مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

دبیرستان علامه حلی (۸)

مدیریت آموزش و پرورش منطقه ۳ تهران

پاسخنامه آزمون هندسه مقدماتی

هفتم خرداد ۱۳۹۳

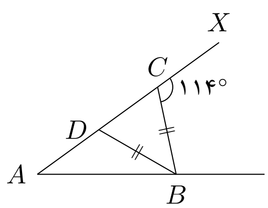
۱. باتوجه به اطلاعات داده شده در شکل، اندازه کدام‌یک از زاویه‌های زیر قابل محاسبه است و اندازه کدام‌یک قابل محاسبه نیست؟

۱) CBD ۲) BDA ۳) DBA

$B\widehat{C}D = B\widehat{D}C = ۱۸۰ - ۱۱۴ = ۶۶^\circ \Rightarrow C\widehat{B}D = ۱۸۰ - (B\widehat{C}D + B\widehat{D}C) = ۱۸۰ - (۶۶ + ۶۶) =$
$۱۸۰ - ۱۳۲ = ۴۸^\circ.$

$B\widehat{D}A = ۱۸۰ - B\widehat{D}C = ۱۸۰ - ۶۶ = ۱۱۴^\circ.$

$D\widehat{B}A$ قابل‌محاسبه نیست. زیرا زاویهٔ A می‌تواند مقدارهای متفاوتی داشته باشد. در واقع برای رسم شکل می‌توان ابتدا زاویهٔ A را با اندازهٔ دلخواه رسم کرد، سپس نقطه‌های دیگر را طوری اضافه کرد که شرایط مساله برقرار باشد. از آنجا که $D\widehat{B}A = ۱۸۰ - (\widehat{A} + B\widehat{D}A)$، پس مقدار $D\widehat{B}A$ با تغییر A تغییر می‌کند.



۲. یک ساعت عقربه‌ای جادویی در اختیار داریم. این ساعت دارای یک خط طلایی است که شمارهٔ ۳ را به ۹ وصل کرده است. این ساعت ویژگی جالبی دارد و آن این است که هرگاه خط طلایی، نیم‌ساز داخلی دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار شود، ساعت زنگ می‌زند. در حال حاضر ساعت ۱۲ : ۱ بعدازظهر است، تا ساعت ۱۲ : ۱ شب ساعت چند بار زنگ می‌زند؟

۱) ۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

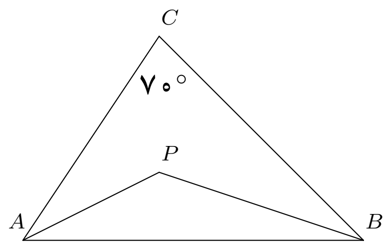
بین ساعت ۱۲ : ۱ تا ۲ یک بار، بین ۲ و ۳ یک بار و ... به همین صورت بین ۱۲ تا ۱ بامداد هم یک بار زنگ می‌زند و دیگر زنگ نواخته نخواهد شد که تا اینجا می‌شود ۱۲ بار. علاوه بر این‌ها یک بار هم راست ساعت ۰۰ : ۶ صدای زنگ را خواهیم شنید، پس مجموعا ۱۳ بار باید صدای زنگ شنیده شود.

۳. یک مثلث را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم کرده‌ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

با توجه به شکل زیر محیط مثلث بزرگ‌تر ۲ برابر محیط هر مثلث کوچک است.

۴. در شکل روبه‌رو $C = ۷۰^\circ$، AP نیم‌ساز زاویهٔ A و PB نیم‌ساز زاویهٔ B است. زاویهٔ APB چند درجه است؟



$$\left.\begin{array}{r} \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰ \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}=۱۸۰-۷۰=۱۱۰ \\ \widehat{A}=۲P\widehat{A}B \\ \widehat{B}=۲P\widehat{B}A \end{array}\right\} \Rightarrow P\widehat{A}B+P\widehat{B}A=\frac{۱۱۰}{۲}=۵۵$$

$$\xRightarrow{\text{قضیهٔ مجموع زاویه‌های مثلث}} A\widehat{P}B=۱۸۰-(P\widehat{A}B+P\widehat{B}A)=۱۸۰-۵۵=۱۲۵^\circ$$

---

۵. ثابت کنید در دو مثلث همنهشت، نیم‌ساز زاویهٔ یکی از این دو مثلث با نیم‌ساز زاویهٔ متناظر مثلث دیگر برابر است.

