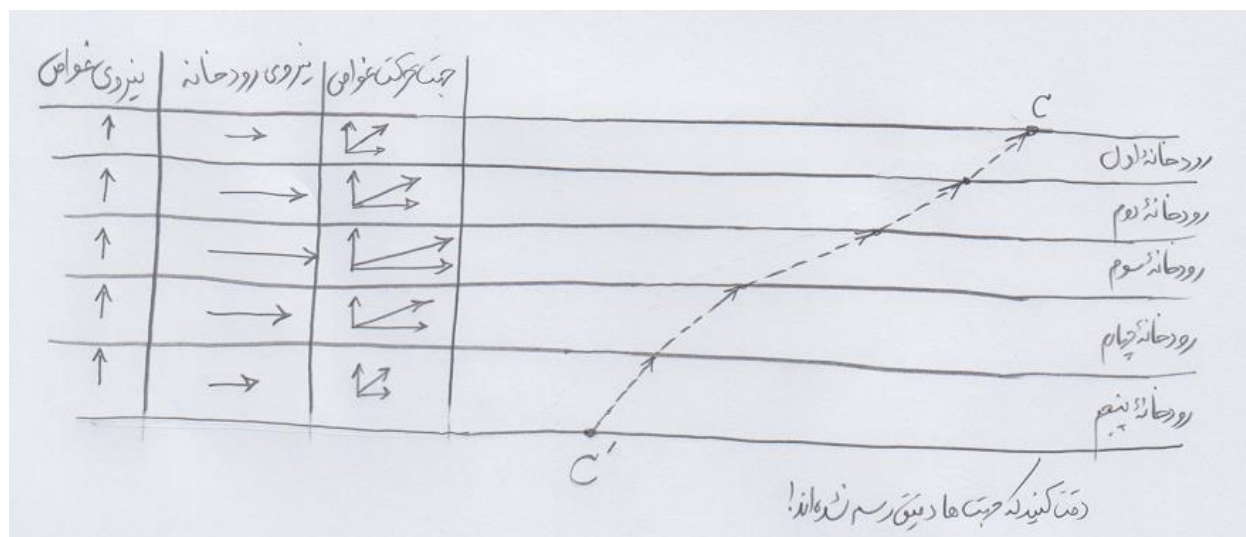
پاسخ سؤال دوم.

درست مثل حالت قبل عمل می کنیم، ولی انگار پنج مسأله داریم. انگار پنج تا رودخانه کنار هم داریم، که هر کدام نیروی متفاوتی با کناری اش دارد.

بنابراین داریم:



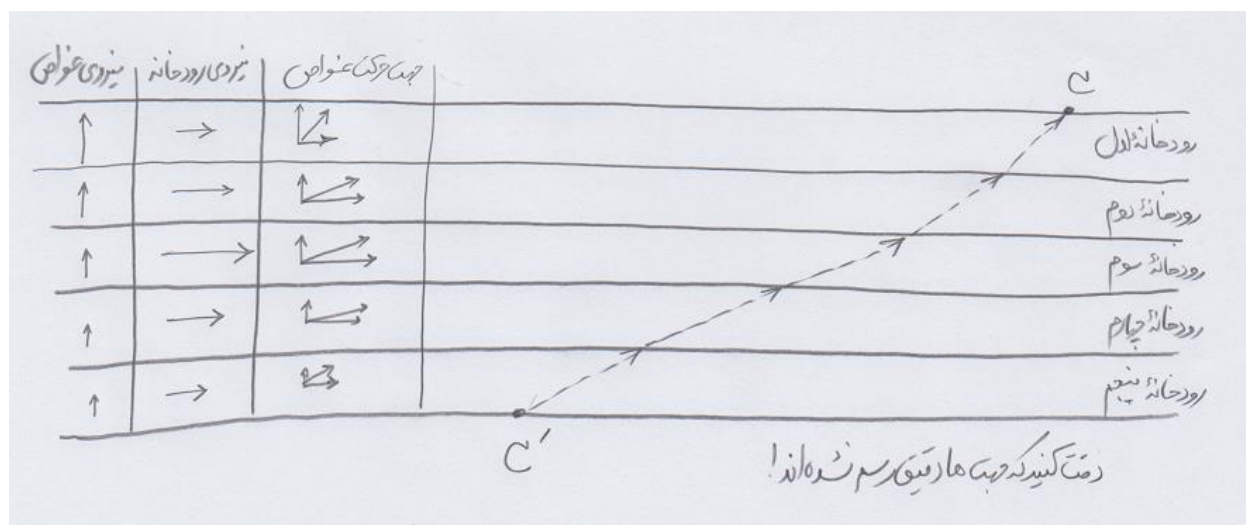
سپس برای هر رودخانه، جداگانه محاسبه می کنیم. با ادامه این روند به جواب خواهیم رسید و خواهیم داشت:



بنابراین غواص باید از نقطه C' شروع به حرکت کند.

پاسخ سؤال سوم.

در این مسأله مثل مسأله قبل عمل می کنیم؛ با این تفاوت که مقدار نیروی غواص هم متفاوت است. بنابراین مجدداً باید جدول سمت راست را پر کرد و سپس جهت های مربوط را محاسبه کرد.



بیشتر بدانیم:

به کاری که در صورت مسأله رفته رفته انجام دادیم، «مدل سازی» می گوییم.
به نظر شما چطور می توان این مسأله عبور غواص از رودخانه را در دنیای واقعی بهتر مدل کرد؟

شاید بتوان از دیدن این چند بردار ایده گرفت:



به نظر شما یک جریان آب در یک رودخانه خروشان واقعی چگونه است؟

باز هم بیشتر بدانیم:

روشی که یک رودخانه را به پنج رودخانه تقسیم کردیم، مبنای روشی در علم و ریاضیات است که به آن «المان گیری» می گوییم.
این نگاه و روش را به خاطر بسپارید. در تحلیل فرایندها و مدل سازی علوم تجربی و به ویژه فیزیک، روش «المان گیری» بسیار کاربردی است!