فرض کنیم دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم همنهشت‌اند و

$$A=\widehat{A'}, \widehat{B}=\widehat{B'}, \widehat{C}=\widehat{C'}, AB=A'B', AC=A'C', BC=B'C'.$$

اگر AD و $A'D'$ نیم‌سازهای A و A' باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم $AD=A'D'$.

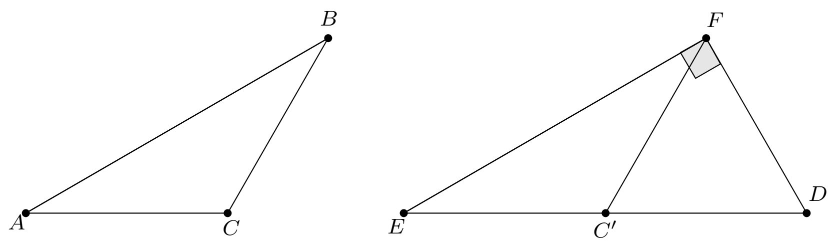
$$\left.\begin{array}{c} AB=A'B' \\ \widehat{B}=\widehat{B'} \\ B\widehat{A}D=\frac{\widehat{A}}{۲}=\frac{\widehat{A'}}{۲}=B'\widehat{A'}D \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زضز}} \triangle ABD \cong \triangle A'B'D' \Rightarrow AD=A'D'.$$

۶. از دو مثلث ABC و DEF اطلاعات زیر در دست است.

$$\widehat{A}=\widehat{E}, AB=EF, BC=DF.$$

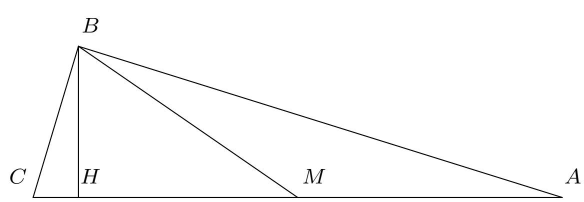
آیا می‌توان گفت این دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟

خیر! درشکل‌های زیر، $\widehat{A}=\widehat{E}=۳۰^\circ$ و $AB=EF$. BC را طوری رسم کرده‌ایم که $\widehat{B}=۳۰^\circ$. FD را طوری رسم کرده‌ایم که $\widehat{F}=۹۰^\circ$. ثابت می‌کنیم $BC=FD$.
نقطه C' را روی ED به‌گونه‌ای جدا می‌کنیم که $E\widehat{F}C'=۳۰^\circ$. دو مثلث ABC و EFC' در حالت زض‌ز همنهشت‌اند. پس $BC=FC'$. از طرفی $D\widehat{F}C'=F\widehat{C'}D=\widehat{D}=۶۰^\circ$. بنابراین مثلث $FC'D$ متساوی‌الاضلاع است و $FC'=FD$. در نتیجه $BC=FD$. حال واضح است که دو مثلث ABC و EDF شرایط مسئله را دارند ولی همنهشت نیستند.



---

۷. در شکل زیر $\widehat{B}=۹۰^\circ$، BM میانه و BH ارتفاع است. اگر $A=۱۵^\circ$، ثابت کنید $AC=۴BH$.

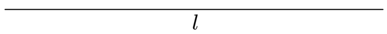


ابتدا اندازه زاویه BMH را محاسبه می‌کنیم.
بنابه قضیه میانه وارد بر وتر، مثلث AMB متساوی‌الساقین است ($AM=BM$). پس $\widehat{A}=A\widehat{B}M=۱۵^\circ$. بنابه قضیه زاویه خارجی مثلث داریم: $B\widehat{M}H=\widehat{A}+A\widehat{B}M \Rightarrow B\widehat{M}H=۳۰^\circ$.
حال مثلث قائم‌الزاویه BMH را در نظر بگیرید. بنابه قضیه مثلث (۳۰-۶۰-۹۰)، ضلع مقابل به زاویه BMH نصف وتر است. یعنی $BH=\frac{۱}{۲}BM$. بنابه قضیه میانه وارد بر وتر، $BM=\frac{۱}{۲}AC$. بنابراین

$$BH=\frac{۱}{۲}BM \Rightarrow BH=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}AC\right) \Rightarrow BH=\frac{۱}{۴}AC.$$

۸. مثلث ABC را طوری رسم کنید که $a = l$، $b = \frac{۲}{۵}l$ و $m_a = \frac{۳}{۵}l$. (یادآوری! a و b به‌ترتیب ضلع‌های روبه‌رو به زاویه‌های A و B و m_a میانهٔ وارد بر a هستند.)

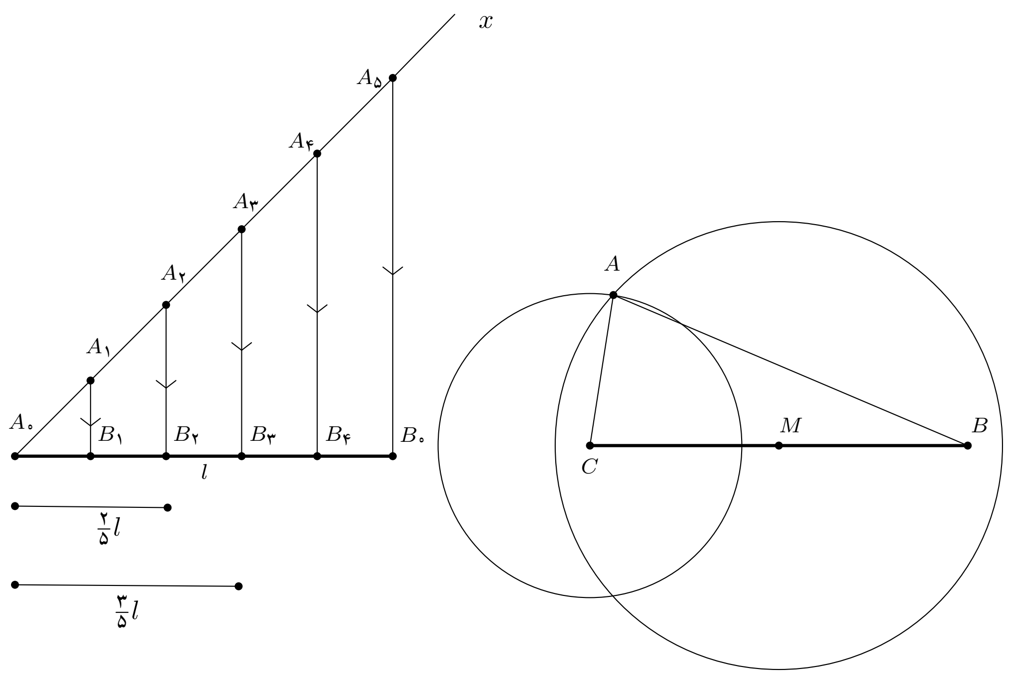
روش ترسیم را شرح دهید.



ابتدا باید پاره‌خط l را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنیم.

دو سر پاره‌خط l را $A_۰$ و $B_۰$ می‌نامیم. سپس نیم‌خط دلخواهی مانند $A_۰x$ رسم می‌کنیم و روی آن به ۵ قسمت برابر دلخواه کمان می‌زنیم تا نقاط $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$ و $A_۵$ به‌دست آیند. حال پاره‌خط $A_۵B_۰$ را رسم می‌کنیم. سپس از نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ به‌موازات $A_۵B_۰$ خطوطی رسم می‌کنیم تا l را به‌ترتیب در نقاط $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$ و $B_۴$ قطع کنند. داریم $A_۰B_۲ = \frac{۲}{۵}l$ و $A_۰B_۳ = \frac{۳}{۵}l$.

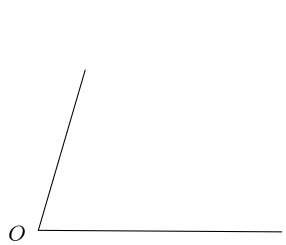
اکنون پاره‌خط BC را به اندازهٔ l رسم می‌کنیم و وسط آن را M می‌نامیم. دو دایره رسم می‌کنیم؛ دایره اول به مرکز M و شعاع $\frac{۳}{۵}l$ و دایره دوم به مرکز C و شعاع $\frac{۲}{۵}l$. یکی از نقطه‌های مشترک این دو دایره را A بنامید. مثلث ABC همان مثلث مورد نظر مساله است.



۹. از نقطهٔ A خطی رسم کنید که با دو ضلع زاویهٔ O زاویه‌های برابر بسازد.

روش ترسیم را شرح دهید.

درستی روش ترسیم را اثبات کنید.

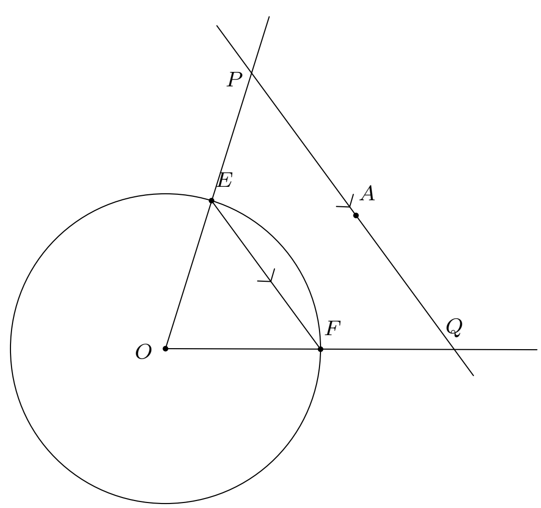


روش ترسیم

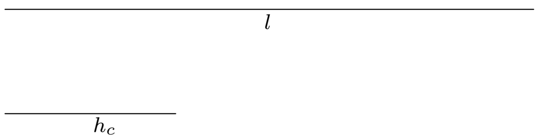
- از نقطهٔ O کمان دلخواهی ترسیم کنید تا دو ضلع زاویه را در دو نقطهٔ E و F قطع کند.
- به موازات پاره‌خط EF خطی رسم کنید که از نقطهٔ A عبور کند. و دو ضلع زاویه را در دو نقطهٔ P و Q قطع کند.

اثبات درستی روش ترسیم

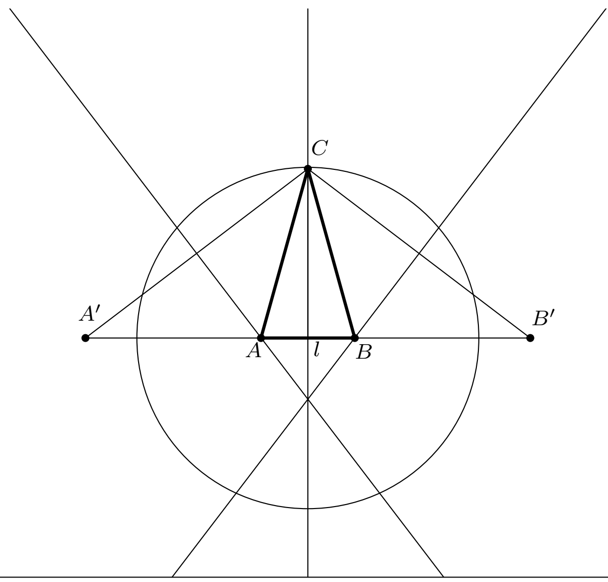
- مثلث OEF متساوی‌الساقین است.
- $OE = OF \xRightarrow{\text{قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین}} \widehat{E} = \widehat{F}$
- $\widehat{E} = \widehat{F} \xRightarrow[\text{قضیهٔ خطوط موازی}]{\text{قضیهٔ زاویه‌های متقابل به راس}} \widehat{P} = \widehat{Q}$



۱۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC را طوری رسم کنید که محیط آن برابر طول پاره‌خط l و ارتفاع وارد بر قاعده آن برابر h_c باشد.



ابتدا عمودمنصف l را رسم می‌کنیم. از وسط l به اندازهٔ h_c کمانی رسم می‌کنیم و محل برخورد کمان و عمودمنصف را C می‌نامیم. دو راس l را A' و B' می‌نامیم و پاره‌خط‌های CA' و CB' را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصف‌های CA' و CB' با l را به‌ترتیب A و B می‌نامیم. مثلث ABC مثلث موردنظر ماست.



خوشحال باشید!

گروه ریاضی